МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики

Сборник трудов
Международной научной конференции

Воронеж,
2–4 декабря 2024 г.

Воронеж
Издательство
«Научно-исследовательские публикации»
2025

УДК 531(063)+51-7(063)
ББК 22.2я5+22.1я5
А43

Председатель организационного комитета
Шашкин А. И. – д-р физ.-мат. наук, профессор (Воронеж)

Заместители председателя организационного комитета
Медведев С. Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент (Воронеж)
Кузнецов А. В. – д-р физ.-мат. наук, доцент (Воронеж)
Малыгина Ю. В. – ст. преподаватель (Воронеж)

Члены организационного комитета:
Г. В. Абрамов, д-р техн. наук, проф.; Т. В. Азарнова, д-р техн. наук, проф.; М. А. Артемов, д-р физ.-мат. наук, проф.; Е. М. Аристова, канд. физ.-мат. наук, доц.; Д. Ю. Голованов; В. Г. Задорожний, д-р физ.-мат. наук, проф.; Н. А. Каплиева, канд. физ.-мат. наук, доц.; И. Л. Каширина, д-р техн. наук, доц.; А. В. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, проф.; А. В. Кузнецов, д-р физ.-мат. наук, доц.; В. Г. Курбатов, д-р физ.-мат. наук, проф.; Т. М. Леденева, д-р техн. наук, проф.; О. А. Медведева, канд. физ.-мат. наук, доц.; С. А. Пересёлков, д-р физ.-мат. наук, проф; Е. Л. Санина, канд. физ.-мат. наук, доц.; Э. Л. Шишкина, д-р физ.-мат. наук, доц.

Председатель программного комитета
Шашкин А. И. – д-р физ.-мат. наук, профессор (Воронеж)

Заместители председателя программного комитета
Воеводин В. В. – д-р физ.-мат. наук, проф., член.-кор. РАН (Москва)

Члены программного комитета:
Lopez Trujillo Marcelo, PhD., prof. (Колумбия); В. В. Кравченко, канд. физ.-мат. наук, проф. (Мексика); Г. И. Маргаров, канд. техн. наук, проф. (Армения); А. В. Чигарев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Минск, Белоруссия); Илолов Мамадшо, д-р ф.-м.н., профессор, академик АН РТ (Таджикистан); А. А. Арзамасцев, д-р техн. наук, проф. (Воронеж); А. А. Буренин, д-р физ.-мат. наук, проф., член-кор. РАН (Комсомольск-на Амуре); В. Б. Васильев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Белгород); Ю. П. Вирченко, д-р физ.-мат. наук, проф. (Белгород); Ю. Е. Гликлих д-р физ.-мат. наук, проф. (Воронеж); А. В. Глушак, д-р физ.-мат. наук, проф. (Белгород); Я. М. Ерусалимский, проф., засл. работник ВШ РФ (Ростов на Дону); А. П. Жабко, д-р физ.-мат. наук, проф. (Санкт Петербург); В. М. Иевлев, д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН (Воронеж); В. А. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва); Л. Н. Ляхов, д-р физ.-мат. наук, проф. (Воронеж); А. А. Маркин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); М. Г. Матвеев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Воронеж); Н. М. Матченко, д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); А. Б. Муравник, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва); Л. А. Петросян, д-р физ.-мат. наук, проф. (Санкт-Петербург); И. П. Половинкин, д-р физ.-мат. наук, доц. (Воронеж); С. Л. Подвальный, д-р техн. наук, проф. засл. раб. высш. школы РФ (Воронеж); Ю. Н. Радаев, д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва); В. П. Радченко, д-р физ.-мат. наук, проф. (Самара); А. Ф. Ревуженко, д-р физ.-мат. наук, проф., засл. деятель науки РФ (Новосибирск); К. Б. Сабитов, д-р физ.-мат. наук, проф., член-корреспондент АН РБ (Стерлитамак); А. А. Сирота, д-р техн. наук, проф. (Воронеж); С. М. Ситник, д-р физ.-мат. наук, доц. (Белгород); А. Н. Спорыхин, д-р физ.-мат. наук, проф., засл. деятель науки РФ (Воронеж); В.А. Сухомлин, д-р техн. наук, проф. (Москва); Ю.К. Тимошенко, д-р физ.-мат. наук, доц. (Воронеж); М.В. Шитикова, д-р физ.-мат. наук, проф. (Воронеж); А. В. Язенин, д-р физ.-мат. наук, проф., засл. раб. высш. школы РФ (Тверь)

Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Между-
А43 народной научной конференции, Воронеж, 2–4 декабря 2024 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2025. – 1598 с.

ISBN 978-5-6045486-9-1

В сборнике предлагаются научные работы, доклады и лекции, представленные на Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проводимой Воронежским государственным университетом.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

УДК 531(063)+51-7(063)
ББК 22.2я5+22.1я5

© ФГБОУ ВО ВГУ, 2025
© ООО «Вэлборн», 2025

ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В НАУКЕ, ТЕХНИКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

УДК 514.8

ПРОИЗВОДСТВО ВАЛИЧНОГО ОБОРУДОВАНИЯ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ЛАБОРАТОРИЯХ ЭЛИТНЫХ СЕМЕНОВОДЧЕСКИХ ХОЗЯЙСТВ

Ш. Н. Абдугаппарова

Андижанский государственный университет

Аннотация. В статье приведен аналитический анализ проблем механизации раздельного извлечения семян хлопчатника (репродукции), выращиваемых в элитных семеноводческих хозяйствах республики. На основе приведенного аналитического анализа изложено, что разработано техническое решение проблемы и обосновано направление исследований.
Ключевые слова: элита, семена, хлопок, поколение, семья, пильный джин, рабочая камера, сортовая чистота, валичный джин.

Семена, предназначенные для посева семян хлопчатника, высеваются в фермерских хозяйствах, прошедших тендер и на специальных семеноводческих предприятиях, а также в хозяйствах научно-исследовательского института. Эти хозяйства должны иметь высокий балл бонитета, высокие показатели водоснабжения и экономики, а также быть обеспечены специалистами в области семеноводства. В период вегетации проводится отбор по морфологическим признакам, характерным для каждого сорта и поколения.

В элитных семеноводческих хозяйствах налажена специальная система выращивания семенного хлопка, основной целью которой является обеспечение соответствия поколений семенного хлопка установленным нормам сортовой чистоты. Семенной хлопок выращивают в основном в элитных семеноводческих хозяйствах, частных семеноводческих предприятиях и филиалах научно-исследовательских институтов, а для индивидуального отбора, пробы, размножения семян элитные семена собирают и хранят в специальных закрытых хранилищах до отделения их от семян в мешках в соответствии с установленным порядком [1].

Например, в элитных семеноводческих хозяйствах на небольшой площади (1,1 га) в питомнике первого года будет организовано высевание не менее 1500 семей семян хлопчатника. Семенной хлопок каждой семьи, собранный отдельно (индивидуальный отбор), содержится примерно в количестве 60–85 граммов. С целью выделения семян хлопчатника, относящихся к данному семейству, используются лабораторные джины марки ДЛ-10 с 10 шт пилами, имеющиеся в лабораториях элитных семеноводческих хозяйств (рис. 1).

10 штук пилы, применяемые в лабораториях элитных семеноводческих хозяйств, не позволяют джинировать небольшое количество образцов хлопка. В соответствии с особенностями конструкции пильного джина, процесс джинирования (отделения семян от хлопка) может быть выполнен только при условии, что хлопок-сырец подается в рабочую камеру джина и рекомендуемая плотность хлопка в рабочей камере постоянно обеспечивается [2].

Для обеспечения плотности хлопка в рабочей камере пильного джина марки ДЛ-10 требуется хлопок в количестве 0,5–0,8 кг, после чего процесс джинирования происходит стабильно только при постоянном подаче хлопка в рабочую камеру и одновременном обеспечении плотности. По этой причине, как отмечалось выше, семенной хлопок из малого количества сеянцев первого года вообще нельзя протюжить в пильном джине.

Для решения существующей проблемы разработано техническое решение. При разработке технического решения основное внимание было уделено требованию осуществления качественного процесса джинирования малых количеств образцов хлопка, и было установлено, что это можно осуществить за счет совершенствования процесса валичного джинирования. Схематический чертеж разработанного технического решения представлен на рис. 2.

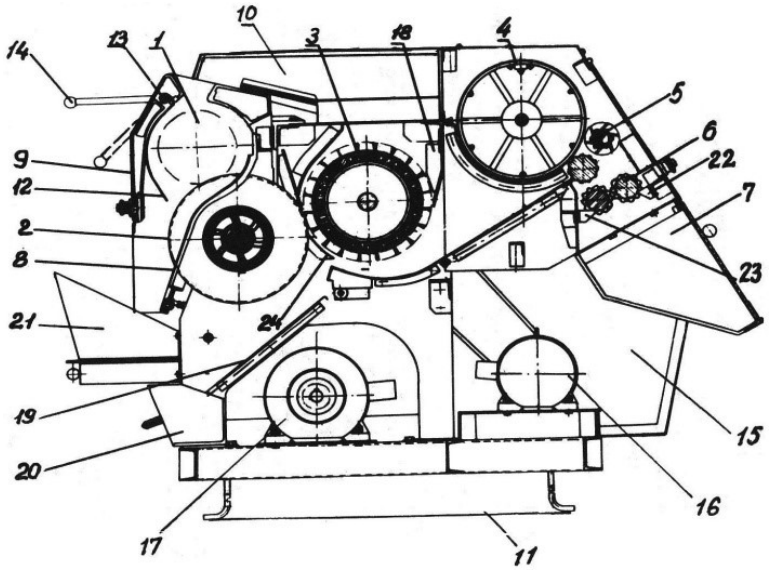


Рис. 1. Схема лабораторной жины ДЛ-10
1 — рабочая камера; 2 — пильный цилиндр; 3 — щеточный барабан; 4 — конденсорный барабан; 5 — выпускной валик; 6 — валики уплотнения; 7 — бункер для волокна; 8 — колосниковая решетка; 9 — фартук; 10 — лоток для хлопка; 11 — остов; 12 — семенная пластинка; 13 — шарнир; 14 — рукоятка семенной планки; 16,17 — электродвигатели; 18 — направляющий; 19 — направляющая плоскость; 20 — улюковый ящик; 21 — чигит новые; 22, 23 — препятствия; 24 — козерёги улюка

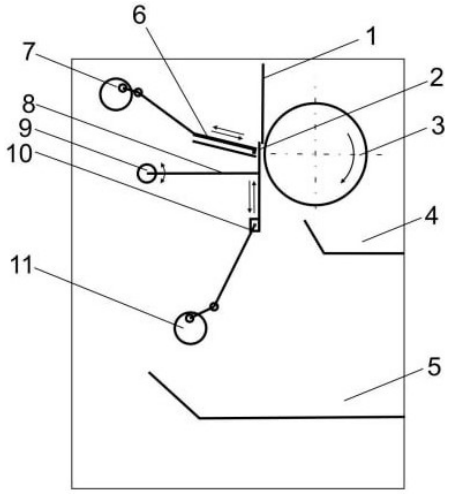


Рис. 2. Схема валичного лабораторного полотна по разработанному техническому решению
1 — рабочий барабан; 2 — неподвижный нож; 3 — ударный нож; 4 — обеспечивающая планка; 5 — колосниковая решетка; 6 — прижимный механизм; 7 — пружина; 8 — электродвигатель; 9, 10 — шкавы; 11 — звездочка

В целях повышения производительности за счет улучшения условий получения волокна в рабочей камере перед зоной джинирования, содержащей рабочий барабан, нанесенный на его поверхность неподвижный нож и плоский нож в форме сепарирующего органа, осуществляющий поступательно-возвратное движение, в процессе перемещения хлопковых лепестков в рабочую камеру устанавливают планки питания хлопковых лепестков на рабочий барабан путем пропускания к неподвижному но Кроме того, питающая планка может иметь форму прямоугольного ковша с приводом, обеспечивающим его поступательно-возвратным движением по направлению подачи хлопка.

В план дальнейших научных исследований включены изготовление рабочих чертежей по разработанному техническому решению, создание опытной копии лабораторного джина и обоснование его основных параметров.

Литература

1. Данные интернета. https://yandex.ru/search/?clid=2413868-656&win=523&from= chromesearch&text=%D0%A3%D1%80%D1%83%D2%93%D0%BB%D0%B8%D0%BA+%D0%BF%D0%B0%D1%85%D1%82%D0%B0&lr=10335

2. Руководство по первичной обработке хлопка. – Ташкент : АО «Узпахтасаноат», 2019. – 477 с.

УДК 004.4:378.1:530.145

РАЗВИТИЕ НАПРАВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА КАФЕДРЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ВОРОНЕЖСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин

Воронежский государственный университет

Аннотация. Представлены элементы учебно-методической базы для подготовки на уровне высшей школы востребованных специалистов в области информационных технологий, в частности, в области квантовых вычислений. Высокий научный и методический уровень такой подготовки обеспечивают необходимые программно-аппаратные средства и специализированные учебно-методические комплексы.
Ключевые слова: квантовые вычисления, квантовые алгоритмы, квантовая теория информации, информационные технологии, образовательный процесс, высшее образование, учебное пособие.

Введение

В течение последних нескольких десятилетий наблюдается значительный рост основных характеристик вычислительных систем как в количественном плане, так и за счет появления новых идей и методов, ориентированных на проведение ресурсоемких вычислений. В первую очередь такого рода прорывные идеи возникают в задачах построения аппаратной базы ЭВМ. Дальнейшего развитие и совершенствование аппаратной базы компьютерной архитектуры привлекает новейшие методы квантовой теории, теории твердого тела, наук о современных материалах и другие области. Хотя квантовая теория изучает наиболее общие законы и явления микромира, как правило, в масштабах атомов и молекул, следствия этих законов определяют принципы функционирования ЭВМ. Представляя собой теоретический базис для электроники, физики полупроводников и твердого тела, квантовая теория позволяет не только объяснять физические явления, возникающие в процессе работы электронных устройств, но и предсказывать новые явления и закономерности. Исчерпывающее описание процессов, происходящих в полупроводниковых схемах, позволяет улучшать характеристики доступных приборов и компонентов, а также, что очень важно, разрабатывать и внедрять устройства, обладающие более широкими возможностями.

Как правило, компьютерные системы рассматривают в виде иерархии уровней, каждый из которых выполняет какую-либо определенную функцию. Для разработки качественного и востребованного программного обеспечения требуется, чтобы программисты хорошо представляли, как работает вычислительная система не только на верхних уровнях компьютерной архитектуры (уровень языка прикладных программистов), но также и на цифровом логическом уровне и уровне физических устройств. Для детального описания процессов вычислений на последнем из приведенных уровней необходимо обращаться к представлениям и методам квантовой механики. Тенденция монотонного уменьшения размеров и энергопотребления полупроводниковых транзисторов и других элементов электронных схем показывает, что переход на масштабы, сравнимые с размером молекул и атомов, потребует применения принципиально иных методов и технологий построения электронных компонентов.

Решение фундаментальных и прикладных задач, связанных с математическим моделированием, проводится, как правило, с помощью суперкомпьютерных технологий [1, 2]. Вычислительные ресурсы суперкомпьютерных центров используются для решения наиболее сложных

и масштабных задач. Также следует отметить, что большинство широко распространенных компьютерных систем снабжается многоядерными процессорами, и программирование таких систем входит в спектр необходимых компетенций разработчика программного обеспечения. Это связано с тем, что трудности, встречающиеся при разработке последовательных версий программ, остаются и при создании их параллельных версий [3–5].

Также растут и требования по отношению к ресурсам вычислительных систем. Например, алгоритмы, основанные на нахождении всех подмножеств конечного множества, задача коммивояжера, переборные алгоритмы и многие другие с ростом размера входных данных требуют резкого увеличения вычислительных ресурсов. Таким образом, современные задачи предъявляют значительные требования как по сложности вычислений, так и по объему памяти компьютерной системы. Возможности масштабирования вычислительных ресурсов обычно крайне ограничены, что приводит к необходимости поиска новых методов вычислений.

В качестве перспективного подхода к организации высокопроизводительных вычислений в настоящее время активно развивается направление квантовых вычислений. Как показали исследования, квантовые способы решения задач в ряде случаев обеспечивают экспоненциальное ускорение по сравнению с традиционными вычислительными алгоритмами. Идея ускорения расчетов путем использования квантовых систем стала ключевым направлением исследований во многих академических и промышленных мировых центрах.

В квантовых компьютерах для реализации вычислений используются процессы квантовой природы, проявляющиеся в экспериментах с объектами микромира [6–8]. Описание таких процессов основано на математическом аппарате абстрактных функциональных пространств. Переход к новым, квантовым способам вычислений, сопровождается созданием и совершенствованием, во-первых, принципиально новой аппаратной базы и, во-вторых, формулировкой алгоритмов в виде квантовых схем, использующих в процессе своей работы свойства, специфические для микромира. К таким свойством относят суперпозицию состояний, квантовую запутанность (или, как говорят, сцепленность), и эти свойства позволяют внести ресурс параллелизма во многих задачах, решение которых является ресурсоемким.

Значительный интерес исследователей и промышленности к квантовым вычислениям основан на возможности достижения «квантового превосходства». Концепция квантового превосходства заключается в возможности проведения на квантовом компьютере таких вычислений, выполнение которых на классических вычислительных системах требует значительного количества времени. Полнофункциональный квантовый компьютер пока еще не построен, и существующие квантовые информационные системы еще не превосходят классические суперкомпьютеры в решении массовых прикладных задач. В настоящее время уже можно говорить хотя и не о квантовом превосходстве, но о значимом квантовом преимуществе для ряда задач в области методов оптимизации и машинного обучения [7].

1. Учебно-методическая база

Будущие специалисты в области информационных технологий должны обладать компетенциями применения вычислений с использованием квантовых информационных систем для решения актуальных ресурсоемких задач. Эти компетенции вырабатываются в вузах в процессе их обучения по программам общих и специальных курсов. Достижению указанных компетенций способствует наличие доступной аппаратной базы и программных средств, а также учебно-методической базы.

На кафедре цифровых технологий факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета подготовка бакалавров и магистров в области квантовых вычислений, квантовых информационных систем и программирования квантовых компьютеров

ведется более 15 лет. Учебным планом по программе бакалавриата 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», профиль обучения «Математическое и программное обеспечение информационных систем и технологий», предусмотрены дисциплины:

- квантовая теория (зачет с оценкой, 4 сем.),
- квантовые информационные системы (зачет с оценкой, 5 сем.),
- квантовые вычисления (зачет, 6 сем., и зачет с оценкой, 7 сем.),
- линейная алгебра в квантовых вычислениях (зачет с оценкой, 5 сем.),
- языки программирования квантовых компьютеров (зачет, 6 сем.),
- алгоритмы коррекции ошибок (зачет с оценкой, 7 сем.),
- квантовая теория информации (зачет, 8 сем.).

В учебный план по программе магистратуры 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», профиль обучения «Компьютерное моделирование и искусственный интеллект», включена дисциплина «Квантовые информационные системы» (экзамен, 2 сем.).

Ежегодно выполняются курсовые и выпускные квалификационные работы бакалавров и магистров по этой тематике. Сотрудниками кафедры опубликована серия учебников и учебных пособий [8-13]. Поддерживается постоянный контакт с лабораторией сверхпроводящих и квантовых технологий Центра фундаментальных и прикладных исследований Всероссийского научно-исследовательского института автоматики им. Н.Л. Духова, сотрудники кафедры принимают участие в проводимых ими семинарах. Сотрудники и студенты участвуют в обсуждении задач развития квантовых вычислений на конференциях GRID (ОИЯИ, г. Дубна).

На факультете компьютерных наук было организовано взаимодействие с фирмой QRate, которая входит в состав Российского Квантового Центра. Фирма представила на факультете свой научно-образовательный комплекс QLab для изучения квантовых коммуникаций и фотоники, с помощью которого можно готовить специалистов и проводить исследования в области квантовых коммуникаций. Экспериментальные установки QLab предназначены для реализации оптических схем, предназначенных для работы с квантовыми состояниями света, изучения принципов квантовой интерференции и свойств неклассических состояний света, которые лежат в основе перспективных методов передачи и защиты информации.

На рис. 1 приведены учебные пособия, составляющие основу учебно-методического комплекса. Отличительной особенностью всех этих пособий является направленность учебного материала для изучения будущими специалистами в области информационно-коммуникационных технологий. В частности, в пособии [10] нашел свое отражение новый учебный материал, содержащий примеры и методы решения задач в этой области. Содержание книги можно разделить на две части. В первой части, которую составляют главы 1–8, представлен теоретический материал и даны многочисленные примеры решения задач. Дается представление о квантовой модели вычислений, об основных операциях над кубитами и универсальных элементах квантовых схем, вводятся определения запутанных состояний и детально анализируется эксперимент Эйнштейна — Подольского — Розена. Большое внимание уделяется примерам важнейших квантовых алгоритмов, практические аспекты квантовых вычислений продемонстрированы на примерах алгоритма квантового преобразования Фурье и алгоритма оценки фазы оператора. Другая часть книги содержит задания для самостоятельного решения, а также ответы, указания и решения к задачам. Достаточно полное изложение методов квантовых вычислений удалось осуществить при относительно небольшом объеме книги. Наличие учебного материала, затрагивающего темы «Квантовая телепортация» и «Постулаты квантовой теории», делает доступным изучение этих актуальных и важных тем для обширного круга читателей. Широкий спектр примеров и задач для самостоятельного решения позволяет развить практические навыки построения и реализации квантовых схем.

В книге [13] значительная часть учебного материала посвящена основам квантовой теории информации. Дается представление об операторе плотности и его основных свойствах,

Рис. 1. Учебные пособия, составляющие основу комплекса

вводятся базовые характеристики квантовой информации — энтропия фон Неймана, условная и относительная энтропия, квантовая взаимная информация. Перечислены свойства важнейших каналов связи. На ряде примеров рассмотрены меры информации, заключенной в чистых и смешанных квантовых состояниях. Задачи и примеры охватывают такие темы, как свойства операторов в квантовой теории информации, состояния и измерения, вычисление частичного следа, формализм квантовых схем. Заключительная глава книги содержит резюме современных достижений науки о квантовых вычислениях. На основе условий ДиВинченцо сформулированы направления развития аппаратных и программных методов такого способа вычислений. Таким образом, книга [13] является современным введением в методы квантовых вычислений, в которой детально отражена связь квантовой теории с информатикой, теорией алгоритмов и теорией передачи и хранения информации. Такое изложение учебного материала ориентировано на использование для подготовки специалистов в области фундаментальных основ компьютерных наук, способных осваивать и применять на практике новейшие подходы к решению вычислительных задач.

Заключение

Решение актуальных задач требует в настоящее время как высокопроизводительных вычислений, так и перспективных квантовых вычислений. Подготовка специалистов в области информационно-коммуникационных технологий, и в частности, квантовых вычислений, должна осуществляться на высоком научном и методическом уровне, идти по пути обновления учебных курсов, широкого применения необходимых программно-аппаратных средств и специализированных учебно-методических комплексов.

Литература

1. *Кургалин С. Д.* Using the resources of the Supercomputer Center of Voronezh State University in learning processes and scientific researches / С. Д. Кургалин, С. В. Борзунов // Труды между-

народной конференции «Суперкомпьютерные дни в России». – Москва : Изд-во МГУ, 2018. – С. 972–977.

2. *Кургалин С. Д.* Суперкомпьютерная система как фактор влияния на образовательный процесс / С. Д. Кургалин, С.В. Борзунов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4–6 декабря 2023 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 4–9.

3. *Кургалин С. Д.* Суперкомпьютерные технологии в Воронежском государственном университете / С. Д. Кургалин, С. В. Борзунов // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Проблемы высшего образования. – 2018. – № 3. – С. 183-187.

4. *Kurgalin S.* A Practical Approach to High-Performance Computing / S. Kurgalin, S. Borzunov. – Cham : Springer, 2019. – 206 p. DOI: 10.1007/978-3-030-27558-7.

5. *Борзунов С. В.* Суперкомпьютерные вычисления: практический подход / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. – Санкт-Петербург : БВХ-Петербург, 2019. – 256 с. – (Учебная литература для вузов).

6. *Нильсон М.* Квантовые вычисления и квантовая информация / М. Нильсен, И. Чанг. – Москва : Мир, 2006. – 824 с.

7. *Hidary J. D.* Quantum computing: an applied approach / J. D. Hidary. – Second ed. – Cham : Springer, 2019. – 422 p.

8. *Запрягаев С. А.* Квантовые информационные системы. Теория и практика применения / С. А. Запрягаев. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2023. – 320 с.

9. *Борзунов С. В.* Основы квантовых вычислений (для программистов) / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. – 100 с.

10. *Борзунов С. В.* Квантовые вычисления / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2022. – (Серия: Учебная литература для вузов). – 144 с.

11. *Kurgalin S.* Concise Guide to Quantum Computing: Algorithms, Exercises, and Implementations / S. Kurgalin, S. Borzunov. – Springer, 2021. – (Series: Texts in Computer Science). – 122 p. DOI: 10.1007/978-3-030-65052-0.

12. *Борзунов С. В.* Основы квантовых вычислений. Квантовые схемы / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. – 150 с. – ISBN 978-5-9273-3845-0.

13. *Борзунов С. В.* Основы квантовых вычислений и квантовой теории информации / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2025. – 248 с. – (Учебная литература для вузов).

УДК 004.272.26

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА TREECODE ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

Д. С. Сиротин, Н. М. Кузьмин, А. В. Хоперсков

Волгоградский государственный университет

Аннотация. В работе проведен анализ эффективности параллельной реализации метода TreeCode для численного решения задачи динамики N гравитирующих тел. Вычисления проводились на различных вычислительных системах с общей памятью, распараллеливание осуществлялось с помощью технологии OpenMP. При выполнении параллельной программы использовались как физические процессорные ядра, так и дополнительные логические потоки (технология Hyper-Threading). Показано, что использование дополнительных логических потоков при полной их загрузке дает прирост параллельной эффективности в среднем на 20 %.

Ключевые слова: параллельные вычисления, архитектуры вычислительных систем, системы с общей памятью, технология OpenMP, технология Hyper-Threading, логические вычислительные потоки, эффективность параллельных программ, компьютерное моделирование, модели N тел, алгоритм TreeCode.

Введение

В данной работе рассматривается эффективность параллельных вычислений для численного моделирования динамики N тел методом TreeCode [1] на системах с общей памятью. Вычислительный код, адаптированный для моделирования динамики бесстолкновительных галактических подсистем [2, 3], был распараллелен с помощью технологии OpenMP.

Для определения количественных характеристик качества распараллеливания кода обычно используются ускорение (speedup) S и эффективность (efficiency) E, определяемые по формулам

$$S(M)=\frac{T(1)}{T(M)}, \quad E(M)=\frac{S(M)}{M},$$

где T — время выполнения одного шага вычислений, M — количество потоков.

Многие современные вычислительные системы поддерживают гиперпоточность (технология Hyper-Threading), позволяющую выполнять параллельно более одного логического потока на одном физическом ядре. В таком случае эффективность в расчете на одно физическое ядро следует вычислять по модифицированной формуле

$$E^{(P)}(M)=\begin{cases}\dfrac{S(M)}{M}, & \text{при } M \le P,\\ \dfrac{S(M)}{P}, & \text{при } M > P,\end{cases}$$

где P — количество физических процессорных ядер.

1. Эффективность параллельных расчетов

Для исследования производительности параллельного кода были рассмотрены различные вычислительные системы с общей памятью, поддерживающие технологию гиперпоточности Hyper-Threading. На рис. 1 для моделей с различным количеством частиц N приведены зависимости времени вычислений, ускорения и эффективности от количества вычислительных

потоков для различных вычислительных систем, вертикальными линиями отмечены стандартные ошибки среднего.

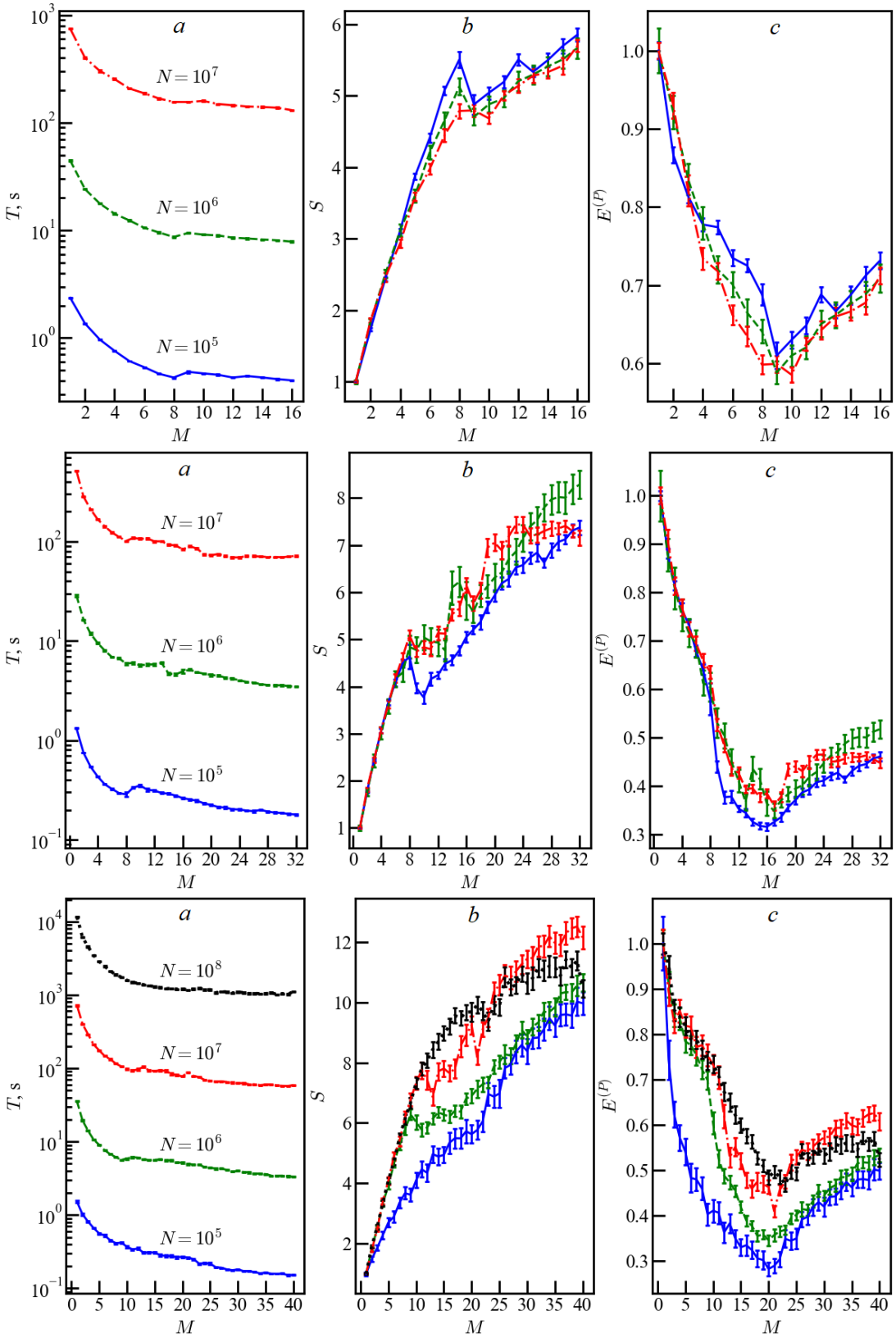


Рис. 1. Зависимости времени (a), ускорения (b) и эффективности (c) от количества вычислительных потоков для различных вычислительных систем с поддержкой технологии Hyper-Threading. Показаны результаты для различных значений N

Анализ этих зависимостей показывает, что использование дополнительных логических потоков способно существенно влиять на эффективность вычислений: при $M > P$ эффективность сначала падает, а затем начинает возрастать, достигая максимума при использовании всех доступных параллельных вычислительных потоков. Этот максимум в среднем на 20 % выше, чем значение эффективности при количестве потоков, равном количеству физических ядер. Соответственно, часто применяемый в параллельных вычислениях подход, основанный на равенстве количества вычислительных потоков и физических ядер, не является оптимальным.

2. Зависимость эффективности от характеристик вычислительной системы

Одной из характеристик вычислительных систем является отношение тактовой частоты оперативной памяти к тактовой частоте процессора. Эффективность вычислений при различных значениях этого параметра для случая четырех потоков показана на рис. 2.

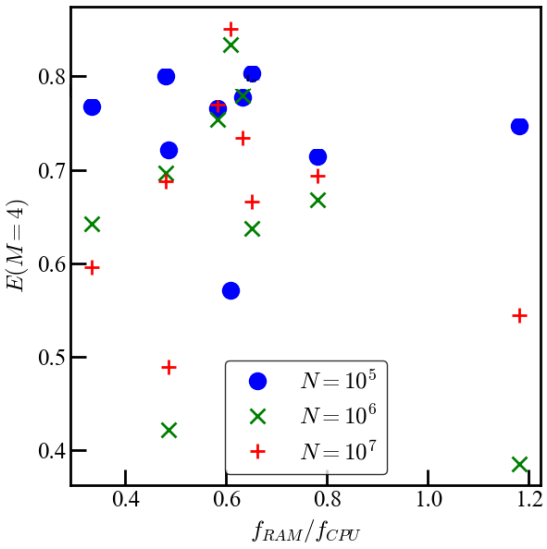


Рис. 2. Значения эффективности параллельных вычислений для четырех потоков при различных отношениях тактовых частот памяти и процессора (для различных вычислительных систем). Показаны результаты для различных значений N

Ввиду небольшого количества исследованных вычислительных систем сложно сделать выводы о какой-либо зависимости. Кроме того, на эффективность могут оказывать влияние и другие факторы. Так, современные процессоры, как правило, способны динамически менять свою частоту в зависимости от уровня текущей вычислительной нагрузки. Такое изменение может происходить в несколько этапов и никак не контролируется пользователем (на рис. 2 приведены результаты для номинальной частоты процессора). Кроме того, существуют процессоры с неравноценными ядрами (т. н. производительные и энергоэффективные ядра), работающими на разных тактовых частотах. Все это существенно усложняет анализ зависимости скорости вычислений от характеристик конкретной системы и требует отдельного исследования.

Заключение

Проведенное нами исследование позволяет сделать вывод о том, что в системах с общей памятью неполное использование дополнительных логических вычислительных потоков (технология Hyper-Threading) способно привести к заметному падению производительности (в среднем на 10 %). Однако полная загрузка всех доступных логических вычислительных по-

токов способна увеличить производительность параллельных вычислений в среднем на 20 % в зависимости от конкретной вычислительной системы. Поэтому подход к распараллеливанию программ на системах с общей памятью, основанный на равенстве количества вычислительных потоков и физических ядер, не является оптимальным.

Вопросы, связанные с влиянием на эффективность вычислений таких факторов, как динамическое изменение тактовой частоты процессора и совместное использование производительных и энергоэффективных ядер, требуют дополнительного изучения.

Литература

1. *Barnes J.* A Hierarchical O(N log N) Force-Calculation Algorithm / J. Barnes, P. Hut // Nature. – 1986. – Vol. 324. – P. 446–449.

2. *Khrapov S.* Study of the Effectiveness of Parallel Algorithms for Modeling the Dynamics of Collisionless Galactic Systems on GPUs / S. Khrapov, A. Khoperskov // Supercomputing Frontiers and Innovations. – 2024. – Vol. 11, No 3. – P. 27–44.

3. Numerical simulation of the galaxies outer spiral structure: the influence of the dark halo non-axisymmetry on the gaseous disk shape / M. A. Butenko, I. V. Belikova, N. M. Kuzmin [et al.] // Mathematical Physics and Computer Simulation. – 2022. – No 25 (3), P. 73–83.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

UDC 517.95

THE DIRICHLET PROBLEM FOR A CERTAIN PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATION

H. F. Gebreslasie

Belgorod State National Research University

Annotation. The study investigates the solvability of an elliptic pseudo-differential equation model in a multidimensional domain with a cut containing an arbitrary function determined. One writes out a general solution in the Sobolev Slobodetskii space for the equation in a domain with cut wedge using a special factorization for elliptic symbols; Using Dirichlet condition a certain integral equation is obtained, and its unique solvability is equal to the solvability of the Dirichlet problem in a multidimensional domain when the angle of the wedge tends to zero.
Keywords: pseudo-differential equations; Dirichlet condition; Fourier image; Space with cut.

Introduction

The model equations in canonical non-smooth domains, such as cones, play a significant role in the theory of pseudo-differential equations in non-smooth domains. Pseudo-differential equations are widely utilized in mathematics and physics, particularly in electromagnetic wave scattering problems, where the factorization method is commonly employed.

In [1–3], elliptic pseudo-differential equations were considered in model domains with a non-smooth boundary of various dimensions. The study was based on a special wave factorization of the elliptic symbol with index $æ$, the presence of which made it possible to describe the solvability picture of the model pseudo-differential equation.

1. Notations and Definitions

A pseudo differential operator A with symbol $A(\xi)$ in domain $D \subset \mathbb{R}^m$ is defined by:

$$(Au)(x) = \int_D \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi) u(y) e^{i(y-x).\xi}\, dy d\xi,\ x \in D,$$

where the symbol $A(\xi)$ satisfies the condition

$$c_1 < |\, A(\xi)(1+|\,\xi\,|)^{-\alpha}\,| < c_2,\ \ \xi \in \mathbb{R}^m,\ c_1, c_2 > 0,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ is an order of the operator A.

We consider such an operator in the Sobolev Slobodetskii space $H^s(\mathbb{R}^m)$ with the norm

$$\|\, u \,\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^m} |\, \tilde{u}(\xi)\,|^2\, (1+|\,\xi\,|)^{2s}\, d\xi,$$

where $\tilde{u}$ is Fourier image of u.

In this article, we consider solvability of the following pseudo-differential equation in Sobolev Slobodetskii space

$$(Au)(x) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{W}_+^a, \tag{1}$$

where $W_+^a = C_+^a \times \mathbb{R}^{m-2}$, $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (x_1, x_2), x_2 > a\,|\,x_1\,|, a > 0\}$, f is an arbitrary function in $H_0^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m \setminus \bar{W}_+^a)$ and $A(\xi)$ admits the wave factorization with respect to the wedge W_-^a having index $æ$, such that $\frac{1}{2} < æ - s < \frac{3}{2}$ has a general solution $u(x)$ in its Fourier transform $\tilde{u}(x)$ given in [3], in Sobolev Slobodetskii space $H^s(\mathbb{R}^m \setminus W_+^a)$ of the form

$$\tilde{u}(\xi)=A_{\neq}^{-1}(\xi)\left(B(\xi)\left(I-G_{m-2}^{'}\right)(\xi)B^{-1}(\xi)\left(A_{=}^{-1}\tilde{l}f\right)(\xi)+\frac{\tilde{c}_0(\xi_1+a\xi_2,\xi')+\tilde{c}_0(\xi_1-a\xi_2,\xi')}{2}\right)$$
$$+A_{\neq}^{-1}(\xi)\left(v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta,\xi')}{\xi_1+a\xi_2-\eta}d\eta-v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta,\xi')}{\xi_1-a\xi_2-\eta}d\eta\right), \tag{2}$$

where I is unitary operator, $G_{m-2}^{'}$ is integral operator [1, 3], lf continuation of f onto $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$, $B(\xi)$ is an arbitrary polynomial in ξ_1,ξ_2 satisfying the condition for $A(\xi)$ and c_o is an arbitrary function in $H^{s-ae-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})$, $\xi\in\mathbb{R}^m$, $\xi'\in\mathbb{R}^{m-2}$ with Dirichlet boundary condition

$$u\big|_{x_1-ax_2=0}=f_1(ax_1+x_2,x'),\ \ u\big|_{x_1+ax_2=0}=f_2(ax_1-x_2,x'), \tag{3}$$

where $x'=(x_1,x_2,...,x_m)$, f_1,f_2 are functions in the space $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})$.

2. On a general solution

Letting $A_{\neq}^{-1}B(\xi)G_{m-2}^{'}(\xi)B^{-1}(\xi)A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{l}f=F(\xi)$, applying change of variables

$$y_1=\xi_1+a\xi_2,\ y_2=\xi_1-a\xi_2\quad\text{subsequently,}\quad \xi_1=\frac{y_1+y_2}{2},\ \xi_2=\frac{y_1-y_2}{2a}$$

and letting S be a one-dimensional singular integral operator defined by:

$$(Sv)(y,\xi')=v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta,\xi')}{y-\eta}d\eta.$$

We can rewrite the formula for the solution as

$$\tilde{u}\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2a},\xi'\right)=\tilde{f}\left(y_1,y_2,\xi'\right)+a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\left(P\tilde{c}_0(y_1,\xi')+O\tilde{c}_0(y_2,\xi')\right),$$

where $\tilde{f}\left(y_1,y_2,\xi'\right)=F\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2a},\xi'\right)$, $a_{\neq}(y_1,y_2,\xi')=A_{\neq}\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2a},\xi'\right)$ and

$P=\frac{1}{2}(I+S)$, $Q=\frac{1}{2}(I-S)$ for a unitary operator I.

Again denote, $P\tilde{c}_0=\tilde{C}_0$, $Q\tilde{c}_0=\tilde{D}_0$, $\tilde{u}\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2a},\xi'\right)=\tilde{U}(y_1,y_2,\xi')$ then we obtain:

$$\tilde{U}(y_1,y_2,\xi')=\tilde{f}\left(y_1,y_2,\xi'\right)+a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\tilde{C}_0(y_1,\xi')+a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\tilde{D}_0(y_2,\xi').$$

Taking into account conditions (3) and their Fourier image, let us first integrate this last equation over y_1, then y_2 one at a time, obtaining the following system of linear integral equations:

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_1^*(y_1,y_2,\xi')\,dy_1+\int_{-\infty}^{\infty}K_1(y_1,y_2,\xi')\left(\tilde{C}_0(y_1,\xi')\right)dy_1+\tilde{D}_0(y_2,\xi')=\tilde{F}_1(y_2,\xi')$$
$$\tilde{C}_0(y_1,\xi')+\int_{-\infty}^{\infty}K_2^*(y_1,y_2,\xi')dy_2+\int_{-\infty}^{\infty}K_2(y_1,y_2,\xi')\tilde{D}_0(y_2,\xi')\,dy_2+=\tilde{F}_2(y_1,\xi'), \tag{4}$$

where $\int_{-\infty}^{\infty}a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\,dy_1\equiv\tilde{a}_0(y_2,\xi')$, $\int_{-\infty}^{\infty}a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\,dy_2\equiv\tilde{b}_0(y_1,\xi')$

$\tilde{F}_1(y_2,\xi')=\tilde{f}_1(y_2,\xi')\tilde{a}_0^{-1}(y_2,\xi')$, $\tilde{F}_2(y_1,\xi')=\tilde{f}_2(y_1,\xi')\tilde{b}_0^{-1}(y_1,\xi')$,

$K_1^*(y_1,y_2,\xi')=\tilde{a}_0^{-1}(y_2,\xi')\tilde{f}(y_1,y_2,\xi')$, $K_2^*(y_1,y_2,\xi')=\tilde{b}_0^{-1}(y_1,\xi')\tilde{f}(y_1,y_2,\xi')$,

$K_1(y_1,y_2,\xi')=a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\tilde{a}_0^{-1}(y_2,\xi')$, $K_2(y_1,y_2,\xi')=a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\tilde{b}_0^{-1}(y_1,\xi')$,

provided that, $\tilde{a}_0(y_2,\xi')\neq 0$, $\tilde{b}_0(y_1,\xi')\neq 0$.

3. Case $a \to \infty$

Let's start with the functions $\tilde{a}_0, \tilde{b}_0$.

$$\tilde{a}_0(y_2,\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\,dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\neq}^{-1}(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2a},\xi')\,dy_1 \to \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y_1,y_2,\xi')\,dy_1,$$
$$\equiv \tilde{A}_0(y_2,\xi'), \quad a \to \infty$$

Here, we assume that the function $\lambda(y_1,y_2,\xi')$ is symmetric with respect to y_1, y_2 and it depends on $y_1 + y_2$. Similarly

$$\tilde{b}_0(y_2,\xi') \to \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y_1,y_2,\xi')\,dy_2 \equiv \tilde{B}_0(y_1,\xi'), \quad a \to \infty,$$

We observe, $\tilde{A}_0(y_2,\xi') \equiv \tilde{B}_0(y_1,\xi')$.

Now consider the behavior of K_1, K_2, K_1^*, K_2^* as follow

$$K_1(y_1,y_2,\xi') = a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\tilde{a}_0^{-1}(y_2,\xi') \to \lambda(y_1,y_2,\xi')\tilde{A}_0^{-1}(y_2,\xi'), a \to \infty$$
$$K_2(y_1,y_2,\xi') = a_{\neq}^{-1}(y_1,y_2,\xi')\tilde{b}_0^{-1}(y_1,\xi') \to \lambda(y_1,y_2,\xi')\tilde{B}_0^{-1}(y_1,\xi'), a \to \infty$$

as $a \to \infty$ it follows that kernels K_1, K_2 tend to the same symmetric kernel, which we denote $K(y_1,y_2,\xi')$, similarly for K_1^*, K_2^*, we denote by $K^*(y_1,y_2,\xi')$.

Finally, the last limit is related to the boundary function, namely

$$\tilde{F}_1(y_2,\xi') = \tilde{g}_1(y_2,\xi')\tilde{a}_0^{-1}(y_2,\xi') \to \tilde{f}_1(y_2,\xi')\tilde{A}_0^{-1}(y_2,\xi') = \tilde{\alpha}(y_2,\xi'),\ a \to \infty$$
$$\tilde{F}_2(y_1,\xi') = \tilde{g}_2(y_1,\xi')\tilde{b}_0^{-1}(y_1,\xi') \to \tilde{f}_2(y_1,\xi')\tilde{B}_0^{-1}(y_1,\xi') = \tilde{\beta}(y_1,\xi'),\ a \to \infty$$

Then using the symmetry of kernel, the system (4) as $a \to \infty$ takes the following form

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} K^*(y_1,y_2,\xi')dy_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(y_1,y_2,\xi')\tilde{C}_0(y_1,\xi')\,dy_1 + \tilde{D}_0(y_2,\xi') = \tilde{\alpha}(y_2,\xi') \\ &\tilde{C}_0(y_1,\xi') + \int_{-\infty}^{\infty} K^*(y_1,y_2,\xi')\,dy_2 + \int_{-\infty}^{\infty} K(y_1,y_2,\xi')\tilde{D}_0(y_2,\xi')\,dy_2 = \tilde{\beta}(,y_1,\xi'), \end{aligned} \tag{5}$$

Exchanging the role of the variables y_1, y_2 in the second equation,

$$\tilde{C}_0(y_2,\xi') + \int_{-\infty}^{\infty} K^*(y_1,y_2,\xi')\,dy_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(y_1,y_2,\xi')\tilde{D}_0(y_1,\xi')\,dy_1 + = \tilde{\beta}(y_2,\xi')$$

and adding to the first equation we get one equation

$$\tilde{C}_0(y_2,\xi') + \tilde{D}_0(y_2,\xi') + 2\int_{-\infty}^{\infty} K^*(y_1,y_2,\xi')dy_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(y_1,y_2,\xi')\Big(\tilde{C}_0(y_1,\xi') + \tilde{D}_0(y_1,\xi')\Big)dy_1$$
$$= \tilde{\alpha}(y_2,\xi') + \tilde{\beta}(y_2,\xi')$$

But $\tilde{C}_0(y_2,\xi') + \tilde{D}_0(y_2,\xi') = \tilde{c}_0(y_2,\xi')$ as $P + Q = I$ then finally equation can be written as:

$$\tilde{c}_0(y,\xi') + 2\int_{-\infty}^{\infty} K^*(\tau,y,\xi')d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau,y,\xi')\tilde{c}_0(\tau,\xi')\,dy_1 = \tilde{\psi}(y,\xi'), \tag{7}$$

where $\tilde{\psi}(y,\xi') = \tilde{\alpha}(y,\xi') + \tilde{\beta}(y,\xi')$, $K(\tau,y,\xi') = \dfrac{\lambda(\tau,y,\xi')}{\tilde{A}_0(y,\xi')}$, $K^*(\tau,y,\xi') = \dfrac{F(\frac{\tau+y}{2},0,\xi')}{\tilde{A}_0(y,\xi')}$.

Theorem 1. *Suppose that $A(\xi)$ admit wave factorization with respect to W_-^a with index æ, such that $\frac{1}{2} < æ - s < \frac{3}{2}$, for all sufficiently large values of a with Dirichlet boundary conditions (3), Then the in-*

tegral equation (7) is equivalent to boundary problem of (1),(2) with an arbitrary function $\tilde{c}_0(x) \in H^{s-ae-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})$.

4. Dirichlet boundary problem on R^m with a cut

Here, we consider the Dirichlet problem on $\mathbb{R}^m \setminus E_0$,

$$E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid x = (x_1, x_2, ..., x_m), x_1 = 0, x_2 > 0 \right\}$$

We formulate it as follows

$$(Au)(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^m \setminus E_0,\ \ u\big|_{E_0} = \mu(x_2, \xi'), \tag{8}$$

where the function $\mu \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1}_+)$ is the trace of the same $\gamma \in H^s(W^a_+)$ defined in the wedge W^a_+ with sufficiently the large a. Now examining the solvability of equation,

$$(Au)(x) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{W}^a_+$$

with the boundary condition,

$$u\big|_{ax_1 - x_2 = 0} = \gamma(ax_1 + x_2, x'),\ \ u\big|_{ax_1 + x_2 = 0} = \gamma(ax_1 - x_2, x'),\ x' \in \mathbb{R}^{m-1}. \tag{9}$$

We come to conclusion that instead of the equation (7) we get the equation

$$\tilde{c}_0(y, \xi') + 2\int_{-\infty}^{\infty} K^*(t, y, \xi') dt + \int_{-\infty}^{\infty} K(t, y, \xi') \tilde{c}_0(t, \xi')\, dt = \frac{2\tilde{\mu}(y, \xi')}{\tilde{A}_0(y, \xi')}, \tag{10}$$

where $K(t, y, \xi'), K^*(t, y, \xi')$ and $\tilde{A}_0(y, \xi')$ are as defined above.

Theorem 2. *Suppose that the symbol* $A(\xi)$ *admit wave factorization with respect to* W^a_- *with index* $æ$, *such that* $æ - s = 1 + \delta,\ |\delta| < \frac{1}{2}$ *for all sufficiently large values of the parameter a with differentiable factors,* $\tilde{\mu} \in H^{s-\frac{1}{2}}(E_0)$, *then the unique solvability of problem (8) is equivalent to the unique solubility of the integral equation (10) in the space* $H^{s-ae-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})$.

Conclusion

In this study, multidimensional cases are considered, in which the Dirichlet problem on a multi-dimensional with a cut for a non-homogeneous elliptic pseudodifferential equation is reduced to an integral equation. The unique solvability equal to the solvability of the Dirichlet problem when the angle of the wedge tends to zero is obtained.

Acknowledgments

I would like to thank my scientific advisor, Dr. Vasilyev Vladimir Borisovich, for his invaluable guidance and support throughout my research.

References

1. *Vasilyev V. B.* Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case / V. B. Vasilyev. // Opusc. Math. – 2019. –Vol. 39, No 1. – P. 109–124.

2. *Agarkova N. N.* On the Dirichlet Problem in a plane domain with a cut,/ N. N. Agarkova, V. B. Vasilyev, H. F. Gebreslasie.// Appl. Math. & Phys. – 2023. – Vol. 55, No 3. – P. 258–264. (in Russian)

3. *Vasil'ev V. B.* Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains / V. B. Vasil'ev. – Dordrecht Boston London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

UDK 51.77

MODELING LANGUAGE COMPETITION TAKING INTO ACCOUNT THE VARIABILITY OF LANGUAGE PRESTIGE

A. V. Medvedev, O. A. Kuzenkov

Nizhny Novgorod State University named after N. I. Lobachevsky

Annotation. The aim of this research is to identify a language prestige function based on statistical data and to predict language dynamics. **Methods:** A mathematical model of a bilingual community is constructed, taking into account language acquisition by children at an early age, varying prestige levels of languages for their speakers, and the lexical similarity effect of competing languages. The model is examined using classical methods of qualitative dynamic systems theory over an extended time horizon. The study investigates how language parameters change over time. For this purpose, a non-autonomous model is applied to empirical data across various time periods. Prestige functions for the two most common languages in Ukraine — Ukrainian and Russian — are identified, and predictions are made regarding language dynamics. **Results:** A logistic function describing the time-dependent prestige of languages is determined. Real statistical data for the Ukrainian-Russian language pair are utilized to model language dynamics, providing insights into the rapid shifts in the number of speakers. A forecast of future language dynamics is developed. **Conclusion:** The time-dependent relationship of language prestige is identified, and a forecast for changes in the number of speakers of the languages under study is provided.

Keywords: language extinction, lexical similarity, language volatility, bilingualism, language competition, language dynamics, language preservation, mathematical model, ordinary differential equations.

Introduction

Methods from nonlinear dynamics theory are applied across numerous scientific fields, including the study of language usage dynamics within societies [1–7]. Current data on the quantitative characteristics of shifts in language speakers within a society enable accurate description and prediction of language dynamics. Among the pioneers in mathematical modeling of language dynamics were Abrams and Strogatz [1]. Their model assumes that each member of a given community, regardless of their multilingual proficiency, favors only one of two languages at any given time. It also posits that children learn and use the language preferred by their parents, meaning generational shifts do not alter the relative proportions of language speakers within the population. Abrams and Strogatz introduced the concepts of language prestige and language volatility, the latter describing speakers' readiness to switch languages. The community size was assumed constant in this model. The Abrams-Strogatz (AS) model demonstrated that, under these assumptions, one language will invariably displace the other over time. In 2005, Mira and Paredes introduced a new model [2], adding the concept of language similarity (lexical similarity). This model showed that if languages are highly similar, they may coexist for extended periods. In 2006, Castelló developed a new model [3], introducing a bilingual group and demonstrating the conditions under which two languages could stably coexist within a community. The Baggs and Freedman model [4, 5], examining interactions between monolingual and bilingual populations, showed dynamics where language groups could either coexist or displace one another. Wybourne and Hayward further illustrated the importance of a stable bilingual group for the coexistence of two languages [6]. Díaz and Shvydky introduced the concept of language status [7]. In another study [8], it was shown that language parameters depend on time and may vary significantly with socical conditions. Research [9] has demonstrated that language acquisition by children in early

bilingual environments occurs sequentially, an effect shown to influence language competition modeling [10–13]. Study [14] highlighted the effect of mutual support within single-language groups, which directly impacts the appeal of learning a second language.

The inclusion of these new factors has enabled models to depict scenarios in which stable bilingualism persists, or alternatively, where only one of the two languages survives. In this study, we integrate known effects into a new model to analyze how certain factors change over time.

The aim of this study is to develop and analyze a new model of a bilingual community, accounting for: early childhood language acquisition by children of bilingual parents, differential prestige of the second language among adults, varying language volatility, and the effect of lexical similarity between the languages. The study further seeks to define language prestige as a time-dependent function and to forecast changes in the number of language speakers moving forward.

1. Methodology

1.1. Model of a Bilingual Community

To model language competition, we adopt the following assumptions:

• Members of the community can speak one of two languages, referred to as "first" and "second," or both. We define: z_1 — the proportion of community members who speak only the first language, z_2 — the proportion of community members who speak only the second language, z_{12} — the proportion of community members who are bilingual and speak both languages.

• The proportion of individuals who do not speak either language is negligible.

• Each language group size is non-negative $0 \le z_1, z_2, z_{12} \le 1$;

• The total community size remains constant over time, as the birth rate equals the death rate $z_1 + z_2 + z_{12} = 1$;

• The coefficient r characterizes both birth and death rates.

• The likelihood that a child will spontaneously acquire both languages simultaneously is negligible.

• Children of bilingual parents initially acquire either the first or second language with probabilities c_1 and c_2 respectively, where $c_1 + c_2 = 1$ [10, 12];

• Language prestige is defined by coefficients c_1 and c_2 for the first and second languages, respectively [1].

• Language prestige evolves over time according to a logistic function: $c_1(t) = p_1 \frac{e^{(t-p_3)p_4}}{e^{(t-p_3)p_4}+1} + p_2$, where changes in prestige are influenced by shifts in the social environment [8].

• Parameters α and β define language volatility as per the Abrams and Strogatz hypotheses [1].

• When speakers of different languages meet (with an interaction frequency directly proportional to the product of their respective proportions), a language shift can occur with coefficients b_1 and b_2 for the first and second languages, respectively.

• Monolingual community members can be taught the second language by bilinguals [3].

• Russian and Ukrainian share a lexical similarity estimated between 62 % and 86 % [21–22], so the lexical similarity parameter for our model is chosen as the average $k = 0.74$ [2].

The parameter k is assumed to be relatively constant over time, undergoing significant changes only over periods far exceeding the timeframe of the empirical data used in this study. The language volatility parameters α and β, along with the coefficients b_1 and b_2, are also relatively stable. Thus, we treat these parameters as constants and disregard any minor variations over time. The dynamics of language speakers in the community are characterized by the following system of equations:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = (1-k)c_1(\tau)rz_{12} - b_1 z_1 (z_2 + z_{12})^{\alpha}; \\ \dfrac{dz_2}{dt} = (1-k)(1-c_1(\tau))rz_{12} - b_2 z_2 (z_1 + z_{12})^{\beta}; \\ \dfrac{dz_{12}}{dt} = b_1 z_1 (z_2 + z_{12})^{\alpha} + b_2 z_2 (z_1 + z_{12})^{\beta}; \\ \dfrac{d\tau}{dt} = T. \end{cases} \quad (1)$$

The initial values for the language group proportions must be non-negative, as these values represent real population proportions. System (1) satisfies the conditions of quasi-positivity [16], and the sum of all equations in the system is identically zero $\frac{dz_1}{dt} + \frac{dz_2}{dt} + \frac{dz_{12}}{dt} = 0$. This implies that the identity $z_1 + z_2 + z_{12} = 1$ will stay the same at all subsequent time points.

Based on statistical data analysis in [1], approximate values for the parameters were determined: $\alpha, \beta = 1.31 \pm 0.25$. Accordingly, this study considers realistic parameter ranges of $\alpha, \beta = 1.5 \pm 0.5$.

2. Results

2.1. Model Analysis

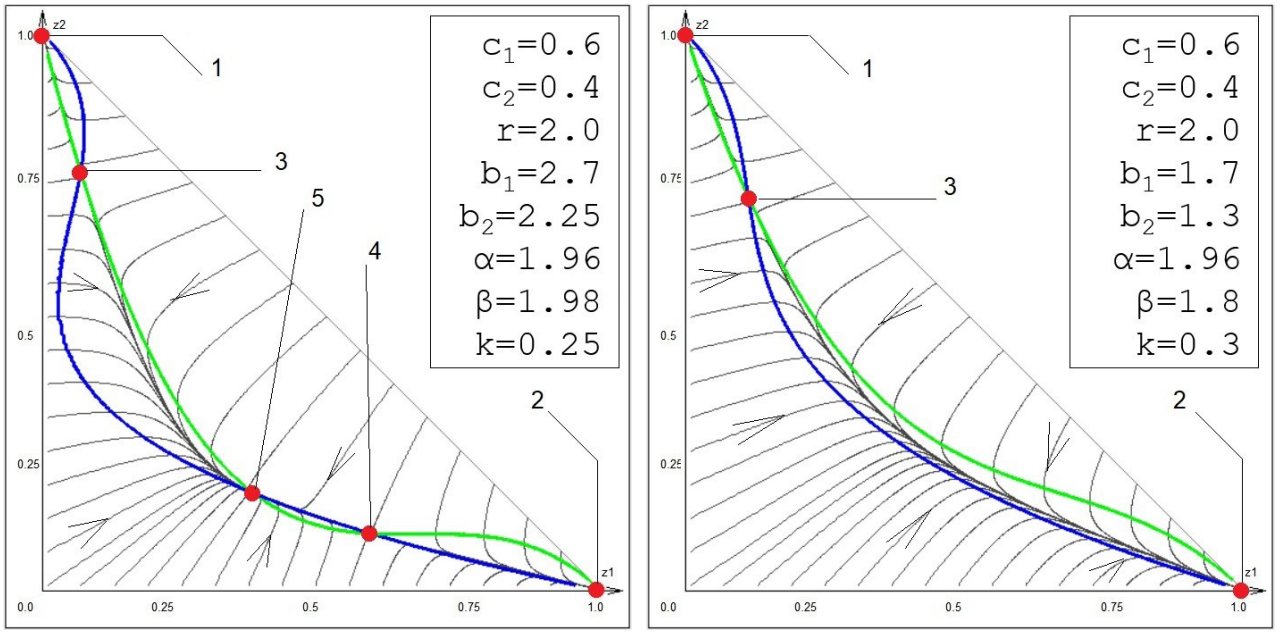
In this study, it is assumed that over short time intervals, language prestige changes minimally, allowing us to neglect these fluctuations. Therefore, to determine the parameters of the prestige function, we examine the dynamic behavior of model (1) across brief periods, during which prestige can be treated as constant. The phase space of system (1), assuming prestige remains unchanged, is a three-dimensional standard simplex [16]. By substituting $z_{12} = 1 - z_1 - z_2$, system (1) can be reduced to a two-dimensional system:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = (1-k)c_1 r(1 - z_1 - z_2) - b_1 z_1 (1 - z_1)^{\alpha}; \\ \dfrac{dz_2}{dt} = (1-k)(1-c_1) r(1 - z_1 - z_2) - b_2 z_2 (1 - z_2)^{\beta}. \end{cases} \quad (2)$$

For model (2), c_1 is considered constant, the condition of quasi-positivity holds, and the inequality $z_1 + z_2 \le 1$ is valid. This model was analyzed using standard qualitative methods. The phase portraits of system (2) for various language parameters are shown in Figure 1. Equilibrium states are marked with red points. Horizontal and vertical isoclines are represented by blue and green curves, respectively. The number of intersections between isoclines indicates the quantity and nature of equilibrium points, as well as potential bifurcations. Equilibrium states #1 and #2 are always stable nodes, positioned on the boundary of the phase space at points (0, 1) and (1, 0) as shown in Fig. 1.

These findings illustrate that the dynamic behavior of the model can exhibit stable states, where either language dominates, depending on initial conditions and parameter values. The stability of these equilibrium states was determined using the Lyapunov method by calculating eigenvalues. The remaining equilibrium states are located within the region defined by the $z_1 + z_2 \le 1,\ 0 \le z_{1,2} \le 1$. Their coordinates were determined by finding the intersection points of the vertical and horizontal isoclines. This problem was solved using the WolframAlpha software. The calculations showed that system (2) can have between 2 and 5 equilibrium states.

The nature of the equilibrium states was identified by numerically constructing the phase portrait: states #3 and #4 are unstable saddle points, states #1, #2, and #5 are stable nodes (as shown in Fig. 1). A qualitative analysis of system (2) reveals two possible dynamic outcomes:

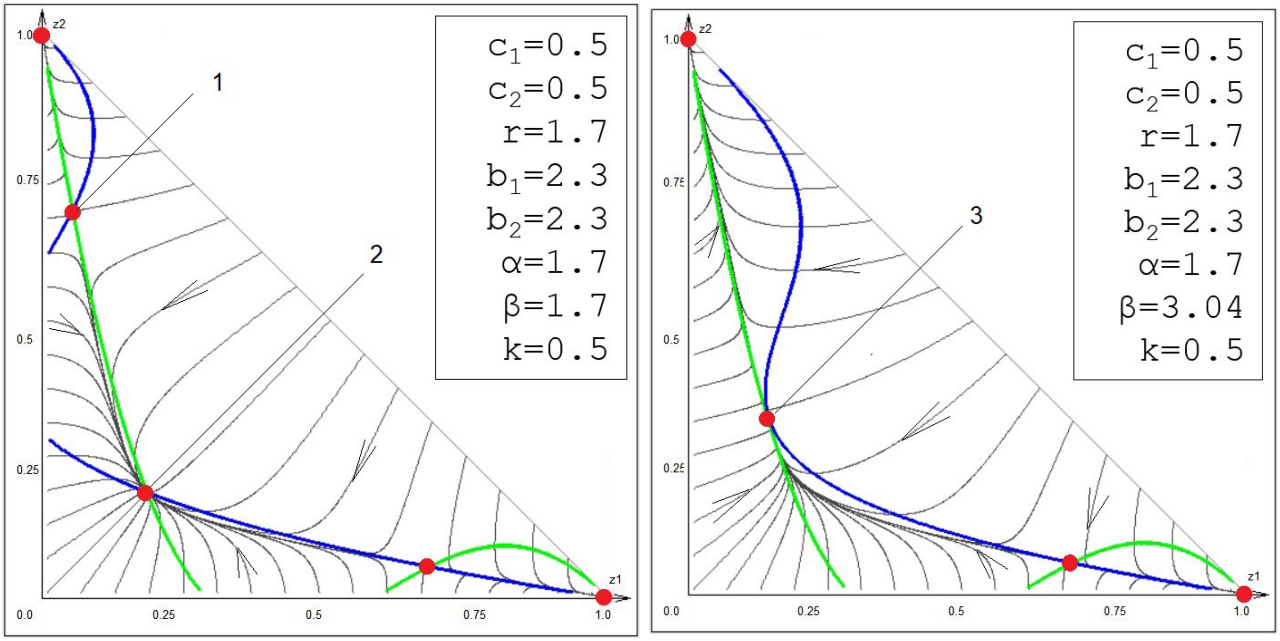


a) *b)*

Fig. 1. Phase Portraits of Model (2): a — coexistence of both languages and bilingual speakers; b — replacement of one language by the other

1. Survival of only one language.
2. Coexistence of two languages along with a bilingual population.

Bifurcations are possible within this model (Fig. 2). Specifically: state #1 (saddle) merges with state #2 (stable node). This merging results in a saddle-node bifurcation, producing a new equilibrium state #3, which is of the "saddle-node" type. At this bifurcation point, the vertical and horizontal isoclines intersect tangentially. This situation is considered non-robust, and when the parameter β crosses the bifurcation threshold, equilibrium state #3 will disappear. Without stable states within the re-



a) *b)*

Fig. 2. Phase Portraits of Model (2): a — before bifurcation; b — at the point of saddle-node bifurcation

gion $z_1 + z_2 \le 1,\ 0 \le z_{1,2} \le 1$. the model predicts that coexistence of languages will be impossible, leading to dominance by a single language.

2.2. Identification of the Language Prestige Function

Statistical data on the proportions of people in Ukraine identifying themselves as Ukrainian-speaking or Russian-speaking are provided in studies [17, 18] for the years 1994–2012 and in sources [19, 20] for the years 2001–2023. Missing yearly data points were filled by averaging values over the gaps. The curves representing language usage dynamics are non-monotonic, with noticeable inflection points observed in the years 1995, 2002, 2004, 2010, 2018, and 2022. These inflection points suggest a varying prestige parameter for each language over time (see Fig. 3).

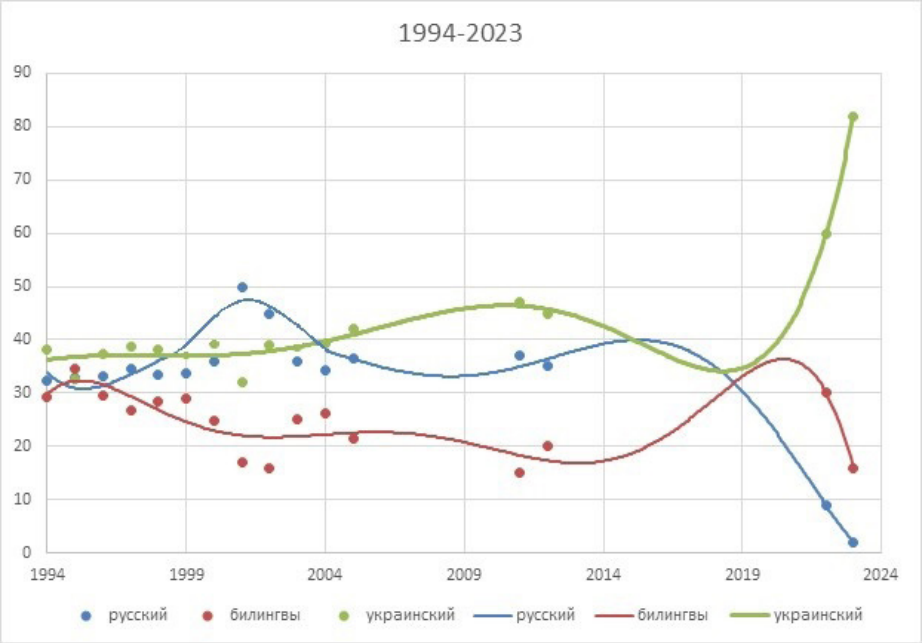


Fig. 3. Percentage of Language Speakers: points represent statistical data, while curves indicate their approximation

In 2012, the "Research & Branding Group" conducted a public opinion survey on the language issue in Ukraine [17]. The project report "Languages of Communication of Ukrainians" presented dynamic data for 2004–2012, revealing that over this 8-year period, Ukrainians shifted their stance four times on whether the Russian language should have official status. This further indicates that language prestige parameters are not constant.

Using the least squares method, the parameters for model (2) were determined. The values of these parameters are shown in Table 1.

Table 1

Coefficients of Model (2)

diff_old	c_1	c_2	b_1	b_2	α	β	r
0.316	0.9	0.1	1.0	1.0	1.1	1.1	1.0

The Russian and Ukrainian languages differ in prestige with $c_1 = 0.9,\ c_2 = 0.1$ and the parameters $\alpha,\ \beta,\ b_{1,2}$ were found to be equal for both languages. The modelling accuracy was relatively low, with $diff_old = 0.316$ which justifies examining the dynamics of the languages separately over shorter time intervals. Taking into account the inertia of the parameters $\alpha,\ \beta,\ b_{1,2}$ and treating them as constants, the prestige parameters of the languages in model (2) were determined for shorter time intervals. Their values are presented in Table 2.

Table 2

Coefficients of Model (2)

	1994–1998	1999–2002	2002–2005	2005–2012	2011–2015	2015–2022	2020–2023
c_1	0,5	0,3	0,4	0,9	0,6	0,9	0,95
c_2	0,5	0,7	0,6	0,1	0,4	0,1	0,05
diff	0,006	0,01	0,005	0,006	0,001	0,022	0,018

The modeling accuracy over shorter time intervals has increased. Based on the obtained values of the prestige parameter, the dependence of the prestige of the Ukrainian language on time was restored in the form of a logistic function (3). The unit of measurement for time is one year.

$$c_1(t) = 0.35 + 0.65\frac{e^{(t-16)0.3}}{e^{(t-16)0.3}+1}. \quad (3)$$

The graph of the values of the prestige of the Ukrainian language obtained from the simulation, as well as the graph of the function that approximates them, is shown in (Fig. 4).

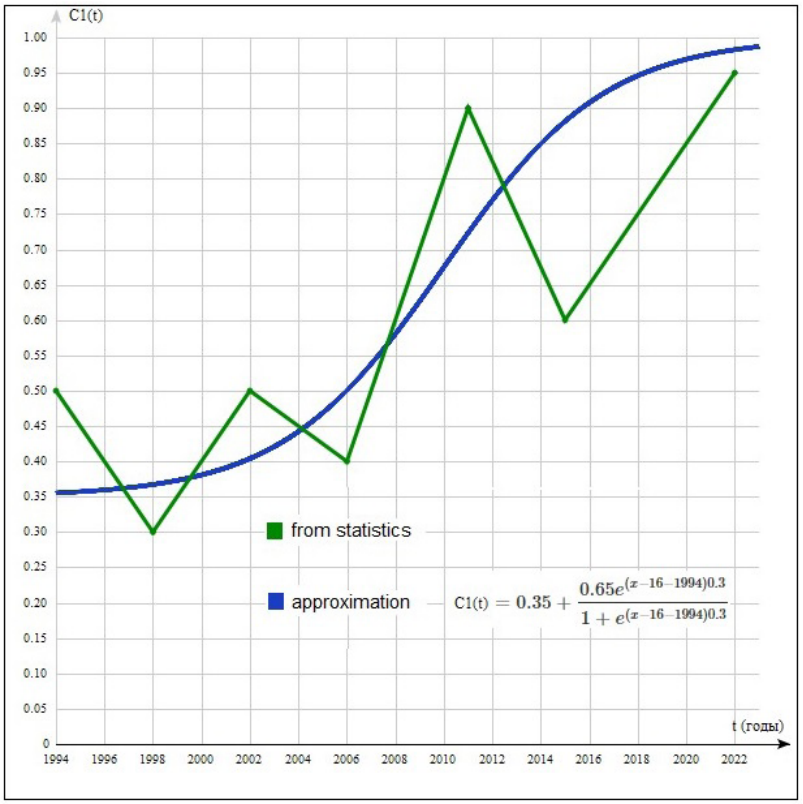


Fig. 4. Change in the prestige of the Ukrainian language over time: green — values obtained from the simulation; blue — graph of the approximating function $c_1(t)$

The obtained expression for the language prestige function (3) was added to model (1). The parameters of model (1) were determined over the entire time period of the natural data from 1994 to 2022. Their values are presented in Table 3.

Table 3

Coefficients of Model (2)

diff_new	p_1	p_2	p_3	p_4	β	b	r
0.185	0.65	0.35	16.0	0.3	2.15	1.0	4.9

The accuracy of the results for modelling language dynamics using the new model over the full range of natural data significantly surpasses the accuracy of results from the previous models: $diff_new = 0.185$, $diff_old = 0.316$. The results of the language dynamics modelling are presented in Fig. 5. The points represent data from statistics, while the curves represent data obtained from modelling using model (1), taking into account the prestige function (3).

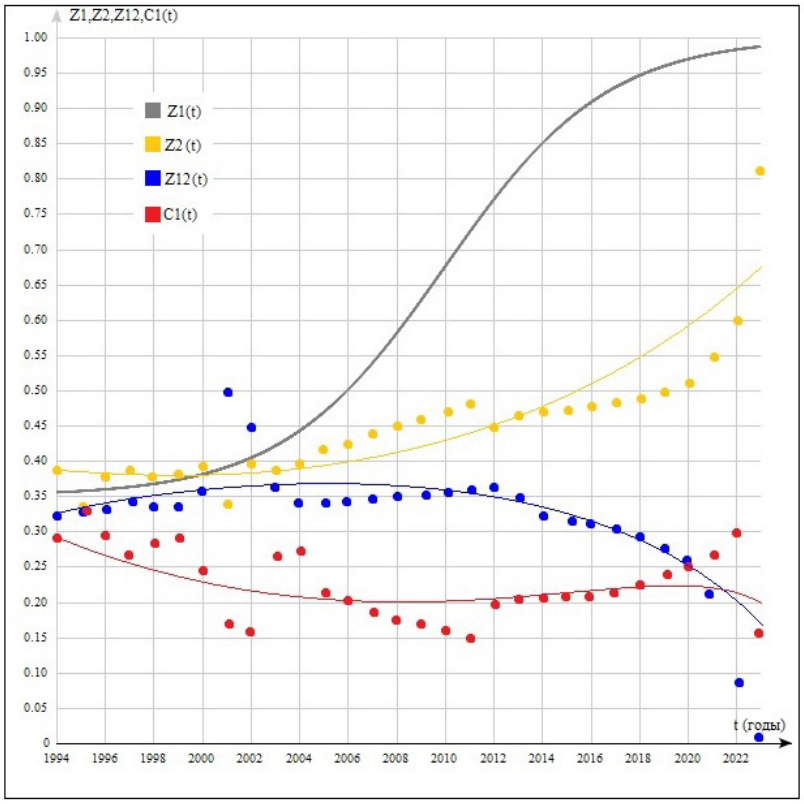


Fig. 5. Changes in the proportions of the Russian-speaking and Ukrainian-speaking groups from 1994 to 2023 in Ukraine: points represent data from statistics; lines represent data from modeling using model (1). Color identification: gray — graph of the prestige function of the Ukrainian language c1(t) blue — population of the Russian-speaking group; yellow — population of the Ukrainian-speaking group; red — population of the bilingual group

Rapid changes in the populations of the Russian-speaking and Ukrainian-speaking groups prompt some considerations. In Ukraine, Surzhyk — a colloquial language incorporating elements of both Ukrainian and Russian — is prevalent. Surzhyk differs from standard Ukrainian and conversational Russian, although it lacks clear boundaries with them. It is assumed that as social tension rises between the Russian-speaking and Ukrainian-speaking segments of society, the use of Surzhyk may increase or decrease, leading individuals who speak it to identify as either Ukrainian-speaking or Russian-speaking, depending on the prevailing social sentiments.

Focusing on the lexical similarity parameter, we note that a low value of the parameter k typically results in one language being displaced, while high similarity allows for coexistence. In the case of the Ukrainian and Russian languages, the lexical similarity is considered high $(0.62 \le k \le 0.86)$, which should promote coexistence. However, in reality, we observe the opposite situation. It is important to note that from 2015 to 2023, external factors have influenced language dynamics in Ukraine. Therefore, considering this parameter is reasonable only under ceteris paribus conditions for the languages involved. Similarly, other "inert" language parameters — α, β, $b_{1,2}$, — also significantly impact language dynamics primarily in the absence of external influences.

The values of the prestige function for the Ukrainian language show a trend towards increase. If the current situation in Ukrainian society persists, we predict the complete disappearance of the Russian language. This prediction is supported by the extremely low prestige of the Russian language $(c_2 = 0.05)$ and the rapidly decreasing number of its speakers, which fell by — 37 % from 2013 to 2023. In contrast, the prestige of the Ukrainian language is high $(c_1 = 0.95)$, and the number of speakers has increased by +36 % during the same period.

Discussion

The effect of language similarity is a significant finding in language dynamics, explored by D. Mira and A. Perede in their model. They examined this effect in dialects of the Spanish language (Galician, Castilian), whose dynamics are relatively monotonic and not significantly influenced by external factors. In our work, we analyzed the language pair of Russian and Ukrainian, which exists in an environment that exerts direct influence on its dynamics through social agendas. The study revealed that most parameters considered in our model lose their significance and do not affect the dynamics of the system under external pressures due to their inertness. They simply do not change in accordance with the trends occurring in the country and society. The only parameter that responds relatively quickly to changes in the environment is language prestige.

In the work by [14], it was noted that when examining language pairs of the "international-national" type, the mutual support for the "international" language approaches zero, while for the "national" language it is close to the maximum value. In contrast, the situation is reversed for language prestige — where the "international" language has a prestige value close to one, and the "national" language is close to zero. In the case of the Russian-Ukrainian language pair, one could speak of a process of reclassification of the languages, as their parameters symmetrically change over time.

In addition to the primary research, the model in this study was examined over shorter time intervals with variable parameters for the languages. The results showed a strong correlation between the parameters c_1 and $\alpha, \beta, b_{1,2}$ (see Fig. 6), a relationship that was not observed when considering similar models based on relatively "monotonic" natural data. This suggests that the model parameters are dependent not only on time but also on the prestige of the languages, which leads them to lose their significance under external influences on dynamics. The model discussed in this work may be applicable for modeling the dynamics of languages whose development occurs naturally and is not externally regulated. When applying this model to languages under external control and conditional "management," model (1) simplifies to the model described in [8] due to the predetermined nature of its parameters.

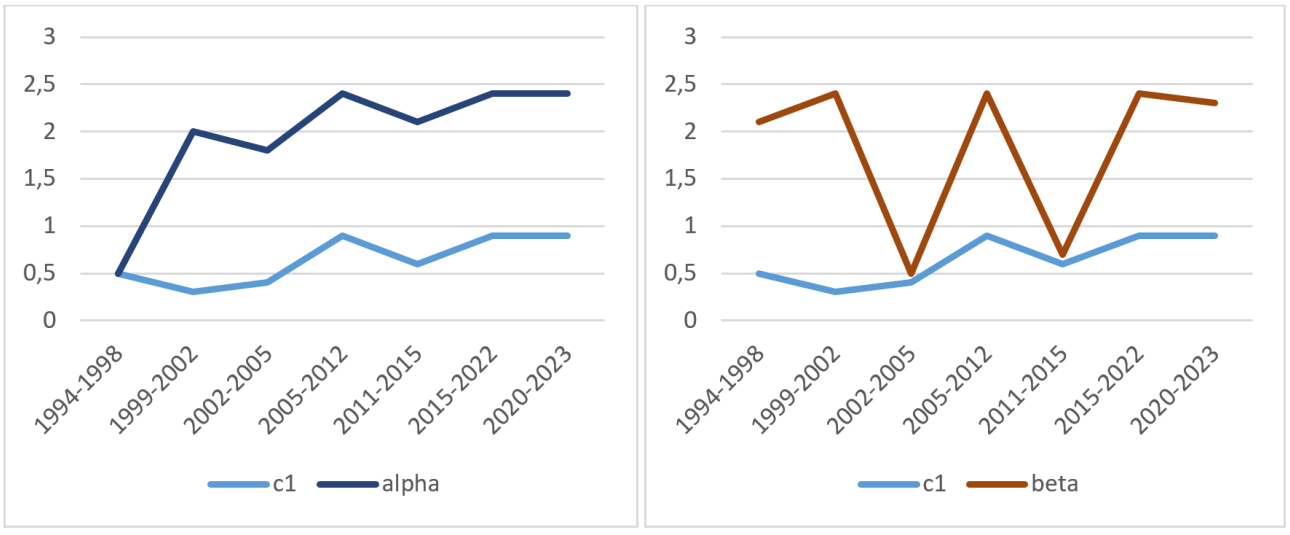


Fig. 6. Correlation of Parameter Values in Model (2)

Conclusion

This study developed and investigated a new model of language dynamics for a bilingual community that accounts for various parameters of language volatility, different coefficients of second language acquisition, and the lexical similarity of the languages in question. The effect of sequential language acquisition by children at an early age was also considered. The research examined language dynamics based on real statistical data regarding the primary languages of Ukraine: Russian and Ukrainian. A function describing the change in language prestige was derived. To achieve this, the initial model was simplified by replacing the language prestige function with parameters. The simplified model was analysed over short time intervals of natural data. For these intervals, the prestige parameter values were determined and approximated using a logistic function. The resulting language prestige function was utilized in modelling language dynamics within the new model. The modelling results demonstrated significantly higher accuracy compared to outcomes obtained from older models. It was noted that, under external influences on language dynamics, the determining factors are the parameters of language prestige. A forecast of the future development of the dynamics of these languages was constructed.

References

1. *Abrams D.* Modelling the Dynamics of Language Death / D. Abrams, S. Strogatz // Nature. – 2003. – 1(424). – P. 900

2. *Mira J.* Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics / J. Mira, B. Paredes // EPL. – 2005. – 1(69). – P. 1031

3. *Castelly X.* Ordering dynamics with Two non-excluding option: Bilingualism in language competition / X. Castelly, V. Eguiluz, M. San Miguel // New Journal of Physics. – 2006. – 1(8). – P. 308.

4. *Baggs I.* A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: persistence versus extinction / I. Baggs, H. Freedman // The Journal of Mathematical Sociology. 1990. – 16(1). – P. 51–75.

5. *Baggs I.* Can the speakers of a dominated language survive as unilinguals?: a mathematical model of bilingualism / I. Baggs, H. Freedman // Mathematical and Computer Modelling. – 1993. – 18(6). – P. 9–18.

6. *Wyburn J.* The future of bilingualism: an application of the Baggs and Freedman model / J. Wyburn, J. Hayward // The Journal of Mathematical Sociology. – 2008. – 32(4). – P. 267–284.

7. *Diaz M.* A mathematical model of language preservation / M. Diaz, J. Switkes // Heliyon. – 2021. – 7(5). – P. 2405–2425.

8. *Medvedev A., Kuzenkov O.* Modeling language competition. Modern information technologies and IT education, [S. l.]. – 2023. – 19(2). – P. 2411–1473. – URL: http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/971. (date of request: 22.11.2023). (In Russian)

9. *Medvedev A., Kuzenkov O.* Competitiveness Function for the Generalized Abrams-Strogatti Model in the Case of Non-constant Community Size. In: Balandin D., Barkalov K., Meyerov I. (eds) // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2023. Communications in Computer and Information Science. – 2024. – V. 1914. Springer, Cham.

10. *Alexandrova N.* Disappearance of languages and natural bilingualism // Multilingualism and transcultural practices. – 2023. – 20(3). – P. 436–455. – doi:10.22363/2312-8127-2023-20-3-436-455 (In Russian)

11. *Benjamins J.* A Neurolinguistic Theory of Bilingualism / Paradis 2004 Amsterdam, Philadelphia. – 2004.

12. *Alexandrova N.* Native language, foreign language and linguistic phenomena that have no name // Questions of linguistics. – 2004. – 3. – P. 88–100 (In Russian)

13. *Alexandrova N.* Bilingualism as an Unstable State / N. Alexandrova, V. Antonets, O. Kuzenkov, I. Nuidel, O. Shemagina, V. Yakhno // Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics; N. Alexandrova, V. Antonets, O. Kuzenkov, I. Nuidel, O. Shemagina, V. Yakhno // Advances in Intelligent Systems and Computing. – V. 1358. Springer.

14. *Medvedev A., Kuzenkov O.* Modeling the competition of languages in a bilingual community // Applied nonlinear Dynamics. – 2024. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. (In Russian)

15. *Volterra V.* Mathematical theory of the struggle for existence // Science, Moscow (1976) (In Russian)

16. *Kuzenkov O., Ryabova E.* Mathematical modeling of selection processes // Education, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod. – 2007. – 1(2). – P. 31–113 (In Russian)

17. URL=http://www.rb.com.ua/upload/medialibrary/PR_Ry_Ukr_2012.pdf (last 04 mart 2016)

18. *Panina N.* Ukrainian society 1994–2005: sociological monitoring. – Kiev: LLC "Publishing House Sofia", 2005. – P. 68. – URL=http://dif.org.ua/modules/pages/files/us5.pdf (last 29 feb 2008)

19. Regularities of the development of Ukrainian oral literary speech / O. O. Potebni // Institute of Foreign Studies. – Naukova Dumka-K., 1965. (In Russian)

20. State Statistics of Ukraine. – URL=https://www.ukrstat.gov.ua

21. *Dyachok M., Shapoval V.* Genealogical classification of languages // Novosibirsk, C. 32, (2002) URL=http://www.philology.ru/linguistics1/dyachok-shapoval-02.htm (last 25 sep 2024)

22. *Tishchenko K.* The Truth About similar Ukrainian languages / Ukrainian week # 39 (256) 28.09–4.10.09.2012

УДК 519.63+517.977

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Г. М. Абдуолимова, С. Т. Шарипова, Р. Г. Обидинова, Г. Ж. Долимова

Андижанский государственный университет

Аннотация. В настоящей статье исследуется конфликтно-игровые задачи, описываемые системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания, с точки зрения возможности завершения преследования за конечное время.
Ключевые слова: линейная дифференциальная игра, постоянные матрицы, управление преследователя, управление убегающего, Лебегу функциями, вектор-функция, терминальное множество.

Постановка задачи. В пространстве R^n рассматривается линейная дифференциальная игра преследования [2, 3, 6]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) + Cu(t) - D\vartheta(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in R^n$, $n \geq 1$; A, B, C, D — постоянные матрицы, размерности которых $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(n \times q)$, соответственно; h — фиксированное положительное число, т. е. величина запаздывания; $u(t) \in R^p$ — управление преследователя; $\vartheta(t) \in R^q$ — управление убегающего, соответственно. Управления преследующего и убегающего игрока $u(\cdot), \vartheta(\cdot)$ являются измеримыми по Лебегу функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям вида

$$\int_0^\infty |u(t)|^2 \, dt \leq 1, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty |\vartheta(t)|^2 \, dt \leq 1. \tag{3}$$

Измеримые функции $u = u(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие интегральным ограничениям (2), (3) назовем допустимыми управлениями преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Начальным положением для преследования (1) является n — мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$. Отрезок $-h \leq t \leq 0$, на котором задано начальное положение (функция), назовем начальным множеством и обозначим через X, т. е.

$$X = \left\{ \varphi(\cdot) : z(t) = \varphi(t), \quad z(0) = \varphi(0) \in R^n \setminus M, \quad -h \leq t \leq 0 \right\}, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ — абсолютно непрерывная функция, определенная на отрезке $[-h, 0]$.

Пусть терминальное множество M является линейным подпространством R^n.

Преследование начинается из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ и считается законченным в момент времени $t = t(\varphi(\cdot))$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество M. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Для системы с запаздыванием вида (1) в силу формулы Коши [6] имеет место представление

$$z(t) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)B\varphi(s)ds + \int_0^t K(t-s)[Cu(s) - D\vartheta(s)]ds. \tag{5}$$

Определение 1. Будем говорить, что в игре (1)–(3) из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot))$, $0 \leq T < +\infty$, если существует функция $u(t, \vartheta)$, $0 \leq t < +\infty$, $\vartheta \in R^q$, $u(t, \vartheta) \in R^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функ-

ции $\vartheta(t),\ \ 0 \le t < +\infty,\ \ \vartheta(t) \in R^q$, удовлетворяющей неравенству $\|\vartheta(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \le 1$, функция $u(t) = u(t, \vartheta(t)),\ \ 0 \le t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \le 1$ и траектория $z(t),\ \ 0 \le t < +\infty$ соответствующего управлениям $(u(t), \vartheta(t))$ уравнения (1) с учетом начального условия (4) попадает на терминальное множество M при некотором $t = t^* \in [0, T]$, т. е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$.

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot) \in X$ из которых в игре (1)–(3) возможно завершение преследования за конечное время T. Обозначим через π — матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на L, $\pi : R^n \to L$. Пусть τ — произвольное положительное число и $t \in [0, \tau]$.

Предположение 1. Существует число $\alpha,\ \ 0 \le \alpha < 1$, такое, что для всех положительных t выполняется включение

$$\pi K(t) DV \subset \alpha \pi K(t) CU,$$

где $U = \{u \in R^p : \|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \le 1\}$ и $V = \{\vartheta \in R^q : \|\vartheta(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \le 1\}$ — единичные шары в пространствах управлений.

Далее полагаем, что это предположение на параметры игры выполнено. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$.

Положим

$$\eta[\tau, \varphi(\cdot)] = \begin{cases} \dfrac{\xi[\tau, \varphi(\cdot)]}{|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]|} & \text{при } \xi[\tau, \varphi(\cdot)] \ne 0, \\ \eta^0 & \text{при } \xi[\tau, \varphi(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

где η^0 — произвольный единичный вектор из L вектор-функция $\xi[T, \varphi(\cdot)]$ определена в ниже:

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau) \varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h) B \varphi(t) dt,$$

Введем следующее многозначное отображение вида [4,5]:

$$\hat{W}(\tau, t, \vartheta) = \{\lambda \in R : \lambda \eta[t, \varphi(\cdot)] + \pi K(\tau) D\vartheta \in \sqrt{(1-\alpha)\left|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]\right|^{-1} \lambda + \alpha \left\|\vartheta(\cdot)\right\|^2} \cdot \pi K(\tau) CU\}, \quad (6)$$

где $(\tau, t, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$.

Далее, рассмотрим вспомогательную функцию, так называемую разрешающую функцию [4, 5]:

$$\lambda(\tau, t, \vartheta, \varphi(\cdot)) = \sup \hat{W}(\tau, t, \vartheta),$$

здесь в качестве супремума берется точная верхняя грань элемента множества $\hat{W}(\tau, t, \vartheta)$.

Теорема. Полагаем, что выполнено предположение 1 на параметры игры (1)–(3). Предположим, что существует момент времени $T = \tau(\varphi(\cdot))$ такой, что для всех допустимых управлений $\vartheta(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\left|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]\right| - \inf\left\{\int_0^\tau \lambda(\tau, \tau - t, \vartheta(t), \varphi(\cdot)) dt : \int_0^\tau \left\|\vartheta(t)\right\|^2 dt \le 1\right\} \le 0. \quad (7)$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2), (3) возможно завершение преследования за время $T = \tau(\varphi(\cdot))$.

Заключение

Научная новизна исследования состоит:

разработаны модификации первого метода задачи преследования и с помощью методов разрешающих функций предложены различные подходы для получения новых достаточных условий для возможности завершения преследования за конечное время.

Литература

1. *Азамов А., Кучкаров А. Ш., Саматов Б. Т.* О связи между задачами преследования, управляемости и устойчивости в целом в линейных системах с разнотипными ограничениями // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 71, № 2. – С. 259–263.

2. *Мамадалиев Н.* Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 1. – С. 129–148.

3. *Мамадалиев Н.* Об одной линейной задаче преследования при наличии запаздывания // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 86–101.

4. *Чикрий А. А., Белоусов А. А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 290–301.

5. *Саматов Б. А.* Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», Киев. – 2013. – № 4. – С. 16–32.

6. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М. : Мир, 1967. – 254 с.

УДК 517.9

ОПЕРАТОРЫ МОНОДРОМИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. Г. Баскаков[1], Г. В. Гаркавенко[1], Л. Н. Костина[1], Н. Б. Ускова[2]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе с использованием периодического эволюционного семейства определяется дифференциальный оператор с неограниченным операторным коэффициентом. Приводятся теоремы об эквивалентности этого оператора некоторым классам дифференциальных и разностных операторов с точки зрения совпадения состояний обратимости.
Ключевые слова: состояния обратимости, линейный дифференциальный оператор, метод эквивалентных операторов, оператор монодромии, семейство эволюционных операторов.

Введение

По семейству периодических эволюционных операторов, которое строится по дифференциальному уравнению с неограниченным периодическим операторным коэффициентом, определяется дифференциальный оператор. Вводятся понятия состояний обратимости и к исследуемому оператору применяется метод эквивалентных операторов. Получены теоремы об эквивалентности исходного оператора некоторым более простым классам операторов: разностному (ограниченному) оператору, оператору с постоянным операторным коэффициентом. Основная роль в исследовании принадлежит оператору монодромии.

1. Некоторые обозначения

Пусть X — комплексное банахово пространство и $End\ \mathrm{X}$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов в X. Через $F = F(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ обозначено одно из ниже перечисленных функциональных пространств: $L_p(\mathbb{R}, \mathrm{X})$, $p \in [1, \infty]$, суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) измеримых по Бохнеру на $\mathbb{R}$ (классов эквивалентности) функций; пространство $C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций; пространство $C_0(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ исчезающих на бесконечности функций $(x \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X}),\ \lim\limits_{|t|\to\infty} \|x\| = 0)$; пространство Степанова $S_p(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ локально суммируемых со степенью p измеримых на $\mathbb{R}$ функций, для которых конечна величина $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^1 \|x(t+s)\|^p\, ds$.

Пусть $U : \{(t,s) \in \mathbb{R}^2, -\infty < s \le t < +\infty\} \to End\ \mathrm{X}$ — семейство эволюционных операторов (см. например [1, 2]).

Следуя работам [1–5] по семейству U определим линейный оператор $L_U : D(L_U) \subset F \to F$ следующим образом. Область определения $D(L_U)$ состоит из таких функций $x \in F$, для которых существует $f \in F$, такая что для почти всех $s \le t$, $s, t \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$x(t) = U(t,s)x(s) - \int\limits_s^t U(t,\tau) f(t)\, d\tau$, полагая $L_U(x) = f$. Если U — семейство эволюционных операторов для линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ — семейство замкнутых линейных операторов, порождающих корректную задачу Коши [6], то $L_U = -\dfrac{d}{dt} + A(t)$ — абстрактный параболический оператор [4].

Применим к оператору L_U метод эквивалентных операторов (см. например [2, 7–9]), для чего введем необходимые понятия.

2. Состояния обратимости и метод эквивалентных операторов

Важным понятием метода эквивалентных операторов является понятие состояний обратимости.

Пусть $A : D(A) \subset \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$.

Определение 1. Рассмотрим следующие условия:

1) ядро оператора A состоит из одного нулевого элемента, $Ker\ A = \{0\}$, то есть оператор A инъективен;

2) размерность ядра $Ker\ A$ оператора A $1 \le \dim Ker\ A \le \infty$;

3) $Ker\ A$ — дополняемое подпространство либо в $D(A)$ с нормой графика оператора A, либо в X;

4) $\mathrm{Im}\ A = \overline{\mathrm{Im}\ A}$ (оператор A нормально разрешим), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus Ker\ A} \frac{\|Ax\|}{dist(x, Ker\ A)},$$

где $dist(x, Ker\ A) = \inf\limits_{x_0 \in Ker\ A} \|x - x_0\|$;

5) оператор A равномерно инъективен (корректен), т. е. $Ker\ A = \{0\}$, $\gamma(A) > 0$, в этом случае $\|Ax\| \ge \gamma \|x\|$;

6) $\mathrm{Im}\ A$ — замкнутое, дополняемое в X подпространство и, следовательно, $\gamma(A) > 0$;

7) $\mathrm{Im}\ A$ — замкнутое, дополняемое в X подпространство конечной коразмерности $1 \le codin\ \mathrm{Im}\ A = m \le \infty$, где $codin\ \mathrm{Im}\ A = \dim \mathrm{X}/\ \mathrm{Im}\ A$;

8) $\mathrm{Im}\ A = \mathrm{X}$, т. е. A — сюръективный оператор;

9) оператор A непрерывно обратим, т. е. $Ker\ A = \{0\}$ и $\mathrm{Im}\ A = \mathrm{X}$.

Приведенные в определении условия будем рассматривать как некоторое подмножество из $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Оператор A находится в состоянии обратимости S_0, если для оператора A выполняются все условия из совокупности $S_0 = \{k_1, k_2, ..., k_n\}$, $1 \le k_i \le 9$. Множество состояний обратимости оператора A обозначим $St_{inv}(A)$.

На практике нет необходимости перечислять все условия, которые выполняются для оператора A, а нужны лишь те, которые исследуются для него.

Определение 2. Линейные операторы $A_1 : D(A_1) \subset \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_1$, $A_2 : D(A_2) \subset \mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}_2$ называются эквивалентными, если $St_{inv}(A_1) = St_{inv}(A_2)$ и сильно эквивалентными, если они эквивалентны и их спектры совпадают.

Метод эквивалентных операторов состоит в построении для исследуемого оператора (обычно неограниченного) эквивалентного (обычно ограниченного) оператора, состояния обратимости которого можно легко исследовать.

В работах [1–3] впервые было показано, что для дифференциального оператора первого порядка эквивалентным является разностный оператор и предложена схема его построения.

Мы далее рассматриваем линейный дифференциальный оператор, определяемый в подходящем функциональном пространстве, задаваемый периодическим эволюционным семейством.

Определение 3. Семейство эволюционных операторов $U:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to \mathrm{X}$ называется периодическим, периода $\omega>0$, если $U(t+\omega,s+\omega)=U(t,s)$, $s\le t$, $s,t\in\mathbb{R}$. Оператор L_U называется дифференциальным оператором с периодическим операторным коэффициентом, если соответствующее эволюционное семейство периодическое.

Пусть $A\in S_1(\mathbb{R}_+, End\ \mathrm{X})$ и $A(t+\omega)=A(t)$. В [10] рассматривается дифференциальное уравнение $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$. Операторная функция Коши $U:\mathbb{R}\to End\ \mathrm{X}$, для него удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{cases}\dot{U}(t)=A(t)U(t),\\ U(0)=I.\end{cases}$$

В [10] показано, что $U(t+\omega)=U(t)U(\omega)$ и оператор $U(\omega)$ назывался оператором монодромии.

Лемма 1. *Если $A(t+\omega)=A(t)$, $t\in\mathbb{R}$ и есть корректная разрешимость задачи Коши, то эволюционное семейство периодично.*

Определение 4. Оператор $U(\omega,0)$ назовем оператором монодромии.

Так как для рассмотренного в [10] случая $U(\omega,0)=U(\omega)U^{-1}(0)=U(\omega)$, то определение 4 согласуется с определением из [10] оператора монодромии.

Для функционального пространства $F=F(\mathbb{R},\mathrm{X})$, следуя [2], введем ассоциативное ему дискретное функциональное пространство $F_d=F_d(\mathbb{Z},\mathrm{X})$. Для $L_p(\mathbb{R},\mathrm{X})$ ассоциативным является $l_p(\mathbb{Z},\mathrm{X})$, $1\le p\le\infty$; для $C_b(\mathbb{R},\mathrm{X})$ и $C_0(\mathbb{R},\mathrm{X})$ ассоциированными являются $l_\infty(\mathbb{Z},\mathrm{X})$ и $c_0(\mathbb{Z},\mathrm{X})$ соответственно.

Далее мы рассмотрим случай $\omega=1$. Рассмотрим разностный оператор D, действующий по формуле

$$(Dx)(n)=x(n)-U(n,n-1)x(n),\quad x\in F_d, n\in\mathbb{Z},$$

или, учитывая периодичность семейства U

$$(Dx)(n)=x(n)-U(1,0)x(n-1),\quad x\in F_d, n\in\mathbb{Z}.$$

Оператор D является разностным оператором с постоянным операторным коэффициентом, равным оператору монодромии $U(1,0)$ и к нему можно применить, например, результаты из [11].

Из [1, 2] вытекает

Теорема 1. *Множество состояний обратимости дифференциального оператора с периодическим операторным коэффициентом L_U совпадают с множеством состояний обратимости разностного оператора с постоянным операторным коэффициентом D: $St_{inv}(L_U)=St_{inv}(D)$.*

Теорема 2. *Для того, чтобы оператор D был обратим в любом из пространств $l_p, 1\le p\le\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(U(1,0))\cap\mathbf{T}=\varnothing$, где через $\mathbf{T}$ обозначена единичная окружность.*

Из [11, Теорема 6] следует

Теорема 3. *Если оператор D обратим в любом из пространств $l_p, 1\le p\le\infty$, то он обратим в любом из пространств l_q, $1\le q\le\infty$.*

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Оператор L_U, действующий в одном из пространств $L_p, 1\le p\le\infty$, обратим тогда и только тогда, когда $\sigma(U(1,0))\cap\mathbf{T}=\varnothing$. При этом, если он обратим в одном из пространств $L_p, 1\le p\le\infty$, то он обратим в любом из пространств $L_q, 1\le q\le\infty$.*

Для обратимого оператора D (или L_U) $St_{inv}(D)=St_{inv}(L_U)=\{9\}=\{1,8\}$.

Пусть теперь $U(1,0)$ — компактный оператор. Тогда из результатов работ [7–9] вытекает

Теорема 5. *Если $U(1,0)$ является компактным оператором, то $St_{inv}(D)=St_{inv}(L_U)=\{2,7\}$ с конечными показателями n и m.*

Введем в рассмотрение полугруппу $T_U:\mathbb{R}_+\to End\ \mathrm{F}$ вида $\big(T_U(t)x\big)(s)=U(s,s-t)x(s-t)$, $x\in F$, $s\in\mathbb{R}$, $t\ge 0$, очевидно, что

$$\left(T_U(1)x\right)(s) = U(s, s-1)x(s-1).$$

Из [1, теорема 2] следует

Теорема 6. *Множества состояний обратимости операторов* L_U *и* D_U *совпадают:* $St_{inv}(L_U) = St_{inv}(D_U)$, *где* $\left(D_U x\right)(s) = x(s) - U(s, s-1)x(s-1)$, $x \in \mathrm{F}$, $s \in \mathbb{R}$.

Имеет место также следующая теорема.

Теорема 7. $St_{inv}(L_U) = St_{inv}(L_B)$, *где* $L_B = -\dfrac{d}{dt} + \ln U(1,0)$, *если оператор монодромии таков, что существует его логарифм.*

Заключение

Основными результатами статьи являются условие обратимости оператора L_U, задаваемого с использованием периодического эволюционного семейства и результаты об эквивалентности оператора L_U операторам D_U, D и L_B. Эти результаты содержатся в теоремах 1, 4, 5, 6, 7, и существенным образом облегчают исследование оператора L_U.

Литература

1. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Функ. анализ и его прил. – 1996. – Т. 30, № 3. – С. 1–11.

2. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН – 2013. – Т. 68, № 1 (409). – С. 77–128.

3. *Баскаков А. Г.* Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов / А. Г. Баскаков // Матем. заметки – 1996. – Т. 59, № 6. – С. 811–820.

4. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во МГУ, 1978.

5. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения / В. В. Жиков // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – Т. 40, № 6. – С. 1380–1408.

6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М. : Наука, 1967.

7. *Баскаков А. Г.* Состояния обратимости некоторых классов операторов / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Л. Н. Костина, Н. Б. Ускова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2024. – № 2. – С. 27–35.

8. *Баскаков А. Г.* Об эквивалентных операторах / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Л. Н. Костина, Н. Б. Ускова // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2024. – Т. 235. – С. 3–14.

9. *Баскаков А. Г.* О состояниях обратимости оператора с компактной резольвентой / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Л. Н. Костина, Н. Б. Ускова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04-06 декабря 2023 года – Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», Издательство «Научно-исследовательские публикации» – 2024. – С. 36–40.

10. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М. : Наука. – 1970.

11. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов // Сиб. матем. журнал. – 2001. – Т. 42, № 6. – С. 1231–1242.

УДК 51-7

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Е. П. Белоусова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается макроэкономическая модель Гудвина, основанная на идее взаимосвязи между уровнем заработных плат, безработицей и инфляцией. Классическая экономическая теория предполагает цикличность происходящих процессов. В этой статье изложена их математическая интерпретация и показано как можно использовать математические методы для анализа и прогноза динамики основных экономических показателей.

Ключевые слова: макроэкономика, математические методы в экономике, модель Гудвина, метод Пуанкаре.

Введение

Один из наиболее популярных вариантов модели Гудвина представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + B(x) = 0. \tag{1}$$

В работе решается задача поиска условий существования предельного цикла в такой системе, вычисления его размера и доказательства устойчивости. Искомой функцией $x(t)$ здесь является отклонение суммарного дохода от положения равновесия. О функциях $A(x)$ и $B(x)$ известно, что они обладают свойством непрерывной дифференцируемости и $A(x)$ — четная по переменной x, а $B(x)$ — нечетная по x. Кроме того, относительно $A(x)$ есть предположение, что $A(x) < 0$.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - \alpha^2)\dot{x} + \beta^2 x = 0, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{2}$$

Здесь число μ — малый положительный параметр. Функция $A(x) = \mu(x^2 - \alpha^2)$, а функция $B(x) = \beta^2 x$. Исходя из условий задачи, предположим, что система (2) должна иметь устойчивое положение равновесия при определенных условиях, либо устойчивый предельный цикл, если состояние равновесия становится неустойчивым [1,2]. Линеаризуем коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ в окрестности нуля, разложив их в ряд Тейлора. Получим уравнение

$$\ddot{x} - \mu\alpha^2\dot{x} + \beta^2 x = 0. \tag{3}$$

Поскольку второй коэффициент отрицательный, то положение равновесия по спектральному признаку устойчивостью не обладает [3, 4]. Поэтому следующий шаг состоит в доказательстве существования предельного цикла [5]. Перепишем уравнение (2) в виде

$$\ddot{x} + \beta^2 x = \mu(\alpha^2 - x^2)\dot{x} \tag{4}$$

и введем обозначение

$$f(x, \dot{x}) = (\alpha^2 - x^2)\dot{x}. \tag{5}$$

Тогда имеет место система

$$\ddot{x} + \beta^2 x = \mu f(x, \dot{x}). \tag{6}$$

Если $\mu = 0$, то однородное уравнение $\ddot{x} + \beta^2 x = 0$ имеет решение

$$x_0(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t. \tag{7}$$

Его называют порождающим. Исходя из условий задачи, очевидно что, $x_0(0) = A \neq 0$ и $\dot{x}_0(0) = 0$. Тогда порождающее решение $x_0(t) = A\cos\beta t$. Без уменьшения общности, будем считать, что $\beta = 1$. Если $\mu \neq 0$ то периодические решения системы (6) в общем случае отсутству-

ют. Но для некоторых правых частей и при определенных начальных условиях такие решения можно найти [6, 7]. Очевидно, что при $\mu = 0$ уравнение (6) имеет периодическое решение с периодом 2π. Правая часть этого уравнения является аналитической по переменным $x, \dot{x}$ и параметру μ. Поэтому, согласно теореме Пуанкаре [6], решение $x(t)$ можно искать в виде ряда по степеням малого параметра

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots \tag{8}$$

Заметим, что функции $x_1(t), x_2(t), \ldots$ не будут обладать свойством периодичности. Решение $x(t)$ уравнения (6) имеет частоту, зависящую от параметра μ. Порождающая функция $x_0(t)$ имеет частоту равную 1. Устранить этот дисбаланс с помощью периодических функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ не представляется возможным. Поэтому введем новый масштаб времени, чтобы избавиться от возникающих затруднений. Пусть $s = \omega t$, где ω — искомая частота периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + x = \mu(\alpha^2 - x^2)\dot{x}, \tag{9}$$

зависящая от μ. В новом времени частота искомых колебаний уже не зависит от параметра, а период равен 2π. Уравнение (10) в новых обозначениях приобретает вид

$$\omega^2 \frac{d^2x}{ds^2} + x = \mu(\alpha^2 - x^2)\omega\frac{dx}{ds}. \tag{10}$$

Представим величины ω и ω^2 в виде степенных рядов. А именно

$$\omega = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \omega_n \tag{11}$$

и

$$\omega^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \Omega_n. \tag{12}$$

Первые слагаемые в (11) и (12) представляют собой циклическую частоту порождающего решения. Подставляя (11) и (12) в (10), получим уравнение

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \Omega_n\right)\frac{d^2x}{ds^2} + x = \mu(\alpha^2 - x^2)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \omega_n\right)\frac{dx}{ds}. \tag{13}$$

Его решение будем искать в виде ряда

$$x(s) = x_0(s) + \mu x_1(s) + \mu^2 x_2(s) + \ldots \tag{14}$$

Период функций $x_0(s)$ и $x(s)$ равен 2π. Поэтому теперь можно искать функции $x_1(s), x_2(s), \ldots$ как периодические функции периода 2π. Разложим по степеням параметра μ и нелинейную функцию

$$f\left(x, \omega\frac{dx}{ds}\right) = f_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n f_n(s), \tag{15}$$

где

$$f_0(s) = f\left(x_0(s), \frac{dx_0(s)}{ds}\right). \tag{16}$$

Подставляя представления (14) и (15) в уравнение (10), получим

$$(1 + \mu\Omega_1 + \mu^2\Omega_2 + \ldots)\left(\frac{d^2x_0}{ds^2} + \mu\frac{d^2x_1}{ds^2} + \mu^2\frac{d^2x_2}{ds^2} + \ldots\right) + x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots$$

Тогда имеет место

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_0}{ds^2} + x_0 = 0, \\ \dfrac{d^2x_1}{ds^2} + x_1 = -\Omega_1 \dfrac{d^2x_0}{ds^2} + f_0 = G_1(s), \\ \ldots \\ \dfrac{d^2x_n}{ds^2} + x_n = G_n(s). \end{cases} \tag{17}$$

Число A подлежит определению. Подставляя $x_0(s)$ в правую часть второго уравнения из (17), получим

$$\frac{d^2x_1}{ds^2} + x_1 = \Omega_1 A\cos s + f(A\cos s. - A\sin s) = G_1(s).$$

Решение этого уравнения представимо в виде

$$x_1(s) = X_1(s) + \int_0^s G_1(u)\sin(s-u)du,$$

где $x_1(s) = A_1\cos s + B_1\sin s$ общее решение уравнения

$$\frac{d^2x_1}{ds^2} + x_1 = 0,$$

а второе слагаемое представляет собой интеграл Дюамеля [8]. Тогда имеем

$$x_1(s) = A_1\cos s + B_1\sin s + \Omega_1 A\int_0^s \sin(s-u)\cos u du + \int_0^s f(A\cos u, -A\sin u)\sin(s-u)du. \tag{18}$$

Применим теперь условия периодичности на функцию x_1 и ее первую производную. Получим

$$x_1(0) = x_1(2\pi) \quad \text{и} \quad \frac{dx_1}{ds}(0) = \frac{dx_1}{ds}(2\pi).$$

Подставляя в эти равенства представление функции $x_1(s)$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(A\cos u, -A\sin u)\sin u du = 0, \\ \Omega_1 = -\dfrac{1}{A\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(A\cos u, -A\sin u)\cos u du. \end{cases} \tag{19}$$

Из первого уравнения системы (19) находим $A = 2\alpha$. Второе уравнение из (19) позволяет определить поправку на частоту автоколебаний [5, 9]. Так что в первом приближении $\omega^2 \approx 1 + \mu\Omega_1$. В нашем случае $\Omega_1 = 0$. Покажем, что предельный цикл в изучаемой системе будет устойчивым. Преобразуем уравнение второго порядка (9) к системе двух уравнений первого порядка. А именно

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu(\alpha^2 - x^2)y. \end{cases} \tag{20}$$

Обозначим правые части системы (20) следующим образом. Пусть $P(x,y) = y$ и $Q(x,y) = -x + \mu(\alpha^2 - x^2)$. Устойчивость предельного цикла и устойчивость в смысле Ляпунова соответствующих периодических движений [10, 11] определяется знаком характеристического показателя

$$h = \frac{1}{T}\int_0^T (P'_x(\varphi(t),\psi(t)) + Q'_y(\varphi(t),\psi(t))dt, \tag{21}$$

где $x = \varphi(t), y = \psi(t), T$ — период решения. В нашем конкретном случае $\varphi(t) = 2\alpha\cos t$, $\psi(t) = -2\alpha\sin t$, $T = 2\pi$. Предельный цикл устойчив, если $h < 0$ и неустойчив, если $h > 0$. Проведя необходимые вычисления, найдем показатель Ляпунова для нашей задачи. Он имеет вид

$$h = -\mu\alpha^2 < 0. \tag{22}$$

Заключение

Таким образом, изложенные вычисления и доказательства показывают, что при малых значениях параметра μ уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu(\alpha^2 - x^2)\dot{x},$$

имеет предельный цикл, радиус которого равен 2α, а частота соответствующих колебаний равна собственной частоте системы при $\mu = 0$. Это означает, что количественный размер предельного цикла, который отображает периодические колебания, возникающие в экономической системе Гудвина определяется значением, входящего в нее параметра α. Кроме того, этот предельный цикл является устойчивым, в отличие от нулевого положения равновесия. Исходя из полученных результатов, очевидно, что желаемая устойчивая цикличность экономического процесса, позволяющая благополучно развиваться государству возникает далеко не всегда. Для этого должны выполняться ряд довольно жестких требований. Кроме того, сделать выводы о том в какие рамки будет укладываться эта цикличность тоже довольно сложно с практической точки зрения. Но если это удается, то можно строить долгосрочные прогнозы относительно развития и уровня основных экономических показателей, которые это развитие будут обеспечивать.

Литература

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Издательство МЦНМО, 2024. – 342 с.

2. *Боровских А. В.* Дифференциальные уравнения: учебник и практикум для академического бакалавриата: [для студ. вузов, обуч. по естественно-науч. направлениям]: в 2 ч. / А. В. Боровских, А. И. Перов. – Ч. 1. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2017. – 326 с.

3. *Андреев А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М. : Наука, 1966. – 568 с.

4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М. : Лань, 2023. – 477 с.

5. *Андронов А. А.* Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний // Собр. трудов. – М. : Изд-во АН СССР, 1956. – С. 41.

6. *Горяченко В. Д.* Элементы теории колебаний. – Изд-во Красноярского университета, 1995. – 429 с.

7. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М. : Наука, 1975. – 244 с.

8. *Малкин И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М. : Гостехиздат, 1949. – 244 с.

9. *Харкевич А. А.* Автоколебания. Государственное издательство технико-теоретической литературы. – М. : Гостехиздат, 1954. – 170 с.

10. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М. : Наука, 1971. – 305 с.

11. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М. : Физматгиз, 1959. – 211 с.

УДК 517.923

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИЙ НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

А. С. Бердников, А. Л. Буляница, А. А. Евстрапов

Институт аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург

Аннотация. В работе описан алгоритм построения приближенных численно-аналитических решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение зависит от параметров и учитывает начальные условия. Алгоритм обобщает метод коллокаций К. Ланцоша и обеспечивает минимизацию ошибки приближенного решения, понимаемую как разность между приближенным и точным решением. В качестве примера реализации алгоритма исследуется приближенное решение уравнения Матье.
Ключевые слова: приближенное аналитическое решение, обыкновенное дифференциальное уравнение, система обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнение Матье, метод коллокаций К. Ланцоша, точки коллокации, минимизация ошибки, дифференциальная и интегральная невязка, полиномы Чебышева первого рода, корни полиномов Чебышева, теория Флоке — Ляпунова.

Введение

Многие математические модели физических систем описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В связи с этим аналитические решения таких уравнений являются важным инструментом математической физики, и справочники, в которых приведены такие решения, востребованы [1]. При этом, несмотря на огромный объем работы, проведенный математиками в этом направлении, доля уравнений, для которых найдены эти решения, мала. Появление численных методов и их реализация с помощью современных ЭВМ явилось прорывом в этой области и позволило существенно расширить наши знания о поведении соответствующих математических моделей.

К сожалению, в большинстве случаев, требуется получить не просто одиночное решение, а решение, зависящее от параметров модели, предпочтительно, в аналитической форме. Большинство численных методов позволяют получить решение только при фиксированном (заданном) наборе параметров. Это затрудняет исследование свойств модели и усложняет оптимизацию описываемой ею системы (объекта) в зависимости от ее параметров.

В данной работе рассмотрен алгоритм конструирования приближенных решений линейных ОДУ в аналитической форме, зависящей от параметров, входящих в уравнение, и заданных начальных условий. Алгоритм обобщает метод коллокаций Ланцоша [2]. В отличие от исходного метода Ланцоша, ориентированного на минимизацию невязки уравнения, этот алгоритм ориентирован на минимизацию ошибки приближенного решения, понимаемую, как разность между приближенным и точным решениями.

1. Некоторые свойства решений уравнения Матьё

Работа алгоритма демонстрируется на примере конструирования приближенного решения уравнения Матье, зависящего от его параметров (a, q) и начальных условий $x(0),\ x'(0)$. Отличительной особенностью рассматриваемого уравнения (как и любой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами) является то, что достаточно знать фундаментальную систему решений на одном периоде независимой переменной, чтобы иметь возможность вычислять решение в любой точке числовой прямой.

Уравнение Матье описывает различные процессы, например, параметрические колебания с периодически меняющейся массой или жесткостью системы, колебания при параметрическом изменении нагрузки или точки подвеса и т. п. В книге [3] приложения уравнения и функций Матье описываются более детально. В частности, среди приложений функций Матье также указаны: искажение амплитуды в громкоговорителе с подвижной катушкой, электрическая цепь с периодически меняющимся сопротивлением, колебание струны с периодически меняющимся натяжением.

Преобразуем уравнение Матье, представленное в каноническом виде как [3]

$$x''(t)+(a-2q\cos 2t)\,x(t)=0, \tag{1}$$

к эквивалентной форме в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами:

$$\begin{cases} x' = p, \\ p' = -(a-2q\cos 2t)\,x, \end{cases} \qquad x(0)=x_0,\ \ p(0)=p_0. \tag{2}$$

Система уравнений (2) описывает гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H(p,x)=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}x^2(a-2q\cos 2t). \tag{3}$$

Согласно теории Флоке — Ляпунова [4, 5] решения системы (2) можно представить как

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} W_{xx}(t) & W_{xp}(t) \\ W_{px}(t) & W_{pp}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ P(t) \end{pmatrix}=\mathbf{W}(t)\,\mathbf{Y}(t), \tag{4}$$

где $\mathbf{W}(t)$ — периодическая либо антипериодическая (то есть меняющая знак при сдвиге на период) квадратная матрица 2×2, имеющая период π и зависящая от параметров a,q, но не от начальных условий, а $\mathbf{Y}(t)$ — решение некоторой системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которое может быть записано в аналитическом виде.

Действительно, в силу линейности системы (2) её общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_x(t) & X_p(t) \\ P_x(t) & P_p(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}=\mathbf{\Phi}(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $X_x(t),\ P_x(t),\ X_p(t),\ P_p(t)$ это фундаментальные решения системы (2) с начальными условиями $x_0=1,\ p_0=0$ и $x_0=0,\ p_0=1$ соответственно. Поскольку коэффициенты линейной системы уравнений (2) являются периодическими с периодом $T=\pi$, то функции $x(t+T)$, $p(t+T)$ также удовлетворяют системе уравнений (2) и. следовательно, представляют собой суперпозицию фундаментальных решений:

$$\begin{pmatrix} x(t+T) \\ p(t+T) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_x(t+T) & X_p(t+T) \\ P_x(t+T) & P_p(t+T) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_x(t) & X_p(t) \\ P_x(t) & P_p(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_T \\ p_T \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Значения $x_T=x(T),\ p_T=p(T)$ связаны с $x_0=x(0),\ p_0=p(0)$ линейным соотношением

$$\begin{pmatrix} x_T \\ p_T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_x(T) & X_p(T) \\ P_x(T) & P_p(T) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_{xx}^T & V_{xp}^T \\ V_{px}^T & V_{pp}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}=\mathbf{V}_T\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Матрица $\mathbf{V}_T$ не зависит от начальных значений, но зависит от параметров a,q. Она описывает важные свойства решения уравнения Матьё и, в частности, определяет устойчивость либо неустойчивость решений системы (2) при данных параметрах.

В силу гамильтоновости уравнений (2) выполняется условие $V_{xx}^T V_{pp}^T - V_{xp}^T V_{px}^T = 1$, а в силу симметричности коэффициентов системы (2) относительно точки середины периода $t_* = \pi/2$

выполнено условие $V_{xx}^T = V_{pp}^T$. Возможны следующие варианты параметрического представления коэффициентов матрицы $\mathbf{V}_T$, где $L, .\varphi$ это некоторые константы:

А) если $-1 < V_{xx}^T < +1$, то $V_{xx}^T = V_{pp}^T = \cos\varphi,\ V_{xp}^T = L\sin\varphi,\ V_{px}^T = (-1/L)\sin\varphi,$

Б) если $V_{xx}^T > +1$, то $V_{xx}^T = V_{pp}^T = \cosh\varphi,\ V_{xp}^T = L\sinh\varphi,\ V_{px}^T = (1/L)\sinh\varphi,$

В) если $V_{xx}^T < -1$, то $V_{xx}^T = V_{pp}^T = -\cosh\varphi,\ V_{xp}^T = L\sinh\varphi,\ V_{px}^T = (1/L)\sinh\varphi.$

Для каждого из этих случаев можно определить вспомогательные матрицы,

$$\mathbf{V}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi t/T) & L\sin(\varphi t/T) \\ (-1/L)\sin(\varphi t/T) & \cos(\varphi t/T) \end{pmatrix}, \tag{8а}$$

$$\mathbf{V}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi t/T) & L\sinh(\varphi t/T) \\ (1/L)\sinh(\varphi t/T) & \cosh(\varphi t/T) \end{pmatrix}, \tag{8б}$$

$$\mathbf{V}(t) = \begin{pmatrix} -\cosh(\varphi t/T) & L\sinh(\varphi t/T) \\ (1/L)\sinh(\varphi t/T) & -\cosh(\varphi t/T) \end{pmatrix}, \tag{8в}$$

которые удовлетворяют условиям $\mathbf{V}(T) = \mathbf{V}_T$. Кроме того, для случаев (8а) и (8б) выполняется условие $\mathbf{V}(t_i)\mathbf{V}(t_2) = \mathbf{V}(t_i + t_2)$, а для случая (8в) условие $\mathbf{V}(t_i)\mathbf{V}(t_2) = -\mathbf{V}(t_i + t_2)$. Равенство (5) можно преобразовать к виду

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}(-t)\mathbf{V}(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t)\mathbf{V}(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где матрица $\mathbf{W}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}(-t)$ в силу условий (6), (7) будет периодической (для случаев (8а) и (8б)) либо анти-периодической (для случая (8в)):

$$\begin{pmatrix} x(t+T) \\ p(t+T) \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(t+T)\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}_T\begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Phi}(t+T) \equiv \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}_T,$$

$$\mathbf{\Phi}(t+T)\mathbf{V}(-t-T)\mathbf{V}(t)\mathbf{V}(T) \equiv \pm\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}(-t)\mathbf{V}(t)\mathbf{V}(T),$$

$$\mathbf{W}(t+T) \equiv \pm\mathbf{W}(t),$$

где матрица $\mathbf{V}(t)$ невырожденная.

Таким образом, для того, чтобы построить для выбранных значений параметров a, q и произвольных начальных условий x_0, p_0 приближенное решение уравнения Матье при любых $t \geq 0$, достаточно получить приближенную матрицу фундаментальных решений на интервале $t \in [0, \pi]$. Это позволяет определить матрицу $\mathbf{V}_T$, что, в свою очередь, позволяет вычислять как матрицу $\mathbf{V}(t)$ при любых значениях переменной t, так и периодическую (антипериодическую) матрицу $\mathbf{W}(t)$ на интервале $t \in [0, \pi]$.

2. Алгоритм коллокаций, ориентированный на ошибку решения

Рассмотрим на конечном интервале $t \in [t_a, t_b]$ систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1N}(t)x_N(t) + b_1(t), \\ \cdots \\ x_N'(t) = a_{N1}(t)x_1(t) + a_{N2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{NN}(t)x_N(t) + b_N(t), \\ x_1(t_a) = x_{10}, x_2(t_a) = x_{20}, \ldots, x_N(t_a) = x_{N0}. \end{cases} \tag{10}$$

В векторной форме эта система записывается как

$$\mathbf{x}'(t) = L\left[\mathbf{x}(t)\right], \tag{11}$$

где L — соответствующий линейный оператор.

Идея тау-метода Ланцоша [2] состоит в замене точных дифференциальных уравнений (11) на приближенные дифференциальные уравнения

$$\mathbf{x}(t) - L\left[\mathbf{x}(t)\right] = \mathbf{f}(t), \tag{12}$$

где вектор-функция невязки $\mathbf{f}(t)$ дифференциального уравнения (дифференциальная невязка) выбирается таким образом, чтобы а) система (12) имела точное решение в аналитической форме, б) невязка $\mathbf{f}(t)$ была как можно меньше в смысле минимаксной нормы. В таком случае точное решение уравнений (12) может использоваться в качестве приближенного решения уравнений (11), причем ожидается, что ошибка будет мала в силу малости невязки $\mathbf{f}(t)$.

К сожалению, такая конструкция возможна только для уравнений специального вида — в частности, для дифференциальных уравнений с полиномиальными либо тригонометрическими коэффициентами [2]. Для расширения классов уравнений, для которых может применяться подобный подход, был предложен метод коллокаций Ланцоша [2]. Здесь тождественное выполнения равенства (12) заменяется на выполнение равенства (12) в отдельных точках (точках коллокации), а минимизация невязки $\mathbf{f}(t)$ на исследуемом интервале заменяется на обращение невязки в ноль в точках коллокации. В качестве точек коллокации используются нули многочленов Чебышева первого рода, что предположительно должно обеспечивать малое отклонение невязки от нуля в остальных точках рассматриваемого интервала. Подробное изложение и обоснование соответствующего алгоритма можно найти в [2].

Однако минимизация невязки дифференциального уравнения не эквивалентна минимизации ошибки (разности между приближенным решением и точным решением). Примером могут служить уравнения $x''(t) + x(t) = 0$ и $x''(t) + x(t) = \varepsilon \sin(t)$, где при сколь угодно малой невязке в правой части решения с одинаковыми начальными условиями расходятся сколь угодно далеко, если взять достаточно большой интервал времени. В данной статье рассматривается модификация метода коллокаций Ланцоша, целью которой является минимизация ошибки приближенного решения.

Пусть приближенное решение $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ системы линейных дифференциальных уравнений (10) ищется в виде линейной комбинации

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1,M} \mathbf{c}_k \varphi_k(t), \tag{13}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_M(t)$ — фиксированные базисные функции (например, полиномы от независимой переменной t), а $\mathbf{c}_k = (c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{kN})$, где $k = 1, 2, \ldots M$ — неизвестные коэффициенты, которые требуется найти. После подстановки приближенного решения (13) в уравнения (10) получаются точно решаемые уравнения (11) с ненулевыми правыми частями (дифференциальными невязками системы уравнений (10)), которые представляют собой линейные комбинации известных функций с пока что неизвестными коэффициентами.

От дифференциальной формы (10) перейдем к эквивалентной интегральной форме

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} + \int_{t_a}^{t} \left(a_{11}(\tau) x_1(\tau) + \cdots + a_{1N}(\tau) x_N(\tau) + b_1(t)\right) d\tau, \\ \ldots \\ x_N(t) = x_{N0} + \int_{t_a}^{t} \left(a_{N1}(\tau) x_1(\tau) + \cdots + a_{NN}(\tau) x_N(\tau) + b_N(t)\right) d\tau. \end{cases} \tag{14}$$

В векторной форме система уравнений (14) записывается как

$$\mathbf{x}(t) = J\left[\mathbf{x}(t)\right], \tag{15}$$

где J — соответствующий интегральный линейный оператор. После подстановки приближённого решения (13) в уравнения (15) получаем систему точно решаемых интегральных уравнений

$$\mathbf{x}(t) - J\left[\mathbf{x}(t)\right] = \mathbf{F}(t), \tag{16}$$

где $\mathbf{F}(t)$ это интегральная невязка уравнений (10), представляющая собой линейную комбинацию фиксированных функций с произвольно выбираемыми коэффициентами. Задача состоит в таком выборе этих коэффициентов, чтобы минимизировать ошибку между решением приближенных систем уравнений (12) и (16) и решением точных систем уравнений (11) и (15). Оптимальная дифференциальная невязка $\mathbf{f}(t)$ в уравнениях (12) является производной первого порядка от оптимальной интегральной невязки $\mathbf{F}(t)$ в уравнениях (16).

Теорема Пикара [5] о существовании и единственности решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений утверждает, что итерационный процесс

$$\mathbf{x}_{k+1}(t) = J\left[\mathbf{x}_k(t)\right] \tag{17}$$

независимо от выбора начальной функции быстро сходится к некоторому стационарному значению, которое тем самым будет тем самым единственным решением как системы уравнений (15), так и системы уравнений (11). Кроме того, из этой теоремы следует, что справедлива оценка

$$\left\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t)\right\| \le C\left\|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\right\|, \tag{18}$$

где $\mathbf{x}(t)$ это точное решение, $\|\cdots\|$ это минимаксная норма на рассматриваемом интервале, C это некоторая константа, которая зависит от коэффициентов системы уравнений и рассматриваемого интервала, но не зависит ни от начальных условий, ни от пробных решений $\mathbf{x}_k(t)$. Поэтому минимизация интегральной невязки $\mathbf{F}(t)$ приводит к минимизации ошибки приближенного решения, если в качестве приближенного решения использовать точное решение системы интегральных уравнений (16).

На рассматриваемом интервале интегральная невязка $\mathbf{F}(t)$ всегда может быть приближена некоторым полиномом. Требование минимизации $\mathbf{F}(t)$ означает, этот полином должен быть пропорционален полиному Чебышева первого рода, наименее отклоняющемуся от нуля на интервале $[-1,+1]$ и пересчитанному к интервалу $t \in [t_a, t_b]$. Тогда система интегральных уравнений (16) приобретает вид

$$\mathbf{x}(t) - J\left[\mathbf{x}(t)\right] = \mathbf{s}T_K(t), \tag{19}$$

где $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots s_N)$ это дополнительные неизвестные коэффициенты, $T_K(t)$ это полином Чебышева первого рода степени K, пересчитанный к интервалу $t \in [t_a, t_b]$, а приближенное равенство заменено точным. Выбор нужного значения для степени K будет выполнен позднее.

Из уравнений (19) при $t = t_a$ получаются начальные условия для решения (13):

$$\sum_{k=1,M} \mathbf{c}_k \varphi_k(t_a) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{s}T_K(t_a). \tag{20}$$

Так как дифференциальная невязка $\mathbf{f}(t)$ это производная интегральной невязки $\mathbf{F}(t)$, то из уравнений (12), рассматриваемых в коллокационных точках t_j, получаются условия

$$\sum_{k=1,M} \mathbf{c}_k \varphi_k'(t_j) - L\left[\sum_{k=1,M} \mathbf{c}_k \varphi_k(t_j)\right] = \mathbf{s}\frac{dT_K(t_j)}{dt}. \tag{21}$$

Перейдём к выбору степени K для полинома Чебышева. Есть MN свободных коэффициентов для приближенного решения (13) и N свободных множителей для интегральной невязки (19). Так как уже имеются N уравнений (20), то нужно M коллокационных точек t_j, чтобы получить MN дополнительных уравнений (21). При таком выборе есть $(M+1)N$ уравнений и $(M+1)N$ неизвестных, то есть набор линейных алгебраических уравнений позволяет одно-

значно определить все неизвестные коэффициенты. Поскольку M коллокационных точек с заданными значениями невязки соответствуют аппроксимационному многочлену степени $M-1$, то производная многочлена Чебышева $T_K(t)$ имеет степень $M-1$, а сам многочлен $T_K(t)$ имеет степень $K=M$. Наконец, согласно условию оптимальной аппроксимации полиномами [2] эти M вспомогательных точек t_j должны совпадать с нулями многочлена Чебышева первого рода степени M, который пересчитан к интервалу $t\in[t_a,t_b]$.

3. Приближенные решения уравнения Матьё

В соответствии с результатами раздела 1 для того, чтобы иметь возможность вычислять решение уравнения Матьё (1) при любых значениях переменной t, достаточно знать приближенные выражения для матрицы фундаментальных решений при $t\in[0,\pi]$. Алгоритм, изложенный в предыдущем разделе, позволяет конструировать приближенные аналитические выражения, зависящие в аналитическом виде от параметров (a,q), но получаемые на выходе выражения достаточно громоздки. Для иллюстрации работы алгоритма ограничимся двумя численными примерами, в которых приближённые решения конструируются в виде полиномов 7-й степени при конкретных численных значениях параметров (a,q):

$$\begin{cases} X_x(t)\approx a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5+a_6t^6+a_7t^7,\\ P_x(t)\approx b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3+b_4t^4+b_5t^5+b_6t^6+b_7t^7,\\ X_p(t)\approx c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+c_4t^4+c_5t^5+c_6t^6+c_7t^7,\\ P_p(t)\approx d_0+d_1t+d_2t^2+d_3t^3+d_4t^4+d_5t^5+d_6t^6+d_7t^7. \end{cases} \tag{22}$$

Пусть $a=0.1,\ q=0.5$. При этих параметрах матрица $\mathbf{V}_T$, определяющая пересчёт решения из точки $t=0$ к точке $t=\pi$, соответствует режиму устойчивости:

$$\mathbf{V}_T=\begin{pmatrix} 0.881 & 5.236\\ -0.0427 & 0.881\end{pmatrix}.$$

Для этого режима коэффициенты приближенного решения (22) имеют значения:

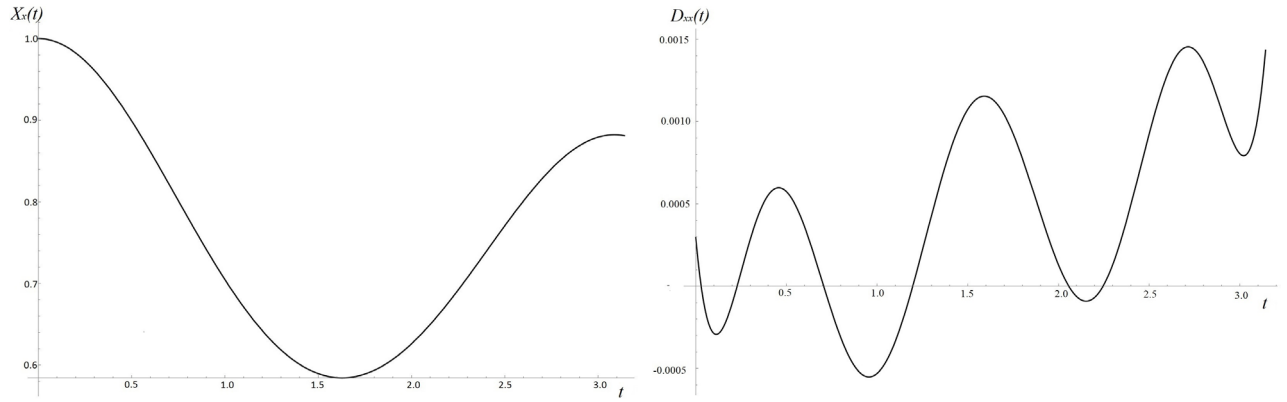
$$a_0=0.9997,\ a_1=0.0120,\ a_2=-0.5255,\ a_3=0.1430,\ a_4=0.1330,$$
$$a_5=-0.0664,\ a_6=0.0094,\ a_7=-0.0004,$$
$$b_0=0.0000,\ b_1=-0.8899,\ b_2=-0.1863,\ b_3=1.5579,\ b_4=-1.2028,$$
$$b_5=0.4497,\ b_6=-0.0924,\ b_7=0.0082,$$
$$c_0=-0.0008,\ c_1=1.0349,\ c_2=-0.2455,\ c_3=0.4658,\ c_4=-0.7173,$$
$$c_5=0.5469,\ c_6=-0.1626,\ c_7=0.0161,$$
$$d_0=1.0013,\ d_1=-0.0426,\ d_2=-0.3159,\ d_3=-0.0127,\ d_4=0.3098,$$
$$d_5=0.1191,\ d_6=-0.1371,\ d_7=0.0227.$$

На рис. 1а показаны графики приближенного и численно полученного решения для функции $X_x(t)$ (графики визуально совпадают), а график ошибки приближенного решения $D_{xx}(t)$ представлен на рис. 1б.

Другие компоненты фундаментального решения, а именно $P_x(t)$, $X_p(t)$ и $P_p(t)$ имеют диапазоны изменения от –0.4 до 0.3, от 0 до 5.3 и от 0.9 до 2.8 соответственно. При этом, максимальные по величине ошибки приближенного решения составляют 0.0025, 0.0033 и 0.009.

Пусть $a=0.5,\ q=0.25$. Матрица $\mathbf{V}_T$, определяющая пересчёт решения из точки $t=0$ к точке $t=\pi$, соответствует режиму неустойчивости:

$$\mathbf{V}_T=\begin{pmatrix} 4.4539 & 7.4789\\ 2.5187 & 4.4539\end{pmatrix}.$$



а *б*

Рис. 1. График решения $X_x(t)$ (а) и соответствующей ошибки $D_{xx}(t)$ (б)

Для этого режима коэффициенты приближенного решения (22) имеют значения:

$$a_0 = 0.9997,\ a_1 = 0.0143,\ a_2 = -0.0965,\ a_3 = 0.2315,\ a_4 = -0.1677,$$
$$a_5 = 0.1282,\ a_6 = -0.0389,\ a_7 = 0.0039,$$
$$b_0 = 0.0002,\ b_1 = -0.0045,\ b_2 = -0.0250,\ 0.5290,\ b_4 = -0.3772,$$
$$b_5 = 0.2263,\ b_6 = -0.0780,\ b_7 = 0.0096,$$
$$c_0 = -0.0005,\ c_1 = 1.0198,\ c_2 = -0.1365,\ c_3 = 0.3436,\ c_4 = -0.4086,$$
$$c_5 = 0.3047,\ c_6 = -0.0871,\ c_7 = 0.0084,$$
$$d_0 = 1.0005,\ d_1 = -0.0147,\ d_2 = 0.0441,\ d_3 = 0.0108,\ d_4 = 0.1268,$$
$$d_5 = 0.1077,\ d_6 = -0.0855,\ d_7 = 0.0131.$$

Максимальные по величине ошибки приближенных решений для функций $X_x(t)$, $P_x(t)$, $X_p(t)$ и $P_p(t)$, составляют 0.0012, 0.0021, 0.0014 и 0.003, что также свидетельствует о высокой точности приближения.

Заключение

В данной работе приводится и обосновывается новый алгоритм коллокаций для приближенного численно-аналитического решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Алгоритм ориентирован на минимизацию ошибки (разности между точным и приближенным решением). На примере решения уравнения Матьё показана высокая точность численно-аналитических решений, получаемых с помощью данного алгоритма.

Благодарности

Работа выполнена в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-00439-24-00.

Александр Бердников благодарит д-ра А. Компаньера (Aaldert Compagner) с факультета вычислительной физики Дельфтского технического университета (TU Delft) за финансовую и дружескую поддержку совместных работ по датчикам псевдослучайных чисел в 1990–1996 гг., во время которых были заложены идейные основы данного исследования.

Литература

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. / Э. Камке. – 4-е изд., испр. – Москва : Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. – 576 с.

2. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа: Справочное руководство. Пер. с англ. М. З. Кайнера; Под ред. А. М. Лопшица. / К. Ланцош – Москва : Физматгиз, 1961. – 524 с.

3. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. Пер. с англ. / Н. В. Мак-Лахлан. – Москва : Изд-во иностранной литературы, 1953. – 479 с.

4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер – 5-е изд. – Москва : Физматлит, 2010. – 560 с.

5. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – 3-е изд., стереотипное. – Москва : Изд-во МЦНМО, 2024–344 с.

УДК 514.758.2, 531.12

К ВОПРОСУ ОБ УРАВНЕНИИ ЭВОЛЮТЫ КРИВОЙ

С. Б. Богданова, С. О. Гладков

Московский авиационный институт

Аннотация. Предложен универсальный подход к составлению уравнения эволюты кривой, избегая ее параметрического задания. Получено уравнение эволюты в полярных координатах, а также выражение для ее кривизны. С помощью компьютерного моделирования приведены эволюты для спирали Архимеда, трехлепестковой розы и кардиоиды, а также проиллюстрировано графическое сравнение всех этих кривых.
Ключевые слова: кривизна кривой, эволюта, полярные координаты, компьютерное моделирование.

Введение

Важной характеристикой плоской гладкой кривой, как хорошо известно [1–3], является ее кривизна, по определению равная

$$K = \frac{d\alpha}{ds},$$

где $d\alpha$ дифференциал угла, образованного касательной к кривой и горизонтальной осью системы координат, а ds — соответствующий дифференциал длины дуги кривой. Величина $R = \frac{1}{|K|}$, радиус кривизны, определяет так называемый центр кривизны N, расположенный на нормали к данной кривой (рис. 1). Геометрическое место точек центров кривизны называется эволютой кривой.

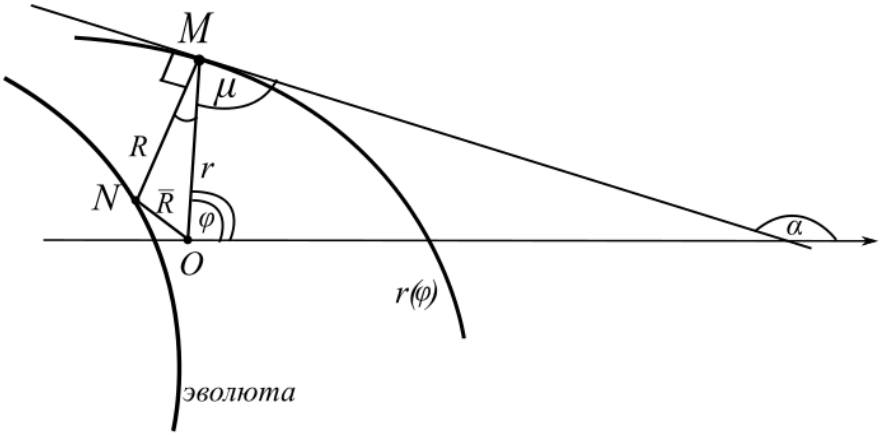


Рис. 1. В точке M кривой гладкой кривой проведены касательная и нормаль, на которой отложен отрезок $MN = R = \frac{1}{K}$, конец которого и определяет центр кривизны кривой

В [4] приведены параметрические уравнения эволюты

$$\alpha(x) = x - \frac{y'\left(1+y'^2\right)}{y''},\ \beta(x) = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

для кривой, заданной в декартовых координатах $y = y(x)$ и

$$\alpha(t) = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y'' - x''y'},\ \beta(t) = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y'' - x''y'}$$

для кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

В обоих случаях вывод основывается на совместном решении уравнений окружности кривизны и нормали к кривой.

В настоящем сообщении для вывода уравнения эволюты мы предложим иной, универсальный подход, позволяющий получить ее уравнение в той же форме, что и заданная кривая, избегая параметрического задания.

1. Вывод основных уравнений

Рассмотрим гладкую кривую $r = r(\varphi)$, заданную в полярной системе координат (рис. 1), где точка O — полюс системы. Угол μ между радиус-вектором r и касательной к кривой, очевидно, составляет $\mu = \alpha - \varphi$, где φ — полярный угол точки M.

Нетрудно показать [4], что

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{r'}{r}, \tag{1}$$

где $r' = \dfrac{dr}{d\varphi}$.

Простое применение теоремы косинусов в треугольнике $\triangle OMN$ позволяет записать, что:

$$\overline{R}^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = r^2 + R^2 - 2rR\sin\mu, \tag{2}$$

где $\overline{R}$ радиус-вектор эволюты, а R — радиус кривизны заданной кривой $r = r(\varphi)$, причем [1–4]

$$R = \frac{1}{K} = \frac{\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|}. \tag{3}$$

Учитывая, что $\sin\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1 + ctg^2\mu}} = \dfrac{r}{\sqrt{r'^2 + r^2}}$, формула (2) примет вид:

$$\overline{R}(\varphi) = \left(r^2 + \frac{\left(r^2 + r'^2\right)^3}{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|^2} - \frac{2r^2\left(r^2 + r'^2\right)}{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Выражение (4) и представляет собой впервые полученное уравнение эволюты в полярной системе координат. Поставляя в него уравнение кривой $r = r(\varphi)$, легко получить уравнение как самой эволюты, так и выражение для кривизны эволюты $\overline{K}$. Для получения последней мы воспользуемся выражением (3), согласно которому:

$$\overline{K} = \frac{\overline{R}^2 + 2\overline{R}'^2 - \overline{R}\overline{R}''}{\left(\overline{R}^2 + \overline{R}'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

В (5) числитель не взят по абсолютной величине как это принято в [1–4], поскольку в авторских работах [5–8] было показано, что для решения физических задач методом подвижного базиса, очень важно учитывать именно знак кривизны кривой.

В следующем разделе мы приведем результаты компьютерного моделирования полученных результатов (4) и (5) для хорошо известных полярных кривых: спирали Архимеда, трехлепестковой розы и кардиоиды (см. рис. 2–7). Отметим, что для простоты восприятия мы опу-

стим аналитические выражения для эволюты и ее кривизны, сделав акцент на графическом сравнении соответствующих кривых.

2. Результаты компьютерного моделирования

1. Спираль Архимеда $r(\varphi) = 4 \cdot \varphi$

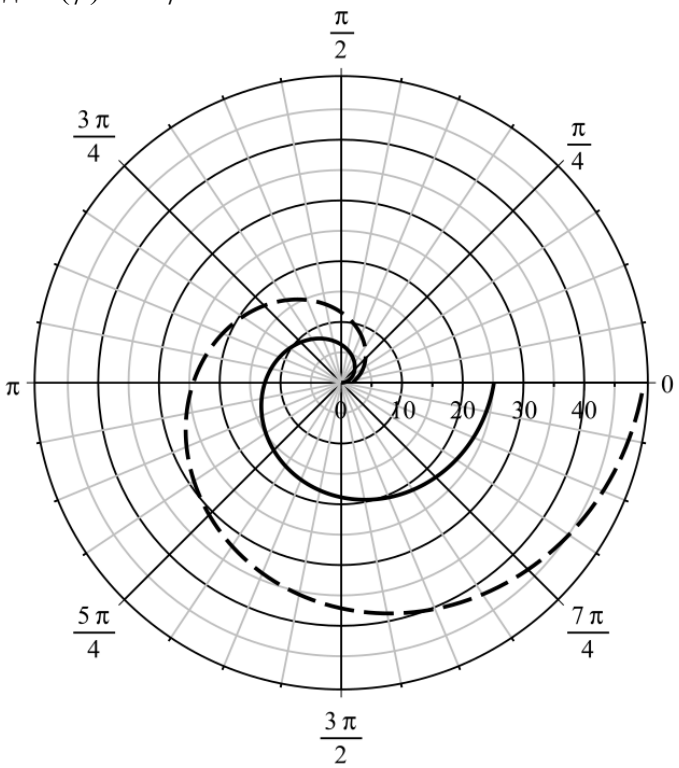


Рис. 2. Кривая $r(\varphi) = 4 \cdot \varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$ изображена сплошной линией, а ее эволюта $\overline{R}(\varphi)$ — пунктирной линией

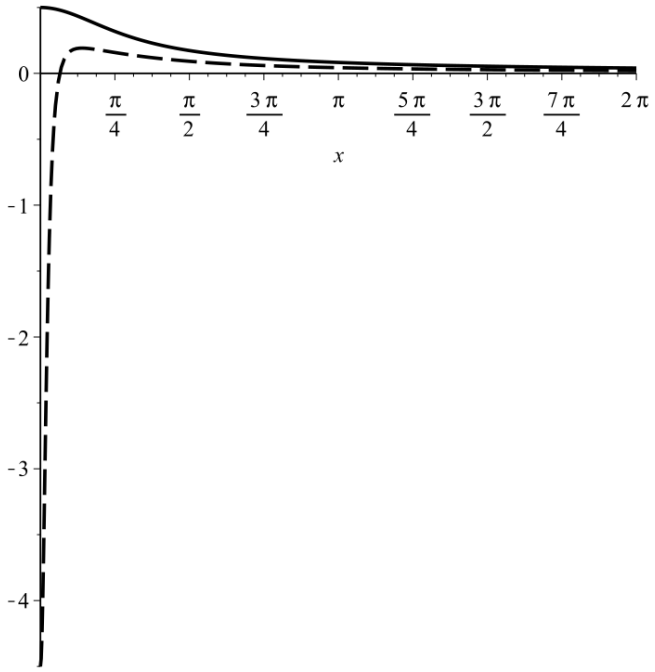


Рис. 3. Кривизна $K(\varphi)$ спирали Архимеда показана сплошной линией, а кривизна $\overline{K}(\varphi)$ ее эволюты — пунктирной линией

2. Трехлепестковая роза $r = 4 \cdot \sin(3\varphi)$

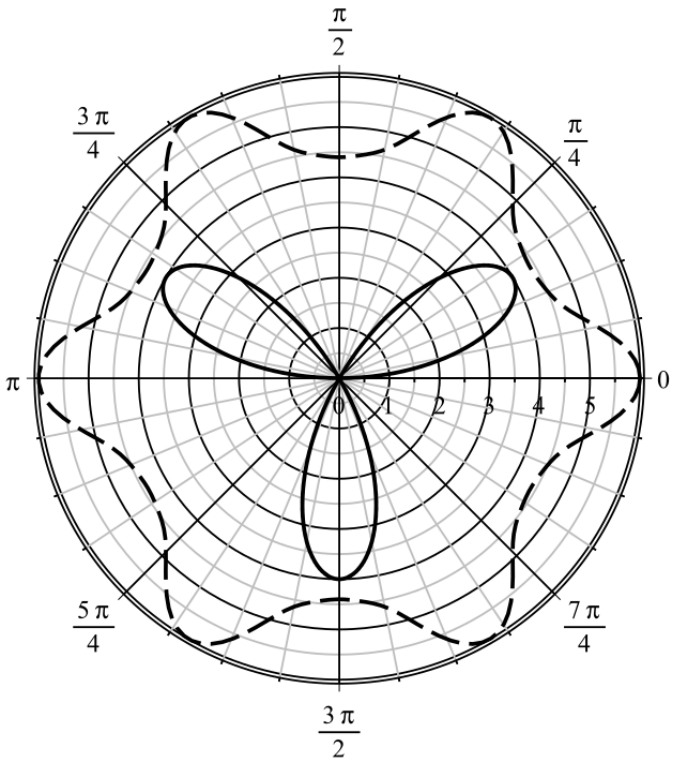


Рис. 4. Роза $r = 4 \cdot \sin(3\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, показана сплошной линией, а ее эволюта $\overline{R}(\varphi)$ — пунктирной линией

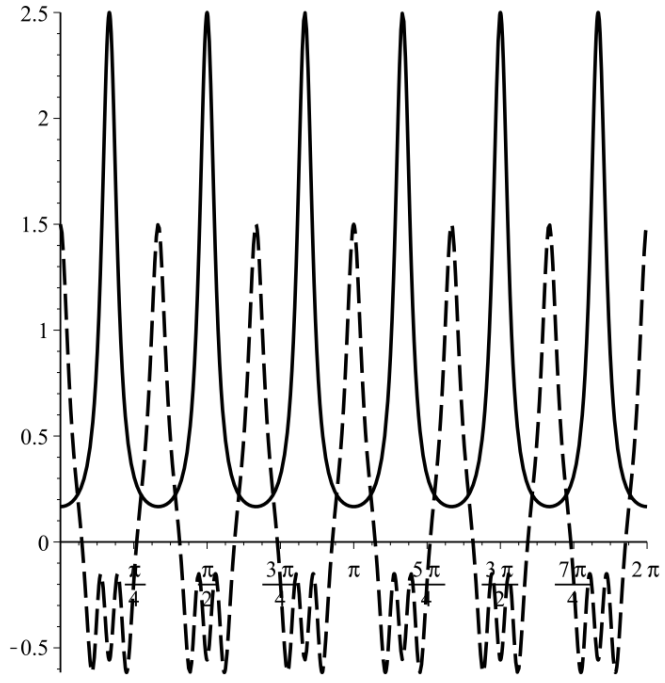


Рис. 5. Сплошной линией показана кривизна $K(\varphi)$ розы, а кривизна $\overline{K}(\varphi)$ ее эволюты — пунктирной линией

3. Кардиоида $r = 4 \cdot (1 + \cos\varphi)$

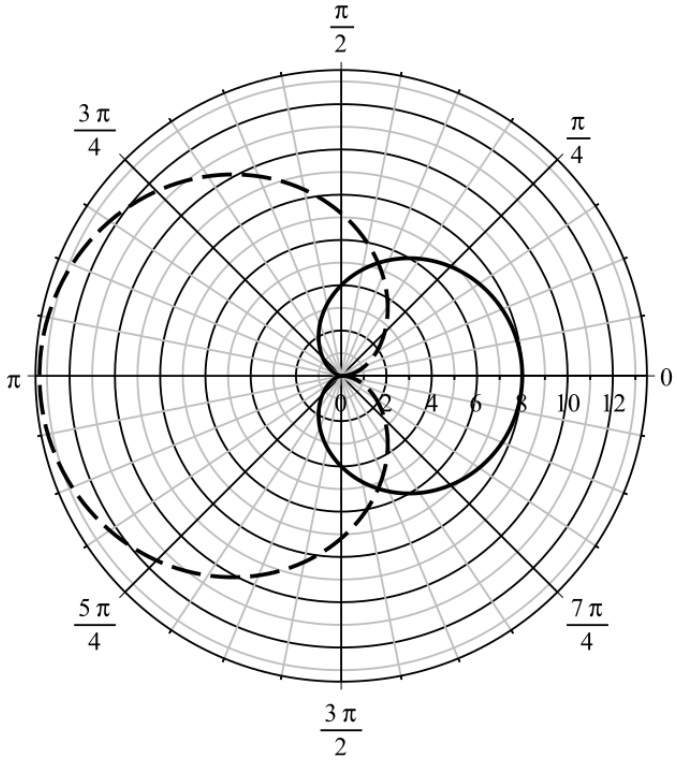


Рис. 6. Кардиоида $r = 4 \cdot (1 + \cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, *изображена сплошной линией, а ее эволюта* $\overline{R}(\varphi)$ *— пунктирной линией*

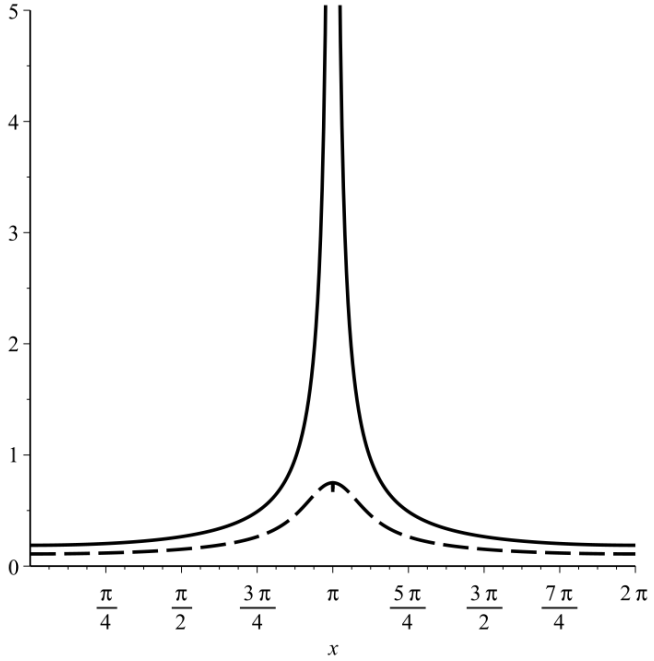


Рис. 7. Показано сравнение кривизны $K(\varphi)$ *кардиоиды* $r = 4 \cdot (1 + \cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, *(сплошная линия) и кривизны ее эволюты* $\overline{K}(\varphi)$ *(пунктирная линия)*

Заключение

В заключение работы отметим.

1. Найден универсальный способ составления уравнения эволюты кривой в полярных координатах, избегая параметрического задания.

2. Полученные выражения позволяют записать уравнения эволюты кривой и найти ее кривизну.

3. В качестве примеров проиллюстрированы результаты численного моделирования эволют для трех известных полярных кривых.

4. Проведенный анализ позволил привести графическое сравнение кривизны заданной кривой и кривизны ее эволюты.

Литература

1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2 / В. И.Смирнов. – Москва : Физматлит, 1967. – 655 с.

2. *Норден А. П.* Краткий курс дифференциальной геометрии / А. П. Норден. – Москва : Государственное издательство физико-математической литературы. – 1958. – 244 с.

3. *Базылев В. Т.* Геометрия. Т. 2 / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев. – Москва : Просвещение, 1975. – 367 с.

4. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 / Н. С.Пискунов. – Москва : Наука, 1966. – 552 с.

5. *Богданова С. Б.* К вопросу о траектории свободно падающего тела в неинерциальных системах отсчета / С. Б. Богданова, С. О. Гладков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2023. – № 3. – С. 51–59.

6. *Богданова С. Б.* О физическом смысле подвижного базиса / С. Б. Богданова, С. О. Гладков // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2024 г. – С. 41–45.

7. *Богданова С. Б.* О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета / С. Б. Богданова, С. О. Гладков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2023. – № 84. – С. 68–80.

8. *Богданова С. Б.* О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета. Часть II / С. Б. Богданова, С. О. Гладков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – № 91. – С. 51–60.

УДК 517.95

ЧЕТНОЕ, НЕЧЕТНОЕ И ПОЛНОЕ $\mathbb{J}$-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ

Ю. Н. Булатов

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Аннотация. Для исследования задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_{-\gamma}$ с отрицательным параметром $-\gamma \in (-1,0)$ вводится интегральное преобразование на основе одного из линейно независимого решения сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma}u + u = 0$, которое выражено через функцию Бесселя первого рода с положительным параметром $\mu = (\gamma+1)/2$. Строятся четное, нечетное и полное $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя.

Ключевые слова: сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, $\mathbb{J}$-функции Бесселя, $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя.

Введение

Применение специального преобразования Бесселя для исследования задач для уравнений, содержащих сингулярный дифференциальный оператор Бесселя с отрицательным параметром, было предложено И. А. Киприяновым в начале 80-х годов прошлого столетия. Такого рода исследования проведены в работах [1, 2] для Δ_B -операторов вида

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n} B_{\gamma_i}, \quad B_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma \in (-1,0).$$

Стоит отметить, что в [3] исследовалась задача Коши, решение которой построено в виде ряда Фурье по функциям Бесселя $t^\mu J_\mu(x)$, где J_μ — функция Бесселя первого рода. Именно на этих функциях $(\mathbb{J}_\mu(x))$ в работе [4] введено специальное преобразование Бесселя (четное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя), которое в дальнейшем используется для ввода полного $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя. Также вводится нечетное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя, в рамках которого определен символ первой производной от четной функции.

1. Сведения, ассоциированные с оператором $B_{-\gamma}$

Отметим, что ограниченность действия оператора Бесселя обеспечена применением его к четным функциям [5]. В связи с чем введем следующее определение.

Определение 1. Функцию $f = f(x)$, определенную в полупространстве $\mathbb{R}_1^+$ будем называть четной по Киприянову, если она допускает четное продолжение по каждой координате x своего аргумента с сохранением класса функций своей принадлежности ([6, с. 21]).

$\mathbb{J}$-функции Бесселя определены как линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя

$$B_{-\gamma}u + u = 0, \quad -1 < -\gamma < 0. \tag{1}$$

Пусть $\mu = (\gamma+1)/2$. Фундаментальной системой решений уравнения (1) являются следующие функции [4]

$$\mathbb{J}_\mu(x) = 2^\mu \Gamma(1+\mu) x^\mu J_\mu(x) = x^{2\mu} j_\mu(x) = x^{2\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m!\Gamma\left(m+1+\mu\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

$$\mathbb{J}_{-\mu}(x) = 2^{-\mu} \Gamma(1-\mu) x^\mu J_{-\mu}(x) = x^{2\mu} j_{-\mu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m!\Gamma\left(m+1-\mu\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

где J_μ и $J_{-\mu}$ соответственно функции Бесселя первого рода, а j_μ и $j_{-\mu}$ — j-функции Бесселя. Как можно заметить, константа $\Gamma(1-\mu)$ для второй функции играет роль нормировочного коэффициента:

$$\mathbb{J}_{-\mu}(0)=1.$$

Решение $\mathbb{J}_{-\mu}$ более востребовано в спектральной теории сингулярных дифференциальных уравнений, что продемонстрировано в [3]. Для первой функции это не так, т. к.

$$\mathbb{J}_{\mu}(0)=0.$$

Тем не менее функция $\mathbb{J}_\mu$ определена для всех положительных μ (в отличии от $\mathbb{J}_{-\mu}$), а введенная нами константа $\Gamma(\mu+1)$ играет важную роль при построении оператора *обобщенного* $\mathbb{T}$*-псевдосдвига*.

2. $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя в $\mathbb{R}_n^+$

В статье [4] (см. Теорему 4.) доказана обратимость на четных функциях $(x^2)^{-\gamma/2} f(x)\in L_2(\mathbb{R}_1^+)$ следующих интегральных преобразований:

$$\mathbb{F}[f](\xi)=\hat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_1^+}\mathbb{J}_\mu(\xi y)f(y)y^{-\gamma}\,dy,\qquad \mathbb{F}^{-1}[f](x)=C_\mu\int\limits_{\mathbb{R}_1^+}\mathbb{J}_\mu(\xi x)\hat{f}(\xi)\xi^{-\gamma}\,d\xi,$$

которые названы *прямым и обратным* $\mathbb{J}$*-преобразованиями Бесселя*.

Многомерное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя имеет своим ядром произведение $\mathbb{J}_\mu$-функций Бесселя:

$$\mathbb{J}_\mu(x)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)\ ,\ x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_n^+\ ,$$

где $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ — мультииндекс, каждая координата которого связана с параметром $-\gamma_i$ сингулярного дифференциального оператора Бесселя $B_{-\gamma_i}$ равенством $\mu_i=\dfrac{\gamma_i+1}{2}$, $\gamma_i\in(0,1)$, $\mu_i\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, $i=\overline{1,n}$.

Пусть $\alpha_i\in\mathbb{Z}^+$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$\left(D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}}\right)_x=\begin{cases}B^{\alpha_i/2}_{-\gamma_i}\ , & \text{если}\quad \alpha_i=2k\\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}B^{\alpha_i/2}_{-\gamma_i}, & \text{если}\quad \alpha_i=2k+1\end{cases}\ ,\ k=0,1,2,\ldots.$$

2.1. Рекуррентное соотношение для производных $\mathbb{J}$-функции Бесселя

Лемма 1. *Пусть* $2\mu_i=\gamma_i+1$, $-\gamma_i\in(-1,0)$. *Имеют место следующие формулы*

$$\frac{\partial\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)}{\partial x_i}=2\mu_i\,x_i\,\mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i),$$

$$\nabla\mathbb{J}_\mu(x)=2\left(\mu_1\,x_1\,\mathbb{J}_{\mu_1-1}(x_1)\,,\ldots,\mu_n\,x_n\,\mathbb{J}_{\mu_n-1}(x_n)\right).$$

Доказательство. Исходим из определения $\mathbb{J}_\mu(x)=x^{2k}\,j_\mu(x)$. Имеем

$$j_\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma\left(\mu+1\right)}{\Gamma\left(k+\mu+1\right)}\frac{t^{2k}}{2^{2k}},$$

тогда

$$\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)=x_i^{2\mu_i}\,j_{\mu_i}(x_i)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma\left(\mu_i+1\right)}{\Gamma\left(k+\mu_i+1\right)}\frac{x_i^{2(k+\mu_i)}}{2^{2k}}.$$

Следовательно

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)}{\partial x_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i+1)2(k+\mu_i)}{(k+\mu_i)\Gamma(k+\mu_i)} \frac{x_i^{2(k+\mu_i)-1}}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i+1)}{\Gamma(k+[\mu_i-1]+1)} \frac{x_i^{2(k+\mu_i)-1}}{2^{2k-1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\mu_i \Gamma(\mu_i)}{\Gamma(k+[\mu_i-1]+1)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2k} 2x_i^{2\mu_i-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i-1+1)}{\Gamma(k+\mu_i-1+1)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2k} 2\mu_i x_i^{2\mu_i-1} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma([\mu_i-1]+1)}{\Gamma(k+[\mu_i-1]+1)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2k}\right] 2\mu_i x_i^{(2\mu_i-2)} x_i = 2\mu_i x_i j_{\mu_i-1}(x_i) x_i^{2(\mu_i-1)} = 2\mu_i x_i \mathbb{J}_{\mu-1}(x_i) .$$

Доказательство закончено.

Следствие 1.

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i \xi_i^2 x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i\xi_i).$$

Доказательство с очевидностью вытекает из леммы 1.

2. Четное, нечетное и полное $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя

$\mathbb{J}$-Преобразования Бесселя на основе $\mathbb{J}$-функций Бесселя введены в работе [4]. В общем случае: *четным прямым и четным обратным $\mathbb{J}$-преобразованиями Бесселя* будем называть выражения

$$\mathbb{F}_{ev}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n} f(y) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi_i y_i) y_i^{-\gamma_i} dy_i ,$$

$$\mathbb{F}_{ev}^{-1}[f](\xi) = C(\mu) \int_{\mathbb{R}_n} \hat{f}(\xi) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi_i x_i) \xi_i^{-\gamma_i} d\xi_i, \quad C(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{\mu_i}\Gamma(\mu_i+1)}\right)^2 .$$

Следуя статье [7] и следствию 1, введем *нечетное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя*, основанное на функции

$$\frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i \xi_i x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i\xi_i) ,$$

которое имеет вид

$$\mathbb{F}_{od}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i .$$

Несобственный интеграл здесь, как обычно, понимается в смысле главного значения по Коши. Как видим, ядро этого преобразования нечетно, поэтому для четных функций

$$\mathbb{F}_{od}[f](\xi) = 0 .$$

Лемма 2. *Пусть f четная функция из пространства основных функций Л. Шварца. Тогда*

$$\mathbb{F}_{od}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](\xi) = \xi_i \mathbb{F}_{ev}[f](\xi) = \xi_i \hat{f}(\xi), \qquad (2)$$

где $\hat{f}(\xi)$ — четное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя.

Доказательство. Имеем

$$\mathbb{F}_{od}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i = \int_0^{\infty} f(x) \frac{x_i^{\gamma_i}}{\xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i}\right) x_i^{-\gamma_i} dx_i .$$

Поскольку

$$x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i^{-\gamma_i}\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i}\right)=B_{-\gamma_i}\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i),$$

то

$$\mathbb{F}_{od}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](\xi)=\int_0^\infty f(x_i)\frac{1}{\xi_i}B_{-\gamma_i}\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)x_i^{-\gamma_i}\,dx_i.$$

Согласно равенству (1), получим

$$\mathbb{F}_{od}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](\xi)=\xi_i\int_0^\infty f(x_i)\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)x_i^{-\gamma_i}\,dx_i=\xi_i\,\mathbb{F}_{ev}[f](\xi)=\xi_i\,\hat{f}(\xi).$$

Доказательство закончено.

Из равенства (2) видно, что преобразование $\mathbb{F}_{od}$ производной четной функции свелось к преобразованию $\mathbb{F}_{ev}$. Поэтому удобно ввести одно преобразование со смешанным ядром

$$\mathbf{J}_\mu(x\xi)=\mathbb{J}_\mu(x\xi)+\psi\,\mathbb{J}_{\mu-1}(x\xi)\ ,\ \psi=2\prod_{i=1}^n\mu_i x_i\xi_i.$$

При этом, полагая $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=f_{ev}(x)+f_{od}(x),$ получим

$$\mathbf{F}[f](\xi)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_n}f(x)\mathbf{J}_\mu(x\xi)x^{-\gamma}dx=\mathbb{F}_{ev}[f_{ev}](\xi)+\mathbb{F}_{od}[f_{od}](\xi),$$

где первое слагаемое представляет собой четное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя, а второе нечетное $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя.

Теорема 1 (о символе $D^\alpha_{B_{-\gamma}}$-оператора). Для $f\in S(\mathbb{R}_n)$ имеет место формула

$$\mathbf{F}[D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}}f](\xi)=\begin{cases}(-\xi_i^2)^k\,\hat{f}(\xi),\ \textit{если}\ \alpha=2k\\(-\xi_i^2)^k\,\xi_i\,\hat{f}(\xi),\ \textit{если}\ \alpha=2k+1\end{cases},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Доказательство. Предположим, что функция f четная по Киприянову и число $\alpha=2k\geq 0$ — четное. Тогда

$$\mathbf{F}[D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}}f](\xi)=\mathbb{F}_{ev}\left[B^k_{-\gamma_i}f\right](\xi)=(-\xi_i^2)^k\,\hat{f}(\xi)\ , \tag{3}$$

что уже было доказано в выше.

Пусть теперь $\alpha=2k+1$ — нечетное число. Тогда, воспользовавшись леммой 2 и равенством (3), получим

$$\mathbf{F}[D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}}f](\xi)=\xi_i\,\mathbb{F}_{ev}\left[B^k_{-\gamma_i}f\right](\xi)=(-\xi_i^2)^k\,\xi_i\,\hat{f}(\xi). \tag{4}$$

Из (4) и (3) следует равенство теоремы 1.

Доказательство закончено.

Заключение

Для исследования задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_{-\gamma}$ с отрицательным параметром $-\gamma\in(-1,0)$ были введены многомерные интегральные четное, нечетное и полное $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя. Данные преобразования были построены на основе одного из линейно независимых решений сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma}u+u=0.$

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Литература

1. *Ляхов Л. Н.* Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1610–1620.

2. *Ляхов Л. Н.* Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 517–528.

3. *Сабитов К. Б.* Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 123–135.

4. *Ляхов Л. Н.* Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 12. – С. 1654–1665.

5. *Левитан, Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. – 1951. – Т. 6, № 2. – С. 102–143.

6. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. – М. : Наука, 1997. –204 с.

7. *Киприянов И. А.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов // Математический сборник. – 1977. – Т. 104, № 1. – С. 49–68.

УДК 517.925

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНО МУЛЬТИСТАБИЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С КОНТИНУУМОМ СОСУЩЕСТВУЮЩИХ СКРЫТЫХ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ

И. М. Буркин

Тульский государственный университет

Аннотация. На основе трехмерной системы, обладающей единственным скрытым хаотическим аттрактором размерности «почти 3», бассейном притяжения которого является почти все фазовое пространство, построена экстремально мультистабильная система четвертого порядка. Построенная система содержит континуум сосуществующих скрытых хаотических и периодических аттракторов. Такого эффекта удается добиться за счет того, что смещение аттрактора в фазовом пространстве осуществляется только за счет выбора его начального условия. Столь сложная структура фазового пространства сконструированной системы открывает широкие возможности для ее использования, например, для скрытия передаваемой информации при организации защищенной связи в системах коммуникаций.

Ключевые слова: динамическая система, экстремальная мультистабильность, континуум хаотических аттракторов, показатели Ляпунова, размерность Каплана — Йорке.

Введение

В последние два десятилетия системы, демонстрирующие хаотическое поведение, привлекли пристальное внимание исследователей. Такие системы генерирует хаотический сигнал или последовательность таких сигналов и открывают широкие возможности для приложений на основе хаоса. Детерминированная псевдослучайность и непредсказуемость хаоса нашли широкое применение в генерировании псевдослучайных чисел [1], криптографии [2], робототехнике [3] и защищенной связи [4–6]. Среди тем, связанных с хаосом, особый интерес представляет мультистабильность или сосуществование нескольких динамических состояний в системе. Мультистабильные хаотические системы помимо желаемого хаотического решения могут производить множество других решений при различных начальных условиях. Такая комплексная система может применяться в различных ситуациях без изменения базовой структуры, и обеспечивает большое удобство для инженеров. В частности, бесконечное число хаотических режимов динамической системы порождает чрезвычайную неопределенность и непредсказуемость. С другой стороны, мультистабильность может представлять некоторые угрозы по той же причине. Упомянутые обстоятельства вызвали большую волну как исследований феномена мультистабильности, так и разработку методов искусственного конструирования мультистабильных систем [7–11]. Для конструирования экстремально мультистабильных хаотических систем, то есть систем, содержащих бесконечное число сосуществующих хаотических аттракторов, было разработано несколько различных подходов. Например, рассмотреть существующую хаотическую систему и изменить ее, добавив дополнительные члены в дифференциальные уравнения, описывающие систему [7], или модифицировать существующий член [8–11], или добавить новые состояния в систему и изменить её порядок, добавив в систему мемристор [12]. Целью всех упомянутых приемов генерирования экстремально мультистабильных систем было построение системы, в которой реализуется эффект усиления смещения (offset boosting). Усиление смещения означает, что существующий в системе аттрактор перемещается в фазовом пространстве в любом направлении.

Оказалось, что эффекта усиления смещения можно добиться и другим способом, отличным от способов, упомянутых выше. В работе [13] была продемонстрирована возможность

построения системы, обладающей бесконечным числом сосуществующих аттракторов, путем специального расширения размерности существующей системы, имеющей нетривиальный аттрактор. В построенной таким образом системе смещение аттрактора в фазовом пространстве осуществляется только за счет выбора начального условия, что обеспечивает существование континуума сосуществующих аттракторов.

1. Расширение размерности системы для воспроизведения аттракторов

В работе [11] построена система третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y \cdot \operatorname{arctg}(50z), \\ \dot{z} &= y^4 - \frac{a}{1+x^8}. \end{aligned} \tag{1}$$

Эта система не имеет состояний равновесия и содержит скрытый мультифрактальный аттрактор, размерность Каплана — Йорке которого «почти 3». Бассейном притяжения этого аттрактора является почти все фазовое пространство, за исключением аналитического решения системы $x(t) \equiv y(t) \equiv 0,\ z(t) = z(0) - at.$

Пользуясь идеей специального расширения размерности пространства, на основе этой системы сконструируем систему 4-го порядка так, чтобы она обладала континуумом сосуществующих аттракторов. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -b(x-u) - y\operatorname{arctg}(50z), \\ \dot{z} &= y^4 - \frac{a}{1+(x-u)^8}, \\ \dot{u} &= cy. \end{aligned} \tag{2}$$

Если в системе (2) произвести замену $x \to (-x),\ y \to (-y),\ u \to (-u),$ то система не изменится. Поэтому вместе с любым аттрактором системы существует центрально-симметричный ему аттрактор в проекциях на плоскости $(x, y),\ (x,u),\ (y,u),$ а также пара симметричных аттракторов в проекциях на плоскости (x,z) и (y,z). Кроме того очевидно, что проекция любого аттрактора на плоскость (x,u) есть отрезок прямой, и система (2) содержит континуум аналитических решений $x(t) \equiv y(t) \equiv d,\ z(t) = z(0) - at,\ d \in (-\infty, \infty).$

Система (2) примечательна тем, что вместе с решением с начальным условием (x_0, y_0, z_0, u_0) она имеет и решение с начальным условием $(x_0 + d, y_0, z_0, u_0 + d)$ для любого d, поскольку замена $x \to x + d,\ u \to u + d$ не меняет динамику системы. Если рассматриваемая система имеет нетривиальный аттрактор, то она имеет континуум аттракторов, поскольку аттрактор системы определяется только начальным условием.

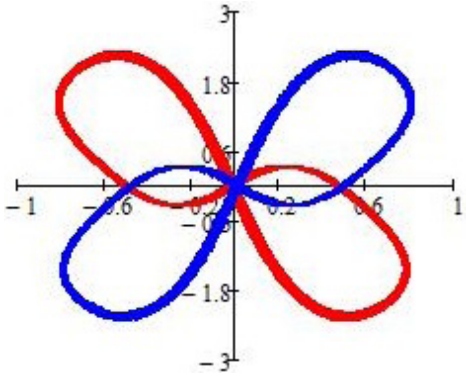


Рис. 1

Выберем следующие значения параметров системы $a = 2,\ b = 2.3,\ c = 0.1.$ Исчерпывающий компьютерный поиск позволил найти пару аттракторов (циклов) системы (2) с начальными условиями $(\pm 0.7947;\ \mp 0.0326;\ -1.4305;\ \pm 0.0791)$ (рис. 1; проекция на плоскость (x,z)).

Теперь проинтегрируем систему (2), увеличив первую и последнюю координаты начальных условий, например, на ± 0.7. Новые начальные условия:

$$(\pm 0.7947 \pm 0.7;\ \mp 0.0326;\ -1.4305;\ \pm 0.0791 \pm 0.7). \tag{3}$$

При интегрировании системы с начальными условиями (3) появляются еще две пары циклов, полученных сдви-

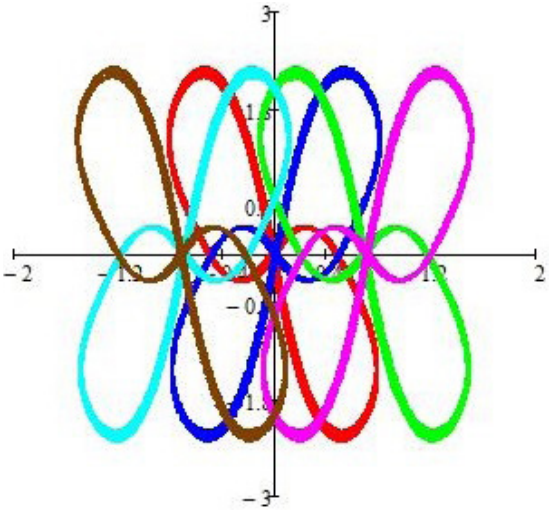


Рис. 2

гом найденных ранее циклов по осям x и u (рис. 2; проекция на плоскость (x,z)). Бассейны притяжения циклов, представленных на рис. 1, являются чрезвычайно маленькими. В то же время оказывается, что почти каждая траектория системы (2) с начальным условием, не принадлежащими бассейнам притяжения циклов, притягивается к некоторому хаотическому аттрактору.

Таких аттракторов несчетное множество и все они могут быть получены сдвигом любого аттрактора семейства на одну и ту же величину в направлении осей x и u. На рис. 3 представлена проекция на плоскость (x,y) хаотического аттрактора системы (2), визуализированного при интегрировании системы (2) с начальным условием (2,1,1,2) (проекция на плоскость (x,y)). На рис. 4 —проекция на ту же плоскость семейства аттракторов, визуализированных при интегрировании с начальными условиями (2,1,1,2), (6,1,1,6), (–2,1,1,–2), (–6,1,1,–6).

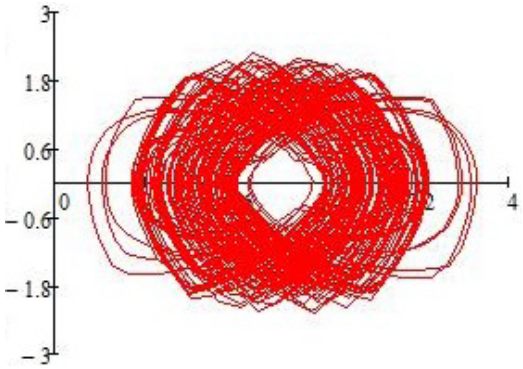


Рис. 3

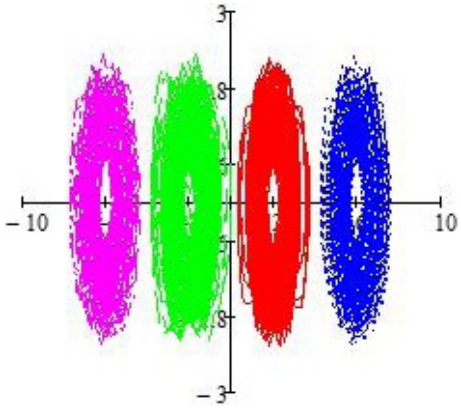


Рис. 4

Отметим, что система (2) не имеет состояний равновесия, поэтому все ее аттракторы являются скрытыми [11]. Семейства аттракторов, представленных на рис. 2 и 4, будем называть 1-D полосой аттракторов.

2. Система с 2-D решеткой скрытых хаотических аттракторов

Система (2) является смещаемой по переменной y (variable-boostable system [10]). Последнее обстоятельство позволяет заменить в системе (2) переменную y на периодическую функцию этой переменной так, чтобы новая система обладала 2-D решеткой сосуществующих аттракторов. Эта решетка будет представлять собой объединение счетного числа 1-D полос, каждая из которых содержит континуум сосуществующих аттракторов, аналогичных аттракторам, представленным на рис. 2 и 4. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \operatorname{tg}\frac{y}{2}, \\ \dot{y} &= -b(x-u) - \operatorname{tg}\frac{y}{2}\cdot \operatorname{arctg}(50z), \\ \dot{z} &= \left(\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)^4 - \frac{2}{1+(x-u)^8}, \\ \dot{u} &= c\cdot \operatorname{tg}\frac{y}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Легко убедиться, что циклы системы (2) также являются циклами системы (4). В то же время, как показано в [10], эта система также содержит циклы, например, с начальными условиями $(\pm 0.7947 \pm 0.7;\ \mp 0.0326 + 2\pi k;\ -1.4305;\ \pm 0.0791 \pm 0.7)$, то есть она содержит счетное число полос, каждая из которых в свою очередь содержит континуум скрытых циклов. Система (4), кроме того, содержит счетное число полос скрытых хаотических аттракторов. Продемонстрируем на примере феномен самовоспроизведения системой (4) 2-D решетки, состоящей из полос, каждая из которых содержит континуум хаотических аттракторов.

Зададимся начальным условием (1,1,0,1). Численное интегрирование системы (4) с таким начальным условием выводит нас на хаотический аттрактор, представленный на рис. 5 (проекция на плоскость (y,u)).

Показатели Ляпунова и размерность D_{KY} Каплана — Йорке этого аттрактора следующие: $\Lambda_1 = 0.215,\ \Lambda_2 = -0.009,\ \Lambda_3 = -0.011,\ \Lambda_4 = -0.235,\ D_{KY} = 3.831$. На рис. 6 представлен фрагмент 2-D решетки хаотических аттракторов системы (4), полученный «размножением» аттрактора, представленного на рис. 5. Эти аттракторы визуализированы путем интегрирования с системы с начальными условиями $(1, 2\pi + 1, 0, 1);\ (1.5, 1, 0, 1.5);\ (0.5, 1, 0, 0.5);\ (1.5, 2\pi + 1, 0, 1.5);$ $(0.5, 2\pi + 1, 0, 0.5)$ (проекция на плоскость (y,u)).

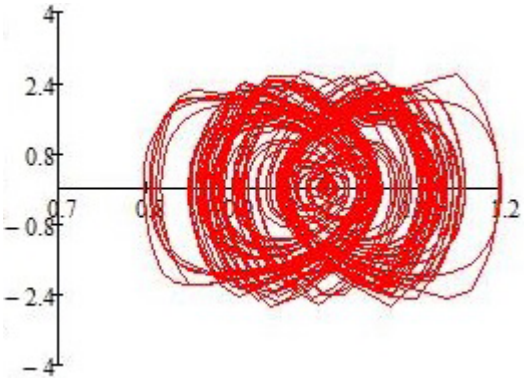


Рис. 5

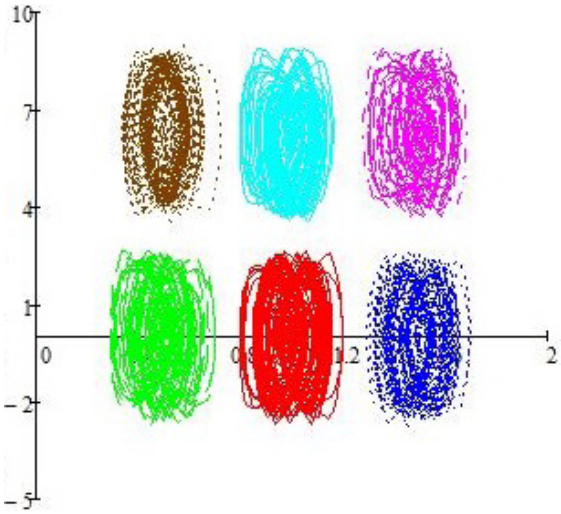


Рис. 6

Заключение

На основе трехмерной системы, обладающей хаотическим аттрактором размерности «почти 3», построена система четвертого порядка, содержащая континуум сосуществующих скрытых периодических и хаотических аттракторов. Такого эффекта удается добиться за счет того, что смещение аттрактора в фазовом пространстве осуществляется только за счет выбора начального условия. Континуум сосуществующих хаотических режимов динамической системы порождает чрезвычайную неопределенность и непредсказуемость. Последнее обстоятельство открывает, например, широкие возможности для использования такой системы для скрытия передаваемой информации при организации защищенной связи в системах коммуникаций.

Литература

1. *Peng H.* Design of pseudorandom number generator based on a controllable multi-double-scroll chaotic system / M. Ji'e, X. Du [et al.] // Chaos Solitons Fractals. –2023. – Vol.174:113803.

2. *Singh A. K.* An image security model based on chaos and DNA cryptography for IIoT images / A. K. Singh, K. Chatterjee, A. Singh // IEEE Trans. Industr. Inf. – 2022. – Vol. 19, № 2. –P. 1957–1964.

3. *Petavratzis E.* Experimental study of terrain coverage of an autonomous chaotic mobile robot / E. Petavratzis, C. Volos, I. Stouboulos // Integration. – 2023. – Vol. 90. – P. 104–114.

4. *Li H.* Two-Dimensional Memristive Hyperchaotic Maps and Application in Secure Communication / H. Li, Z. Hua, H. Bao, L. Zhu, M. Chen and B. Bao // EEE Transactions on Industrial Electronics. – 2021. – Vol. 68, № 10. – P. 9931–9940.

5. *Zhong Q.* High-security UFMC optical transmission system of seven-core fiber based on updating the 3D discrete chaotic model / Q. Zhong, R. Jianxin [et al.] // Opt. Lett. – 2022. – Vol. 47. – P. 2254–2257.

6. *Kamdoum Tamba V.* Hidden extreme multistability in a smooth flux-controlled memristor based four-dimensional chaotic system and its application in image encryption / V. Kamdoum Tamba, A. L. Mbanda Biamou [et al.] // Phys. Scr. – 2024. – Vol. 99, № 2. – 025210.

7. *Sprott J. C.* Megastability: Coexistence of a countable infinity of nested attractors in a periodically-forced oscillator with spatially-periodic damping / J. C. Sprott, S.Jafari [et al.] // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2017. – Vol. 226. – P. 1979–1985.

8. *Burkin I. M.* On some methods for generating extremely multistable systems / I. M Burkin, O. I. Kuznetsova // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – 1368(4):042050.

9. *Буркин И. М.* Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье / И. М., Буркин, О. И. Кузнецова // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6(64), № 4. – С. 555–564.

10. *Буркин И. М.* Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов / И. М. Буркин, О. И. Кузнецова // Чебышевский сборник. –2021. – Т. 22, № 1. – С. 105–117.

11. *Буркин И. М.* Новая мегастабильная система с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями / И. М. Буркин, О. И. Кузнецова // Чебышевский сборник. –2021. – Т. 22, № 4. – С. 360–368.

12. *Zhang S.* Generating Any Number of Diversified Hidden Attractors via Memristor Coupling / S. Zhang, C. Li, J. Zheng [et al.] // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. – 2021. – Vol. 68, № 12. – P. 4945–4956.

13. *Chunbiao L.* Offset parameter cancellation produces countless coexisting attractors / L. Chunbiao, L. Tengfei, L. Zuohua // Chaos. – 2022. – Vol. 32:121104.

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕЙКОЗА. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СЕТОК

Д. С. Верёвкина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается система уравнений для решения системы линейных алгебраических уравнений методом сеток (метод конечных разностей), а также с помощью матрицы. Конечно-разностные уравнения получают путем замены производных в исходном дифференциальном уравнении соответствующими конечно-разностными выражениями. Конечно-разностные выражения для какой-либо частной производной можно получить из разложения функции в ряд Тейлора по соответствующей переменной.
Ключевые слова: лейкоз, обыкновенные дифференциальные уравнения, решение СЛАУ методом конечных разностей, задача Коши.

Введение

Математическую модель лейкоза разработали, опираясь на последние данные о процессах кроветворения у млекопитающих. В этой инновационной модели учитываются три вида клеток, включая лейкозные, и их взаимодействие анализируется как конкуренция за функциональное пространство для клеточного деления.

Лейкозные клетки определяются как те, которые размножаются с более высокой скоростью по сравнению с остальными. Математическая формализация представлена задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Нарушение процессов кроветворения связано с изменением ключевого параметра, переводящего систему из стабильного стационарного состояния в нестабильное.

Исследование математической модели лейкоза может пролить свет на уникальные аспекты заболевания в различных регионах, учитывая генетические, социокультурные и другие факторы, влияющие на его развитие и характер.

Результаты исследования предоставят новые стратегии лечения, адаптированные к особенностям конкретной популяции, что крайне важно для персонализированной медицины и улучшения результатов лечения у пациентов с лейкозом.

Основой данной работы является статья, посвященная математической модели лейкоза [2].

Математическая модель лейкоза

Предлагаемые в литературных источниках математические модели [9, 10], представлены системами обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [11, 12] предлагается модель иммунного отклика на появление лейкозных клеток, а в [13] предлагаются варианты моделирования лечения лейкозов. Уровень заболеваний населения РФ заболеваниям крови отражен в [14]. За основу моделирования лейкоза взята концепция конкуренции всех типов клеток за функциональное пространство [15].

Количество столовых клеток — u_s, здоровых — u_h, лейкозных — u_d, клетки микроокружения — u_a. Удельные скорости равные — μ_1,μ_2,μ_3,μ_4. α — скорость появления новых клеток, γ — параметр интенсивности ингибирования, β — параметр соответствует количеству стволовых клеток. Скорость перехода здоровых клеток — ν_1,ν_2.

В работе [2], представлена математическая модель лейкоза в виде задачи Коши для системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_h}{dt} = \mu_1\left(1-u_h-u_d-u_s\right)u_h + \alpha\gamma u_a u_s - \nu_1 u_h, \tag{1}$$

$$\frac{du_d}{dt} = \mu_2\left(1-u_h-u_d-u_s\right)u_h + \left(1-\alpha\right)u_a u_s - \nu_2 u_d, \tag{2}$$

$$\frac{du_s}{dt} = \mu_3\left(1-u_h-u_d-u_s\right)u_h^2 - u_s u_a, \tag{3}$$

$$\frac{du_a}{dt} = -\mu_4 u_a\left(\beta-u_s\right), \tag{4}$$

$$u_h\left(t=0\right)=u_h^0,\ u_d\left(t=0\right)=u_d^0,\ u_s\left(t=0\right)=u_s^0,\ u_a\left(t=0\right)=u_a^0. \tag{5}$$

Построение разностной схемы

Будем считать, что система уравнений (1)–(4) с начальными условиями (5) решается на промежутке от $[t_0;T]$. Введем на отрезке от $[0;T]$ сетку $tj=hj$, где j принадлежит от $[0;N]$.

Пусть $u_h = y_{hj}$, $u_d = y_{dj}$, $u_s = y_{sj}$, $u_a = y_{aj}$ [3–7].

Для приближенного решения рассматриваемой задачи Коши, проведем стандартную аппроксимацию в производных, входящих в уравнение (1).

Производная первого порядка будет аппроксимироваться разностным соотношением $\frac{y_{hj}-y_{hj-1}}{\tau}$.

Правую часть каждого из уравнений аппроксимируем линейной комбинацией произведений выражения на предыдущим временном слое и на текущем.

Уравнение системы (1) заменится следующим алгебраическим уравнением:

$$\frac{y_{hj}-y_{hj-1}}{\tau} = \eta(\mu_1\left(1-y_{hj-1}-y_{dj-1}-y_{sj-1}\right)y_{hj} + \alpha\gamma y_{aj-1}y_{sj-1} - \nu_1 y_{hj-1}) +$$
$$+\left(1-\eta\right)\left(\mu_1\left(1-y_{hj}-y_{dj}-y_{sj}\right)y_{hj-1} + \alpha\gamma y_{aj}y_{sj} - \nu_1 y_{hj}\right),$$

где η и $(1-\eta)$ параметр, который мы будем подбирать, чтобы добиться экспериментальным путем наибольшей точности.

Такое представление правой части нацелено на то, чтобы уравнение стало линейным.

Для дальнейшего удобства введем следующие обозначения: $\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\omega_1$.

$$\xi_{11} = \frac{1}{\tau} - \eta\mu_1\left(1-y_{hj-1}-y_{dj-1}-y_{sj-1}\right) + \left(1-\eta\right)\nu_1 + \left(1-\eta\right)\mu_1 y_{hj-1},$$

$$\xi_{12} = \left(1-\eta\right)\mu_1 y_{hj-1},$$

$$\xi_{13} = -\eta\alpha\gamma y_{aj-1} - \eta\alpha\gamma y_{aj-1} + \left(1-\eta\right)\mu_1 y_{hj-1},,$$

$$\xi_{14} = -\left(1-\eta\right)\alpha\gamma y_{sj-1},$$

$$\omega_1 = \frac{y_{hj-1}}{\tau} + \left(1-\eta\right)\mu_1 y_{hj-1};$$

Аналогично поступим с остальными уравнениями системы.

Разностное соотношение для уравнения (2): $\frac{y_{dj}-y_{dj-1}}{\tau}$.

Уравнение системы (2) заменится следующим алгебраическим уравнением:

$$\frac{y_{dj}-y_{dj-1}}{\tau} = \eta(\mu_2\left(1-y_{hj-1}-y_{dj-1}-y_{sj-1}\right)y_{hj} + \left(1-\alpha\right)\gamma y_{aj}y_{sj-1} - \nu_2 y_{dj-1}) +$$
$$+\left(1-\eta\right)\left(\mu_2\left(1-y_{hj}-y_{dj}-y_{sj}\right)y_{hj-1} + \left(1-\alpha\right)\gamma y_{aj}y_{sj} - \nu_2 y_{dj}\right),$$

$$\frac{y_{dj}}{\tau}-\frac{y_{dj-1}}{\tau}-\eta(\mu_2\left(1-y_{hj-1}-y_{dj-1}-y_{sj-1}\right)y_{hj}+\left(1-\alpha\right)\gamma y_{aj}y_{sj-1}-\nu_2 y_{dj-1})-$$
$$-\left(1-\eta\right)\left(\mu_2\left(1-y_{hj}-y_{dj}-y_{sj}\right)y_{hj-1}+\left(1-\alpha\right)\gamma y_{aj}y_{sj}-\nu_2 y_{dj}\right)=0,$$

$$\frac{y_{dj}}{\tau}-\frac{y_{dj-1}}{\tau}-\eta(\mu_2\left(y_{hj}-y_{hj}y_{hj-1}-y_{hj}y_{dj-1}-y_{hj}y_{sj-1}\right)+\left(1-\alpha\right)\gamma y_{aj}y_{sj-1}-\nu_2 y_{dj-1})-$$
$$-\left(1-\eta\right)\left(\mu_2\left(y_{hj-1}-y_{hj-1}y_{hj}-y_{hj-1}y_{dj}-y_{hj-1}y_{sj}\right)+\left(1-\alpha\right)\gamma y_{aj}y_{sj}-\nu_2 y_{dj}\right)=0,$$
$$\xi_{21}=-\eta(\mu_2\left(1-y_{hj-1}-y_{dj-1}-y_{sj-1}\right)-\left(1-\eta\right)\left(\mu_2\left(-y_{hj-1}\right)\right),$$
$$\xi_{22}=\frac{1}{\tau}-\left(1-\eta\right)(\mu_2\left(-y_{hj-1}\right)-\nu_2),$$
$$\xi_{23}=-\left(1-\eta\right)\left(\mu_2\left(-y_{hj-1}\right)+\left(1-\alpha\right)\gamma y_{aj-1}\right),$$
$$\xi_{24}=-\eta\left(1-\alpha\right)\gamma y_{sj-1},$$
$$\omega_2=-\frac{y_{dj-1}}{\tau}-\eta\left(-\nu_2 y_{dj-1}\right)-\left(1-\eta\right)\left(\mu_2\left(y_{hj-1}\right)\right);$$

Разностное соотношение для уравнения (3): $\frac{y_{sj}-y_{sj-1}}{\tau}$.

Уравнение системы (3) заменится:

$$\frac{y_{sj}-y_{sj-1}}{\tau}=\eta(\mu_3\left(1-y_{hj-1}-y_{dj-1}-y_{sj-1}\right)y_{hj-1}y_{hj-1}-\gamma y_{sj-1}y_{aj})+$$
$$+\left(1-\eta\right)\left(\mu_3\left(1-y_{hj}-y_{dj}-y_{sj}\right)y_{hj-1}y_{hj-1}-\gamma y_{sj}y_{aj-1}\right),$$

$$\frac{y_{sj}}{\tau}-\frac{y_{sj-1}}{\tau}-\eta\left(\mu_3\left(1-y_{hj-1}-y_{dj-1}-y_{sj-1}\right)y_{hj-1}y_{hj-1}-\gamma y_{sj-1}y_{aj}\right)-$$
$$-\left(1-\eta\right)\left(\mu_3\left(1-y_{hj}-y_{dj}-y_{sj}\right)y_{hj-1}y_{hj-1}-\gamma y_{sj}y_{aj-1}\right)=0,$$

$$\frac{y_{sj}}{\tau}-\frac{y_{sj-1}}{\tau}-\eta(\mu_3\left(y_{hj-1}y_{hj-1}-y_{hj-1}y_{hj-1}y_{hj-1}-y_{hj-1}y_{hj-1}y_{dj-1}-y_{hj-1}y_{hj-1}y_{sj-1}\right)-$$
$$-\gamma y_{sj-1}y_{aj})-\left(1-\eta\right)\left(\mu_3\left(y_{hj-1}y_{hj-1}-y_{hj-1}y_{hj-1}y_{hj}-y_{hj-1}y_{hj-1}y_{dj}-y_{hj-1}y_{hj-1}y_{sj}\right)y_{hj-1}y_{hj-1}-\gamma y_{sj}y_{aj-1}\right)=0,$$
$$\xi_{31}=-\left(1-\eta\right)\left(\mu_3\left(-y_{hj-1}y_{hj-1}\right)\right),$$
$$\xi_{32}=-\left(1-\eta\right)\left(\mu_3\left(-y_{hj-1}y_{hj-1}\right)\right),$$
$$\xi_{33}=\frac{1}{\tau}-\left(1-\eta\right)\left(\mu_3\left(-y_{hj-1}y_{hj-1}\right)-\gamma y_{aj-1}\right),$$
$$\xi_{34}=-\eta\left(-\gamma y_{sj-1}\right);$$

$$\omega_3=-\frac{y_{sj-1}}{\tau}-\eta(\mu_3\left(y_{hj-1}y_{hj-1}-y_{hj-1}y_{hj-1}y_{hj-1}-y_{hj-1}y_{hj-1}y_{dj-1}-y_{hj-1}y_{hj-1}y_{sj-1}\right)-\left(1-\eta\right)(\mu_3\left(-y_{hj-1}y_{hj-1}\right));$$

Разностное соотношение для уравнения (4): $\frac{y_{aj}-y_{aj-1}}{\tau}$.

Уравнение системы (4) заменится:

$$\frac{y_{aj}-y_{aj-1}}{\tau}=\eta\left(-\mu_4\left(y_{aj-1}\left(\beta-y_{sj}\right)\right)\right)+\left(1-\eta\right)\left(-\mu_4\left(y_{aj}\left(\beta-y_{sj-1}\right)\right)\right),$$
$$\frac{y_{aj}}{\tau}-\frac{y_{aj-1}}{\tau}-\eta\left(-\mu_4\left(y_{aj-1}\left(\beta-y_{sj}\right)\right)\right)-\left(1-\eta\right)\left(-\mu_4\left(y_{aj}\left(\beta-y_{sj-1}\right)\right)\right),$$

$$\xi_{41} = 0,$$
$$\xi_{42} = 0,$$
$$\xi_{43} = -\eta\left(-\mu_4\left(y_{aj}\left(-1\right)\right)\right),$$
$$\xi_{44} = \frac{1}{\tau} - \left(1-\eta\right)\left(-\mu_4\left(1\left(\beta - y_{sj-1}\right)\right)\right),$$
$$\omega_4 = \frac{y_{aj-1}}{\tau} - \eta\left(-\mu_4\left(y_{aj-1}\left(\beta\right)\right)\right);$$

Таким образом, для каждого фиксированного значения j мы получаем систему из четырех линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с четырьмя неизвестными. Решая эту систему для каждого j мы получаем 4 набора значений неизвестных функций в точках сетки [1].

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{14} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & \xi_{24} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & \xi_{34} \\ \xi_{41} & \xi_{42} & \xi_{43} & \xi_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{hj} \\ y_{dj} \\ y_{sj} \\ y_{aj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix}.$$

Программный код

Требуется реализовать численное моделирование динамики клеточных популяций в системе, связанной с процессами кроветворения и лейкозом на языке программирования Python. Основные задачи и функции можно описать следующим образом:

1. Использование библиотеки numpy для работы с массивами и выполнения математических операций, а также matplotlib для визуализации данных.

2. Задаются начальные значения для четырех типов клеток: здоровых клеток u_h, лейкозных клеток u_d, стволовых клеток u_s и клеток микроокружения u_a. Определяются параметры, влияющие на размножение и взаимодействие клеток, такие как скорость размножения и коэффициенты, характеризующие взаимодействия между различными клеточными популяциями.

3. Разделяется интервал времени на N частичных отрезков для проведения численного интегрирования.

4. В функции grid_method() строится система линейных уравнений, которая описывает изменения в количестве клеток во времени.

5. Решается система линейных уравнений [8].

6. Функция print_plot() выводит графики для каждой из клеточных популяций (H, D, S, A) по времени, что позволяет визуально оценить динамику изменений.

7. Результаты моделирования для каждой популяции клеток выводятся на экран и отображаются на графиках. Это помогает исследовать, как различные параметры влияют на рост и взаимодействие клеток в модели.

Код является частью исследования, направленного на понимание динамики клеточных популяций, что может иметь значение в контексте онкологии и медицины, особенно в отношении лейкоза и других заболеваний, связанных с нарушением кроветворения.

```
# Подключение библиотек
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.backends.backend_pdf import PdfPages

# Ввод данных
h0 = 0.526  # количество здоровых клеток
```

```
d0 = 0.031  # количество лейкозных клеток
s0 = 0.359  # количество стволовых клеток
a0 = 0.0646 # клетки микроокружения

nu1 = 0.1   # удельная скорость размножения донорских клеток
nu2 = 0.20
nu3 = 0.40
nu4 = 0.80

beta = 0.35   # количеству стволовых клеток, в равновесном состоянии
              # при естественной генерации
alpha = 0.98  # скорость появления новых клеток
gamma = 0.007 # параметр интенсивности ингибирования
v1 = 0.5      # Скорости перехода здоровых клеток
v2 = 0.5      # Скорости перехода здоровых клеток

mu1 = 1.0     # удельные равные скорости
mu2 = 1.5     # удельные равные скорости
mu3 = 2.0     # удельные равные скорости
mu4 = 2.5     # удельные равные скорости

N = 100       # количество частичных отрезков разбиения сетки
t0 = 0        # левая граница
T = 1         # правая граница

tau = (T - t0) / N # равномерная сетка

def grid_method():
    harray = np.zeros(N + 1)
    darray = np.zeros(N + 1)
    sarray = np.zeros(N + 1)
    aarray = np.zeros(N + 1)

    harray[0] = h0
    darray[0] = d0
    sarray[0] = s0
    aarray[0] = a0

    for j in range(1, N + 1):
        A = np.zeros((4, 4))   # матрица
        b = np.zeros(4)        # вектор для правых частей

        A[0, :] = [
            (1 / tau) - nu * mu1 * (1 - harray[j-1] - darray[j-1] - sarray[j-1])
+ (1 - nu) * v1 + (1 - nu) * mu1 * harray[j-1],
            (1 - nu) * mu1 * harray[j-1],
            -nu * alpha * gamma * aarray[j-1],
            -(1 - nu) * alpha * gamma * sarray[j-1]
        ]

        A[1, :] = [
           -nu * (mu2 * (1 - harray[j-1] - darray[j-1] - sarray[j-1]) - (1 - nu)
* mu2 * (-harray[j-1])),
```

```
            (1 / tau) - (1 - nu) * mu2 * (-harray[j-1] - v2),
           -(1 - nu) * (mu2 * (-harray[j-1]) + (1 - alpha) * gamma * aarray[j-1]),
            -nu * (1 - alpha) * gamma * sarray[j-1]
        ]

        A[2, :] = [
            -(1 - nu) * (mu3 * (-harray[j-1] * harray[j-1])),
            -(1 - nu) * (mu3 * (-harray[j-1])),
            (1 / tau) - (1 - nu) * (mu3 * (-harray[j-1])) - gamma * aarray[j-1],
            -nu * (-gamma * sarray[j-1])
        ]

        A[3, :] = [
            0,
            0,
            -nu * (-mu4 * (aarray[j-1]*(-1))),
            (1 / tau) - (1 - nu) * (-mu4 * (beta - sarray[j-1]))
        ]

        b[0] = (harray[j-1] / tau) + (1 - nu) * mu1 * harray[j-1]
        b[1] = (darray[j-1] / tau) + (1 - nu) * mu2 * darray[j-1]
        b[2] = (sarray[j-1] / tau) + (1 - nu) * mu3 * sarray[j-1]
        b[3] = (aarray[j-1] / tau) + (1 - nu) * mu4 * aarray[j-1]

        # Решаем систему уравнений A * x = b
        x = np.linalg.solve(A, b)

        harray[j], darray[j], sarray[j], aarray[j] = x

    return harray, darray, sarray, aarray

# Инициализация PDF-файла
pdf_file = «results.pdf»
with PdfPages(pdf_file) as pdf:

   # Генерация графиков для разных значений nu
    for nu in [nu1, nu2, nu3, nu4]:
        # Выполнение метода сетки
        harray, darray, sarray, aarray = grid_method()

        # Создание графиков
        plt.figure(figsize=(10, 6))
        plt.plot(np.linspace(t0, T, N + 1), harray, label='Здоровые клетки - H',
color='blue')
       plt.plot(np.linspace(t0, T, N + 1), darray, label='Лейкозные клетки - D',
color='red')
       plt.plot(np.linspace(t0, T, N + 1), sarray, label='Стволовые клетки - S',
color='green')
        plt.plot(np.linspace(t0, T, N + 1), aarray, label='Клетки микроокружения
- A', color='orange')

        plt.title(f'Поведение клеток при η={nu}')
```

```
        plt.xlabel('Время')
        plt.ylabel('Количество клеток')
        plt.legend()
        plt.grid()

        # Сохранение текущего графика в PDF
        pdf_filename = f'График_η_{nu}.pdf'
        pdf.savefig()  # Сохраняем текущий график в PDF
        plt.close()    # Закрываем текущую фигуру

print(f»Графики успешно сохранены в файл {pdf_file}»)
```

Результаты программы

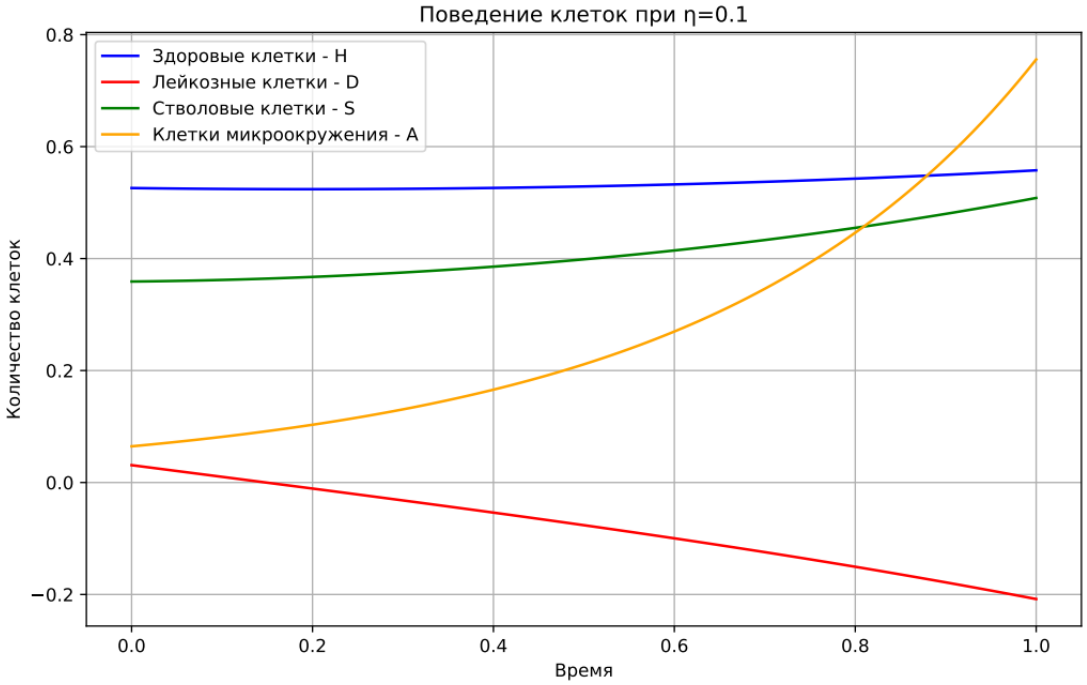


Рис. 1. Поведение клеток при $\eta = 0.1$

На этом графике можно наблюдать начальную стадию взаимодействия клеток.

Здоровые клетки (H): Вероятно, их количество растет в начале, так как они находятся в более благоприятных условиях.

Лейкозные клетки (D): Их рост может быть умеренным или медленным, что указывает на то, что при небольшом η лейкозные клетки не могут быстро преобладать.

Стволовые клетки (S): Их динамика может быть стабильной или немного увеличивающейся, возможно, в ответ на потребности микроокружения.

Клетки микроокружения (A): Их поведение, скорее всего, также умеренное, что позволяет поддерживать баланс в системе.

На графике (рис. 2):

Здоровые клетки (H): Количество продолжает расти, но с большей вероятностью начинает замедляться из-за растущего давления со стороны лейкозных клеток.

Лейкозные клетки (D): Их количество может начать ускоряться, так как увеличение η способствует их размножению.

Стволовые клетки (S): Динамика стволовых клеток может измениться, они начинают участвовать в противостоянии лейкозным клеткам.

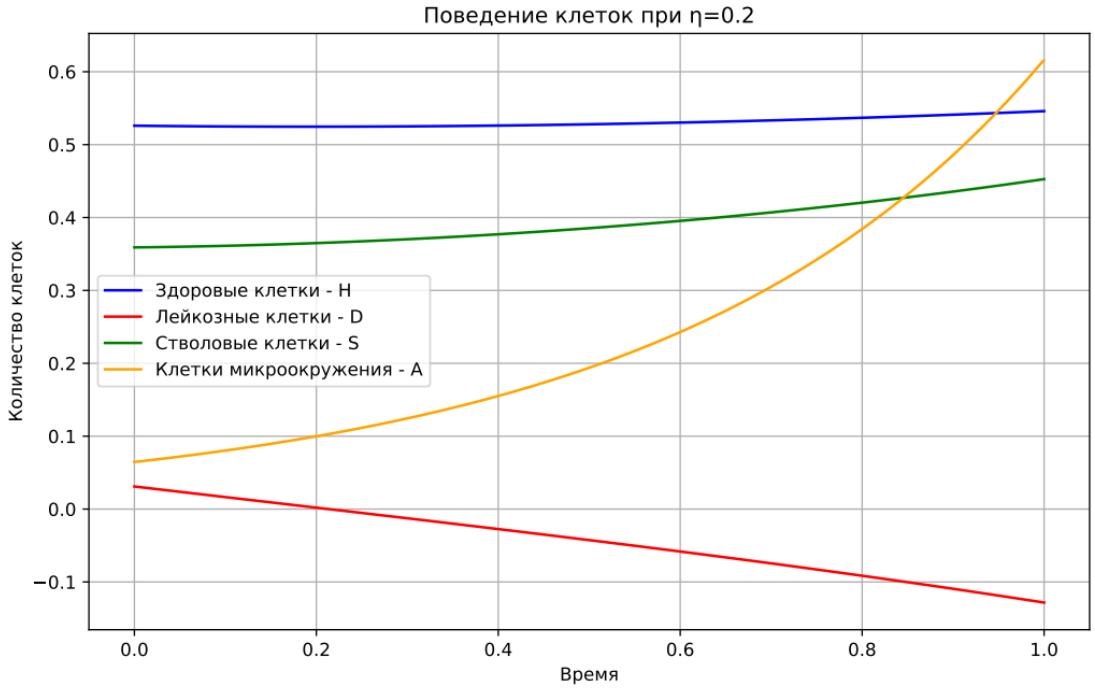


Рис. 2. Поведение клеток при $\eta = 0.2$

Клетки микроокружения (A): Взаимодействие с другими клетками становится более интенсивным, что может влиять на их количество.

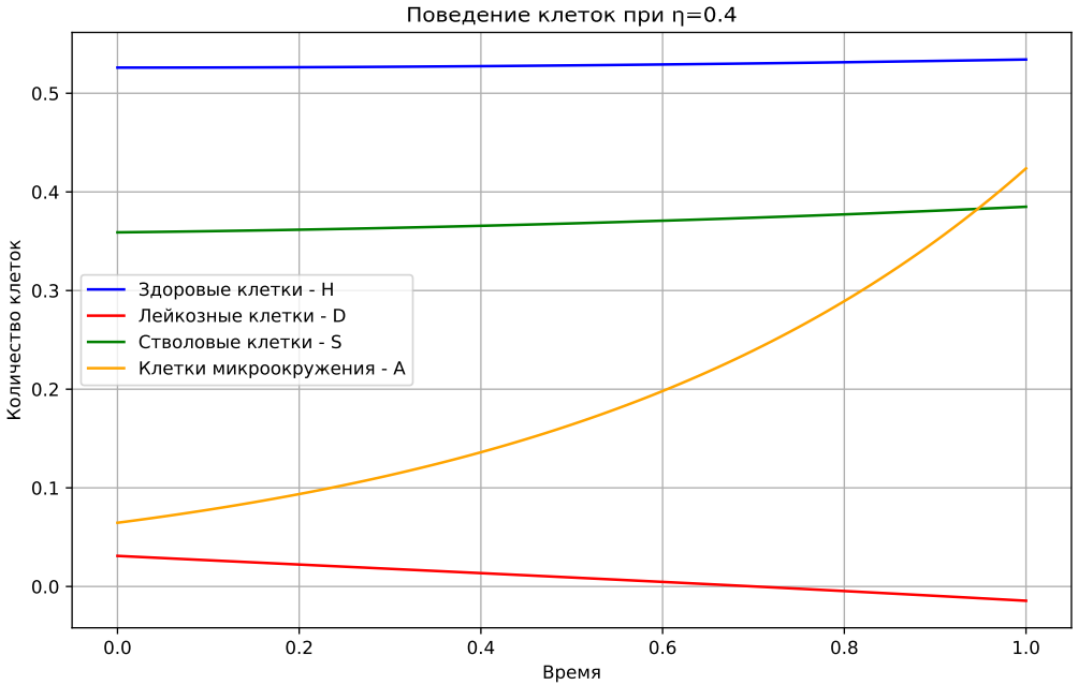


Рис. 3. Поведение клеток при $\eta = 0.4$

Наблюдается заметное изменение в динамике клеток.

Здоровые клетки (H): Количество начинает снижаться под давлением лейкозных клеток.

Лейкозные клетки (D): Их количество значительно возрастает, что указывает на доминирование лейкозных клеток в данной модели.

Стволовые клетки (S): Они могут либо оставаться стабильными, либо начинать сокращаться, если не хватает ресурсов для их поддержки.

Клетки микроокружения (A): Их динамика может отражать изменения в клеточном окружении, возможно, происходят изменения в их количестве из-за активного взаимодействия с другими типами клеток.

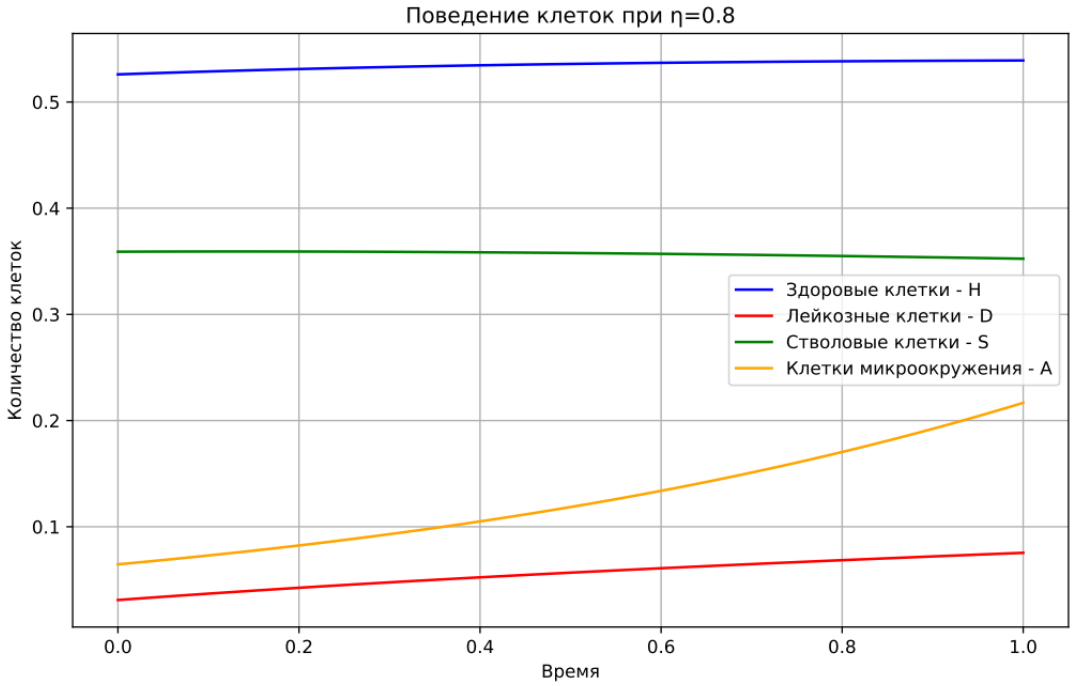


Рис. 4. Поведение клеток при $\eta = 0.8$

При таком высоком значении η модель может показывать серьезные изменения в поведении клеток.

Здоровые клетки (H): Вероятно, их количество резко снижается, поскольку лейкозные клетки получают колоссальное преимущество.

Лейкозные клетки (D): Их рост, скорее всего, достигает максимума, и они становятся доминирующим типом клеток в системе.

Стволовые клетки (S): Их количество может значительно сократиться, так как они не могут конкурировать с растущими лейкозными клетками.

Клетки микроокружения (A): Могут сильно варьироваться в зависимости от того, как они реагируют на сильное влияние лейкозных клеток, но снижение общего количества тоже возможно.

В результате, у нас есть результаты нескольких численных экспериментов, полученные при измельчении сетки. Мы видим, что два последних результата мало отличаются друг от друга, это дает нам косвенную надежду, что все правильно считается.

Заключение

Изучение динамики клеточных взаимодействий при различных значениях параметра η предоставляет важные сведения о том, как изменения в микроокружении могут влиять на поведение различных типов клеток. Этот анализ имеет особое значение для понимания процессов, связанных с онкологией, регенерацией тканей и патогенезом различных заболеваний.

Параметр η, скорее всего, отражает скорость взаимодействия между клетками или уровень их агрессивности. При малых значениях η (например, 0.1) системы остаются сбалансированными, где здоровые клетки способны сохранять свою численность без значительного влияния со стороны лейкозных клеток. Это может быть связано с тем, что в условиях низкой

агрессивности лейкозные клетки не имеют достаточной силы, чтобы доминировать над здоровыми клетками. В такой среде здоровые клетки могут активно делиться и поддерживать свое количество, что важно для нормального функционирования организма.

С увеличением значения η (до 0.2 и 0.4) наблюдается изменение динамики: число лейкозных клеток начинает расти, а здоровые клетки начинают подвергаться более значительному стрессу. Это подчеркивает, что даже небольшие изменения в микросреде могут значительно повлиять на здоровье организма. Высокий уровень η может означать, что клетки начинают конкурировать за ресурсы, такие как питательные вещества и пространство, что ведет к ухудшению состояния здоровых клеток.

При $(\eta = 0.4)$ мы видим, что лейкозные клетки становятся основным источником угрозы для здоровых клеток. Это может объясняться активной саморазмножающейся природой лейкозных клеток, которые начинают вытеснять здоровые клетки, что приводит к угнетению нормальных гематопоэтических процессов. Такие условия могут также способствовать развитию дополнительных мутаций и активизации других механизмов, которые еще больше усиливают малигнизацию клеток.

Наконец, при высоких значениях η (как 0.8) мы можем говорить о критической ситуации, когда лейкозные клетки практически полностью доминируют. Их присутствие может подавлять иммунный ответ организма, что делает его более уязвимым к инфекциям и другим заболеваниям. В таких условиях нормальная гомеостаза нарушается, и организм не может восстановить утраченные функции. Это драматический пример того, как высоко агрессивная среда приводит к быстрой эволюции злокачественных клеток, которые становятся устойчивыми к терапии и препятствуют нормальному функционированию организма.

Таким образом, исследование влияния параметра η на динамику клеточных взаимодействий является ключевым моментом в понимании сложных биологических систем. Эти знания могут не только помочь в лечении заболеваний, но и расширить наши представления о клеточной биологии, иммунологии и онкологии. В конечном итоге, глубокое понимание этих процессов может улучшить качество жизни пациентов и принести новые подходы в медицинскую практику.

Благодарности

Выражаю особую благодарность моему научному руководителю Половинкину Игорю Петровичу, доценту, доктору физико-математических наук, за значимые замечания и важнейшие советы при проведении исследования и оформления данной статьи.

Литература

1. *Глушков В. Г., Сергеев А. А.* Численные методы решения СЛАУ: Метод сеток и его применения. – Москва : Наука, 2021. – 280 с.

2. Математическая модель лейкоза [Электронный ресурс]. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=irj&paperid=225&option_lang=rus (дата обращения: 01.10.2024).

3. Метод конечных разностей [Электронный ресурс]. URL: https://portal.tpu.ru/SHARED/a/ALEX1479/study/Matmod/Tab1/Tab/11%20Лекция20%Мат_мод_физ_процессов.pdf (дата обращения 09.11.2024).

4. *Смирнова Е. Е., Кузнецов В. В.* Применение дифференциальных уравнений в биомедицинских исследованиях. – Новосибирск : Сибирское университетское издательство, 2019. – 300 с.

5. *Ковалев Д. Д.* Исследование моделей лейкемии с использованием численных методов // Журнал прикладной математики. – 2023. – Т. 58, № 2. – С. 45–56.

6. *Глушков В. Г., Сергеев А. А.* Численные методы решения СЛАУ: Метод сеток и его применения. – Москва : Наука, 2021. – 280 с.

7. *Кузнецов И. И., Петрова Н. Н.* Методы численного решения линейных уравнений. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2020. – 320 с.

8. *Романов В. В.* Алгоритмы и программирование методов решения СЛАУ. – Новосибирск : Сибирское университетское издательство, 2023. – 180 с.

9. *Fuentes-Garí M.* A mathematical model of subpopulation kinetics for the deconvolution of leukaemia heterogeneity / M. Fuentes-Garí, R. Misener, D. García-Munzer and others // Journal of the Royal Society Interface. – 2015. – V. 12. – № 108. 20150276. doi:10.1098/rsif.2015.0276.

10. *Berezansky L.* Stability and Controllability Issues in Mathematical Modeling of the Intensive Treatment of Leukemia / L. Berezansky, S. Bunimovich-Mendrazitsky, B. Shklyar // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2015. – V. 167, № 1. – P. 326–341. doi:10.1007/s10957-015-0717-9.

11. *Rădulescu I. R.* A complex mathematical model with competition in Leukemia with immune response - An optimal control approach / I. R. Rădulescu, D. Cândea, A. Halanay // IFIP Advances in Information and Communication Technology. – 2016. – V. 494. – P. 430–441.doi:10.1063/1.4765573

12. *Bunimovich-Mendrazitsky C.* Mathematical model of pulsed immunotherapy for bladder cancer / C. BunimovichMendrazitsky, H. Byrne, L. Stone // Bulletin of mathematical biology. – 2008. –V. 70, № 7. – P. 2055–2076. doi:10.1007/s11538-008-9344-z.

13. *Clapp G.* A review of mathematical models for leukemia and lymphoma / G. Clapp, D. Levy // Drug Discovery Today: Disease Models. – 2015, V. 16, № 2. – P. 1–6.

14. *Kolpak E. P.* Neoplasm Morbidity among the Population of Russia / E. P. Kolpak, I. S. Frantsuzova, K. V. Kuvshinova // International journal of advanced biotechnology and research. – 2017. – V. 8, № 3 – P. 2315–2322.

15. *Жукова И. В.* Математические модели злокачественной опухоли / И. В. Жукова, Е. П. Колпак // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2014. – № 3. – С. 5–18.

УДК 517.95

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ *K*-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА ПРИ УСЛОВИИ НЕЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Е. А. Грязнева

Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского

Аннотация. В работе доказана теорема о фундаментальном решении сингулярного дифференциального уравнения Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$ с отрицательными индексами оператора Бесселя $-1<-\gamma_i<0,$ при условии нечетной размерности трансцендентного псевдоевклидова пространства.

Ключевые слова: фундаментальное решение, оператор Бесселя, оператор Киприянова, весовая линейная форма, пространства Шварца основных функций, радиальная функция.

Введение

Оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}}=\sum_{i=1}^{n}B_{-\gamma_i},\ B_{-\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i},\ 0<\gamma_i<1, \tag{1}$$

называется сингулярным дифференциальным оператором И. А. Киприянова (введен в [1]).

Уравнение

$$\Delta_{B_{-\gamma}}^{m}u=f(x),\ x\in R_n^+=\left\{x=(x_1,...,x_n):x_i>0,i=\overline{1,n}\right\}$$

будем называть сингулярным дифференциальным уравнением Киприянова.

Число $-|\gamma|=-\gamma_1-\gamma_2-...-\gamma_n$, следуя [2], будем называть коэффициентом скрытой сферической симметрии, а число $n-|\gamma|>0$ — трансцендентной (дробноразмерной) размерностью псевдоевклидова пространства $R_{n-|\gamma|}$.

Введем весовые линейные формы двух видов

$$(u,\upsilon)_{-\gamma}=\int\limits_{\Omega\subseteq R_n^+}u(x)\upsilon(x)\prod_{i=1}^{n}x_i^{-\gamma_i}dx,\ (u,\upsilon)_1=\int\limits_{\Omega\subseteq R_n^+}u(x)\upsilon(x)\prod_{i=1}^{n}x_i dx. \tag{2}$$

В качестве основного пространства функций рассматривается подпространство Л. Шварца $S_{e\upsilon}=S_{e\upsilon}(R_n^+)$, состоящее из функций четных по каждой координате своего аргумента. Пространство распределений Шварца — Киприянова $S'_{e\upsilon,-\gamma}$ или $S'_{e\upsilon,1}$ представляют собой пространство двойственное к $S_{e\upsilon}$, порожденные весовыми линейными формами (2) соответственно.

δ — Функцией Дирака — Киприянова будем называть сингулярное весовое распределение

$$\left(\delta_{-\gamma},\varphi\right)_{-\gamma}=\varphi(0).$$

Обычными средствами легко показать, что оператор Киприянова (1) является эрмитовым (самосопряженным по Лагранжу) в рамках весовой линейной формы $(\cdot,\cdot)_{-\gamma}$. Следовательно, по определению действия оператора (1) на распределение $f\in S'_{e\upsilon,-\gamma}$, полагаем

$$\left(\Delta_{B_{-\gamma}}u,\varphi\right)_{-\gamma}=\left(u,\Delta_{B_{-\gamma}}\varphi\right)_{-\gamma}. \tag{3}$$

1. Фундаментальное решение *K*-полигармонического оператора

Таким образом, нам нужно найти функционал $\mathcal{E}$, для которого

$$\left(\Delta_{B_{-\gamma}}\mathcal{E},\varphi\right)_{-\gamma}=\int\limits_{R_n^+}\mathcal{E}(x)\left(\Delta_{B_{-\gamma}}\varphi(x)\right)\prod_{i=1}^{n}x_i^{-\gamma_i}dx=\left(\delta_{-\gamma},\varphi\right)_{-\gamma}=\varphi(0).$$

Вначале заметим, что из условия на мультииндекс γ вытекает неравенство $n-|\gamma|>0$ и, следовательно $n-|\gamma|-1>-1$. Воспользуемся формулой Киприянова — Бельтрами действия оператора (1) на радиальную функцию (см. [1]):

$$\Delta_{B_{-\gamma}}f(|x|)=B_{n-|\gamma|-1}f(r)=B_\mu r^k,\ \ \mu=n-|\gamma|-1.$$

Лемма 1. *Пусть* $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n),\ 0<\gamma_i<1$. *Имеет место равенство*

$$\Delta_{B_{-\gamma}}r^k=B_\mu r^k=k\left(k+n-|\gamma|-2\right)r^{k-2},\qquad(4)$$

где $B_\mu=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{n-|\gamma|-1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ *— оператор Бесселя с параметром* $\mu=n-|\gamma|-1>-1$.

Доказательство. Учитывая приведенную выше формулу Киприянова — Бельтрами, и то, что $f=|x|^k=r^k$ — радиальная функция, получим

$$\Delta_{B_{-\gamma}}|x|^k=B_{n-|\gamma|-1}r^k=\frac{\partial^2 r^k}{\partial r^2}+\frac{n-|\gamma|-1}{r}\frac{\partial r^k}{\partial r}=k\left(k-1\right)r^{k-2}+\frac{n-|\gamma|-1}{r}k\,r^{k-1}=$$
$$=\left(k^2-k+\left(n-|\gamma|-1\right)k\right)r^{k-2}=k\left(k+n-|\gamma|-2\right)r^{k-2}.$$

Доказательство закончено.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\Delta_{B_{-\gamma}}^m r^{2m-n+|\gamma|}=\Delta_{B_{-\gamma}}\left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-1}\right)r^{2m-n+|\gamma|}=\Xi\,\Delta_{B_{-\gamma}}r^{2-n+|\gamma|},\qquad(5)$$

где коэффициент Ξ *определен равенством*

$$\Xi=\prod_{k=0}^{m-2}\left(2m-2k-n+|\gamma|\right)\prod_{l=1}^{m-1}2\left(m-l\right).\qquad(6)$$

Доказательство. Положим в равенстве (4) $k=2m-n+|\gamma|$. Тогда

$$\Delta_{B_{-\gamma}}^m r^{2m-n+|\gamma|}=\Delta_{B_{-\gamma}}\left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-1}\right)r^{2m-n+|\gamma|}=\Delta_{B_{-\gamma}}\Xi\,r^{2-n+|\gamma|}.$$

Для определения коэффициента Ξ воспользуемся формулой (4), в которой полагаем $k=2m-n+|\gamma|$. В результате получим

$$\left(\Delta_{B_{-\gamma}}^{m-1}\right)r^{2m-n+|\gamma|}=\left(2m-n+|\gamma|\right)\left(2m-n+|\gamma|+n-|\gamma|-2\right)\left(\Delta_B^{m-2}\right)r^{2m-2-n+|\gamma|}=$$
$$=\left(2m-n+|\gamma|\right)\left(2m-2\right)\left(\Delta_B^{m-2}\right)r^{2m-2-n+|\gamma|}=$$
$$=\left(2m-n+|\gamma|\right)\left(2m-2\right)\left(2m-2-n+|\gamma|\right)\left(2m-2-n+|\gamma|+n-|\gamma|-2\right)\left(\Delta_B^{m-3}\right)r^{2m-4-n+|\gamma|}=$$
$$=\left(2m-n+|\gamma|\right)\left(2m-2\right)\left(2m-2-n+|\gamma|\right)\left(2m-4\right)\left(\Delta_B^{m-3}\right)r^{2m-4-n+|\gamma|}=$$
$$=\left(2m-n+|\gamma|\right)\left(2m-2\right)\left(2m-2-n+|\gamma|\right)\left(2m-4\right)\left(2m-4-n+|\gamma|\right)\left(2m-6\right)\left(\Delta_B^{m-4}\right)r^{2m-6-n+|\gamma|}=$$
$$=\left(2m-n+|\gamma|\right)\left(2m-2\right)\left(2m-2-n+|\gamma|\right)\left(2m-4\right)\left(2m-4-n+|\gamma|\right)\left(2m-6\right)\times...\times$$
$$\times...\times\left(4-n+|\gamma|\right)\cdot 2\left(\Delta_B^0\right)r^{2-n+|\gamma|}.$$

Отсюда получаем равенство (5) с константой имеет следующий вид:

$$\Xi=\left(2m-n+|\gamma|\right)\left(2m-2\right)\left(2m-2-n+|\gamma|\right)\left(2m-4\right)\left(2m-4-n+|\gamma|\right)\left(2m-6\right)\left(4-n+|\gamma|\right)\cdot 2,$$

которую удобно представить в виде (6). Доказательство закончено.

2. Фундаментальное решение $\Delta^m_{B_{-\gamma}}$ оператора Киприянова.

Теорема. *Пусть* $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$, $0<\gamma_i<1$ *и число* $n-|\gamma|$ *не является четным. Фундаментальное решение* K*-полигармонического оператора Киприянова* $\Delta^m_{B_{-\gamma}}$ *с особенностью в начале координат представлено следующим регулярным распределением* $S'_{e\upsilon,-\gamma}$

$$\mathcal{E}_{-\gamma}(x)=\Xi^{-1}\frac{|x|^{2m-n+|\gamma|}}{\left(2-n+|\gamma|\right)\left|S_1(n)\right|_{-\gamma}},$$

где коэффициент Ξ *определен равенством (6), а площадь поверхности нагруженной сферы* $\left|S_1(n)\right|_{-\gamma}$ *определена при всех* $\gamma_i\in(0,1)$ *и вычисляется по формуле (см. [1]).*

$$\left|S_1^+(n)\right|_{-\gamma}=2^n\int\limits_{S_1^+(n)=\{x:|x|=1,x_i>0\}}\prod_{k=1}^{n}x_i^{-\gamma_k}dS\,\frac{2\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{1-\gamma_i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-|\gamma|}{2}\right)}.$$

Доказательство вытекает из формулы (5), поскольку функция

$$\frac{|x|^{2m-n+|\gamma|}}{\left(2-n+|\gamma|\right)\left|S_1(n)\right|_{-\gamma}}$$

есть фундаментальное решение оператора Киприянова (см. [3]).

Рассмотренная здесь задача поставлена профессором Л. Н. Ляховым. Автор благодарен за поставленную задачу и за консультации при работе над этой темой.

Литература

1. *Ляхов Л. Н.* Оператор Киприянова — Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B- гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1610–1620.

2. *Ляхов Л. Н.* Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, вып. 4. – С. 517–528.

3. *Ляхов Л. Н.* Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина, С. А. Рощупкин, Ю. Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2023. – № 7. – С. 52–65.

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

Ф. А. Евсеев

Югорский государственный университет

Аннотация. Дан обзор исследований, посвященных квазигидродинамическим уравнениям в случае слабосжимаемой жидкости, как в нелинейном, так и в линеаризованном виде, а также квазигидродинамическим уравнениям в приближении мелкой воды. Описаны некоторые результаты по аналитическому и численному решению начально-краевых задач для таких уравнений. Приведены математические модели течения в масштабе порового пространства пород-коллекторов, основанные на квазигидродинамическом подходе.
Ключевые слова: квазигидродинамические уравнения, слабосжимаемая жидкость, начально-краевая задача, мелкая вода, модель, цифровой керн.

Введение

В последнее время все большую популярность набирает направление математического моделирования процессов нефтегазодобычи, которое рассматривает эффективные подходы к численному моделированию широкого круга течений газа и жидкости. Так, например, актуальной задачей является моделирование процессов микротечений жидкости сквозь геометрию порового пространства кернового материала. Один из подходов для решения этой задачи может быть основан на использовании математических моделей, обобщающих систему уравнений Навье-Стокса и отличающиеся от нее дополнительными диссипативными слагаемыми.

В работе рассматриваются системы квазигидродинамических уравнений для случая слабосжимаемой жидкости и в приближении мелкой воды, приводится описание моделей, предназначенных для цифрового анализа керна.

1. Система квазигидродинамических уравнений в случае слабосжимаемой жидкости

Рассмотрим систему квазигидродинамических уравнений в случае слабосжимаемой жидкости (см. параграф 1.2 в [1]):

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\ \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\,div\,\vec{u}\otimes\vec{u} + \nabla p = \rho\vec{f} + 2\eta\,div\,\sigma + \rho\,div\,((\vec{w}\otimes\vec{u}) + (\vec{u}\otimes\vec{w})), \tag{1}$$

где тензор скоростей деформации σ имеет форму: $\sigma(\vec{u}) = 1/2\,((\vec{\nabla}\otimes\vec{u}) + (\vec{u}\otimes\vec{\nabla})^T)$. Вектор $\vec{w}$ определяется по формуле $\vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + 1/\rho\,\nabla p - \vec{f})$. Плотность ρ, коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константам. Векторное поле $\vec{f} = \vec{f}(x,t)$ определяет массовую плотность внешних сил. Система (1) замкнута относительно неизвестных функций — вектора скорости $\vec{u} = \vec{u}(x,t)$ и давления $p = p(x,t)$. Символы div и ∇ определяют операции дивергенции и градиента соответственно.

Систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{gathered} div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\ \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}),\ (t,x)\in Q = (0,T)\times G,\ G\subset R^3, \\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f} + \mu\Delta\vec{u} + \mu\nabla(div\,\vec{u}) + (\vec{u},\nabla)\vec{w} + \vec{w}\,div\,\vec{u}, \end{gathered} \tag{2}$$

где G — ограниченная область с границей $\Gamma\in C^2$ (см. определения в [2, гл. 1]), $\mu = \eta/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости.

Первые варианты системы (1) были получены Елизаровой Т. Г. и Четверушкиным Б. Н. в 80-е годы в работах [3, 4] на основе известной кинетической модели. Первые варианты системы дифференциальных уравнений в частных производных называются системой квазигазодинамических (КГД) уравнений. Посвященную ей теорию и ее детальный анализ свойств можно найти в монографиях [5, 6]. Позднее, в 90-е годы Шеретовым Ю. В. на основе более общего уравнения состояния была предложена еще одна модель [7], которая получила название квазигидродинамическая (КГиД) система уравнений (см. системы (1), (2)). В частности, вывод этой модели и некоторые результаты можно найти в работе [1]. Сошлемся также на работы [8–10], в которых были описаны новые точные решения, общие для систем Навье — Стокса и КГиД уравнений, выведена интегрируемая система обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой является частным случаем решения исходной стационарной КГиД системы уравнений, а также сформулирован и доказан принцип суперпозиции решений для исходной нелинейной КГиД системы уравнений.

Злотником А. А. [11, 12] были получены результаты по части анализа некоторых неклассических задач для КГиД уравнений. В [11] (см. также [12]) была обобщена КГиД модель на случай произвольного уравнения состояния, удовлетворяющего условиям термодинамической устойчивости, наличия внешних сил и источников тепла $(\partial p/\partial\rho)_T > 0$, $(\partial\varepsilon/\partial T) > 0$, $p = p(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$. Для линеаризованной КГиД системы приводятся доказательства теоремы существования и единственности обобщенных решений задач Коши и начально-краевых задач в случае реального и политропного газа на произвольном временном промежутке, выведены соответствующие энергетические неравенства. Позднее, Злотником А. А. была впервые получена регуляризация квазигазодинамического типа гетерогенной модели (в квазигомогенной форме), для которой строилась реализующая ее явная двухслойная по времени и симметричная трехточечная по пространству разностная схема в 1D случае и приводятся численные результаты [13]. Доказательства теоремы существования и единственности обобщенных и регулярных решений аналога первой начально-краевой задачи для системы (2) представлены в работах [14] и [15] соответственно. Доказательство обобщенного решения основано на методе Галёркина с использованием априорных оценок [14]. В работе [15], при определенных условиях на данные, и условии нормировки, показано, что существует единственное регулярное решение начально-краевой задачи локально по времени.

Система (2) в линеаризованном случае имеет вид [16]:

$$\begin{aligned} &div\,\vec{V} = div\,\vec{W},\ \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{w}_0, \nabla)\vec{V} + (\vec{V} - \vec{W}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P = \\ &= \vec{F} + \mu\Delta\vec{V} + \mu\nabla\, div\,\vec{V} + (\vec{v}, \nabla)\vec{W} + (\vec{V}, \nabla)\vec{w}_0 + \vec{W}\, div\,\vec{v} + \vec{w}_0\, div\,\vec{V}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\vec{w}_0 = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p_0 - \vec{f}_0)]$ и $\vec{W} = \tau[(\vec{v}, \nabla)\vec{V} + (\vec{V}, \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P - \vec{F}]$.

Авторами статьи [16] была исследована теорема существования и единственности решений начально-краевых задач для линеаризованной КГиД системы (3) в пространствах Соболева. Были рассмотрены случаи обобщенных и регулярных решений. Существование и единственность обобщенного решения доказывается при некоторых условиях гладкости на данные. В случае регулярного решения возникают также и некоторые ограничения на нормы данных. Полученные результаты обеспечивают соответствующие оценки устойчивости решений исходной нелинейной задачи.

Отметим, что система (2) (см. также систему (3)) состоит из двух частей: первая представляет собой эллиптическое уравнение относительно давления, а вторая представляет собой параболическую систему. Более того, неизвестные p и $\vec{u}$ входят в главные части эллиптического уравнения и параболической системы.

2. Система квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды.

Рассмотрим систему КГиД уравнений в приближении мелкой воды (см. параграф 3.1 в [1]):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + div(h\vec{u}) = div(h\vec{w}), \quad \vec{w} = \tau((\vec{u},\nabla)\vec{u} + g\nabla h),$$
$$\frac{\partial (h\vec{u})}{\partial t} + div(h\vec{u}\otimes\vec{u}) + g\nabla(\frac{h^2}{2}) = 2\,div(\nu h\hat{\sigma}(\vec{u})) + div(h\vec{w}\otimes\vec{u} + h\vec{u}\otimes\vec{w}), \qquad (4)$$
$$(t,x)\in Q = (0,T)\times G, G\subset R^2.$$

где тензор скоростей деформации $\hat{\sigma}$ имеет форму:

$$\hat{\sigma}(\vec{u}) = \hat{\sigma} = \frac{1}{2}[(\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T], \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}),$$

G — ограниченная область с границей $\Gamma\in C^2$, коэффициент кинематической вязкости жидкости ν и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Пусть $S = (0,T)\times\Gamma$. Вектор $\vec{u} = (u_1(t,x_1,x_2),\ u_2(t,x_1,x_2))$ — усредненная по высоте скорость течения. Величина $h = h(t,x_1,x_2)$ интерпретируется как расстояние по вертикали от ровного дна водоема, расположенного в плоскости $x_1 ox_2$, до свободной поверхности жидкости. Система включает константу Галилея $g = 9{,}8\ (m/c^2)$, равную модулю ускорения свободного падения в гравитационном поле Земли.

Уравнения в теории мелкой воды описывают процессы в природе, связанные с движением несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести и характеризующиеся пренебрежительно малым размером вертикального масштаба по сравнению с размером по горизонтали [17]. Система КГиД уравнений в теории мелкой воды (4) является аналогом уравнения Сен-Венана [1], представляющего собой систему нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных, которые аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера [18]. Вывод уравнений Сен-Венана и их детальный анализ свойств представлены в [19, 6]. Отдельно уделим внимание работам [20–23], в которых исследуются вопросы разрешимости теоремы существования и единственности решений уравнений Сен-Венана. В статье [20] авторами исследована единственность классического решения системы одномерных уравнений Сен-Венана. Локальное по времени и глобальное существование классических решений для диссипативных уравнений мелкой воды рассматривается в [21] и [22], соответственно. В работе [23] с помощью подхода, основанный на теории неподвижной точки суммы двух операторов в банаховых пространствах, исследуется проблема начального значения для одномерных уравнений Сен-Венана.

Опишем некоторые результаты, посвященные численному и аналитическому решению задач в теории мелкой воды (уравнений Сен-Венана). В работах Ляпидевского В. Ю. и Чеснокова А. А. [24, 25, 17] большое внимание уделяется построению и анализу нелинейных математических моделей, отражающие влияние неоднородностей полей скорости и плотности на структуру волн в стратифицированных и многофазных течениях, описываемые гиперболическими системами дифференциальных и интегродифференциальных уравнений в теории мелкой воды. В работе [24] для описания стационарных и нестационарных волн используются модели второго приближения теории мелкой воды, а также их гиперболические аппроксимации. В [25] в приближении теории мелкой воды рассматривается горизонтально-сдвиговое движение однородной жидкости в открытом канале, построены стационарные решения уравнений движения и решена задача о структуре слоя смешения. В описанных выше работ выполнены верификация предложенных моделей на основе сравнения с известными экспериментальными данными и численными решениями уравнений в теории мелкой воды.

Следует отметить, что на развитие и разработку моделей движения слоистой жидкости существенное влияние оказала работа Овсянникова Л. В., посвященная исследованию моде-

лей двухслойной мелкой воды [26]. Отметим также работы Тешукова В. М. [27, 28] и Шелухина В. В. [29].

3. Квазигидродинамические модели для цифрового керна

Немалый вклад модели, основанные на системе КГиД уравнений (см. системы (1)–(4)), внесли в решение задач, посвященные технологии «цифровой керн», суть которой заключается в прямом численном моделировании течений в масштабе порового пространства пород-коллекторов нефти и газа с разрешением структуры этого пространства и динамики межфазных границ [30]. В качестве примера рассмотрим некоторые из таких моделей.

В работе [30] для описания многофазных течений используется КГиД регуляризация модели Навье — Стокса — Кана — Хилларда (5), состоящая в добавлении в уравнения системы специальных диссипативных слагаемых, пропорциональных малому параметру, имеющему размерность времени:

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho_a + div(\rho_a u^m) = -div\, b_\alpha, \quad \alpha = 1,2; \\ &\partial_t(\rho u) + div(\rho u^m \otimes u) + \nabla p = div\,\Pi + div\,\Pi^\lambda + \rho\nabla\Phi, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\rho_\alpha(x,t) > 0$ — плотность компонента смеси с номером α, $\rho(x,t)$ — полная плотность смеси, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $u(x,t)$ — скорость жидкости, w — регуляризующая скорость жидкости, $u^m = u - w$. Массовая сила описывается потенциалом $\Phi(x)$. Векторы b_α описывают диффузионные потоки компонентов:

$$b_\alpha = -M_{\alpha\beta}\nabla(\theta^{-1}\hat{\mu}_\beta), \quad \sum_{\beta=1}^{2} M_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha = 1,2.$$

$M_{\alpha\beta}(\bar{\rho}) > 0$ — коэффициент подвижности компонентов, которые образуют симметричную матрицу. $\theta > 0$ — температура смеси.

На основе модели (5) авторами [30] получены результаты численных расчетов двухфазного вытеснения флюидов в образце горной породы. Построены кривые относительных фазовых проницаемостей. В [31] были описаны и численно исследованы модели с КГиД-регуляризацией однофазного однокомпонентного течения

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + \nabla\cdot j_m = 0, \\ &\partial_t(\rho u) + \nabla\cdot(j_m \otimes u) + \nabla p = \nabla\cdot\Pi, \end{aligned} \tag{6}$$

и двухфазного двухкомпонентного течения

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + div\, j_m = 0, \\ &\partial_t(\rho u) + div(j_m \otimes u) + \nabla p = div\,\Pi, \\ &\partial_t(\rho C) + div(j_m C) = div(M\nabla\mu). \end{aligned} \tag{7}$$

с использованием программного комплекса DiMP-Hydro, предназначенный для моделирования микротечений однофазных и двухфазных вязких сжимаемых жидкостей с различной реологией в пространственных областях, геометрия которых имеет воксельное представление, актуальное для применения методов рентгеновской компьютерной томографии.

Заключение

В работе были рассмотрены квазигидродинамические уравнения для случая слабосжимаемой жидкости как в нелинейном, так и в линеаризованном виде, а также квазигидродинамические уравнения в приближении мелкой воды. Описаны некоторые результаты аналитического и численного исследования начально-краевых задач для таких уравнений. Приведены математические модели течения в масштабе порового пространства пород-коллекторов, основанные

на квазигидродинамическом подходе. Показана актуальность использования моделей данного типа для решения задач при цифровом анализе керна.

Литература

1. *Шеретов Ю. В.* Регуляризованные уравнения гидродинамики : монография / Ю. В. Шеретов. – Твер. гос. ун-т. – Тверь : ТвГУ, 2016. – 222 с.

2. *Ладыженская О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М. : Наука, 1967.

3. *Elizarova T. G.* A computational algorithm for the calculation of gas-dynamic flows / T. G. Elizarova, B. N. Chetverushkin // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1984. – Vol. 279:1. – P. 80–83.

4. *Елизарова Т. Г.* Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений / Т. Г. Елизарова. – М. : ИПМ. – 1984. – 23 с.

5. *Жериков А. В.* Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости / А. В. Жериков. – Saarbrucken : Lambert Academic Publishing, 2010. – 124 с.

6. *Шеретов Ю. В.* Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении / Ю. В. Шеретов. – М. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 400 с.

7. *Шеретов Ю. В.* Об одной новой математической модели в гидродинамике / Ю. В. Шеретов // В книге Применение функционального анализа в теории приближений. – Тверь: Тверской государственный университет. – 1996. С. 124–134.

8. *Шеретов Ю. В.* О построении точных решений двумерной квазигидродинамической системы / Ю. В. Шеретов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2021. – № 1. – С. 5–20.

9. *Шеретов Ю. В.* О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах / Ю. В. Шеретов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2017. – № 1. – С. 85-94.

10. *Шеретов Ю. В.* Принцип суперпозиции решений квазигидродинамической системы / Ю. В. Шеретов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2022. – № 2. – С. 60–73.

11. *Злотник А. А.* Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений / А. А. Злотник // Доклады Академии наук – 2010. – Т. 433, № 6. – С. 599–603.

12. *Злотник А. А.* Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение энергетического баланса / А. А. Злотник // Матем. Моделирование. 2021. – 24:10. – С. 51–64.

13. *Zlotnik A. A.* Regularized Equations for Dynamics of the Heterogeneous Binary Mixtures of the Noble-Abel Stiffened-Gases and Their Application / A. A. Zlotnik, T. A. Lomonosov // Dokl. Math. – 2023. – Vol. 108. – P. 443–449.

14. *Евсеев Ф. А.* Разрешимость начально-краевых задач для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости / Ф. А. Евсеев // Вестник Югорского государственного университета. – 2024. – Т. 20, № 2. – С. 97–106.

15. *Pyatkov S. P.* Regular Solvability of the First Initial–Boundary Value Problem for the Quasihydrodynamic System of Equations in the Case of a Weakly Compressible Fluid / S. P. Pyatkov, F. A. Evseev // J Math Sci. – 2024. – Vol. 81. – P. 909–924.

16. *Evseev F. A.* On Some Properties of a Linearized Quasi-Hydrodynamical System of Equations / S. P. Pyatkov, F. A. Evseev // Lobachevskii J Math. – 2023. – Vol. 44. – P. 3266–3276.

17. *Ляпидевский В. Ю.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости: монография / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков – РАН. СО. Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. – 419 с.

18. *Bresch D.* Shallow–Water Equations and Related Topics / D. Bresch // In Handbookon Differential Equations. Elsevier, 2009. – Vol. 5. – P. 1–104.

19. *Li Y.* On Classical Solutions to 2D Shallow Water Equations with Degenerate Viscosities / Y. Li, R. Pan, S. Zhu // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2017. – Vol. 19, No 1 – P. 151–190.

20. *Lai H. V.* On Uniqueness of a Classical Solution of the System of NonLinear 1-D Saint Venant Equations / H. V. Lai, L. M. Long, M. D. Trung // Vietnam Journal of Mechanics, NCST of Vietnam. – 1999. – Vol. 21, No 4. – P. 231–238.

21. *Ton B. A.* Existence and Uniqueness of a Classical Solution of an Initial Boundary Value Problem of the Theory of Shallow Waters / B. A. Ton // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1981. – Vol. 12, No 2. – P. 229–241.

22. Kloeden P. E. Global Existence of Classical Solutions in the Dissipative Shallow Water Equations / Kloeden P. E. // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1985. – Vol. 16, No 2. – P. 301–315.

23. Existence of Global Classical Solutions for the Saint-Venant Equations / R. Azib, S. Georgiev, A. Kheloufi, K. Mebarki // Vladikavkaz Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 24, No 3. – P. 21–36.

24. *Ляпидевский В. Ю.* Дисперсионные эффекты и блокировка потока при обтекании порога / В. Ю. Ляпидевский, К. Н. Гаврилова // Прикл. мех. техн. физ.. – 2008. – Vol. 49, No 1. – P. 45–58.

25. *Чесноков А. А.* Эволюция горизонтального слоя смешения в мелкой воде / А. А. Чесноков, В. Ю. Ляпидевский// Прикл. мех. техн. физ. – 2019. – Vol. 60, No 2. – P. 207–219.

26. *Овсянников Л. В.* Модели двухслойной «мелкой воды» / Л. В. Овсянников // Прикладная механика и техническая физика. – 1979. – Т. 20, № 2(114). – С. 3–14.

27. *Тешуков В. М.* Модель сильного разрыва для уравнений пространственных длинных волн, распространяющихся на сдвиговом течении со свободной границей / В. М. Тешуков, А. К. Хе // Прикл. мех. техн. физ. – 2008. – Vol. 49, No 4. – P 206–213.

28. *Тешуков В. М.* Пространственные простые волны на сдвиговом течении / В. М. Тешуков // Прикл. мех. техн. физ. – 2002. – Vol. 43, No 5. – P. 28–40.

29. *Шелухин В. В.* Об одной начально-краевой задаче для уравнений фильтрации трех несмешивающихся капиллярных жидкостей / В. В. Шелухин // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2006. – Vol. 6, No 2. – P. 103–113.

30. *Балашов В. А.* Технология «цифровой керн» и суперкомпьютерные вычисления / В. А. Балашов, Е. Б. Савенков, Б. Н. Четверушкин // Вестник Российской академии наук. – 2023. – Т. 93, № 6. – С. 503–511.

31. *Балашов В. А.* Вычислительные технологии программного комплекса DiMP-Hydro для моделирования микротечений / В. А. Балашов, Е. Б. Савенков, Б. Н. Четверушкин // Матем. Моделирование. – 2019. – Т. 31, № 7. – С. 21–44.

УДК 519.642.2

ФУНКЦИОНАЛЬНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. С. Еремин

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются явные методы решения функционального дифференциального уравнения запаздывающего типа второго порядка, первая производная решения которого входит в правую часть только своим значением в текущий момент времени. Формулируется явный функционально-непрерывный метод решения такого уравнения, который начиная с четвёртого порядка, требует меньше этапов, чем аналогичные методы для уравнения первого порядка. Приводится конкретная расчётная схема метода четвёртого порядка. Проводится численное тестирование, подтверждающее его сходимость с порядком четыре.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, функционально-непрерывные уравнения, дифференциальные уравнения второго порядка, методы Рунге — Кутты, непрерывные методы, методы с непрерывными этапами.

Введение

В [1] рассмотрены одношаговые методы типа Рунге — Кутты (РК) для функционального дифференциального уравнения запаздывающего типа (ФДУЗТ)

$$\dot{u}(t) = g(t, u_t), \tag{1}$$

где $u_t = u(t+\theta),\ \theta \in [-r, 0]$ для некоторого максимального запаздывания r. Под $\dot{u}$ понимается производная по независимой переменной t.

Из-за того, что правая часть зависит от решения вплоть до текущей точки непосредственное применение непрерывных методов Рунге — Кутты (НРК) (см., напр., [2]), разработанных для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), становится невозможным. Авторы [1] строят явные методы типа Рунге — Кутты, названные ими функционально-непрерывными (ФНРК), которые изначально сконструированы для решения уравнений вида (1). Они выводят условия для обеспечения дискретного и равномерного порядков до 4-го включительно и дают общий подход для построения методов произвольного порядка. В силу большей сложности условий порядка и ориентированности методов в том числе на уравнения (1) с недифференцируемой по первому аргументу функцией g, минимальное количество этапов для обеспечения определённого порядка в них больше, чем у НРК. При этом даже использование первого этапа следующего шага для построения непрерывного приближения к решению [2, 3], начиная с четвёртого порядка делает эти методы более дорогими, чем НРК и тем более, чем классические методы РК для ОДУ.

В [4] для уравнения второго порядка без зависимости от первой производной

$$\ddot{u}(t) = g(t, u_t), \tag{2}$$

строятся явные методы (ФНРКН), реализующие идею методов Рунге — Кутты — Нюстрёма, которые за счёт особого вида уравнения снижают необходимое число этапов для достижения определённого порядка. В [3] идея развита и построены методы с использованием первого этапа следующего шага. Сравнение минимального числа этапов для различных методов представлено в табл. 1. Число этапов, указанное как $s+1$ означает использование первого этапа следующего шага для построения непрерывного приближения, что сокращает на 1 количество вычислений правой части на шаг.

Таблица 1

Сравнение минимального числа этапов явных методов Рунге — Кутты

Порядок, p	РК	НРК	ФНРК	ФНРКН
2	2	2	2	1 + 1
3	3	3 + 1	3 + 1	2 + 1
4	4	5 + 1	6 + 1	4 + 1
5	6	7 + 1	10 + 1	6 + 1

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$\ddot{u}(t) = g\left(t, u_t, \dot{u}(t)\right), \tag{3}$$

описывающее, например, модель раскачивания груза при работе портового крана [5]. В первом разделе сформулирован сам метод. Во разделе 2 приводятся коэффициенты метода четвёртого порядка, требующего 5 + 1 этап. В третьем разделе приводятся результаты численного тестирования, подтверждающие сходимость четвёртого порядка для построенного метода.

1. Функционально-непрерывный метод

Мы рассматриваем одношаговый метод типа Рунге — Кутты для применения к уравнению (1) на некотором промежутке $t \in [t_0, t_{\text{end}}]$ при заданной начальной функции $\varphi(t)$, определяющей решение левее t_0, но не обязательно удовлетворяющей уравнению (3):

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \le t_0.$$

Аналогично применению методов Рунге — Кутты для ОДУ решение строится шаг за шагом, причём решение на предыдущем шаге служит частью начальной функции для следующих шагов. На n-м шаге $[t_{n-1}, t_n]$ решается *локальная начальная задача*

$$\begin{cases} \ddot{y}^{[n]}(t) = f\left(t, y_t^{[n]}, \dot{y}^{[n]}(t)\right), & t \in [0, h_n], \\ y^{[n]}(t) = \psi^{[n]}(t), & t \le 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $h_n = t_n - t_{n-1}$, $y^{[n]}(t) = u(t_{n-1} + t)$, $f(t, \cdot, \cdot) = g(t_{n-1} + t, \cdot, \cdot)$, а $\psi^{[n]}(t)$ — начальная функция локальной задачи, составленная из начальной функции глобальной задачи $\varphi(t)$ и непрерывных решений предыдущих шагов. На первом шаге локальная задача совпадает с глобальной с точностью до сдвига аргумента, а именно $y^{[1]}(t) = u(t_0 + t)$, $\psi^{[1]}(t) = \varphi(t_0 + t)$.

В рамках данной статьи штрих $(\cdot')$ не является обозначением производной, а только указывает на то, что соответствующие величины соотносятся с производной решения $\dot{u}$ в том же смысле, в каком величины без точки соотносятся с самим решением u.

Определение 1. *Явным s-этапным* (для натурального s) *функционально-непрерывным методом Рунге — Кутты для уравнения второго порядка* (3) называется набор матриц и векторов $(A(\cdot), A', b(\cdot), b'(\cdot), c)$, где

- $A(\cdot)$ — полиномиальная матрица размерности $s \times s$, такая что $A(0) = \mathbf{O}$,
- A' — строго нижнетреугольная матрица размерности $s \times s$,
- $b(\cdot)$ и $b'(\cdot)$ — полиномиальные векторы длины s, такие что $b(0) = b'(0) = \mathbf{O}$,
- c — вектор длины s с $c_1 = 0$ и $c_i \ge 0$ для $i = 2, \ldots, s$.

В дальнейшем опустим индексы $\cdot^{[n]}$ и $\cdot_n$ при рассмотрении одного шага метода. Применение рассматриваемого метода $(A(\cdot), A', b(\cdot), b'(\cdot), c)$ с длиной шага h к задаче (4) даёт непрерывное приближение решения на интервале $[0, h]$:

$$y(\alpha h) \approx \eta(\alpha h) = \psi(0) + \alpha h \dot{\psi}(0) + h^2 \sum_{i=1}^{s} b_i(\alpha) K_i,$$
$$\dot{y}(\alpha h) \approx \eta'(\alpha h) = \dot{\psi}(0) + h \sum_{i=1}^{s} b_i'(\alpha) K_i, \tag{5}$$

где оценки вторых производных решения

$$K_i = f\left(T_i, Y_{T_i}^i, Y_i'\right), \quad i = 1, \ldots, s,$$

абсциссы этапов $T_i = c_i h$, $Y^i : [T_i - r, T_i] \to \mathbb{R}^d$ — *этапные приближения решения*, находящиеся по формуле

$$Y^i(\alpha h) = \psi(0) + \alpha h \dot{\psi}(0) + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(\alpha) K_j, \quad \alpha \in [0, c_i],$$
$$Y^i(t) = \psi(t), \quad t \le 0,$$

а *этапные приближения производной решения* Y_i' (нужные только в точках T_i) находятся как в случае методов Рунге — Кутты — Нюстрёма для ОДУ:

$$Y_i' = \dot{\psi}(0) + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}' K_j.$$

Обратим внимание на то, что требования $b(0) = b'(0) = \mathbf{O}$ и $A(0) = \mathbf{O}$ обеспечивают непрерывность приближений к решению и его производной, в том числе на каждом из этапов.

Непрерывные этапные приближения $Y^i(\alpha h)$ требуются, в частности, и для уравнений с переменным дискретным запаздыванием, в случае, когда оно становится его слишком маленьким, и требуется получить достаточно точное приближение к решению внутри текущего шага. Такая ситуация называется «оверлэппингом» или «перекрытием». Реализация НКР на шагах с перекрытием становится полностью неявной, в то время как ФНРК сохраняют свою явность.

Определение 2. Говорят, что метод (5) имеет *дискретный локальный порядок* $p \in \mathbb{N}$, если для любой достаточно гладкой на промежутке $[0, h]$ задачи (4) и любого достаточно малого шага $h > 0$ найдутся числа $C > 0$ и $C' > 0$ такие, что

$$\left\| y(h) - \eta(h) \right\| < C h^{p+1},$$
$$\left\| \dot{y}(h) - \eta'(h) \right\| < C' h^{p+1}.$$

Говорят, что метод (5) имеет *равномерный локальный порядок* $q \in \mathbb{N}$, если для любой достаточно гладкой на промежутке $[0, h]$ задачи (4) и любого достаточно малого шага $h > 0$ найдутся числа $\tilde{C} > 0$ и $\tilde{C}' > 0$ такие, что

$$\max_{\alpha \in [0,1]} \left\| y(\alpha h) - \eta(\alpha h) \right\| < \tilde{C} h^{q+1},$$
$$\max_{\alpha \in [0,1]} \left\| \dot{y}(\alpha h) - \eta'(\alpha h) \right\| < \tilde{C}' h^{q+1}.$$

Определение 3. Пусть для задачи (3) на промежутке $[t_0, t_{\text{end}}]$ выполнено N шагов ($t_N = t_{\text{end}}$) и построены непрерывные приближения к решению $\omega(t)$ и к его производной $\omega'(t)$ на каждом шаге $[t_{n-1}, t_n]$ определяемые приближённым решением локальной задачи (4), причём на каждом шаге решаемая задача является достаточно гладкой. Говорят, что метод (5) имеет *дискретный глобальный порядок* $p \in \mathbb{N}$ (*сходится в точках сетки с порядком* p), если при достаточно малом максимальном шаге $h = \max\limits_{n=1,N} h_n$ найдутся числа $L > 0$ и $L' > 0$ такие, что

$$\max_{n=1,N} \left\| u(t_n) - \omega(t_n) \right\| < L h^p,$$
$$\max_{n=1,N} \left\| \dot{u}(t_n) - \omega'(t_n) \right\| < L' h^p.$$

Также говорят, что метод (5) имеет *равномерный глобальный порядок* $q \in \mathbb{N}$ (*сходится равномерно с порядком* q), если найдутся числа $\tilde{L} > 0$ и $\tilde{L}' > 0$ такие, что

$$\max_{t\in[t_0,t_{\text{end}}]} \left\| u(t) - \omega(t) \right\| < \tilde{L} h^q,$$

$$\max_{t\in[t_0,t_{\text{end}}]} \left\| \dot{u}(t) - \omega'(t) \right\| < \tilde{L}' h^q.$$

Замечание 1. Из вышеприведенных определений ясно, что равномерный порядок всегда не превосходит дискретный, так как из сходимости на отрезке следует сходимость как минимум того же порядка на его концах.

Замечание 2. Для сходимости одношаговых методов решения ОДУ с порядком p в точках сетки достаточно, чтобы на каждом шаге метод имел локальный порядок p (см. [6]). Если метод к тому же на каждом шаге имеет равномерный локальный порядок q, то порядок равномерной сходимости для ОДУ определяется как $\min(p, q+1)$. Однако для ФДУЗТ даже в точках сетки порядок сходимости не может превышать $\min(p, q+1)$ (см. [7]). Практически это означает, что метод с локальным дискретным порядком p и равномерным порядком $p-1$ будет равномерно сходиться с порядком p. В то же время, для более точного контроля погрешности и для непосредственной применимости методов к уравнениям нейтрального типа предпочтительно строить методы с равномерным локальным порядком p.

2. Метод четвертого порядка

Условия порядка для метода (5) более сложны, чем обычные условия для методов решения ОДУ [6] и чем условия для методов решения ФДУЗТ первого порядка [1]. В первую очередь следует отметить, что мы считаем функцию g непрерывно-дифференцируемой по своему первому аргументу, в связи с чем не можем пользоваться сравнением разложений $y(\alpha h)$ и $\eta(\alpha h)$ в ряды Тейлора в точке $h = 0$ [1]. К тому же появляются условия для обеспечения нужного порядка приближения $\eta'(\alpha h)$ к $y'(\alpha h)$. К сожалению, сами условия, их вывод и, тем более, доказательство их необходимости и достаточности, не могут войти в рамки настоящей публикации.

Ниже приводится таблица Бутчера для метода (5) четвёртого равномерного порядка, имеющего 5 + 1 этап, что на 1 этап меньше, чем минимальное необходимое число этапов для решения ФДУЗТ первого порядка ([1, 3]).

c_i	a'_{ij}						$a_{ij}(\alpha)$					
0												
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}\alpha^2$					
$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{25}{81}$					$a_{31}(\alpha)$	$a_{32}(\alpha)$				
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{24}$	0	$\frac{5}{8}$				$a_{31}(\alpha)$	$a_{32}(\alpha)$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{29}{150}$	0	$\frac{11}{50}$	$\frac{-2}{25}$			$a_{31}(\alpha)$	$a_{32}(\alpha)$				
1	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$		$b_1(\alpha)$	0	0	$b_4(\alpha)$	$b_5(\alpha)$	
	$b'_1(\alpha)$	0	0	$b'_4(\alpha)$	$b'_5(\alpha)$	$b'_6(\alpha)$	$b_1(\alpha)$	0	0	$b_4(\alpha)$	$b_5(\alpha)$	0

(6)

$$b'_1(\alpha) = \alpha - \tfrac{13}{5}\alpha^2 + \tfrac{13}{5}\alpha^3 - \tfrac{9}{10}\alpha^4 \qquad b_1(\alpha) = \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{3}{10}\alpha 3 - \tfrac{7}{10}\alpha^4,$$

$$b'_4(\alpha) = -\tfrac{12}{5}\alpha^2 + \tfrac{32}{5}\alpha^3 - \tfrac{18}{5}\alpha^4, \qquad b_4(\alpha) = -\tfrac{2}{15}\alpha^3 + \tfrac{1}{5}\alpha^4,$$

$$b'_5(\alpha) = \tfrac{15}{4}\alpha^2 - \tfrac{11}{2}\alpha^3 + \tfrac{9}{4}\alpha^4, \qquad b_5(\alpha) = \tfrac{5}{6}\alpha^3 - \tfrac{1}{2}\alpha^4,$$

$$b'_6(\alpha) = \tfrac{5}{4}\alpha^2 - \tfrac{7}{2}\alpha^3 + \tfrac{9}{4}\alpha^4, \qquad a_{31}(\alpha) = \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \tfrac{1}{3}\alpha^3,$$

$$a_{32}(\alpha) = \tfrac{1}{3}\alpha^3.$$

Здесь повторное использование обеспечивается тем, что $b_1'(1)=\frac{1}{10}$, $b_4'(1)=\frac{2}{5}$, $b_5'(1)=\frac{1}{2}$, $b_6'(1)=0$ и тем, что последняя строка матрицы $A(\alpha)$ совпадает с вектором $b(\alpha)$.

3. Численный пример

Рассмотрим начальную задачу для ДУ с дискретным запаздыванием, зависящим от времени, при решении которой возникает «перекрытие» и использование метода, не удовлетворяющего всем условиям четвёртого порядка для уравнений (3) приведёт к потере порядка сходимости.

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \dfrac{\dot{u}(t)^2}{u(t)}\exp\left(\dfrac{t}{1+2t}\right)u\left(\dfrac{t}{(1+2t)^2}\right)^{1+2t}, \quad t\ge 0, \\ u(0)=1, \quad \dot{u}(0)=-1. \end{cases} \tag{7}$$

Его точное решение $u(t)=\exp(-t),\ t\ge 0$.

Мы решаем её представленным методом FCRKS4 четвёртого порядка (6) и методом четвертого порядка для уравнений (1) FCRK4 из [8] с 6 + 1 этапами, применяя последний к системе первого порядка, полученной заменой $v(t)=\dot{u}(t)$.

Решение проводится с постоянным шагом на отрезке $[0, 3]$. Оцениваем максимальную погрешность решения E и его производной E' на этом отрезке для метода FCRK4, и те же величины для FCRKS4 (E_S и E_S' соответственно). Результаты приведены в табл. 2. Кроме того, там же приведены оценки равномерного порядка сходимости, подтверждающие сходимость 4-го порядка обоих методов для обеих приближаемых функций. Наглядно можно видеть эту сходимость на рис. 1, где зависимость $\lg\|E\|$ от $\lg h$ (и аналогичная зависимость других измеряемых погрешностей) представляет собой для достаточно малых h прямую с наклоном 4.

Таблица 2

Результаты решения задачи (7)

	FCRKS4				FCRK4			
h	$\lg(E_S)$	q_s	$\lg(E_S')$	q_s'	$\lg(E)$	q	$\lg(E)$	q'
0.3000	−3.6474		−4.1559		−5.2765		−4.9267	
0.2000	−4.4085	4.3	−4.9023	4.2	−5.7783	2.8	−5.6029	3.8
0.1304	−5.1896	4.2	−5.6743	4.2	−6.1753	2.1	−6.2615	3.5
0.0857	−5.9437	4.1	−6.4242	4.1	−6.8534	3.7	−7.0861	4.5
0.0566	−6.6813	4.0	−7.1597	4.1	−7.6179	4.2	−7.8417	4.2
0.0375	−7.4078	4.0	−7.8849	4.1	−8.3570	4.1	−8.5651	4.0
0.0250	−8.1198	4.0	−8.5962	4.0	−9.0800	4.1	−9.2723	4.0
0.0167	−8.8294	4.0	−9.3055	4.0	−9.8029	4.1	−9.9819	4.0
0.0111	−9.5374	4.0	−10.0133	4.0	−10.5182	4.1	−10.6857	4.0
0.0074	−10.2443	4.0	−10.7202	4.0	−11.2323	4.1	−11.3902	4.0
0.0049	−10.9519	4.0	−11.4278	4.0	−11.9453	4.0	−12.0957	4.0
0.0033	−11.6581	4.0	−12.1351	4.0	−12.6508	4.0	−12.7932	4.0
0.0022	−12.3653	4.0	−12.8464	4.0	−13.3374	3.9	−13.4689	3.8

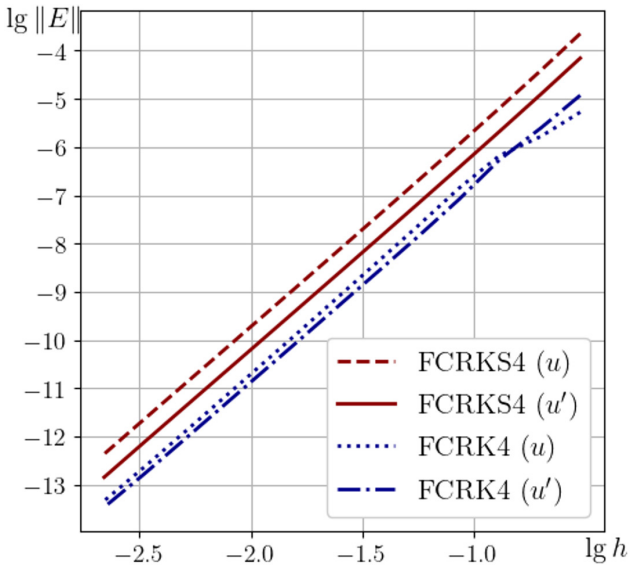


Рис. 1. Сходимость методов для задачи (7)

Заключение

Несмотря на то, что для данного конкретного примера абсолютная погрешность решения методом FCRK4 оказалась на той же длине шага меньше, уменьшение общего числа затрат для метода FCRKS4 несколько исправляет этот недостаток. К тому же, параметры в FCRK4 подбирались так, чтобы минимизировать некоторые члены погрешности, а для FCRKS4 такая оптимизация в настоящей работе не проводилась, так как основной целью ставилось показать возможность построения методов с меньшим числом этапов для уравнений вида (3).

Для эффективной реализации методов РК дополнительно требуется иметь вложенный оценщик локальной погрешности для управления длиной шага, который в случае функциональных дифференциальных уравнений также должен давать непрерывное приближение. В представленном методе такое приближение 3-го порядка для y может дать, например, продление полинома для третьего (четвёртого или пятого) этапа на отрезок $[0, 1]$, но для y' такое приближение нужно строить специально.

Литература

1. *Maset S.* Runge–Kutta methods for retarded functional differential equations / S. Maset, L. Torelli, R. Vermiglio // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2005. – Vol. 15, № 8. – P. 1203–1251. – DOI: 10.1142/S0218202505000716.

2. *Owren B.* Derivation of efficient, continuous, explicit Runge–Kutta methods / B. Owren, M. Zennaro // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. – 1992. – Vol. 13. – P. 1488–1501. – DOI: 10.1137/0913084.

3. *Eremin A. S.* Functional continuous Runge–Kutta methods with reuse / A. S. Eremin // Applied Numerical Mathematics. – 2019. – Vol. 146. – P. 165–181. – DOI: 10.1016/j.apnum.2019.07.012.

4. *Eremin A. S.* Functional continuous Runge–Kutta–Nyström methods / A. S. Eremin // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2016. – № 11. – P. 1–17. – DOI: 10.14232/ejqtde.2016.8.11.

5. *Erneux Th.* Applied Delay Differential Equations / Th. Erneux – New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2009. – 204 p.

6. *Хайрер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер – М. : Мир, 1999. – 512 с.

7. *Bellen A.* Numerical Methods for Delay Differential Equations / A. Bellen, M. Zennaro – Oxford: Oxford Science Publications, Clarendon Press, 2013. – 410 p.

8. *Еремин А. С.* Комбинированный функционально-непрерывный метод для дифференциальных уравнений с запаздыванием / А. С. Еремин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2019. – Т. 15, № 4. – С. 425–441. – DOI: 10.21638/11702/spbu10.2019.402.

УДК 004.021

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ГЕГЕНБАУЭРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ МГД-УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА — СКАНА

А. А. Захарова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В этой статье представляется взвешенная ортогональная система на полупрямой, основанная на экспоненциальных функциях Гегенбауэра. Я использую эти функции в методе коллокации для решения МГД-уравнения Фолкнера — Скана, которое возникает при изучении ламинарных пограничных слоев, проявляющих сходство в полубесконечной области. Этот метод решает задачу в полубесконечной области, не сокращая ее до конечной области и не преобразуя область задачи в конечную область.
Ключевые слова: экспоненциальный метод Гегенбауэра, метод коллокации, МГД-уравнение Фолкнера — Скана, полубесконечная область, нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).

Введение

Уравнение Фолкнера — Скана было впервые введено Фолкнером и Сканом [15] при изучении обтекания неподвижного клина, погруженного в вязкую жидкость. Они применили преобразование подобия, которое может быть использовано для сведения уравнений пограничного слоя в частных производных к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка.

После этого интерес к исследованию этого уравнения и других течений в пограничном слое возрос [17, 25, 34, 38]. Ляо [27] применил метод гомотопического анализа, который не зависит от малых или больших физических параметров, для решения уравнения Фолкнера — Скана и дал явное, полностью аналитическое решение для этого уравнения с граничными условиями. Также Асайтхамби [3, 4] представил численные методы, основанные на методе конечных элементов и методе конечных разностей. Метод дифференциального преобразования, который позволяет получить последовательное решение уравнения Фолкнера — Скана, представлен в [26].

Кроме того, достижения в области машиностроения привели к росту интереса к магнитогидродинамическим (МГД) потокам. МГД-вязкие потоки возникают во многих важных инженерных приложениях, в частности, в таких устройствах, как генераторы энергии, охлаждение реакторов, проектирование теплообменников, электростатических фильтров и МГД-ускорителей [36]. Магнитные поля, одна из управляющих сил, оказывают стабилизирующее воздействие на течение в пограничном слое [2]. Численный метод решения уравнения Фолкнера — Скана представлен в [5]. Йих [39] и Исхак с соавторами. [24] преобразовали уравнения пограничного слоя в частных производных в непохожие уравнения пограничного слоя и систему обыкновенных дифференциальных уравнений соответственно, затем они использовали метод Келлера для их решения. Хайат и др. [23] решили задачу о течении в пограничном слое МГД с помощью модифицированного метода декомпозиции и аппроксимации. Аббасбанди и др. [1, 2] применили метод гомотопического анализа и метод Ханкеля соответственно. Более того, авторы работы [18] установили существование и единственность результатов для уравнений, возникающих в МГД-потоке Фолкнера — Скана. Также в работе [31] было представлено приближенное решение этой задачи псевдоспектральным методом функций Эрмита. Кроме того, некоторые другие численные и аналитические решения также были применены к различным типам задач магнитогидродинамики (МГД) потоков [16, 29, 22, 32].

Как я опишу в следующей части исследования, класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, возникающих в магнитогидродинамических (МГД) потоках Фолкнера — Скана, определяется на полубесконечном интервале. В контексте спектральных методов был предложен и исследован ряд подходов для обработки неограниченных и полубесконечных областей. Некоторые распространенные методы используют ортогональные многочлены, которые определяются в неограниченных областях, наиболее распространенным из них является использование многочленов, которые ортогональны в неограниченных областях [13, 28], задача отображения в ограниченную область [21] и метод усечения области [9]. Другой эффективный прямой подход для решения таких задач основан на рациональных приближениях. В этом методе вводится набор новых базисных функций, которые взаимно ортогональны в неограниченной области и применяются в спектральной схеме [12].

Целью данной статьи является разработка метода коллокации с новыми базисными функциями, а именно экспоненциальными функциями Гегенбауэра, для решения МГД-уравнения Фолкнера-Скана. Действительно, я использую экспоненциальное преобразование и имею функции в полубесконечной области для достижения высокой точности и экспоненциальной скорости сходимости решения.

Математическое описание

Рассмотрим стационарное ламинарное течение в пограничном слое электропроводной вязкой жидкости в присутствии магнитного поля $B(x)$. Предполагается, что индуцированное магнитное поле невелико. Это подразумевает малое магнитное число Рейнольдса, так что магнитным полем и эффектом Холла можно пренебречь. Кроме того, электрическое поле, возникающее в результате поляризации зарядов, пренебрежимо мало. Основные уравнения в приближении пограничного слоя можно записать в виде [2]:

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=0 \tag{1}$$

$$u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}=U\frac{du}{dx}+v\frac{d^2v}{dy^2}-\frac{\sigma B^2}{\rho}\left(u-U\right), \tag{2}$$

$$u=v=0 \quad при \quad y=0 \tag{3}$$

$$u=U\left(x\right), \quad когда \quad y\to\infty$$

где $U(x)=ax^m$ [33] и $B(x)=B_0x^{(m-1)/2}$ [11], а u и v — составляющие скорости, U — внутренняя характеристическая скорость, v — кинематическая вязкость, σ — электропроводность, ρ — плотность жидкости, B и B_0 — это магнитное поле и внешнее магнитное поле, направленное по y, соответственно.

Определяющий

$$\tau=\sqrt{\frac{m+1}{2}}\sqrt{\frac{U}{\nu x}}y, \quad \psi=\sqrt{\frac{2}{m+1}}\sqrt{\nu xU}\,f\left(\tau\right), \tag{4}$$

$$u=Uf'\left(\tau\right), \quad v=-\sqrt{\frac{m+1}{2}}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\left[f+\frac{m-1}{m+1}\tau f'\right], \tag{5}$$

уравнение неразрывности тождественно удовлетворяется, и уравнение (2) и граничные условия (3) приводят к следующему виду

$$\frac{d^3f}{d\tau^3}+f\frac{d^2f}{d\tau^2}+\beta\left[1-\left(\frac{df}{d\tau}\right)^2\right]-M^2\left(\frac{df}{d\tau}-1\right)=0, \tag{6}$$

с граничными условиями

$$f(0)=f'(0)=0,\quad f'(\infty)=1, \tag{7}$$

где $\beta=\dfrac{2m}{m+1}$ и $M^2=2\sigma B_0^2/\rho a(1+m)$. Теперь наша задача — найти решение уравнения (6) для клина в ускоренном потоке ($m>0$, $\beta>0$) и замедленном потоке ($m<0$, $\beta<0$) с разделением [2].

Экспоненциальная интерполяция Гегенбауэра

В этом разделе я представляю экспоненциальные функции Гегенбауэра и описываю некоторые из их основных свойств. Затем аппроксимирую функцию, используя интегрирование по Гауссу, с помощью экспоненциальных точек Гегенбауэра-Гаусса.

1.1. Свойства экспоненциальных функций Гегенбауэра

Многочлены Гегенбауэра $G_n^\alpha(y)$ порядка α и степени n определяются следующим образом [37]:

$$G_n^\alpha(y)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^j\frac{\Gamma(n+\alpha-j)}{j!(n-2j)!\Gamma(\alpha)}(2y)^{n-2j}, \tag{8}$$

где n — целое число, α — вещественное число, $>1/2$, а Γ — гамма-функция.

Многочлены Гегенбауэра ортогональны в интервале $[-1, 1]$ относительно весовой функции $\rho(y)=(1-y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$, где $\alpha\geq\dfrac{1}{2}$. При фиксированном α они могут быть определены по следующей рекуррентной формуле [35]:

$$G_0^\alpha(y)=1,\ G_1^\alpha(y)=2\alpha y,\ G_{n+1}^\alpha(y)=\frac{1}{n+1}\left[2y(n+\alpha)G_0^\alpha(y)-(n+2\alpha-1)G_{n-1}^\alpha(y)\right], \tag{9}$$
$$n\geq 1$$

Для применения этих многочленов в полубесконечной области вводятся новые базисные функции, обозначаемые $E_n^\alpha(x)=G_n^\alpha(y)$, где L — постоянный параметр, а $y=1-2e^{-\frac{x}{L}}$, $y\in[-1, 1]$. Постоянный параметр L задает масштаб длины отображения. Бойд [8] предложил несколько рекомендаций по оптимизации параметра отображения L для рациональных функций.

$E_n^\alpha(x)$ — это n-я собственная функция сингулярной задачи Штурма — Лиувилля:

$$4e^{-\frac{x}{L}}\left(1-e^{-\frac{x}{L}}\right)E_n^{\alpha''}(x)-(2\alpha+1)\left(1-2e^{-\frac{x}{L}}\right)E_n^{\alpha'}(x)+n(n+2\alpha)E_n^\alpha(x)=0, \tag{10}$$

где простое число обозначает дифференцирование по x.

Экспоненциальные функции Гегенбауэра удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$E_n^\alpha(x)=1,\quad E_1^\alpha(x)=2\alpha\left(1-2e^{-\frac{x}{L}}\right),$$

$$E_{n+1}^\alpha(x)=\frac{1}{n+1}\left[2\left(1-2e^{-\frac{x}{L}}\right)(n+\alpha)E_n^\alpha(x)-(n+2\alpha-1)E_{n-1}^\alpha(x)\right], \tag{11}$$
$$n\geq 1$$

1.2. Аппроксимация функции

Мы можем определить $w(x)=\frac{2}{L}e^{-\frac{x}{L}}[4e-xL1-e-xL]^{\alpha-\frac{1}{2}}$ как неотрицательную, интегрируемую, вещественнозначную весовую функцию для экспоненциального показателя Гегенбауэра на интервале $I=[0,\ \infty)$.

Обозначим

$$\rho(y)=(1-y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}, y=1-2e^{-\frac{x}{L}}, \tag{12}$$

следовательно, мы имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{L}e^{-\frac{x}{L}},\ \frac{dx}{dy}=-\frac{L}{(y-1)},\ w(x)\frac{dx}{dy}=\rho(y). \tag{13}$$

Теперь мы определяем

$$L_w^2(I)=\{v:I\to\mathbb{R}\mid v,\ \|v\|_w<\infty\}, \tag{14}$$

где

$$\|v\|_w=(\int_0^\infty|v(x)^2|w(x)dx)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

является нормой, индуцированной скалярным произведением

$$<u,v>_w=\int_0^\infty u(x)v(x)w(x)dx. \tag{16}$$

Таким образом, $E_n^\alpha(x)_{n\geq0}$ обозначает систему, которая взаимно ортогональна согласно уравнению (16), т. е.,

$$<E_n^\alpha,E_m^\alpha>_w=\frac{\pi2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2}\delta_{nm}, \tag{17}$$

где δ_{nm} — дельта-функция Кронекера [35]. Эта система является полной в $L_w^2(I)$. Для любой функции $u\in L_w^2(I)$, выполняется следующее увеличение

$$u(x)=\sum_{k=0}^\infty a_kE_k^\alpha(x), \tag{18}$$

$$\alpha_k=\frac{<u,E_k^\alpha>_w}{\|E_k^\alpha\|_w^2} \tag{19}$$

α_k — это коэффициенты расширения, связанные с семейством $E_k^\alpha(x)$.

Формула дифференцирования для экспоненциального уравнения Гегенбауэра может быть получена следующим образом:

$$E_n^{\alpha'}(x)=\frac{d}{dx}E_n^\alpha(x)=\frac{4\alpha}{L}e^{-\frac{x}{L}}E_{n-1}^{\alpha-1}(x). \tag{20}$$

Итак, мы находим, что $E_n^{\alpha'}(x)$ также взаимно ортогональны в $L_{\hat{w}}^2(I)$ относительно весовой функции $\hat{w}(x)=\frac{L}{8\alpha^2}e^{-\frac{x}{L}}[4e-xL1-e-xL]^{\alpha+\frac{1}{2}}$. Следовательно

$$<E_n^{\alpha'},E_m^{\alpha'}>_{\hat{w}}=\frac{\pi2^{-(2\alpha+1)}\Gamma(2\alpha+n+1)}{(n-1)!(n+\alpha)[\Gamma(\alpha+1)]^2}\delta_{nm} \tag{21}$$

Решение уравнения Фолкнера — Скана

Теперь мы хотим применить метод экспоненциальной коллокации Гегенбауэра для решения МГД-уравнения Фолкнера — Скана, представленного в уравнении (6) с граничным условием в уравнении (7).

Уравнение Фолкнера — Скана имеет граничное условие типа $f'(\infty)=1$. Итак, мы аппроксимируем $f(\tau)$ оператором $\frac{d}{d\tau}\tilde{P}_N f(\tau)$:

$$\tilde{P}_N f(\tau)=\tau+\sum_{k=0}^{N} a_k E_k^{\alpha}(\tau), \tag{22}$$

тогда остаточная функция МГД Фолкнера — Скана равна:

$$\begin{aligned} Res(\tau)=&\frac{d^3}{d\tau^3}\tilde{P}_N f(\tau)+\tilde{P}_N f(\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{P}_N f(\tau)+\\ &+\beta\left(1-\left[\frac{d}{d\tau}\tilde{P}_N f(\tau)\right]^2\right)-M^2\left(\frac{d}{d\tau}\tilde{P}_N f(\tau)-1\right)\end{aligned} \tag{23}$$

Решая набор следующих уравнений, мы аппроксимируем $f(\tau)$ и получаем a_k' s.

$$\begin{aligned} Res(\tau_j)=0,\quad j=1,\ldots,N-1,\\ \tilde{P}_N f(0)=0,\\ \frac{d}{d\tau}\tilde{P}_N f(\tau)\Big|_{\tau=0}=0\end{aligned} \tag{24}$$

такие, как τ_j, являются экспоненциальными точками Гегенбауэра — Гаусса.

Заключение

В этой статье мы ввели экспоненциальные функции Гегенбауэра в интервале [0, ∞) и применили метод коллокации, основанный на этих функциях, для решения МГД-уравнения Фолкнера — Скана. Метод коллокации прост в реализации и обеспечивает требуемую точность. Важной особенностью коллокационного подхода является выбор базисных функций. Базисные функции обладают тремя различными свойствами: простотой вычисления, быстрой сходимостью и полнотой, что означает, что любое решение может быть представлено с произвольно высокой точностью, если принять значение N за достаточно большое. В качестве базисной функции в этой статье я использовала экспоненциальные функции Гегенбауэра. Метод коллокации с этими функциями позволяет решать задачи в полубесконечной области, такие как уравнение пограничного слоя, без их усечения до конечной области, наложения асимптотического условия и преобразования области задач. МГД-уравнение Фолкнера — Скана возникает при изучении ламинарных пограничных слоев. При выборе подходящих значений характеристической скорости и приложенного магнитного поля результирующие уравнения в частных производных сводятся к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка в полубесконечной области. Здесь преодолена трудность применения уравнений такого типа, связанная с существованием граничного условия на бесконечности. Обоснованность метода основана на предположении, что он сходится при увеличении числа точек Гаусса. Сравнение значений $f''(0)$ с численным решением показало, что новый метод быстро сходится.

Литература

1. *Abbasbandy S., Hayat T.* Solution of the MHD Falkner-Skan flow by Hankel-Padé method // Physics Letters A. – 2009. – P. 731–734.

2. *Abbasbandy S., Hayat T.* Solution of the MHD Falkner-Skan flow by homotopy analysis method // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. – P. 3591–3598.

3. *Asaithambi A.* A finite-difference method for the solution of the Falkner-Skan equation // Applied Mathematics and Computation. – 1998. – P. 135–141.

4. *Asaithambi A.* A second-order finite-difference method for the Falkner-Skan equation // Applied Mathematics and Computation. – 2004. – P. 779–786.

5. *Asaithambi N.* A numerical method for the solution of the Falkner-Skan equation // Applied Mathematics and Computation. – 1997. – P. 259– 264,

6. *Baharifard F., Kazem S., Parand K.* Rational and exponential Legendre Tau method on steady flow of a third grade fluid in a porous half space // International Journal of Applied and Computational Mathematics. – 2015. – P. 1–20.

7. *Baharifard F., Parand K., Rashidi M.* Novel solution for heat and mass transfer of a MHD micropolar fluid flow on a moving plate with suction and injection // Engineering with Computers. – 2022. – P. 13–30.

8. *Boyd J. P.* The optimzation of convergence for Chebyshev polynomial methods in an unbounded domain // Journal of Computational Physics. – 1982. – P. 43–79.

9. *Boyd J. P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Second Edition. – Dover, New York, 2000.

10. *Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A.* Spectral Methods in Fluid Dynamic. – Springer-Verlag, New York, 1987.

11. *Chaim T. C.* Hydromagnetic flow over a surface stretching with a power-law velocity // International Journal of Engineering Science. – 1995. – P. 429–435.

12. *Christov C.* A complete orthogonal system of functions in $l2\,(-\infty,\infty)$ space // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1982. – P. 1337–1344.

13. *Coulaud O., Funaro D., Kavian O.* Laguerre spectral approximation of elliptic problems in exterior domains // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1990. – P. 451–458.

14. *Delkhosh M., Parand K., Ganji D.* An efficient numerical method to solve the Falkner-Skan problem over an isothermal moving wedge // International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. – 2018. – P. 2132–2157.

15. *Falkner V. M., Skan S. W.* Some approximate solutions of the boundary-layer equations // Phiols Mag. – 1931. – P. 865–896.

16. *Farooq U., Zhao Y. L., Hayat T., Alsaedi A., Liao S. J.* Application of the HAM-based Mathematica package BVPh 2.0 on MHD Falkner-Skan flow of nano-fluid // Computers & Fluids. – 2015. – P. 69–75.

17. *Ganji D. D., Babazadeh H., Noori F., Pirouz M. M., Janipour M.* An application of Homotopy method for nonlinear Blasius equation to boundary layer flow over a flat plate // International Journal of Nonlinear Science. – 2009. – P. 399–404.

18. *Gorder R. A. V., Vajravelu K.* Existence and uniqueness results for a nonlinear differential equation arising in MHD Falkner-Skan flow // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2010. – P. 2272–2277.

19. *Gottlieb D., Hussaini M. Y., Orszag S.* Theory and Applications of Spectral Methods in Spectral Methods for Partial Differential Equations edited by R. Voigt and D. Gottlieb and M. Y. Hussaini. – SIAM, Philadelphia, 1984.

20. *Guo B. Y.* Gegenbauer approximation and its applications to differential equations on the whole line // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1998. – P. 180–206.

21. *Guo B. Y.* Jacobi spectral approximation and its applications to differential equations on the half line // Journal of Computational Mathematics. – 2000. – P. 95–112.

22. *Hajimohammadi Z., Baharifard F., Parand K.* A new numerical learning approach to solve general Falkner — Skan model // Engineering with Computers. – 2022. – P. 1–17.

23. *Hayat T., Hussain Q., Javed T.* The modified decomposition method and Padé approximants for the MHD flow over a non-linear stretching sheet // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2009. – P. 966–973.

24. *Ishak A., Nazar R., Pop I.* MHD boundary-layer flow of a micropolar fluid past a wedge with constant wall heat flux // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. – P. 109–118.

25. *Kudenatti R. B., Kirsur S. R., Achala L., Bujurke N.* Exact solution of two-dimensional MHD boundary layer flow over a semi-infinite flat plate // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2013. – P. 1151–1161.

26. *Kuo B. L.* Application of the differential transformation method to the solutions of Falkner-Skan wedge flow // Acta Mechanica. – 2003. – P. 161–174.

27. *Liao S. J.* A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate // Journal of Fluid Mechanics. – 1999. – P. 101–128.

28. *Liu C., Zhub S.* Laguerre pseudospectral approximation to the Thomas-Fermi equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2015. – P. 251–261.

29. *Naseri R., Malek A., Gorder R. A. V.* On existence and multiplicity of similarity solutions to a nonlinear differential equation arising in magnetohydrodynamic FalknerSkan flow for decelerated flows // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2015. – P. 4272–4278.

30. *Parand K., Abbasbandy S., Kazem S., Rezaei A. R.* Comparison between two common collocation approaches based on radial basis functions for the case of heat transfer equations arising in porous medium // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2011. – P. 1396–1407.

31. *Parand K., Rezaei A. R., Ghaderi S. M.* An approximate solution of the MHD Falkner-Skan flow by Hermite functions pseudospectral method // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2011. – P. 274–283.

32. *Salehi F., Baharifard F., Hossayni S. A., Parand K.* Exact operational matrices for rational Bernstein polynomials and its application for solving MHD problems // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2022. – P. 1–20.

33. *Schlichting H.* Boundary Layer Theory, 6th edition. – McGraw-Hill, New York, 1979.

34. *Sharma R., Ishak A., Pop I.* Stability analysis of magnetohydrodynamic stagnation-point flow toward a stretching/shrinking sheet // Computers & Fluids. – 2014. – P. 94–98.

35. *Stegun I., Abramowitz M.* Handbook of Mathematical Functions. – Dover, New York, 1968.

36. *Sutton G., Sherman A.* Engineering Magnetohydrodynamics. – McGrawHill, New York, 1965.

37. *Szegö G.* Orthogonal Polynomials, 4th edition. – American Mathematical Society Colloquium Publications, 1975.

38. *Waqas H., Khan S. U., Imran M., Bhatti M. M.* Thermally developed Falkner–Skan bioconvection flow of a magnetized nanofluid in the presence of a motile gyrotactic microorganism: Buongiornos nanofluid model. – Physica Scripta, 2019.

39. *Yih K.* MHD forced convection flow adjacent to a non-isothermal wedge // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 1999. – P. 819–827.

УДК 517.954

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА — КИПРИЯНОВА ПО ВСЕМ ПЛОСКОСТЯМ, ПРОХОДЯЩИМ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ

В. А. Калитвин[1,2], М. Г. Лапшина[1]

[1]Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского
[2]Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Аннотация. Преобразование Радона находит свое применение при решении различных прикладных задач, среди которых важную роль играют вопросы компьютерной томографии. Обобщением преобразования Радона является преобразование Радона — Киприянова (K_γ) введенное в 1998 г. При проведении исследований с применением преобразования Радона — Киприянова необходимо ввести двойственное к нему преобразование. В данной работе рассматриваются свойства общего оператора, двойственного к преобразованию Радона — Киприянова.

Ключевые слова: преобразование Радона — Киприянова, преобразование двойственное к преобразованию Радона — Киприянова, преобразование Фурье — Бесселя, оператор Пуассона, обобщенная свертка.

Введение

В данной работе рассматривается преобразование Радона специального вида, введенное в работе И. А. Киприянова и Л. Н. Ляхова [1]:

$$K_\gamma[f](\theta;p)=\int\limits_{\mathbb{R}^+_n} f(x)\mathcal{P}^\gamma_{x'}\,\delta(p-\langle x,\theta\rangle)(x')^\gamma\,dx,$$

где $\mathcal{P}^\gamma_{x'}$ $(\gamma_i>0)$ — многомерный оператор Пуассона [2]:

$$\mathcal{P}^\gamma_{x'}g(x)=C(\gamma)\int\limits_0^\pi\dots\int\limits_0^\pi g(x_1\cos\alpha_1,x_2\cos\alpha_2,\dots,x_m\cos\alpha_m,x'')\prod_{i=1}^m\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,d\alpha,$$

$$C(\gamma)=\prod_{i=1}^m\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},\qquad d\alpha=d\alpha_1d\alpha_2\dots d\alpha_m.$$

Введем обозначения

$$x=(x',x'')\in\mathbb{R}^+_n=\mathbb{R}^+_m\times\mathbb{R}_{n-m},\ \mathbb{R}^+_m=\{x':x_1>0,\dots,x_m>0\},\ 1\le m\le n,$$

$$\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_m),\ \gamma_i>0,i=1,\dots,m,\ (x')^\gamma=\prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i},$$

где $\delta(P(x))$ — обобщенная дельта функция Дирака, сосредоточенная на поверхности $P(x)=0$ в $\mathbb{R}_n$, $\langle x,\theta\rangle$ — скалярное произведение n-мерных векторов, θ — единичный вектор нормали к гиперплоскости, являющийся внешним по отношению к полупространству $\langle x,\theta\rangle<p$.

Это преобразование может быть записано в виде *специального* (*весового*) *преобразования Радона* $\mathbb{R}^+_{n+2m}$ [1, 2]:

$$K_\gamma[f](\tilde\theta;p)=C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^+_{n+2m}}\tilde f(z)\,\delta(p-\langle z,\tilde\theta\rangle)\prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1}dz=C(\gamma)\int\limits_{\{p=\langle z,\tilde\Theta\rangle\}^+}\tilde f(z)\prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1}d\Gamma(z),\qquad(1)$$

$$z=(\mathbf{z_1},\mathbf{z_2},x'')=(z_1,z_2,z_3,\dots,z_{2n-1},z_{2n},x''),$$

$$\mathbf{z_1} = (z_1, z_3, \ldots, z_{2n-1}), \mathbf{z_2} = (z_2, z_4, \ldots, z_{2n}).$$

Здесь интегрирование происходит по части плоскости $\{p = \langle z, \tilde{\theta}\rangle\}^+$, определенную неравенствами $z_{2i} > 0$, где единичный вектор нормали $\Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \ldots, \theta_m, 0, \theta'') \in \overline{\mathbb{R}^+_{n+2m}}$ перпендикулярен координатным осям $0z_{2i}$. Здесь и далее $C(\gamma)$ — константа, нормирующая интегральный оператор Пуассона.

Полуплоскость интегрирования в выражении (1) определяется равенством

$$\Theta^+_\perp = \{z : \langle \Theta, z\rangle = p,\ z_{2i} > 0\} \in \overline{\mathbb{R}^+_{n+2m}}.$$

Заметим, что координаты z_{2i} не входят в уравнение плоскости $\Theta^\perp$, но являются переменными точками этой плоскости.

Если вектор Θ фиксирован, то будем использовать обозначение

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = K_{\gamma,\Theta}[f](p).$$

Также, как в работе [5], преобразование Радона — Киприянова запишем в виде интеграла по полуплоскости $\Theta^+_\perp$ в евклидовом пространстве точек $\in \mathbb{R}^+_{n+2m}$:

$$K_{\gamma,\Theta}[f](p) = C(\gamma)\int_{\Theta^+_\perp} \tilde{f}(p\Theta + z)\prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1}\, d\Gamma(z). \tag{2}$$

Здесь интегрирование по переменным z_2 может рассматриваться как преобразование Меллина.

1. Двойственное преобразование

Функции $f(x')$, определенные в пространстве $\mathbb{R}^+_n$, будем называть x_i-четными по Киприянову (или x_i-четными), если они допускают четное продолжение с сохранением класса гладкости.

Функцию x_i-четную по каждой координате вектора $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ будем называть x'-четной по Киприянову (или x'-четной функцией).

Пусть функции $f = f(z)$ и $g = g(z)$ принадлежат подпространству $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}^+_n)$ основных функций Л. Шварца, состоящему из x'-четных по Киприянову функций. Функция (2) является функцией одного переменного p, поэтому позволяет ввести линейную форму в $\mathbb{R}_1$ следующего вида:

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\Theta}[f](p)g(p)dp = C(\gamma)\int_{\mathbb{R}_1}\int_{\Theta^+_\perp} \tilde{f}(p\Theta + z)g(p)\prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1} d\Gamma(z)dp. \tag{3}$$

Введем новую переменную

$$y = p\Theta + z \in \overline{\mathbb{R}^+_{n+2m}} = \{y = (\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, x'') : z_{2i} \geq 0\}.$$

Согласно нашему построению, векторы Θ и z ортогональны: $\langle \Theta, z\rangle = 0$ и учитывая отсутствие координат z_{2i} в скалярном произведении векторов Θ и z, получим

$$\langle y, \Theta\rangle = p\Theta^2 + \langle z, \Theta\rangle = p,$$

где

$$\Theta = (\Theta_1, 0, \Theta_2, 0, \ldots, \Theta_m, 0, \Theta'') \ \ |\,\Theta\,| = 1,$$

так как, по построению $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \ldots + \Theta_m^2 + |\,\Theta''\,|^2 = 1$.

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\theta}[f](p)g(p)dp = C(\gamma)\int_{\mathbb{R}^+_{n+2m}} \tilde{f}(y)g(\Theta, \langle y, \Theta\rangle)\prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1}\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+_{n+2m}} \tilde{f}(y)\mathcal{K}^{\#}_{\gamma,\Theta}[g](y)\prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1}\, dy. \tag{4}$$

Преобразование

$$\mathcal{K}^{\#}_{\gamma,\Theta}[g](y) = C(\gamma) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle)$$

называется *двойственным преобразованием Радона — Киприянова* в $\mathbb{R}^{+}_{n+2m}$.

Введем следующее преобразование координат $y_i \in \mathbb{R}^{+}_{n+2m}$ $(i = 1, \ldots, m)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{2i-1} = x_i \cos \alpha_i, & o < \alpha_i < \pi, \\ z_{2i} = x_i \sin \alpha_, & x_i > 0 \\ x' = x' \end{array} \right| \begin{array}{l} y = (\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, x'') \to \\ \to \{x : (x', x''), x' = x_1, x_2, \ldots, x_m > 0\} = x \in \mathbb{R}^{+}_{n}. \end{array} \tag{5}$$

Напомним, что первоначальные координаты у нас возникли в результате вращения осей координат, при котором оси Ox_{2i-1} совпали с направлением перпендикуляра к плоскости интегрирования. Учитывая равенство $f(x', x'') = \tilde{f}(z)$ и (4), имеем

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}^{+}_{n+2m}} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) \prod_{i=1}^{m} z_{2i}^{\gamma_i - 1} \, dy =$$

$$= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}^{+}_{n+2m}} f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \ldots, \sqrt{z_{2m-1}^2 + z_{2m}^2}, \tau \right) \times$$

$$\times g\Big(\Theta, x_1 \theta_1 \cos \alpha_1 + x_2 \theta_2 \cos \alpha_2 + \ldots + x_m \theta_m \cos \alpha_m + x_{m+1} \theta_{m+1} + \ldots + x_n \theta_n \theta) \Big) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \sin^{2\gamma_i} \alpha_i \; (t)^{\gamma} \, dx,$$

где

$$(x')^{\gamma} = \prod_{i=1}^{m} x_i^{\gamma_i}, \; dx = dx' dx''.$$

Согласно определения многомерного оператора Пуассона, получим следующее представление линейной формы (3):

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}^{+}_{n}} f(x) \mathcal{P}^{\gamma}_{x'} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) \; (x')^{\gamma} \, dx' dx''.$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Для функций* $f \in S_{ev}(\mathbb{R}^{+}_{n})$ *и* $g \in S_{ev}(\mathbb{R}^{+}_{1})$ *справедливы равенства*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\theta}[f](p) g(p) dp = \int\limits_{\mathbb{R}^{+}_{n+2m}} \tilde{f}(y) \mathcal{K}^{\#}_{\gamma,\Theta}[g](y) \prod_{i=1}^{m} z_{2i}^{\gamma_i - 1} \, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^{+}_{n}} f(x) K^{\#}_{\gamma,\theta} g(x) \; (x')^{\gamma} \, dx' dx'', \tag{6}$$

первое из которых выполняется в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{+}_{n+2m}$ *(в результате вращения (5) с двойственным оператором*

$$\mathcal{K}^{\#}_{\gamma,\Theta}[g](y) = C(\gamma) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle), \quad y \in \mathbb{R}^{+}_{n+2m}, \quad \Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \ldots, \theta_m, 0, \theta''), \tag{7}$$

а второе справедливо в исходном евклидовом полупространстве $\mathbb{R}^{+}_{n}$ *с двойственным оператором*

$$K^{\#}_{\gamma,\theta} g(x) = \mathcal{P}^{\gamma}_{x_1} \left(g(\theta, \langle \theta, x \rangle) \right). \tag{8}$$

В теореме 1 определены виды одномерных двойственных операторов Радона — Киприянова.

Оператор, двойственный к преобразованию Радона — Киприянова в $\mathbb{R}_n$ определим интегрированием по взвешанной сфере в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* $f \in S_{ev}(\mathbb{R}^{+}_{n})$ *и* $g \in S_{ev}(\mathbb{R}^{+}_{1})$. *Тогда*

$$\int\limits_{S^{+}_{1}(n)} \int\limits_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma}[f](\theta, p) g(p) dp \, \theta_1^{\gamma} dS(\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^{+}_{n}} f(x) \mathcal{K}^{\#}_{\gamma} g(x) \; (x')^{\gamma} \, dx' dx'',$$

$$\mathcal{K}^{\#}_{\gamma} g(x) = \int\limits_{S^{+}_{1}(n)} g(\Theta, \langle \Theta, x \rangle) \Theta^{\gamma} \, dS,$$

где $x = (x', x''), x' = (x_1, x_2, \ldots, x_m), x'' = (x_{m+1, \ldots, x_n}), (x')^{\gamma} = \prod_{1}^{m} x_i^{\gamma_i}$,

$$\mathcal{K}^{\#}_{\gamma} g(x) = \int\limits_{S^+_1(n)} K^{\#}_{\gamma,\theta} g(x)(x')^{\gamma}\, dx = \int\limits_{S^+_1(n)} \mathcal{P}_{x'}\Big(g(\theta,\langle\theta,x\rangle)\Big)\,(\theta')^{\gamma}\, dS(\theta), \quad \text{где} \quad (\theta')^{\gamma} = \prod_{i=1}^{m} \theta_i^{\gamma_i}. \qquad (9)$$

Доказательство. Согласно равенству (6), имеем

$$\int\limits_{S^+_1(n)} \int\limits_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma}[f](\theta,p) g(p)\, dp (\theta')^{\gamma}\, dS(\theta) = \int\limits_{S^+_1(n)} \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} f(x) K^{\#}_{\gamma,\theta} g(x)\,(x')^{\gamma}\, dx'\, dx''\, dS(\theta),$$

Теперь воспользуемся определением оператора $K^{\#}_{\gamma,\theta}$ формулой (8). Тогда

$$\int\limits_{S^+_1(n)} \int\limits_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma}[f](\theta,p) g(p)\, dp (\theta')^{\gamma}\, dS(\theta) = \int\limits_{S^+_1(n)} \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} f(x) \mathcal{P}^{\gamma}_{x'}(g(\theta,\langle\theta,x\rangle))\, dx'\, dx''\, dS(\theta).$$

Изменение порядка интегрирования здесь возможно, так как рассматриваемые функции f и g принадлежат пространству Л. Шварца. Поменяв порядок интегрирования, получим утверждение доказываемой теоремы.

Отметим, что двойственный оператор $\mathcal{K}^{\#}_{\gamma}$ получен дополнительным интегрированием функции $K^{\#}_{\gamma,\theta} g(x)$ по полусфере $S^+_1(n)$, поэтому не зависит от вектора нормали к плоскости. Этим отличается от $K^{\#}_{\gamma,\theta}$ — двойственному преобразованию Радона — Киприянова в $\mathbb{R}^+_n$ (первое из равенств в (1) и от оператора $\mathcal{K}^{\#}_{\gamma,\Theta}$ — двойственного к преобразованию Радона — Киприянова, полученного вращением, которое приводит к интегрированию по $\mathbb{R}^+_{n+2m}$ (второе из равенств в (1).

Литература

1. *Киприянов И. А.* О преобразованиях Фурье, Фурье — Бесселя и Радона / И. А. Киприянов, Л. Н. Ляхов // Докл. АН СССР. – 1998. – 360. – № 2. – С. 157–160.

2. *Ляхов Л. Н.* Преобразование Киприянова — Радона / Л. Н. Ляхов // Тр. МИАН. – 2005. – Т. 248. – С. 153–163.

3. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. – 1951. – Т. 6, № 2. – С.102–143.

4. *Наттерер Ф.* Математические основы компьютерной томографии / Ф. Наттерер. – М. : Мир. – 1990.

5. *Kalitvin V. A.* Radon — Kipriyanov Transform of Laplace Series by Weight Spherical Functions / V. A. Kalitvin, M. G. Lapshina // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, No 8. – P. 3323–3330.

6. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. – М. : Наука. – 1997.

УДК 517.587+519.622

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В. Г. Курбатов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Показано, что если каждому ограниченному входу достижимой и наблюдаемой динамической системы соответствует единственный ограниченный выход, то матрица системы не имеет собственных значений на мнимой оси.
Ключевые слова: задача об ограниченных решениях, динамическая система, достижимость, наблюдаемость, матричная экспонента.

Введение

Задача об ограниченных решениях для дифференциальных уравнений изучалась многими авторами, см., например [1]. Она состоит в нахождении ограниченного на R решения x дифференциального уравнения

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in R.$$

Хорошо известно [1, с. 119, теорема 4.1], что для существования единственного ограниченного решения x при любом непрерывном ограниченном свободном члене f необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы A не пересекал с мнимую ось.

В докладе рассматривается более общий объект — *динамическая система*

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Dx(t),$$

где A, B, C, D — заданные постоянные матрицы, согласованных размеров. Устанавливается, что если динамическая система достижима и наблюдаема, и каждому ограниченному входу u соответствует единственный ограниченный выход y, то спектр матрицы A не пересекает мнимую ось.

Линейные стационарные непрерывные динамические системы

Символом $C^{p\times q}$ будем обозначать множество всех матриц размера $p\times q$, состоящих из комплексных чисел. По умолчанию будем считать, что векторы из C^k записываются в виде столбцов.

Динамической системой называют [2, 3] правило, преобразующее входной сигнал u в выходной сигнал y. Предполагается, что

$$u : R \to C^q, \quad y : R \to C^p.$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда u — непрерывная функция.

Будем предполагать, что зависимость y от u задается уравнениями

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Dx(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, C, D — заданные постоянные матрицы, согласованных размеров:

$$A \in C^{n\times n}, \quad B \in C^{n\times q}, \quad C \in C^{p\times n}, \quad D \in C^{p\times q}.$$

Достижимость

Состояние $x_1 \in C^k$ называют *достижимым*, если существуют такой момент времени $T > 0$ и такой вход $u \in C[0,T]$, что

$$x_1 = \varphi(T, 0, 0, u),$$

где $\varphi(t, t_0, x_0, u)$ — значение в точке t решения начальной задачи

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Подпространством достижимости называют подмножество $X_{reac} \subseteq C^n$, состоящее из всех достижимых состояний x_1. Нетрудно видеть, что подмножество X_{reac} действительно является линейным подпространством пространства C^n. Систему (1) называют (*полностью*) *достижимой*, если $X_{reac} = X$.

Наблюдаемость

Задача наблюдения для системы (1) состоит в восстановлении начального состояния x_0 при известном управлении u по значениям выхода y. Исследование задачи наблюдения сводится к рассмотрению задачи

$$x'(t) = Ax(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

$$x(t_0) = x_0.$$

(Начальное) состояние $x_0 \in C^n$ называют *ненаблюдаемым*, если $y(t) = 0$ при $t > 0$. *Подпространством ненаблюдаемости* называют множество всех ненаблюдаемых состояний. Его обозначают символом X_{unobs}. Нетрудно видеть, что подмножество $X_{unobs} \subseteq C^n$ действительно является подпространством.

Систему называют (*полностью*) *наблюдаемой*, если $X_{unobs} = \{0\}$.

Задача об ограниченных решениях для достижимой и наблюдаемой системы

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система (1) полностью достижима и полностью наблюдаема. Пусть каждому непрерывному ограниченному входу u соответствует единственный ограниченный выход y. Тогда у матрицы A нет точек спектра на мнимой оси.*

Литература

1. *Далецкий Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн // Нелинейный анализ и его приложения. – М. : Наука, 1970.

2. *Antoulas A. C.* Approximation of large-scale dynamical systems / A. C. Antoulas. Philadelphia // PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). – 2005. – Vol. 6 of Advances in Design and Controlxxvi+479 p.

3. *Polderman J. W.* Introduction to mathematical systems theory. A behavioral approach / J. W. Polderman, J. C. Willems. – New York : Springer-Verlag, 1998. – Vol. 26 of Texts in Applied Mathematics. xxx+424 p.

УДК 517.926+519.218

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ ЛАНЧЕСТЕРА

Д. А. Литвинов, Л. Ю. Кабанцова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается модель боевых действий Ланчестера в виде дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Ставится задача по нахождению математического ожидания решения. Получены явные формулы для первой моментной функции решения стохастической системы. В частности, рассмотрен случай независимых гауссовских коэффициентов.

Ключевые слова: модель Ланчестера, вариационная производная, характеристический функционал, моментные функции, гауссов случайный процесс.

Ланчестером [1] была предложена математическая модель противоборствующих сторон в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon_1(t)x - \varepsilon_2(t)y + f_1(t), \\ \dot{y} = -\varepsilon_3(t)x - \varepsilon_4(t)y + f_2(t), \end{cases}$$

где $x(t), y(t)$ описывают численность армий в момент времени t, f_1, f_2 определяют изменение армий в связи с пополнениями, а коэффициенты $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ суть функции, характеризующие боевые и небоевые потери. Если коэффициенты $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ не зависят от времени, то есть являются заданными числами, то система интегрируется в квадратурах. Имеется возможность либо аналитически анализировать ход боевых действий, либо построить фазовые траектории на фазовой плоскости. Данные подходы описаны в [2, 3]. Для более реалистичных предсказаний считают, что коэффициенты являются случайными процессами. Вывод уравнения для моментных функций через плотности вероятностей можно найти, например, в [4].

В данной работе находится явный вид первой моментной функции при условии, что задан характеристический функционал случайных процессов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую модель боевых действий Ланчестера вида

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon_1(t)x + f(t), \\ \dot{y} = -\varepsilon_2(t)x, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \tag{1.2}$$

где x_0, y_0 — заданные случайные величины, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ — случайные процессы. Под функциями $x(t), y(t)$ подразумеваются зависимости численностей армий от времени. Полагается, что $\varepsilon_1(t)$ характеризует небоевые потери армии X, $\varepsilon_2(t)$ — потери армии Y от действий армии X, а $f(t)$ описывает процесс пополнения численности X.

Пусть случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ заданы характеристическим функционалом [5, стр. 30] вида

$$\Psi(u_1, u_2, v) = E\left[\exp\left\{i\int_T (\varepsilon_1(s)u_1(s) + \varepsilon_2(s)u_2(s) + f(s)v(s))ds\right\}\right], \tag{1.3}$$

где i — мнимая единица, $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ — отрезок вещественной прямой, символ E обозначает математическое ожидание, а $u_1(t), u_2(t), v(t)$ представляют собой суммируемые функции пространства $L_1(T)$. Будем считать, что случайные величины x_0, y_0 не зависят от процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$.

Систему (1.1)–(1.2) принято сводить к детерминированной системе [6, 7]. Обозначим через $T=[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}$ отрезок вещественной прямой и введем вспомогательную функцию

$$W(u_1,u_2,v)=\exp\left\{i\int_T(\varepsilon_1(s)u_1(s)+\varepsilon_2(s)u_2(s)+f(s)v(s))ds\right\}. \tag{1.4}$$

Определим отображения $z_1(t,u_1,u_2,v)=E[x(t)W(u_1,u_2,v)]$ и $z_2(t,u_1,u_2,v)=E[y(t)W(u_1,u_2,v)]$. Тогда стохастическую систему (1.1)–(1.2) можно переписать в виде

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z_1}{\partial t}=i\dfrac{\delta z_1}{\delta u_1(t)}-i\dfrac{\delta\Psi}{\delta v(t)},\\[2ex] \dfrac{\partial z_2}{\partial t}=i\dfrac{\delta z_1}{\delta u_2(t)},\end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}z_1(t_0,u_1,u_2,v)&=E[x_0W(u_1,u_2,v)],\\ z_2(t_0,u_1,u_2,v)&=E[y_0W(u_1,u_2,v)].\end{aligned} \tag{1.6}$$

При этом связь решений полученной модели (1.5)–(1.6) и исходной (1.1)–(1.2) выражается соотношениями:

$$\begin{aligned}z_1(t,0,0,0)&=E[x(t)],\\ z_2(t,0,0,0)&=E[y(t)].\end{aligned} \tag{1.7}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\chi(\tau)=\chi(t_0,t,\tau)$, определяемую следующим образом: если τ принадлежит отрезку $[\min\{t_0,t\},\max\{t_0,t\}]$, то $\chi(\tau)=sign(\tau-t_0)$, иначе $\chi(\tau)=0$. График функции $\chi(\tau)$ представлен на рис. 1.

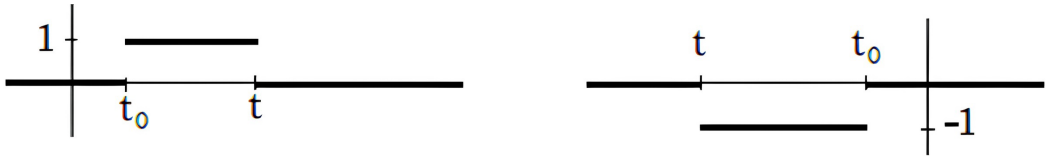


Рис. 1. График функции $\chi(\tau)=\chi(t_0,t,\tau)$

Сформулируем лемму для нахождения решения детерминированной модели.

Лемма 1. *Пусть* x_0, y_0 *являются случайными величинами, независящими от процессов* $\varepsilon_1,\varepsilon_2,f$. *Пусть существуют вариационные производные* $\dfrac{\delta\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta u_1(t)}$, $\dfrac{\delta\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta u_2(t)}$, $\dfrac{\delta\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta v(t)}$, $\dfrac{\delta^2\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta u_1(t)\delta v(t)}$, $\dfrac{\delta^2\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta u_2(t)\delta v(t)}$, *тогда решение системы (1.5)–(1.6) имеет вид*

$$z_1(t,u_1,u_2,v)=E[x_0]\Psi(u_1+i\chi(t_0,t),u_2,v)-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta\Psi(u_1+i\chi(s,t),u_2,v)}{\delta v(s)}ds, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}z_2(t,u_1,u_2,v)&=E[y_0]\Psi(u_1,u_2,v)+iE[x_0]\int_{t_0}^{t}\frac{\delta\Psi(u_1+i\chi(t_0,s),u_2,v)}{\delta u_2(s)}ds+\\ &+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{\delta^2\Psi(u_1+i\chi(\sigma,s),u_2,v)}{\delta u_2(s)\delta v(\sigma)}d\sigma ds.\end{aligned} \tag{1.9}$$

2. Общее решение задачи

Сформулируем теоремы о виде математических ожиданий функций $x(t), y(t)$ решения исходной стохастической системы (1.1)–(1.2).

Теорема 1. *Пусть* x_0, y_0 *суть случайные величины, независящие от процессов* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ *Пусть существуют вариационные производные* $\frac{\delta\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta u_1(t)}$, $\frac{\delta\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta u_2(t)}$, $\frac{\delta\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta v(t)}$, $\frac{\delta^2\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta u_1(t)\delta v(t)}$, $\frac{\delta^2\Psi(u_1,u_2,v)}{\delta u_2(t)\delta v(t)}$, *тогда математические ожидания* $E[x(t)]$, $E[y(t)]$ *решений* $x(t), y(t)$ *системы (1.1)–(1.2) определяются следующим образом:*

$$E[x(t)] = E[x_0]\Psi(i\chi(t_0,t),0,0) - i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta\Psi(i\chi(s,t),0,0)}{\delta v(s)}ds, \tag{2.1}$$

$$E[y(t)] = E[y_0] + iE[x_0]\int_{t_0}^{t}\frac{\delta\Psi(i\chi(t_0,s),0,0)}{\delta u_2(s)}ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{\delta^2\Psi(i\chi(\sigma,s),0,0)}{\delta u_2(s)\delta v(\sigma)}d\sigma ds. \tag{2.2}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и случайные процессы* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ *являются независимыми. Если случайный процесс* ε_1 *описывается характеристическим функционалом* $\Psi_1(u) = E\left[\exp\left\{i\int_T \varepsilon_1(s)u(s)ds\right\}\right]$, *а для случайных процессов* ε_2, f *известны их математические ожидания, то математические ожидания* $E[x(t)]$, $E[y(t)]$ *решений* $x(t), y(t)$ *системы (1.1)–(1.2) имеют вид*

$$E[x(t)] = E[x_0]\Psi_1(i\chi(t_0,t)) + \int_{t_0}^{t}\Psi_1(i\chi(s,t))E[f(s)]ds, \tag{2.3}$$

$$E[y(t)] = E[y_0] - E[x_0]\int_{t_0}^{t}\Psi_1(i\chi(t_0,s))E[\varepsilon_2(s)]ds - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\Psi_1(i\chi(\sigma,s))E[\varepsilon_2(s)]E[f(\sigma)]d\sigma ds. \tag{2.4}$$

3. Задача с независимыми гауссовскими коэффициентами

Найдем вид математического ожидания решения задачи (1.1)–(1.2) для случая независимых гауссовских коэффициентов.

Теорема 3. *Пусть заданы независимые гауссовские случайные процессы* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, f$ *и случайный процесс* ε_1 *задан функционалом*

$$\Psi_1(u) = \exp\left\{i\int_T E[\varepsilon_1(s)]u(s)ds - \frac{1}{2}\int_T\int_T \operatorname{cov}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2\right\},$$

где $\operatorname{cov}(s_1,s_2)$ *— ковариационная функция случайного процесса* ε_1. *Если известны математические ожидания случайных процессов* ε_2, f, *то*

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= E[x_0]\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\operatorname{cov}(s_1,s_2)ds_1ds_2 - \int_{t_0}^{t}E[\varepsilon_1(s)]ds\right\} + \\ &+ \int_{t_0}^{t}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{s}^{t}\int_{s}^{t}\operatorname{cov}(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1d\sigma_2 - \int_{s}^{t}E[\varepsilon_1(\sigma)]d\sigma\right\}E[f(s)]ds, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E[y_0] - E[x_0]\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s}\int_{t_0}^{s}\operatorname{cov}(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1d\sigma_2 - \int_{t_0}^{s}E[\varepsilon_1(\sigma)]d\sigma\right\}E[\varepsilon_2(s)]ds - \\ &- \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{\sigma}^{s}\int_{\sigma}^{s}\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2 - \int_{\sigma}^{s}E[\varepsilon_1(\tau)]d\tau\right\}E[\varepsilon_2(s)]E[f(\sigma)]d\sigma ds \end{aligned} \tag{3.2}$$

Заключение

В результате проведенной работы получены явные формулы для первой моментной функции решения задачи (1.1)–(1.2). Рассмотрены случаи как зависимых, так и независимых случайных процессов. Также найдены формулы математического ожидания задачи (1.1)–(1.2) в случае независимых гауссовских случайных процессов.

Литература

1. *Lanchester F.* Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. / F. Lanchester – London : Constable and Co, 1916. – 243 p.

2. *Вентцель Е. С.* Введение в исследование операций: учебное пособие / Е. С. Вентцель – Москва : Издательство «Советское радио», 1964. – 384 с.

3. *Гордин В. А.* Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать: учебное пособие / В. А. Гордин – Москва : Издательский дом Высшей школы экономики, 2016. – 531 с.

4. *Чуев В. Ю.* Вероятная модель боя многочисленных группировок / В. Ю. Чуев // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. Спец. вып. «Матем. Модел.» – 2011. – С. 223–232.

5. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа: учебное пособие / В. Г. Задорожний. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 316 с.

6. *Задорожний В. Г.* Дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами: учебное пособие / В. Г. Задорожний – Воронеж, Издательско-полиграфический центр Воронежского Государственного университета, 2012. – 98 с.

7. *Задорожний В. Г.* Стохастическая модель боевых действий Ланчестера / В. Г. Задорожний, А. С. Чеботаев, Е. Е. Дикарев // Матем. моделирование. – 2021. – Т. 33, № 5. – С. 57–77.

УДК 517.958

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

Е. А. Логинова, А. С. Черникова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе изучаются свойства первых производных решения стационарной неоднородной задачи теплопроводности на плоскости с трещиной конечной длины. Используя интегральное представление решения задачи, удается вычислить первые производные решения, заданные также интегрально. Каждый тепловой поток рассматривается отдельно. Постепенно изучаются все слагаемые, входящие в интегральное представление теплового потока, и оцениваются, и отбрасываются непрерывные компоненты. Таким образом, строится асимптотическое представление по расстоянию до концов трещины каждого теплового потока.

Ключевые слова: задача теплопроводности, тепловые потоки, интегральное представление решения, асимптотические представления, первые производные решения, задача математической физики, неоднородная задача, стационарная задача, асимптотики тепловых потоков, краевая задача.

Введение

Рассматривается неоднородная задача о распределении тепла в плоскости (неоднородном материале) с трещиной. Предполагается, что вектор изменения неоднородности материала направлен под углом $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ к положительному направлению оси Ox_1, а трещина занимает отрезок $[-1;1]$ оси Ox_1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+k\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x_1}+k\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial x_2}=f(x_1,x_2), \tag{1}$$

$$u(x_1;+0)-u(x_1;-0)=q_0(x_1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x_1;+0)}{\partial x_2}+k\sin\alpha u(x_1;+0)-\frac{\partial u(x_1;-0)}{\partial x_2}-k\sin\alpha u(x_1;-0)=q_1(x_1), \tag{3}$$

где $f(x_1,x_2)$, $q_0(x_1)$, $q_1(x_1)$ — известные функции.

Основным результатом исследования явилась теорема.

Теорема. *Пусть функции $q_0(x_1)$, $q_1(x_1)$ дважды непрерывно дифференцируемы на множестве $[-1;1]$ и $f(x)=f(x_1,x_2)$ ограничена вместе со своими производными до второго порядка включительно в R^2, кроме того, $f(x_1,x_2)=0$ при $|x_1|\ge c$, $|x_2|\ge c_1$, где c,c_1 — произвольные конечные положительные числа.*

Тогда справедливы следующие асимптотические представления первых производных решения задачи (1)–(3) (тепловых потоков) по расстоянию до границы трещины

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-(4\pi)^{-1}[\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_1(1)-\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_1(-1)]+k\sin\alpha(8\pi)^{-1}[\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_0(1)-$$

$$-\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_0(-1)]-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_0(1)-\frac{x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_0(-1)\right]+R_1(x_1,x_2). \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_0(1)+\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_0(-1)\right]+\frac{k\cos\alpha}{8\pi}[\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_0(1)-$$

$$-\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_0(-1)]+\frac{1}{4\pi}[\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_0'(1)-\ln((-1-x_1)^2+x_2^2)q_0'(-1)]+R(x_1,x_2). \qquad (5)$$

Здесь функции $R(x_1,x_2)$, $R_1(x_1,x_2)$ *ограничены при* $x_2\to+0$, $x_1\in[-1;1]$.

1. Построение решения задачи (1)–(3) и описание его свойств

Ранее было доказано утверждение [1].

Утверждение. *Пусть функции* $q_0(x_1)$, $q_1(x_1)$ *дважды непрерывно дифференцируемы на множестве* $[-1;1]$ *и* $f(x)=f(x_1,x_2)$ *ограничена вместе со своими производными до второго порядка включительно в* R^2, *кроме того,* $f(x_1,x_2)=0$ *при* $|x_1|\ge c$, $|x_2|\ge c_1$, *где* c,c_1 — *произвольные конечные положительные числа.*

Тогда задача (1)–(3) имеет решение, выписываемое равенством

$$u(x_1,x_2)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+(x_2-y_2)\sin\alpha))\times$$
$$\times K_0(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})f(y_1,y_2)dy_1dy_2-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))K_0(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})q_1(y_1)dy_1+ \qquad (6)$$
$$+\frac{k}{4\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))K_1(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})\frac{x_2q_0(y_1)}{\sqrt{x_2^2+(x_1-y_1)^2}}dy_1+$$
$$+\frac{k\sin\alpha}{4\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))K_0(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})q_1(y_1)dy_1,$$

где K_0, K_1 — *функции Макдональда — Бесселя [1], выполняются граничные условия (2)–(3). При этом условие (3) выполнено в смысле главного значения.*

Функция $u(x_1,x_2)$ *дважды непрерывно дифференцируема в* R^2, *за исключением точек разреза.*

2. Асимптотические представления тепловых потоков

Приведём схему доказательства Теоремы.

Используя представление решения (6), легко вычислить производную

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{k\cos\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+(x_2-y_2)\sin\alpha))\times$$
$$\times K_0(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})f(y_1,y_2)dy_1dy_2+$$
$$+\frac{k}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+(x_2-y_2)\sin\alpha))\times$$
$$\times K_1(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})\frac{(x_1-y_1)}{\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}}f(y_1,y_2)dy_1dy_2+$$
$$+\frac{k\cos\alpha}{4\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))K_0(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})q_1(y_1)dy_1+$$
$$+\frac{k}{4\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))K_1(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})\frac{(x_1-y_1)}{\sqrt{x_2^2+(x_1-y_1)^2}}q_1(y_1)dy_1-$$

$$-\frac{k^2\cos\alpha}{4\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))K_1(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})\frac{x_2q_0(y_1)}{\sqrt{x_2^2+(x_1-y_1)^2}}dy_1-$$

$$-\frac{k^2}{16\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))\left(K_0(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})+K_2(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})\right)\times$$

$$\times\frac{(x_1-y_1)x_2}{x_2^2+(x_1-y_1)^2}q_0(y_1)dy_1-\frac{k}{4\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))K_1(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})\times$$

$$\times\frac{(x_1-y_1)x_2}{\left(x_2^2+(x_1-y_1)^2\right)^{3/2}}q_0(y_1)dy_1-\frac{k^2\cos\alpha}{8\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))\times$$

$$\times K_0(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})q_1(y_1)dy_1-\frac{k^2}{8\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+x_2\sin\alpha))\times$$

$$\times K_1(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2})\frac{(x_1-y_1)}{\sqrt{x_2^2+(x_1-y_1)^2}}q_1(y_1)dy_1.$$

Отметим, что слагаемые с третьего по девятое были изучены ранее в [2] и они вносят основной вклад в асимптотическое представление функции $\frac{\partial u}{\partial x_1}$.

Осталось показать, что первое и второе слагаемые являются ограниченными функциями.

Первое слагаемое

$$\frac{k\cos\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+(x_2-y_2)\sin\alpha))K_0(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})f(y_1,y_2)dy_1dy_2$$

с точностью до постоянного сомножителя совпадает с первым слагаемым в представлении (6), а, следовательно, является ограниченным.

Обозначим

$$I=\frac{k}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+(x_2-y_2)\sin\alpha))\times$$

$$\times K_1(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})\frac{(x_1-y_1)}{\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}}f(y_1,y_2)dy_1dy_2.$$

Так как в силу условия теоремы $f(x_1,x_2)=0$ при $|x_1|\ge c,\ |x_2|\ge c_1,$ то существует $N>0,$ такое что

$$I=\frac{k}{4\pi}\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+(x_2-y_2)\sin\alpha))\times$$

$$\times K_1(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})\frac{(x_1-y_1)}{\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}}f(y_1,y_2)dy_1dy_2.$$

Используя асимптотические представления функций Макдональда — Бесселя при малых значениях аргумента [3], получим

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+(x_2-y_2)\sin\alpha))\times$$

$$\times\frac{(x_1-y_1)}{\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}\times\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}}f(y_1,y_2)dy_1dy_2+$$

$$+\frac{k^2}{8\pi}\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N}\exp(-\frac{k}{2}((x_1-y_1)\cos\alpha+(x_2-y_2)\sin\alpha))\times O(x_1-y_1)f(y_1,y_2)dy_1dy_2.$$

Второе слагаемое в полученном представлении очевидно является ограниченным в окрестности трещины.

В ограниченности первого слагаемого можно убедиться, применяя оценку

$$\left|\frac{(x_1-y_1)}{\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}}\right|\le\left|\frac{(x_1-y_1)}{\sqrt{(x_1-y_1)^2}}\right|=1$$

и, в дальнейшем, интегрирование по частям.

Таким образом, доказано асимптотическое представление функции $\frac{\partial u}{\partial x_1}$.

Аналогично проводится доказательство для $\frac{\partial u}{\partial x_2}$.

Литература

1. *Логинова Е. А.* Неоднородная задача теплопроводности на плоскости с трещиной / Е. А. Логинова, А. С. Черникова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4-6 декабря 2023 г. – Воронеж, 2024. – С. 84–88.

2. *Глушко А. В.* Решение задач, описывающих распределение тепла в материале с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова. – Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2013. – 130 с.

3. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – М. : Издательство иностранной литературы, 1949 .– 799 с.

УДК 517.95

СРЕДНИЕ ФУНКЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫМ $\mathbb{T}$-СДВИГОМ

Л. Н. Ляхов[1,2], С. А. Рощупкин[2], Е. Л. Санина[1]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Аннотация. В работе вводится усреднение функций на основе интегральной меры Лебега — Киприянова $d\mu_{-\gamma}(x)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{-\gamma_i}$, $0<\gamma<1$ и введенных ранее интегральных операторов обобщенного $\mathbb{T}$-псевдосдвига и обобщенного $\mathbb{T}$-сдвига. Последний принадлежит классу обобщенных сдвигов Б. М. Левитана.
Ключевые слова: средние функции, интегральные операторы обобщенного псевдосдвига и обобщенного сдвига.

Введение

Хорошо известно *усредняющее ядро* (например, см. книги [1] (с. 23), [2] (с. 34), [3] (с. 31))

$$\omega(x)=\left\{\begin{array}{ll} C_h e^{-\frac{h^2}{h^2-|x|^2}}, & |x|<h, \\ 0, & |x|\geq h, \end{array}\right\}, \quad x\in\mathbb{R}_n, \quad n\geq 1. \tag{1}$$

Свертка с этим ядром $(f*\omega_h)=\int f(y)\omega_h(|x-y|)d\mu(y)$, где в качестве интегральной меры обычно рассматривается мера интегрирования Лебега $d\mu(y)=dy$ называется *средним функции* f.

В 70-х годах прошлого века И. А. Киприяновым было инициировано изучение *весовых средних функций* на основе меры интегрирования

$$d\mu(x)=x^{\gamma}dx, \quad x^{\gamma}=\prod_{i=1}^{n}|x_i|^{\gamma_i}, \quad \gamma_i\geqslant 0, \quad n\geqslant 1,$$

которая приспособлена для исследования задач уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя

$$B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i>0.$$

Далее, для удобства, мы пользуемся перестановкой в записи аргумента функции:

$$x=(x_i,x^i), \quad x^i=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n). \tag{2}$$

Коммутирующий с оператором B_{γ_i} сдвиг

$$T_{x_i}^{y_i}f(x_i,x^i)=\frac{\Gamma\left(\gamma_i+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int_0^{\pi}f\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha},x^i\right)\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha \tag{3}$$

принадлежит классу обобщенных сдвигов Б. М. Левитана (см. [4], [5] (с. 17)) и называется *обобщенным сдвигом Пуассона*. Впервые, в качестве оператора сдвига аргумента функции, такая конструкция «сдвига» появилась в работах А. Ванштейна и Ж. Дельзарта в середине прошлого века. Принадлежность классу обобщенных сдвигов Левитана доказана в [4]. Доказательство коммутируемости с оператором Бесселя приведено в книге [6] и в более общем случае в [7].

В [4] отмечен следующий факт, имеющий принципиальное значение — выражение (3) симметрично относительно аргумента x и шага y.

Соответствующие свертки, порожденные обобщенным сдвигом (3), называют *обобщенными свертками*, а свертка f с усредняющим ядром — *весовыми средними функциями* f.

В [8] исследовались обобщенные средние функций, порожденные смешанным обобщенным сдвигом (обобщенный сдвиг (3) действовал только по одной переменной); обобщение для случая нескольких весовых координат аргумента функции см. в [9]. Средние функции, порожденные обобщенным сдвигом Пуассона, называются K-средними функциями (средние Киприянова). В указанных работах в качестве меры интегрирования принята следующая: $d\mu_\gamma(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}\, dx$, где $\gamma_i > 0$.

В начале 80-х годов на одном из семинаров в ВГУ И. А. Киприянов предложил исследовать задачи с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{-\gamma}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}$ с параметром $-\gamma < 0$. В 2008 г. автор этой работы спросил профессора В. В. Катрахова о результатах этих исследований. Оказалось, что исследования были, но ничего не опубликовано. В. В. Катрахов отметил, что по его наблюдениям исследование задач с таким оператором Бесселя потребует введения принципиально нового математического аппарата по сравнению с известным в то время. Справедливость этого обнаружена в работе [10] при попытке найти фундаментальное решение оператора Лапласа — Бесселя, в котором хотя бы один из операторов Бесселя имел бы отрицательный параметр. Дело в том, что открытый в [10] интегральный оператор, коммутирующий с оператором Бесселя $B_{-\gamma}$ $(\gamma > 0)$, и который должен бы сыграть роль «обобщенного сдвига», не принадлежит классу левитановских обобщенных сдвигов. Более того, он устроен настолько «неправильно», что посредством этого оператора невозможно определить его действие из начала координат или в начало координат. Тем самым невозможно определить фундаментальное решение сингулярного оператора Бесселя с соответствующей особенностью в произвольной точке, не совпадающей с началом координат.

Авторами [10] этот оператор назван «$\mathbb{T}$-псевдосдвигом». И, по-видимому, его имел ввиду В. В. Катрахов, говоря о «новом математическом аппарате» для исследования сингулярных дифференциальных уравнений с отрицательным параметром оператора Бесселя. Действительно, на основе $\mathbb{T}$-псевдосдвига уже в следующей работе [11] тех же авторов был введен оператор $\mathbb{T}$-сдвига, который (с некоторыми оговорками) принадлежит классу обобщенных сдвигов Б. М. Левитана и коммутирует с оператором Бесселя $B_{-\gamma}$, $\gamma > 0$.

Надо отметить, что ещё более ранее описанных здесь событий, свертки функций с ядром, который в [10] назван $\mathbb{T}$-псевдосдвигом, изучались А. В. Какичевым в [12] (см. также работу [13]). Однако внятного приложения в теории дифференциальных уравнений этот аппарат сверток дать не мог по указанной выше причине.

Исследования сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя отрицательного параметра также начаты в работах [14–16]. Особый интерес к этим исследованиям вызван результатами работы [15], где показано, что все работы с оператором Лапласа — Бесселя — Киприянова и с мерой интегрирования Лебега — Киприянова $d\mu(x) = \prod_i x_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i > -1$ могут рассматриваться в дробноразмерном множестве с размерностью $n + |\gamma|$.

В этой работе исследуется новый класс весового усреднения функций на основе введенных в [10] и в [11] операторов обобщенного $\mathbb{T}$-псевдосдвига и обобщенного $\mathbb{T}$-сдвига.

1. Некоторые термины, обозначения и результаты

Через $\mathbb{R}^+_n$ обозначим область в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_n$, определенную неравенствами $x_i > 0,\ i = \overline{1,n}$. И обозначаем $\mathbb{R}^+_n = \{x : x_i \geq 0\}$. Класс ℓ раз непрерывно дифференцируемых функций, четных по каждой координате x_i при $\Gamma_i \neq 0$, будем обозначать C^{ℓ}_{ev}.

Как правило, полагаем, что ограниченная область $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^+_n$ прилегает к координатным гиперплоскостям $x_i = 0$. Такой выбор объясняется особенностью сингулярного дифференциального оператора Бесселя на части границы Γ^o, принадлежащей координатной гиперплоскости $x_i = 0$ и весом интегральной меры Лебега — Киприянова. Следовательно, граница такой области состоит из части $\Gamma^+ \subset \mathbb{R}^+_n$ и $\Gamma^o : x_i = 0$, т. е. $\Gamma = \Gamma^o \cup \Gamma^+$.

Особенность сингулярного дифференциального оператора Бесселя (в виде слагаемого $\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ приводит к необходимости рассматривать соответствующие задачи в классах функций четных по каждой переменной x_i, т. к. в этом случае при условии $f \in C^2_{ev}$

$$\lim_{x_i \to +0} B_{\pm\gamma_i} f(x) = (1 \pm \gamma_i) f''_{x_i x_i}(x)\big|_{x_i = 0} < \infty$$

При этом выражение

$$\mathcal{B}_{\pm\gamma_i} f = \frac{1}{1 \pm \gamma_i} B_{\pm\gamma_i} f(x) \tag{4}$$

называется *B-производной* функции f, что связано с возможностью представить его правую часть в виде предела отношения приращения функции, порожденной обобщенной разностью, к шагу приращения аргумента, когда этот шаг стремиться к нулю.

Это свойство распространяется на любую натуральную степень $k \in \mathbb{N}$ сингулярного оператора Бесселя:

$$B^k_{\gamma_i} \omega_h(x)\big|_{x_i = 0} = P_k(\gamma_i) \frac{\partial^{2k} \omega_h(x)}{\partial x_i^{2k}}\Big|_{x_i = 0}, \quad \gamma \in \mathbb{R}_1,$$

где $P_k(t)$ соответствующий многочлен порядка k.

Определение 1. Функция f, определенная в евклидовой области $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}^+_n$ называется четной по Киприянову, если она может быть продолжена в область $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \subseteq \mathbb{R}_n$ с сохранением класса своей принадлежности.

В частности, для гладких функций такое продолжение возможно при условии равенства нулю всех производных (существующих) нечетного порядка на границе $\Gamma^o : \frac{\partial^{2m-1}}{\partial x_i^{2m-1}} f(x)\big|_{x_i = 0} = 0$, $m \in \mathbb{N}$ (см. [6] (с. 21)).

В дальнейшем в этой работе мы имеем дело только с функциями $u(x)$ четными по Киприянову по каждой из переменных x_i, поэтому, сокращая, указанные функции называем просто «четными».

Следуя [6], обозначим через Ω^- области, полученные зеркальным отражением области Ω^+ от координатных плоскостей $x_i = 0$. Объединение этих областей обозначим $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$. От границы Γ области Ω мы требуем гладкости в окрестности $\Gamma \cap \Gamma^o$. Связано это с тем, что работа идет с функциями $u(x)$, для которых $B_{\gamma_i} u(x)$ существует в каждой точке $x_i = 0$.

Таким образом граница Γ^o — это граница симметрии, поэтому под областью Ω^+ будем понимать частично замкнутую область $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^o$. Подобласти таких областей, как правило, включают соответствующие части границ Γ^o и мы их называем *s*-внутренней подобластью области Ω^+ с соответствующей частью границы Γ^o.

Через $(\cdot,\cdot)_{_\gamma}$ будем обозначать следующую билинейную форму с мерой интегрирования Лебега — Киприянова:

$$(u,v)_{-\gamma}=\int\limits_{\Omega^+}u(x)v(x)x^{-\gamma}dx,\quad \Omega^+\subseteq\overline{\mathbb{R}^+_n},\quad x^{-\gamma}=\prod_{i=1}^{n}x_i^{-\gamma_i},\quad 0<\gamma_i<1.$$

2. Результаты. Обобщенный $\mathbb{T}$-псевдосдвиг и $\mathbb{T}$-сдвиг

Пусть x и $y\in\mathbb{R}_n$. $\mathbb{T}$-Псевдосдвигом в $\mathbb{R}_n$ будем называть интегральный оператор

$$\mathbb{T}^y_x f(x)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{T}^{y_i}_{x_i}f(x), \tag{5}$$

где используется следующая конструкция одномерного обобщенного $\mathbb{T}$-псевдосдвига:

$$\mathbb{T}^{y_i}_{x_i}f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi}[x_i^2y_i^2]^{\frac{\gamma_i+1}{2}}\frac{f\left(\sqrt{(x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i)},x^i\right)}{\left(x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i\right)^{\frac{\gamma_i+1}{2}}}\sin^{\gamma_i+1}\alpha_i\,d\alpha_i. \tag{6}$$

Здесь и ниже применено обозначение аргумента функции (3). Свойства обобщенного $\mathbb{T}^y_x$-псевдосдвига приведены в [10]. Обобщённый $\mathbb{T}$-сдвиг в $\mathbb{R}_n$ имеет вид

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y_x f(x)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{-\gamma_1+1}\mathbb{T}^{y_i}_{x_i}f(x). \tag{7}$$

Введем также квази-псевдосдвиг

$$\overset{**}{\mathbb{T}}{}^{y_i}_{x_i}f(x)=(y_i^2)^{-\frac{\gamma_i+1}{2}}\mathbb{T}^{y_i}_{x_i}f(x)= \tag{8}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi}(x_i^2)^{\frac{\gamma_i+1}{2}}\frac{f\left(\sqrt{(x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i,x^i)}\right)}{\left(\sqrt{(x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i)}\right)^{\gamma_i+1}}\sin^{\gamma_i+1}\alpha_i\,d\alpha_i.$$

Здесь $x\geq\delta>0$. Дополнительно отметим также формулу

$$(\mathbb{T}^x_y u,v)_{-\gamma}=\int\limits_{\Omega^+}\mathbb{T}^x u(y)v(y)y^{-\gamma}dy=\int\limits_{\Omega^+}\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y_x u(x)v(y)ydy=(\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y_x u,v)_{+1}.$$

Замечание 1. $\mathbb{T}$-псевдосдвиг (6) симметричен по отношению к аргументу функции и шагу сдвига. Напротив, из (7) видим принципиальную особенностью $\mathbb{T}^y_x$-сдвига — это отсутствие свойства симметрии $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y_x f(x)\neq\overset{*}{\mathbb{T}}{}^x_y f(y)$. Но эта конструкция необходима для определения фундаментальных решений линейных сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя с отрицательным параметром. Поэтому более востребованы в теории весовых классов функций оказываются средние функции, порожденные именно $\mathbb{T}^y_x$-сдвигом. Оператор (6) не определен при $x_i=0$ и при $y_i=0$. Оператор (7) не определен только при $x_i=0$. И, напротив, вполне разумно действует с нулевым шагом сдвига $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^0_x f(x)=f(x)$ при условии, что все координаты $x_i\geq\delta>0$.

Усредняющим ядром в наших исследованиях будет служить классическое ядро $\omega_h(x)$ с дополнительным условием четности (по Киприянову) по каждой координате x_i аргумента x при условии $\gamma_i\neq 0$. Примером такого усредняющего ядра является функция (1).

Определим Λ-среднюю функцию $u_h(x)$ в виде обобщенной $\mathbb{T}$-свертки с усредняющим ядром ω_h:

$$\Lambda_h u(x)=u_h(x)=\int u(y)\overset{*}{\mathbb{T}}{}^x_y\omega_h(y)y^{-\gamma}dy.$$

Пусть Ω^+ ограниченная область, прилегающая к координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$. Введем следующее пространство

$$L_p^{-\gamma}(\Omega^+) = \left\{ f : x^{-\frac{\gamma}{p}} f(x) \in L_p(\Omega^+), 1 \le p < \infty, \quad \| f \|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)} = \left(\int\limits_{\Omega^+} f(x) x^{-\gamma} dx \right)^{1/p} \right\}.$$

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если* $u \in C^\infty(\Omega^+)$, *то* Λ*-средняя функция* $u_h \to u$ *при* $h \to 0$ *равномерна во всякой замкнутой s-подобласти области* Ω^+.

Теорема 2. $\|u_h\|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)} \le 2^{n+|\gamma|} \|u\|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)}, \quad 1 \le p < \infty.$

Теорема 3. *Если* $u \in L_p^{-\gamma}(\Omega^+)$, *то* $\lim\limits_{h \to 0} \|u - u_h\|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)} = 0.$

Теорема 4. *Множество всех финитных в области* Ω^+ *функций плотно в* $L_p^{-\gamma}(\Omega^+)$.

Все указанные теоремы справедливы для Λ_h-усреднений, порожденных $\mathbb{T}$-псевдосдвигом при условии, что $x_i \ge \delta > 0$ и $y_i \ge \delta > 0$.

Заключение

Введенные в работе конструкции средних функций приспособлены для исследования проблем теории весовых пространств функций и для задач линейных дифференциальных уравнений, содержащих сингулярные дифференциальные операторы Бесселя с отрицательным параметром.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Литература

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М. : Наука, 1988. – 336 с.

2. *Никольский С. М.* Приближения функций многих переменных и теоремы вложения. – М. : Наука, 1977. – 456 с.

3. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М. : Высшая школа, 1977. – 431 с.

4. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. – 1951. – Т. 6, № 2. – С. 102–143.

5. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. – М. : Наука, 1973.

6. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. – М. : Наука, 1997.

7. *Ляхов Л. Н.* Построение ядер Дирихле и Валле-Пуссена — Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье / Л. Н. Ляхов // Труды Московского математического общества. – 2015. – Т. 76, № 1. – С. 67–84.

8. *Киприянов И. А., Кащенко Н. А.* Об операторе осреднения, связанном с обобщенным сдвигом. Докл. АН СССР. – 1974. – 218:1. – С. 21–23

9. *Ляхов Л. Н.* О смешанных усреднениях Соболева-Киприянова / Л. Н. Ляхов, М. В. Половинкина // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15, № 2. – С. 329–330.

10. *Ляхов Л. Н.* Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 12. – С. 1654–1665.

11. *Ляхов Л. Н.* Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина, С. А. Рощупкин, Ю. Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2023. – № 7. – С. 52–65.

12. *Какичев В. А.* О свертках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР, Сер. : Физ.-мат. наук. 1967.

13. *Бритвина Л. Е.* О некоторых полисвертках, порожденных преобразованием Ханкеля // Матем. заметки. – 2004. – № 76. – 1. – С. 20–26.

14. *Ляхов Л. Н.* Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1610–1620.

15. *Ляхов Л. Н.* Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 517–528.

16. *Ляхов Л. Н.* Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B-оператором Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59, № 4. – С. 483–493.

УДК 517.95

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Мегралиев Яшар, Гусейнова Афаг

Бакинский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости обратной краевой задачи с неизвестными коэффициентами и правой частью, зависящей от времени, для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка. Задача рассматривается в прямоугольной области. Дается определение классического решения поставленной задачи. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче (в определенном смысле), для которой доказывается теорема о существовании и единственности. Далее на основе этих фактов доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.
Ключевые слова: линейная обратная краевая задача, псевдогиперболического уравнения, существование и единственность, классического решения.

Введение

Существует много случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциальных уравнений по некоторым знаниям о его решениях. Такие задачи называются обратными краевыми задачами математической физики. Обратные краевые задачи возникают в различных областях человеческой деятельности, таких как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества в промышленности и т. д., что делает их активной областью современной математики. Обратные задачи для различных типов уравнений в частных производных изучались во многих работах. Среди них следует отметить работы А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2, 3], В. К. Иванова [4] и их последователей. Для всестороннего обзора читатель должен обратиться к монографии А. М. Денисова [5]. В данной работе, следуя [6, 7], мы доказываем существование и единственность решения обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка.

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Пусть $D_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$. В прямоугольнике D_T рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти тройку $\{u(x,t),\ a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t),\ a(t),\ b(t)$ удовлетворяющих уравнению [8]

$$u_{tt}(x,t) + \alpha u_{xxxx}(x,t) - \beta u_{xxtt}(x,t) = a(t)u(x,t) + b(t)g(x,t) + f(x,t) \quad (x,t) \in D_T \tag{1}$$

начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \le x \le 1), \tag{2}$$

граничными условиями

$$u(0,t) = u_x(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 \quad (0 \le t \le T) \tag{3}$$

и с дополнительными условиями

$$u(x_i,t) = h_i(t) \quad (0 < x_i < 1,\ i = 1,2;\ x_1 \ne x_2;\ 0 \le t \le T), \tag{4}$$

где $\alpha > 0, \beta > 0$ — фиксированные числа, $f(x,t), \varphi(x), \psi(x), h_i(t)\ (i = 1,2)$ — заданные функции.

Обозначим

$$\tilde{C}^{4,2}(D_T) = \left\{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{ttx}(x,t),\right.$$

$$u_{tt\alpha x}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t) \in C(D_T)\}.$$

Определение. *Под классическим решением обратной краевой задачи (1)–(4) понимаем тройку* $\{u(x,t),\ a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T),\ a(t) \in C[0,T],\ b(t) \in C[0,T]$ *удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4) в обычном смысле.*

Аналогично [13], доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1], h_i(t) \in C^2[0,T]\ (i=1,2),\ f(x,t) \in C(D_T),\ g(x,t) \in C(D_T),$ $h(t) \equiv h_1(t)g(x_2,t) - h_2(t)g(x_1,t) \neq 0\ (0 \le t \le T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\varphi(0) = h(0),\ \ \psi(0) = h'(0). \tag{5}$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)–(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T),\ a(t) \in C[0,T]$ *и* $b(t) \in C[0,T]$ *из соотношений (1)–(3) и условия*

$$h_i''(t) + \alpha u_{xxxx}(x_i,t) - \beta u_{xxtt}(x_i,t) = a(t)h_i(t) + b(t)g(x_i,t) + f(x_i,t)\ \ (i=1,2; 0 \le t \le T). \tag{6}$$

2. Разрешимость обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)–(3), (6) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \quad \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)\right) \tag{7}$$

где

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx\ \ (k=1,2,...).$$

Тогда, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$(1+\beta\lambda_k^2)u_k''(t) + \lambda_k^4 \alpha u_k(t) = F_k(t;u,a,b)\ \ (0 \le t \le T; k=1,2,...) \tag{8}$$

$$u_k(0) = \varphi_k,\ \ u_k'(0) = \psi_k \quad (\ k=1,2,...), \tag{9}$$

где

$$F_k(t;u,a,b) = a(t)u_k(t) + b(t)g_k(t) + f_k(t),$$

$$f_k(t) = 2\int_0^1 f(x,t) \sin \lambda_k x\, dx, g_k(t) = 2\int_0^1 g(x,t) \sin \lambda_k x\, dx,$$

$$\varphi_k = 2\int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx,\ \ \psi_k = 2\int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx\ \ (k=1,2,...).$$

Решая задачу (8), (9), находим:

$$u_k(t) = \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_k \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau\ \ (k=1,2,...), \tag{10}$$

где

$$\beta_k^2 = \frac{\alpha\lambda_k^4}{1+\beta\lambda_k^2}\ \ (k=1,2,...).$$

После подстановки выражений $u_k(t)\ (k=1,2,...)$ в (7), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)–(3), (6) получаем:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_k \sin \beta_k t\ + \frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau \right\} \sin \lambda_k x. \tag{11}$$

Теперь, из (6), имеем:

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \Big\{ (h_1''(t) - f(x_1,t))\, g(x_2,t) - (h_2''(t) - f(x_2,t)) g(x_1,t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\left[\varphi_k\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_k\sin\beta_k t+\frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_k^2}F_k(t;u,a,b)\right](g(x_2,t)\sin\lambda_k x_1-g(x_1,t)\sin\lambda_k x_2)\Bigg\}, \qquad (12)$$

$$b(t)=[h(t)]^{-1}\Big\{(h_2''(t)-f(x_2,t))h_1(t)-(h_1''(t)-f(x_1,t))h_2(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\left[\varphi_k\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_k\sin\beta_k t+\frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_k(\tau;u,a,b)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_k^2}F_k(t;u,a,b)\right](h_1(t)\sin\lambda_k x_2-h_2(t)\sin\lambda_k x_1)\Bigg\}, \qquad (13)$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (6) свелось к решению системы (11)–(13), относительно неизвестных функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Для исследования единственности решения задачи (1)–(3), (6) важную роль играет следующая лемма.

Лемма. *Если* $\{u(x,t),a(t),b(t)\}$ *— любое классическое решение задачи (1)–(3), (6), то функции*

$$u_k(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \quad (k=1,2,...)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ *системе (10).*

Пусть данные задачи (1)–(3), (6) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^4[0,1]$, $\varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$, $\varphi(0)=\varphi'(1)=\varphi''(0)=\varphi'''(1)==\varphi^{(4)}(0)=0$.
2. $\psi(x)\in C^2[0,1]$, $\psi^{(3)}(x)\in L_2(0,1)$, $\psi(0)=\psi'(1)=\psi''(0)=0$.
3. $f(x,t), f_x(x,t)\in C(D_T)$, $f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T)$, $f(0,t)=f_x(1,t)=0$ $(0\le t\le T)$.
4. $g(x,t), g_x(x,t)\in C(D_T)$, $g_{xx}(x,t)\in L_2(D_T)$, $g(0,t)=g_x(1,t)=0$ $(0\le t\le T)$.
5. $h_i(t)\in C^2[0,T]\,(i=1,2)$, $h(t)\equiv h_1(t)g(x_2,t)-h_2(t)g(x_1,t)\neq 0$ $(0\le t\le T)$.

Доказана следующая.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1–5. Тогда при малых значениях* $T+\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}$ *задача (1)–(3), (6) имеет единственное решение.*

С помощью теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2 и выполнены условия согласования*

$$\varphi(0)=h(0)\ ,\quad \psi(0)=h'(0).$$

Тогда при малых значениях $T+\left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]}$ *задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение.*

Литература

1. *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач // Доклады Академии наук СССР. – 1943. – Т. 39, № 4. – С. 195–198.

2. *Лаврентьев М. М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Доклады Академии наук СССР. – 1964. – Т. 157, № 3. – С. 520–521.

3. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М. : Наука, 1980. – 288 с.

4. *Иванов В. К., Васин В. В., Танина В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М. : Наука, 1978. – 206 с.

5. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. – М. : МГУ, 1994. – 206 с.

6. *Mehraliyev Y. T., Huseynova A. F.* On solvability of an inverse boundary value problem for pseudo hyperbolic equation of the fourth order // Journal of Mathematics Research. – 2015. – 7, no 2, P. 101–109.

7. *Isgendarov N. Sh., Mehraliyev Y. T. and Huseyinova A. F.* On an Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq-Love Equation with an Integral Condition // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 10, no 63. – P. 3119–3131

8. *Ерофеев В. И., Кажаев В. В. Семериков Н. П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.

УДК 519.622

КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ РУНГЕ — КУТТЫ

М. А. Писарцов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Написана компьютерная программа, решающая произвольную систему дифференциальных уравнений указанным методом Рунге — Кутты. В качестве информации о методе Рунге — Кутты в программу передается таблица ее коэффициентов, называемая таблицей Бутчера. Программа предназначена для проведения компьютерных экспериментов по сравнению между собой различных методов Рунге — Кутты. В качестве иллюстрации работы программы решается система из трех дифференциальных уравнений с помощью неявного метода Рунге — Кутты 4-го порядка точности.
Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, метод Рунге — Кутты, порядок аппроксимации, таблица Бутчера.

Введение

Дифференциальным уравнением (ДУ) [4, 5] называют соотношение типа равенства относительно неизвестной функции, которая связывает значение независимой переменной (которую принято считать за время) со значениями неизвестной функции и её производных при текущем значении независимой переменной.

Методы Рунге — Кутты (РК) [1, 2, 4–6] — наиболее часто используемые методы численного решения начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Наиболее известен явный 4-х стадийный метод Рунге, который строится на основе квадратурной формулы Симпсона.

Настоящая работа посвящена описанию компьютерной программы, предназначенной для решения систем дифференциальных уравнений 1-го порядка произвольным методом Рунге — Кутты. В качестве примера в статье рассматривается неявный метод 4-го порядка точности, или же 4-х стадийный методом Гаусса. Его особенности — необычная таблица Бутчера и высокий порядок аппроксимации.

1. Теоретическая часть

Рассмотрим начальную задачу

$$y'(x) = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0,$$

где f дифференцируема столько раз, сколько потребуется.

Пусть s — натуральное число. Пусть заданы числа c_i, b_j и a_{ij}, где $i, j = 1,...,s$. (*Неявным*) *s-стадийным методом Рунге — Кутты* (сокращённо РК) называют [2, 4–6] следующее правило вычисления приближения y_1 к точному значению $y(x_0 + h)$ решения y начальной задачи в точке $x_0 + h$:

$$k_i = f\left(x_0 + hc_i, y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j\right), \quad i = 1,...,s, \tag{1}$$

$$y_1 = y_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j k_j. \tag{2}$$

В общем случае набор равенств (1) представляет собой систему уравнений относительно k_i. Обычно эта система может быть решена при малых h методом последовательных приближений, поскольку в правой части формулы (1) перед суммой k_j стоит малый множитель h.

Если $a_{ij} = 0$ при $i \le j$, метод называют *явным*. В этом случае числа k_i можно найти из уравнений (1) последовательно. Если $a_{ij} = 0$ только при $i < j$, то метод называют *диагонально неявным*. В этом случае числа k_i можно снова находить последовательно, решая при этом нелинейные уравнения, содержащие только одну неизвестную. Нас интересуют *неявные* методы, когда все или почти все числа a_{ij} могут оказаться ненулевыми.

Неявные методы РК обладают важным преимуществом по сравнению с явными: их область устойчивости может содержать всю левую полуплоскость. Только такие методы подходят для решения произвольных систем ДУ.

Параметры c_i, b_j и a_{ij} метода РК принято располагать в виде табл. 1, называемой *таблицей Бутчера*.

Таблица 1

Таблица Бутчера метода РК

c_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	…	$a_{1,s-1}$	$a_{1,s}$
c_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	…	$a_{2,s-1}$	$a_{2,s}$
…	…	…	…	…	…
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	…	$a_{s,s-1}$	$a_{s,s}$
	b_1	b_2	…	b_{s-1}	b_s

Очевидно, таблица Бутчера содержит в себе всю информацию о методе Рунге — Кутты.

Составлена компьютерная программа в пакете «Математика» [3,7], реализующая произвольный метод РК. Она содержит следующее: выбор шага h, процедуру решения системы уравнений (1), подстановку k_j в уравнение (2) и дальнейшее последовательное нахождение $y_1, y_2, ..., y_n$.

Важным критерием качества метода РК является порядком аппроксимации. Говорят, что метод РК имеет *порядок аппроксимации* m, если для любых достаточно гладких дифференциальных уравнений имеем

$$y_1 - y(x_0 + h) = O(h^{m+1}) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

где $y(x_0 + h)$ — значение точного решения начальной задачи, а y_1 — значение приближенного решения в точке $x_0 + h$. Эквивалентное требование — ряды Тейлора по h приближенного y_1 и точного y решений совпадают до членов порядка h^m.

В первую очередь мы интересуемся гауссовыми неявными методами РК [3, 4]. Метод РК называется *гауссовым* или методом Гаусса, если он строится на основе квадратурной формулы Гаусса.

Согласно **теореме** о *гауссовых* методах РК [2, 4]: *для любого числа стадий метода РК ($s \ge 2$) существует единственный s-стадийный метод Гаусса, имеющий порядок аппроксимации* $2s$.

В настоящей работе в качестве конкретного примера рассматривается *4-х стадийный метод Гаусса*, представленный в табл. 2.

Таблица 2

4-х стадийный метод Гаусса

$\frac{1}{2}-\omega_2$	ω_1	$\omega_1'-\omega_3+\omega_4'$	$\omega_1'-\omega_3-\omega_4'$	$\omega_1-\omega_5$
$\frac{1}{2}-\omega_2'$	$\omega_1-\omega_3'+\omega_4$	ω_1'	$\omega_1'-\omega_5'$	$\omega_1-\omega_3'-\omega_4$
$\frac{1}{2}+\omega_2'$	$\omega_1+\omega_3'+\omega_4$	$\omega_1'+\omega_5'$	ω_1'	$\omega_1+\omega_3'-\omega_4$
$\frac{1}{2}+\omega_2$	$\omega_1+\omega_5$	$\omega_1'+\omega_3+\omega_4'$	$\omega_1'+\omega_3-\omega_4'$	ω_1
	$2\omega_1$	$2\omega_1'$	$2\omega_1'$	$2\omega_1$

где ω_i принимают следующие значения:

$$\omega_1=\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{30}}{144}, \qquad \omega_1'=\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{30}}{144},$$

$$\omega_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}, \qquad \omega_2'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}},$$

$$\omega_3=\omega_2\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{30}}{24}\right), \qquad \omega_3'=\omega_2'\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{30}}{24}\right),$$

$$\omega_4=\omega_2\left(\frac{1}{21}+\frac{5\sqrt{30}}{168}\right), \qquad \omega_4'=\omega_2'\left(\frac{1}{21}-\frac{5\sqrt{30}}{168}\right),$$

$$\omega_5=\omega_2-2\omega_3, \qquad \omega_5'=\omega_2'-2\omega_3'.$$

Средняя часть таблицы Бутчера (то есть коэффициенты a_{ij}) в десятичных дробях для этого метода имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0.0869637 & -0.0266042 & 0.0126275 & -0.00355515 \\ 0.188118 & 0.163036 & -0.0278804 & 0.0067355 \\ 0.167192 & 0.353953 & 0.163036 & -0.0141907 \\ 0.177483 & 0.523978 & 0.352677 & 0.0869637 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что здесь есть отрицательные числа. Кроме того, числа над диагональю на порядок меньше чисел под диагональю. Данный метод имеет порядок аппроксимации $s=8$.

2. Численный пример

Рассматривается система ДУ

$$\begin{cases} z_1'(x)=2z_1(x)-z_2(x), \\ z_2'(x)=-z_1(x)+3z_2(x), \\ z_3'(x)=xz_3(x) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$z_1(0)=0.25, \quad z_2(0)=0.5, \quad z_3(0)=1.$$

Нам неизвестно аналитическое решение этой начальной задачи, но команда *NDSolve* пакета «Математика» [3,7] способна приближенно решить данную систему и изобразить полу-

ченное решение на графике (рис.1) в виде нескольких кривых. Это решение мы используем как точное для сравнения с ним нашего результата. Для сравнения к полученным графикам добавим поточечные значения решения с шагом $h = 0.1$, найденные путем применения *4-х стадийного метода Гаусса*.

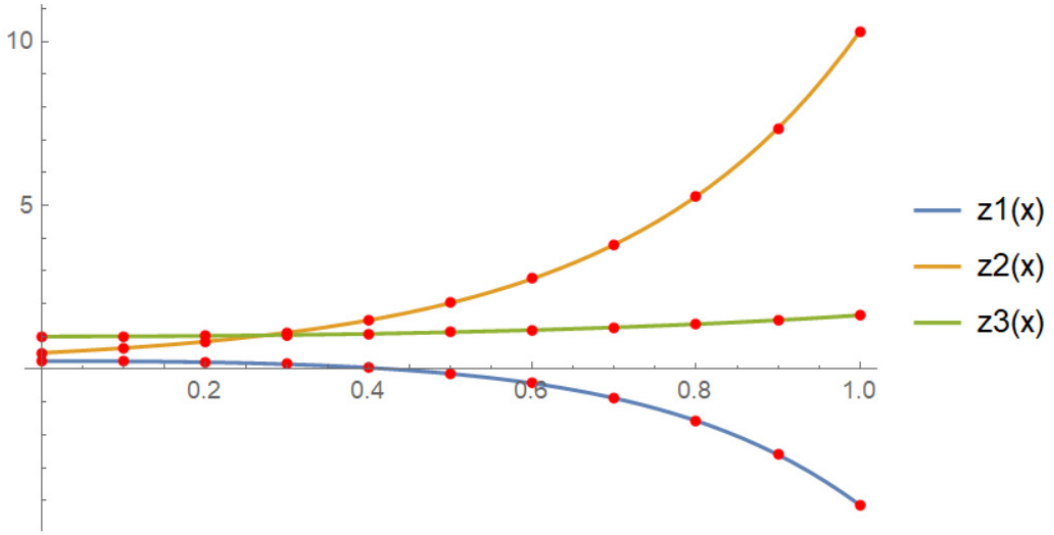


Рис. 1. График решения

Визуально различий не видно, поэтому была составлена сравнительная таблица погрешности. Ниже (табл.3) она приведена только для второй кривой, то есть для $z_2(x)$.

Таблица 3

Сравнительная таблица погрешности решения для $z_2(x)$

Значения в узлах для $z_2(x)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	…
Решения:						
NDSolve	0.5	0.646029	0.845056	1.1186	1.49734	…
Метод РК	0.25	0.646029	0.845056	1.1186	1.49734	…
Погрешность	0.	1.01926×10^{-9}	4.04114×10^{-8}	1.22886×10^{-7}	1.92038×10^{-7}	…

…	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
…	2.02503	2.76423	3.80438	5.27352	7.35504	10.31174
…	2.02503	2.76423	3.80438	5.27353	7.35505	10.31175
…	-1.75367×10^{-8}	-2.84229×10^{-7}	-2.12412×10^{-6}	-2.44437×10^{-7}	-8.43124×10^{-6}	2.08037×10^{-6}

Все вычисления проводились в пакете «Математика» [3, 7].

Заключение

Таким образом, численный эксперимент показывает, что программа работает правильно.

Литература

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – Второе изд. – М. –Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. – 848 с.

ченное решение на графике (рис.1) в виде нескольких кривых. Это решение мы используем как точное для сравнения с ним нашего результата. Для сравнения к полученным графикам добавим поточечные значения решения с шагом $h = 0.1$, найденные путем применения *4-х стадийного метода Гаусса*.

Визуально различий не видно, поэтому была составлена сравнительная таблица погрешности. Ниже (табл.3) она приведена только для второй кривой, то есть для $z_2(x)$.

Таблица 3

Сравнительная таблица погрешности решения для $z_2(x)$

Значения в узлах для $z_2(x)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	…
Решения:						
NDSolve	0.5	0.646029	0.845056	1.1186	1.49734	…
Метод РК	0.25	0.646029	0.845056	1.1186	1.49734	…
Погрешность	0.	1.01926×10^{-9}	4.04114×10^{-8}	1.22886×10^{-7}	1.92038×10^{-7}	…

…	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
…	2.02503	2.76423	3.80438	5.27352	7.35504	10.31174
…	2.02503	2.76423	3.80438	5.27353	7.35505	10.31175
…	-1.75367×10^{-8}	-2.84229×10^{-7}	-2.12412×10^{-6}	-2.44437×10^{-7}	-8.43124×10^{-6}	2.08037×10^{-6}

Все вычисления проводились в пакете «Математика» [3, 7].

Заключение

Таким образом, численный эксперимент показывает, что программа работает правильно.

Литература

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – Второе изд. – М. –Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. – 848 с.

2. *Курбатов В. Г.* Конструирование методов Рунге — Кутты: учебное пособие / В. Г. Курбатов. – Второе изд. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. – 98 с.

3. *Курбатов В. Г.* Пакет «Математика» в прикладных научных исследованиях: учебное пособие / В. Г. Курбатов, В. Е. Чернов. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. –240 с.

4. *Хайрер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1999. – 685 с.

5. *Хайрер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1990. – 685 с.

6. *Butcher J. C.* Implicit Runga–Kutta processes / John Charles Butcher // Math. Comp. – 1964. – Vol. 18. – P. 50–64.

7. *Wolfram S.* The Mathematica book / S. Wolfram. – Fifth edition. – New York : Wolfram Media, 2003. – 1488 p.

УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ ПО ЛУЧУ

А. А. Плетнев

Воронежский государственный университет

Аннотация. Изучается задача о распределении поля температуры с переменным коэффициентом внутренней теплопроводности в области, представляющей собой плоскость с разрезом по лучу, моделирующую неоднородный материал с трещиной. Рассматривается стационарный случай. Исходная краевая задача сводится к обобщенной задаче. Строится решение обобщенной задачи как свёртка фундаментального решения и слагаемых правой части. Далее строится решение исходной задачи как сумма двух потенциалов: поверхностного стационарного потенциала простого слоя и поверхностного стационарного теплового потенциала двойного слоя. Каждый потенциал изучается отдельно. Доказывается выполнение краевых условий на разность температур и тепловых потоков при переходе через трещину.

Ключевые слова: краевая задача, стационарное уравнение теплопроводности, условия типа трансмиссии, материал с трещиной, трещина по лучу, задача теплопроводности, граничные условия, интегральный вид решения, уравнение в частных производных, уравнение математической физики.

Введение

Изучается задача о распределении поля температуры с переменным коэффициентом внутренней теплопроводности в области, представляющей собой плоскость с разрезом по лучу, моделирующую неоднородный материал с трещиной. Областью, в которой рассматривается задача, является плоскость Ox_1x_2 с разрезом $l = \{x \mid x_2 = \pm 0;\ x_1 \in [-1;\ \infty)\}$, описывающим трещину по отрезку $[-1; \infty)$ оси абсцисс.

Рассматривается случай стационарного распределения тепла, если вектор направления изменения неоднородности материала направлен под углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$ к положительной полуоси абсцисс.

Рассматриваемое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + k\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \tag{1}$$

Граничные условия заданы следующим образом

$$u(x_1, +0) - u(x_1, -0) = q_0(x_1); \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x_1, +0)}{\partial x_2} + ku(x_1, +0) - \frac{\partial u(x_1, -0)}{\partial x_2} - ku(x_1, -0) = q_1(x_1);\ x_1 \in [-1; \infty). \tag{3}$$

1. Изучение обобщенной задачи

Лемма 1. *Решение задачи (1)–(3)* $u(x_1, x_2)$ *является решением обобщенной задачи в пространстве* $D'(\mathbb{R}^2)$.

$$\Delta u(x) + k\frac{\partial u}{\partial x_2} = q_1(x_1) \cdot \delta_{[-1,\infty)} + q_0(x_1) \cdot \frac{\partial \delta_{[-1,\infty)}}{\partial x_2}. \tag{4}$$

Лемма 2. *Фундаментальным решением оператора* $\Delta + k\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ *в* $\mathbb{R}^2$ *является функция* $E(x_1, x_2)$, *заданная равенством* $E(x_1, x_2) = -\dfrac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{k}{2}x_2} \cdot K_0\left(\dfrac{k}{2}|x|\right)$.

Теорема 1. *Пусть функции* $q_i(x_1)$, $i = 0,1$, *принадлежат пространству* $D'(\mathbb{R}^2)$ *и* $\operatorname{supp} q_i \in [-1;\infty)$, $i = 1;2$. *Функция* $E(x_1, x_2)$ *из* $S'(\mathbb{R}^2)$ — *фундаментальное решение оператора* $\Delta + k\dfrac{\partial}{\partial x_2}$. *Тогда решение обобщённой задачи (4) существует в* $D'(\mathbb{R}^2)$ *и представимо следующим образом:*

$$u(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) * q_1(x_1)\delta_{[-1,\infty)} + E(x_1, x_2) * \frac{\partial q_0(x_1)\delta_{[-1,\infty)}}{\partial x_2}. \tag{5}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение обобщённой задачи (4) представимо в виде*

$$u(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2) + u_0(x_1, x_2), \tag{6}$$

где

$$u_1(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) * q_1(x_1)\delta_{[-1,\infty)} \text{ —} \tag{7}$$

поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя;

$$u_0(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) * \frac{\partial q_0(x_1)\delta_{[-1,\infty)}}{\partial x_2} \text{ —} \tag{8}$$

поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя.

2. Стационарные потенциалы

Утверждение 1. *Пусть функция* $q_1(x_1)$ *принадлежит множеству функций* $C^2[-1,\infty)$, *функции* $q_1(x_1)$, $q_1'(x_1)$, $\int\limits_{-1}^{\infty} q_1(\sigma_1)d\sigma_1$ *ограничены.*

Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя представим в виде

$$u_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}x_2} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(\sigma_1)d\sigma_1 \tag{9}$$

и при $x_1 \in (-1;\infty)$ *по непрерывности выполнены условия*

$$u_1(x_1, +0) - u_1(x_1, -0) = 0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1(x_1, -0)}{\partial x_2} - ku_1(x_1, -0) + ku_1(x_1, +0) = q_1(x_1). \tag{11}$$

Если дополнительно потребовать выполнение равенства $q_1(\pm 1) = 0$, *то условия (10), (11) выполняются и в точке* $x_1 = -1$ *по непрерывности. Кроме того, функция* $u_1(x_1, x_2)$ *принадлежит множеству функций* $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus l)$.

Утверждение 2. *Пусть функция* $q_0(x_1)$ *принадлежит множеству функций* $C^2[-1,\infty)$, *функции* $q_0(x_1)$, $q_0'(x_1)$ *ограничены.*

Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя представим в виде

$$u_0(x_1, x_2) = \frac{k}{4\pi}\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}x_2} K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2}\right) \frac{x_2 q_0(\sigma_1)}{\sqrt{x_2^2 + (x_1-\sigma_1)^2}} d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{k}{4\pi}\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}x_2} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_0(\sigma_1)d\sigma_1. \tag{12}$$

и при $x_1 \in (-1, N)$, N *некоторое большое число, по непрерывности выполнено условие*

$$u_0(x_1, +0) - u_0(x_1, -0) = q_0(x_1); \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_0(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_0(x_1, -0)}{\partial x_2} + k u_0(x_1, +0) - k u_0(x_1, -0) = 0. \tag{14}$$

Условия выполнены в точке $x_1 = -1$ *и при* $x_1 \to \infty$ *в смысле главного значения. Кроме того, потенциал* $u_0(x_1, x_2)$ *принадлежит множеству функций* $C^\infty(R^2 \setminus l)$.

3. Решение исходной задачи

Теорема 2. *Пусть функции* $q_i(x_i)$, $i = 0,1$, *принадлежат множеству функций* $C^2[-1, \infty)$ *и ограничены,* $q_i'(x_i), i = 0,1, \int\limits_{-1}^{\infty} q_i(\sigma_1) d\sigma_1$ *также ограничены. Тогда решение задачи (1)–(3) имеет вид*

$$u = -(2\pi)^{-1} \int\limits_{-1}^{\infty} e^{-0,5kx_2} K_0\left(0,5k\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(\sigma_1) d\sigma_1 +$$

$$+ k(4\pi)^{-1} \int\limits_{-1}^{\infty} e^{-0,5kx_2} K_1\left(0,5k\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) \frac{x_2 q_0(\sigma_1)}{\left(x_2^2 + (x_1 - \sigma_1)^2\right)^{0,5}} d\sigma_1 +$$

$$+ k(4\pi)^{-1} \int\limits_{-1}^{\infty} e^{-0,5kx_2} K_0\left(0,5k\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_0(\sigma_1) d\sigma_1. \tag{15}$$

При $x_1 \in (-1; N)$, *где* N *некоторое большое число, по непрерывности выполнены условия (2)–(3). В точке* $x_1 = -1$ *и при* $x_1 \to \infty$ *условия выполнены в смысле главного значения.*

Функция $u(x_1, x_2)$ *принадлежит множеству функций* $C^\infty(\mathbb{R}^2 / l)$.

Литература

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 527 с.

2. *Глушко А. В.* Уравнения математической физики: учебник / А. В. Глушко, А. Д. Баев, А. С. Рябенко. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2011. – 520 с.

3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Наука, 1977. – 456 с.

4. *Глушко А. В.* Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестник ВГУ серия математика физика. – 2010. – № 2. – С. 47–50.

5. *Логинова Е. А.* Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вестник СПбГУ серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2012. – Вып. 1. – С. 40 – 47.

УДК 517.95

ПРЕЗЕНТАЦИЯ УЧЕБНИКА «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

К. Б. Сабитов

Стерлитамаский филиал Уфимского университета науки и технологий

Аннотация. В книге дан вывод уравнений математической физики, приведены классические постановки основных задач, аналитические методы их решения. Представлены обобщенные по Соболеву решения краевых задач для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов, вариационный и галеркинский методы решения краевых задач, а также методы интегральных преобразований, возмущений, автомодельных решений и конечных разностей решения краевых задач уравнений математической физики. В отличие от известных учебников данное пособие содержит новый материал по уравнениям смешанного типа, моделирующим околозвуковые течения. Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению ВПО 010400 «Прикладная математика и информатика».

Ключевые слова: основные уравнения математической физики, начальная, начально-граничные, граничные задачи, методы Римана, Грина, разделения переменных, интегральных уравнений, интегральных преобразований, численные, уравнения смешанного типа, задачи Трикоми, Дирихле.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию 8
Предисловие ко второму изданию 9
Список некоторых обозначений и сокращений 13
Глава 1. Постановка основных задач для уравнений математической физики 15
§ 1. Дифференциальные уравнения в частных производных. Основные понятия 15
§ 2. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка основных начально-граничных задач 24
§ 3. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка основных начально-граничных задач 30
§ 4. Задачи, приводящиеся к уравнениям Пуассона и Лапласа. Постановка основных граничных задач 36
§ 5. Задача Коши. Характеристики. Теорема Коши — Ковалевской 38
§ 6. Понятие о корректно поставленной краевой задаче для дифференциальных уравнений. Примеры некорректных краевых задач 44
Глава 2. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка 49
§ 7. Типы линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка 49
§ 8. Приведение к каноническому виду дифференциального уравнения второго порядка от двух независимых переменных 55
Глава 3. Уравнения гиперболического типа 64
§ 9. Первая начально-граничная задача для уравнения колебаний струны 64
1. Постановка задачи. Энергетическое неравенство. Единственность и устойчивость решения (64). 2. Существование решения (71).
§ 10. Общие замечания о методе разделения переменных 88
1. Замкнутость и полнота ортогональных систем функций (88) 2. Вторая и третья началь-

но-граничные задачи для уравнения струны (90). 3. Начально-граничная задача для более общего уравнения гиперболического типа (92).
§ 11. Задача Дирихле для уравнения струны 100
§12. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера 108
1. Постановка задачи Коши для уравнения струны (108). 2. Построение общего решения уравнения струны (108). 3. Построение решения задачи Коши (110). 4. Физическая интерпретация решения задачи Коши (114).
§ 13. Задачи Гурса и Дарбу для уравнения струны 116
§ 14. Задача Коши для трехмерного и двумерного волновых уравнений 121
1. Задача Коши для трехмерного однородного волнового уравнения. Формула Пуассона. Принцип Гюйгенса (121). 2. Задача Коши для трехмерного неоднородного волнового уравнения. Формула Кирхгофа (130). 3. Задача Коши для двумерного волнового уравнения. Метод спуска (134). 4. Энергетическое неравенство. Непрерывная зависимость решения. Единственность решения (136).
§ 15. Задачи Коши и Гурса для общего линейного гиперболического уравнения. Метод последовательных приближений 141
1. Задача Коши (141) 2. Задача Гурса (147).
§ 16. Метод Римана для построения решения задач Коши и Гурса 151
1. Понятие сопряженного дифференциального оператора. Формула Грина (151). 2. Метод Римана (151).
§ 17. Решение задачи Коши методом Римана для телеграфного уравнения 156
1. Вывод телеграфного уравнения (156). 2. Постановка задачи Коши (159). 3. Построение функции Римана (160). 4. Построение решения задачи Коши (164).
§ 18. Решение задачи Коши методом Римана для вырождающегося гиперболического уравнения 163
1. Постановка задачи Коши (163). 2. Построение функции Римана (164). 3. Построение решения задачи Коши (167).
Глава 4. Уравнения эллиптического типа 172
§ 19. Общие сведения об эллиптических уравнениях 172
§ 20. Гармонические функции. Примеры. Теорема Кельвина 174
§ 21. Внутренний принцип экстремума гармонических функций. Единственность и устойчивость решения задачи Дирихле 180
§ 22. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круговых областях. Формула Пуассона 184
1. Решение задачи Дирихле в круговых областях (184). 2. Формула Пуассона. Обобщенное решение задачи Дирихле (190).
§ 23. Свойства гармонических функций 193
§ 24. Граничный принцип экстремума для гармонических функций. Задачи Неймана и Пуанкаре для уравнения Пуассона 204
§ 25. Внешние граничные задачи для уравнения Лапласа 211
§ 26. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом Грина 217
1. Формула Грина оператора Лапласа. Интегральное представление решения уравнения Пуассона (217). 2. Функция Грина задачи Дирихле и ее свойства (222). 3. Решение задачи Дирихле в произвольной области методом Грина (228). 4. Построение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и в полукруге (235). 5. Построение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре и в полушаре (238). 6. Метод конформных отображений (240).

§ 27. Решение задачи Неймана для уравнения Пуассона методом Грина 244
1. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана (244). 2. Функция Грина задачи Неймана (245). 3. Построение функции Грина задачи Неймана в шаре и вне шара (251).
§ 28. Решение граничных задач для уравнения Лапласа методами потенциала и интегральных уравнений 257
1. Потенциалы объема, простого и двойного слоев (258). 2. Поверхности Ляпунова (261). 3. Свойства потенциала двойного слоя (264). 4. Свойства потенциала простого слоя (267). 5. Интегральные уравнения Фредгольма (271). 6. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям (273).
§ 29. Уравнение Гельмгольца 280
1. Физическая интерпретация решения (280). 2. Фундаментальные решения уравнения Гельмгольца (281). 3. Интегральное представление решения. Функция Грина (283). 4. Внутренние задачи для уравнения Гельмгольца (286). 5. Внешние задачи. Принцип излучения (290).
Глава 5. Уравнения параболического типа 299
§ 30. Первая начально-граничная задача для уравнения теплопроводности 299
1. Постановка задачи. Принцип экстремума. Единственность и устойчивость решения (299). 2. Решение задачи методом разделения переменных (302). 3. Начально-граничная задача для уравнения теплопроводности с обратным направлением времени (306). 4. Функции Грина первой начально-граничной задачи (307). 5. Понятие δ-функции Дирака (308). 6. Обобщенное решение первой начально-граничной задачи (310).
§ 31. Распространение тепла в бесконечном стержне (задача Коши) 312
1. Постановка задачи Коши. Единственность решения (312). 2. Существование решения задачи Коши (314). 3. Физический смысл фундаментального решения (319).
Глава 6. Обобщенные решения по Соболеву краевых задач для уравнений математической физики 322
§ 32. Вспомогательные сведения из функционального анализа 322
1. Необходимые понятия и утверждения (322). 2. Средние функции. Обобщенные производные (325). 3. Пространство Соболева и его свойства (332).
§ 33. Обобщенные решения основных граничных задач для эллиптического уравнения второго порядка 340
§ 34. Обобщенные решения начально-граничных задач для гиперболического уравнения второго порядка 347
1. Постановка начально-граничных задач (347). 2. Задача на собственные значения для эллиптического оператора 2-го порядка (348). 3. Вариационные свойства собственных значений и функций спектральной задачи (356). 4. Построение обобщенного решения первой начально-граничной задачи для однородного гиперболического уравнения (357). 5. Построение обобщенного решения первой начально-граничной задачи для неоднородного гиперболического уравнения (361).
§ 35. Обобщенные решения начально-граничных задач для параболического уравнения второго порядка 363
§ 36. Вариационный метод решения граничных задач для эллиптических уравнений 368
1. Задача Дирихле (368). 2. Задача Неймана и третья граничная задача (372). 3. Метод Ритца (373).
§ 37. Метод Галеркина решения краевых задач для уравнений математической физики 377
1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона (378). 2. Начально-граничная задача для уравнения теплопроводности (379). 3. Начально-граничная задача для волнового уравнения (381).
Глава 7. Уравнения смешанного типа 386
§38. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе. Единственность решения 387

1. Постановка задачи Трикоми. Принцип экстремума. Единственность решения задачи Трикоми (387). 2. Метод Трикоми доказательства единственности решения задачи (390).
§39. Существование решения задачи Трикоми 391
§40. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева — Бицадзе в прямоугольной области 401
1. Постановка задачи (401). 2. Единственность решения (402). 3. Существование решения задачи (405). 4. устойчивость решения (408).
§41. Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа 409
1. Постановка задачи (409). 2. Единственность решения (410). 3. Существование и устойчивость решения задачи (413).
Глава 8. Другие методы решения краевых задач для уравнений математической физики 417
§42. Метод интегральных преобразований 417
1. Преобразования Лапласа, Фурье и Меллина (417). 2. Применение интегральных преобразований к решению краевых задач (428).
§43. Метод возмущений 436
§44. Метод подобия, автомодельные решения 439
§45. Метод конечных разностей или сеток 445
Приложение. Общие сведения о специальных функциях 459
Введение 459
§1. Эйлеровы гамма- и бета-функции 461
1. Свойства гамма-функции (462). 2. Свойства бета-функции (466). 3. Логарифмическая производная гамма-функции (468).
§ 2. Теорема существования и единственности решения начальной задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка 469
§3. Поведение решений дифференциальных уравнений второго порядка в особой точке 472
§ 4. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя 474
§5. Модифицированные функции Бесселя 495
§ 6. Гипергеометрическое уравнение. Функции Гаусса 500
§ 7. Ортогональные многочлены 512
1. Полиномы Лежандра и их свойства (512). 2.Присоединенные функции Лежандра и их свойства (522). 3.Многочлены Эрмита и их свойства (525). 4. Многочлены Лагерра и их свойства (531).5. Многочлены Якоби и Чебышева и их свойства (537).
§8. Сферические и шаровые функции. Свойства сферических функций 544
Задачи для самостоятельной работы 550
Список литературы 566

По вопросам приобретения обращаться в издательство «Лаборатория знаний», г. Москва, телефон 8(499)157-5272; e-mail: info@pilotLZ.ru

УДК 517.926.7

ОБ УПРАВЛЕНИИ СУЩЕСТВЕННЫМИ СЧЕТНЫМИ СПЕКТРАМИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. Х. Сташ, А. А. Панеш

Адыгейский государственный университет

Аннотация. Установлено существование двумерной линейной однородной дифференциальной системы с непрерывными ограниченными на неотрицательной полуоси коэффициентами, спектры всех показателей колеблемости и блуждаемости которой совпадают с любым наперед заданным замкнутым ограниченным счетным множеством неотрицательных чисел с единственной нулевой предельной точкой. Более того, для любого ненулевого решения этой системы все показатели колеблемости и блуждаемости совпадают между собой, причем каждое их значение является метрически и топологически существенным.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, колеблемость решения, число нулей функции, сильный показатель колеблемости, слабый показатель колеблемости, сильный показатель блуждаемости, слабый показатель блуждаемости, характеристическая частота, показатель Ляпунова.

Введение

Для заданного $n \in N$ обозначим через M^n множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in R^n,\ t \in R_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными ограниченными* коэффициентами. В дальнейшем матрицу A коэффициентов будем отождествлять с задаваемой ею системой. Множество всех ненулевых решений системы $A \in M^n$ обозначим через $S_*(A)$ и положим

$$S^n = \bigcup_{A \in M^n} S_*(A).$$

Для показателей колеблемости и блуждаемости случай $n = 1$ допустим, но бессодержателен, поскольку на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка все показатели равны нулю. Спектры (множество значений на ненулевых решениях) показателей колеблемости и блуждаемости линейного однородного уравнения второго порядка состоят ровно из одного неотрицательного числа [1], но зато спектры показателей двумерных систем могут достигать мощности континуума [2, 3]. В последнем случае принципиально невозможно добиться того, чтобы сразу все значения какого-либо показателя оказались существенными.

Спектры показателей колеблемости и блуждаемости автономных дифференциальных систем полностью описаны в работах [1, 4, 5]. В докладах [6, 7] И. Н. Сергеева было установлено, что спектры показателей колеблемости и блуждаемости любой автономной системы содержат только одно существенное значение.

Возможность реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости и блуждаемости двумерной системы продемонстрирована в работах [8, 9], а управление счетными *рациональными* существеннными спектрами — в [10, 11]. В связи с этим возникает вопрос о возможности расширения последнего класса спектров рассматриваемых показателей.

1. Показатели колеблемости и блуждаемости

Сначала дадим основные определения.

Определение 1 [12]. Скажем, что в точке $t>0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y: R_+ \to R$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1, 13]. Для вектора $m \in R^n_* \equiv R^n \setminus \{0\}$ и вектор-функции $x \in S^n$ обозначим:

$v^-(x,m,t)$ — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$v^{\sim}(x,m,t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$v^0(x,m,t)$ — число *нулей* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$v^+(x,m,t)$ — число *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$v^*(x,m,t)$ — число *гиперкорней* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$, где в процессе подсчета этого количества каждый некратный корень считается ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

Определение 3 [1, 14]. *Верхние* (*нижние*) *сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции $x \in S^n$ при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in R^n_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \qquad \left(\check{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in R^n_*} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right),$$

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in R^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in R^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right).$$

Замечание 1. Для любой функции $x \in S^n$ выполнены соотношения:

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(x) \le \check{\nu}^\alpha_\bullet(x) \le \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x), \quad \hat{\nu}^\alpha_\circ(x) \le \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x), \quad \check{\nu}^\alpha_\circ(x) \le \hat{\nu}^\alpha_\circ(x), \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *.$$

Определение 4 [1, 14]. Для функции $u \in C^1(R_+, R^n_*)$ и числа $t>0$ введем *вариацию следа*

$$P(u,t) \equiv \int_0^t \left|\frac{\partial}{\partial\tau} e(u,\tau)\right| d\tau, \qquad e(u,\tau) \equiv \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|},$$

функции u за время от 0 до t, причем ситуацию, когда функция u имеет на отрезке $[0,t]$ хотя бы один нуль, считаем *вырожденной* и кладем по определению $P(u,t) = +\infty$.

Замечание 2. Геометрический смысл вариации следа функции u — это полная *длина пути* на единичной сфере конца вектора $e(u,\tau)$ при $\tau \in [0,t]$. Отсутствие у функции u нулей гарантирует, что вариация ее следа принимает только конечные значения (как интеграл $P(u,t)$ от непрерывной функции на отрезке).

Определение 5 [1,14]. *Нижние* (*верхние*) *слабый* и *сильный показатели блуждаемости* функции $x \in S^n$ определим формулами

$$\check{\rho}_\circ(x) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{L\in AutR^n} \frac{1}{t}P(Lx,t), \qquad \hat{\rho}_\circ(x) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{L\in AutR^n} \frac{1}{t}P(Lx,t),$$

$$\check{\rho}_\bullet(x) \equiv \inf_{L\in AutR^n} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}P(Lx,t), \qquad \hat{\rho}_\bullet(x) \equiv \inf_{L\in AutR^n} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}P(Lx,t),$$

где $AutR^n$ — множество всех невырожденных линейных операторов $L: R^n \to R^n$.

Замечание 3. Для любой функции $x \in S^n$ выполнены соотношения:

$$\check{\rho}_\circ(x) \le \hat{\rho}_\circ(x) \le \hat{\rho}_\bullet(x), \qquad \check{\rho}_\bullet(x) \le \hat{\rho}_\bullet(x), \qquad \check{\rho}_\circ(x) \le \check{\rho}_\bullet(x).$$

Для произвольной вектор-функций $z \in C^1(E, R^2_*)$ (E — либо отрезок вида $[0,T]$, либо полуось R_+) однозначно определим функцию $\phi_z: E \to R$ соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|\left(\cos\phi_z(t), \sin\phi_z(t)\right)^T = z(t), \quad t \in E, \ \phi_z \in C^1(E).$$

Вариацию следа функции z за время от 0 до t можно вычислять по формуле

$$P(z,t) = \int_0^t \left|\dot{\phi}_z(\tau)\right| d\tau,$$

так как

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau} e(z,\tau)\right| = \left|\frac{d}{d\tau}\left(\cos\phi_z(t), \sin\phi_z(t)\right)^T\right| = \left|\left(-\sin\phi_z(t), \cos\phi_z(t)\right)^T \dot{\phi}_z(\tau)\right| = \left|\dot{\phi}_z(\tau)\right|.$$

Определение 6 [14]. Для функции $x \in S^n$ условимся о следующем:

1) если значение некоторого верхнего (с крышечкой) показателя колеблемости или блуждаемости совпадает со значением одноименного нижнего (с галочкой) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки;

2) если значение некоторого слабого (с пустым кружочком) показателя колеблемости или блуждаемости совпадает со значением одноименного сильного (с полным кружочком) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще.

2. Формулировка основного результата

Определение 7 [6, 7]. Множество всех значений показателя $\chi : S_*(A) \to R_+$ назовём *спектром* этого показателя системы $A \in M^n$, причем значение $a \in \chi(S_*(A))$ назовем:

1) *метрически существенным*, если подмножество

$$\left\{ x(0) \,|\, x \in S_*(A), \ \chi(x) = a \right\} \subset R^n \tag{1}$$

имеет положительную меру Лебега;

2) *топологически существенным*, если подмножество (1) заполняет некоторое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра*, т. е. счетного объединения нигде не плотных подмножеств;

3) *существенным*, если оно является метрически и топологически существенным.

Через ess $\chi(S_*(A))$ обозначим множество всех *существенных значений* показателя χ для системы A и назовем его *существенным спектром* системы A.

Замечание 4. Спектр показателя χ любой системы $A \in M^n$ содержит не более чем счетное множество существенных значений.

Теорема. *Для любой последовательности* (q_k) *неотрицательных чисел, сходящейся к нулю, существует такая система* $A \in M^2$, *что справедливы равенства*

$$v^-(x) = v^\sim(x) = v^0(x) = v^+(x) = v^*(x) = \rho(x), \quad x \in S_*(A),$$

$$\chi(S_*(A)) = ess\,\chi(S_*(A)) = \left\{ q_k \,|\, k \in N \right\} \cup \left\{ 0 \right\}, \quad \chi = v^-, v^\sim, v^0, v^+, v^*, \rho.$$

Заключение

В данной работе для определенного класса счетных множеств, доказано существование двумерной линейной ограниченной дифференциальной системы, у которой спектры всех показателей колеблемости совпадают с этим множеством, причем все значения существенны. Интересным остается вопрос о возможности управления произвольным счетным существенным спектром неотрицательной полуоси какого-либо показателя колеблемости двумерной системы.

Благодарности

Исследования авторов выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074 по проекту «Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов».

Литература

1. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И. Н. Сергеев // Известия РАН. Серия математическая. – 2012. – Т. 76. – С. 149–172.

2. *Сташ А. Х.* Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот / А. Х. Сташ // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 143–144.

3. *Шишлянников Е. М.* Пример дифференциальной системы с континуальным спектром показателя блуждаемости / Е. М. Шишлянников // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. – 2017. – № 1. – С. 64–68.

4. *Бурлаков Д. С.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы / Д. С. Бурлаков, С. В. Цой // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 75–93.

5. *Сташ А. Х.* Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем / А. Х. Сташ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2019. – Т. 29, Вып. 4. – С. 558–568.

6. *Сергеев И. Н.* Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И.Н. Сергеев //Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1661–1662.

7. *Сергеев И. Н.* Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И. Н. Сергеев //Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, №11. – С. 1567–1568.

8. *Сташ А. Х.* О реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем / А. Х. Сташ, Н. А. Лобода // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 4. – С. 500–507.

9. *Шишлянников Е. М.* Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости / Е. М. Шишлянников // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. – 2017. – № 5. – С. 14–21.

10. Шишлянников Е. М. Примеры дифференциальных систем с различными спектрами показателя блуждаемости / Е. М. Шишлянников // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 11. – С. 1586–1587.

11. *Лобода Н. А.* Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем / Н. А. Лобода, А. Х. Сташ // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 6. – С. 848–850.

12. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И. Н. Сергеев // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. – 2006. – Вып. 25. – С. 249–294.

13. *Сергеев И. Н.* Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И. Н. Сергеев // Математический сборник. – 2013. – Т. 204, № 1. – С. 119–138.

14. *Сергеев И. Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И. Н. Сергеев // Математические заметки. – 2016. – Т. 99, № 5. – С. 732–751.

УДК 517.9

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА — КАПУТО ПО ВРЕМЕНИ

Е. Д. Федотов

Якутское отделение регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований»

Аннотация. В данной работе получены априорные оценки для задачи Коши для однородной системы уравнений высокого порядка в частных производных с дробной производной Герасимова — Капуто по времени.

Ключевые слова: функция Миттаг — Леффлера, дробная производная, система уравнений в частных производных, производная Герасимова — Капуто, преобразование Фурье, дробное исчисление.

Введение

Как известно, существует большое количество разных определений дробного производного которые являются обобщением производных целого порядка. В данной работе мы будем использовать определение дробного производного Герасимова — Капуто [1].

В случае $0 < \alpha < 1$ данная производная определяется следующим образом

$$\partial_{0t}^{\alpha}\varphi(t) = I_{0t}^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\varphi(t),$$

где I_{0t}^{α} является дробным интегралом Римана — Лиувилля и определятся следующим образом

$$I_{0t}^{\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau.$$

В данной работе под $(\partial_{0t}^{\alpha})^k$ стоит понимать как конкатенацию, а именно $(\partial_{0t}^{\alpha})^k = \underbrace{\partial_{0t}^{\alpha}\partial_{0t}^{\alpha}\cdots\partial_{0t}^{\alpha}\partial_{0t}^{\alpha}}_{k}$.

Так же отметим, что его можно представить как производную Джрбашяна — Нерсесяна [2] $(\partial_{0t}^{\alpha})^k = D_{0t}^{\{1,\overbrace{\alpha,\alpha,\cdots,\alpha}^{k}\}}$.

В работе R. Gorenflo и F. Mainardi [3] было показано реализуемость метода преобразования Лапласа для решения уравнений дробного порядка и важность функции Миттаг — Леффлера в дробном исчислении. Функция Миттаг — Леффлера представляется следующим рядом

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

В дальнейшем нас будут интересовать оценки данной функции, в работе А. Ю. Попова и А. М. Селедцкого [4] были получены следующие асимптотические разложения

$$\mathcal{L}_{\alpha} = \{z \in C \mid z \neq 0, |\arg z| \leq \alpha\pi\},$$

$$E_{\alpha}(z) = \begin{cases} \alpha^{-1}\exp(z^{1/\alpha}) + H_m(z) + R_m^{[1]}(z) & z \in \mathcal{L}_{\alpha} \\ H_m(z) + R_m^{[2]}(z) & z \in \mathbb{C}\setminus\mathcal{L}_{\alpha},\ z \neq 0, \end{cases}$$

где

$$H_m(z) = -\sum_{k=1}^{m}\frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)},$$

а также остатки $R_m^{[1]}(z)$ и $R_m^{[2]}(z)$ допускают оценки

$$|R_m^{[i]}(z)| \le C\,|z|^{-m-1}.$$

Обозначим за $\mathbb{C}_\alpha^+ = \{z \in \mathcal{L}_\alpha \,||\, arg\, z| < \alpha\pi/2\}$, $\mathbb{C}_\alpha^0 = \{z \in \mathcal{L}_\alpha \,||\, arg\, z| = \alpha\pi/2\}$ и $\mathbb{C}_\alpha^- = \{z \in \mathcal{L}_\alpha \mid \alpha\pi/2 < |arg\, z| \le \alpha\pi\}$. Также пусть $t \in \mathbb{R}_+$ и $0 < \alpha < 1$

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \begin{cases} \alpha^{-1}\exp(\lambda^{1/\alpha}t) + H_m(\lambda t^\alpha) + R_m^{[1]}(\lambda t^\alpha), & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^+,\ Re(\lambda^{1/\alpha}) > 0, \\ \alpha^{-1}\exp(i\,|\lambda|^{1/\alpha}\,t) + H_m(\lambda t^\alpha) + R_m^{[1]}(\lambda t^\alpha), & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^0,\ Re(\lambda^{1/\alpha}) = 0, \\ \alpha^{-1}\exp(\lambda^{1/\alpha}t) + H_m(\lambda t^\alpha) + R_m^{[1]}(\lambda t^\alpha), & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^-,\ Re(\lambda^{1/\alpha}) < 0, \\ H_m(\lambda t^\alpha) + R_m^{[2]}(\lambda t^\alpha), & \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\alpha,\ \lambda \ne 0. \end{cases} \tag{1}$$

Откуда мы можем получить соответствующие оценки учитывая, что на нуле она ограничена

$$\left|E_\alpha(\lambda t^\alpha)\right| \le \begin{cases} C\left|\exp(\lambda^{1/\alpha}t)\right|, & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^+,\ Re(\lambda^{1/\alpha}) > 0, \\ C_1 + \dfrac{C_2(1+|\lambda|^2)^{-1/2}}{1+C_3 t^\alpha}, & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^0,\ Re(\lambda^{1/\alpha}) = 0, \\ C_1\left|\exp(\lambda^{1/\alpha}t)\right| + \dfrac{C_2(1+|\lambda|^2)^{-1/2}}{1+C_3 t^\alpha}, & \lambda \in \mathbb{C}_\alpha^-,\ Re(\lambda^{1/\alpha}) < 0, \\ \dfrac{C_1(1+|\lambda|^2)^{-1/2}}{1+C_2 t^\alpha}, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\alpha. \end{cases}$$

1. Постановка задачи и основные результаты

1.1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача Коши

$$\begin{gathered} P\left(\partial_{0t}^\alpha, D_x\right)u(t,x) = \sum_{k+|\beta|=m} A_{k,\beta}\left(\partial_{0t}^\alpha\right)^k D_x^\beta u(t,x) = 0, \quad 0 < \alpha < 1 \\ \left(\partial_{0t}^\alpha\right)^k u(t,x)\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & k = 0,\dots,m-2, \\ f(x), & k = m-1, \end{cases} \end{gathered} \tag{2}$$

где $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ — мультииндекс, $A_{k\beta}$ — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами размера $N \times N$, ∂_{0t}^α — дробная производная Герасимова — Капуто порядка α, $D_x^\beta = \partial^{|\beta|} / \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_N}^{\beta_N}$ и $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N$. При этом предполагаем, что $det(A_{m,0}) \ne 0$, откуда поделив на него получим $A_{m,0} = E$.

Решение будем искать в виде

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ixy} Z(t,y)\hat{f}(y)dy, \tag{3}$$

где $\hat{f}(y)$ образ Фурье преобразования, $f(x)$.

Тогда для матрицы $Z(t,y)$ мы получим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} P\left(\partial_{0t}^\alpha, iy\right)Z(t,y) = 0, \quad 0 < \alpha < 1 \\ \left(\partial_{0t}^\alpha\right)^k Z(t,y)\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & k = 0,\dots,m-2, \\ E, & k = m-1, \end{cases} \end{cases}$$

$$Z(t,y) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(P(i\lambda, iy)\right)^{-1} E_\alpha(i\lambda t^\alpha)d\lambda,$$

где контур Γ содержит в себе все mN корней, характеристического уравнения $det(P(\lambda, y)) = 0$.

Прямой подстановкой несложно проверить что

$$P\left(\partial_{0t}^{\alpha}, iy\right) Z(t,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} P\left(\partial_{0t}^{\alpha}, iy\right) E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha}) \left(P(i\lambda, iy)\right)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha}) d\lambda = 0,$$

$$P(i\lambda, iy) = (i\lambda)^m P(1, y/\lambda) = (i\lambda)^m (E - B), \;\; B = -\sum_{\substack{k+|\beta|=m \\ k\neq m}} A_{k,\beta} y^{\beta} / \lambda^{|\beta|},$$

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k Z(t,y)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} (i\lambda)^k \left(P(i\lambda, iy)\right)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} (i\lambda)^{k-m} \left(E + B + B^2 + \ldots\right) d\lambda.$$

Формула (3) является формальным решением задачи (2). Несложно заметить, что $P(i\lambda, iy) = (i)^m P(\lambda, y)$. Обозначим за $Q(\lambda, y) = \det(P(\lambda, y)) = \prod_{k=1}^{mN} (\lambda - \lambda_k)$, последнее равенство выполнятся так как $A_{m,0} = E$. Также в силу однородности $P(\lambda, y)$ мы получим что корни представимы в виде $\lambda_k = \mu_k |\, y\,|$, обозначим за $\eta = y/|\, y\,|$ тогда $Q(\lambda, y) = |\, y\,|^{mN} Q(\mu, \eta)$.

Далее будем предполагать, что $Q(\lambda, y)$ не имеет кратных корней. Тогда мы можем явно вычислить $Z(t, y)$ методом вычетов и получим простое выражение

$$Z(t,y) = \sum_{k=1}^{mN} (i)^{1-m} \frac{C_p^*(\lambda_k, y)}{Q_{\lambda}(\lambda_k, y)} E_{\alpha}(i\lambda_k t^{\alpha}),$$

где $C_p^*(\lambda, y)$ является союзной матрицей (транспонированная матрица алгебраических дополнений) матрицы $P(\lambda, y)$. В силу однородности $P(\lambda, y)$ мы получим

$$C_p^*(\lambda_k, y) = |\, y\,|^{m(N-1)} C_p^*(\mu_k, \eta),$$
$$Q_{\lambda}(\lambda_k, y) = |\, y\,|^{mN-1} Q_{\mu}(\mu_k, \eta),$$

или же

$$Z(t,y) = (i\,|\, y\,|)^{1-m} \sum_{k=1}^{mN} \frac{C_p^*(\mu_k, \eta)}{Q_{\mu}(\mu_k, \eta)} E_{\alpha}(i\lambda_k t^{\alpha}),$$

а также для его дробных производных по времени

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^l Z(t,y) = (i\,|\, y\,|)^{1+l-m} \sum_{k=1}^{mN} \mu_k^l \frac{C_p^*(\mu_k, \eta)}{Q_{\mu}(\mu_k, \eta)} E_{\alpha}(i\lambda_k t^{\alpha}).$$

Так как $Q_{\mu}(\mu_k, \eta) \neq 0$ и μ_k непрерывно зависит от η, $|\,\eta\,| = 1$, то $|\, Q_{\mu}(\mu_k, \eta)\,| \geq b$, также элементы матрицы $C_p^*(\mu_k, \eta)$ будут ограниченны некоторой константой. В силу (1) для того, чтобы сходился интеграл (3) предполагая, что $f(x)$ не настолько «хороший» чтобы его образ Фурье преобразования смог противостоять $\exp(C\,|\, y\,|^{1/\alpha} t)$, где $C > 0$, получим что все корни $Q(\lambda, y) = 0$ должны лежать в надлежащей области, а именно $i\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\alpha}^{+}$.

1.2. Априорные оценки

Из вышесказанного мы можем теперь найти оценки для $(\partial_{0t}^{\alpha})^k Z(t, y)$

$$\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k Z(t,y)\right| \leq C\left|y\right|^{1+k-m} \left|\sum_{k=1}^{mN} E_{\alpha}(i\lambda_k t^{\alpha})\right|.$$

Они выглядят как будто у данных оценок есть особенность при $\left|y\right| \to 0$. Уточним эту часть

$$\lim_{|y|\to 0}\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k Z(t,y) = \lim_{|y|\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \left(P(i\lambda, iy)\right)^{-1} (i\lambda)^k E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha}) d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \left(E(i\lambda)^m\right)^{-1} (i\lambda)^k E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha}) d\lambda =$$

$$= \frac{i^{1+k-m}}{(m-k)!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m-k-1} E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha})\Big|_{\lambda=0} = \frac{(t^{\alpha})^{m-k-1}}{(m-k)\Gamma(\alpha(m-k-1)+1)}.$$

Как видим при $k \le m-1$ особенностей не возникает. А при $k \ge m$ уже контурный интеграл будет равен нулю. Тогда мы можем переписать оценку для $k \le m-1$ следующем виде

$$\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} Z(t,y)\right| \le C\left(1+|y|^{2}\right)^{\frac{1+k-m}{2}} \left|\sum_{k=1}^{mN} E_{\alpha}(i\lambda_{k} t^{\alpha})\right|.$$

Оценки функции Миттаг — Леффлера зависят от сектора, в котором лежат наши λ_k. Если предположить, что $i\lambda_k \in \mathbb{C}_{\alpha}^{0}$ для любых $y \in \mathbb{R}_n$, тогда мы получим

$$\left|E_{\alpha}(i\lambda_{k} t^{\alpha})\right| \le C_1 + \frac{C_2(1+|y|^{2})^{-1/2}}{1+C_3 t^{\alpha}},$$

следовательно, для $Z(t,y)$ будет верна оценка

$$\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} Z(t,y)\right| \le C_1\left(1+|y|^{2}\right)^{\frac{1+k-m}{2}} + \frac{C_2(1+|y|^{2})^{(k-m)/2}}{1+C_3 t^{\alpha}},$$

где $C_i > 0$. Откуда для $u(t,x)$ используя равенство Парсеваля получим

$$\max_{k+|\beta|\le m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} D_x^{\beta} u(t,x)\right|^{2} dx \le C_1 \int_{\mathbb{R}_n} |f(x)|^{2} dx + \frac{C_2}{\left(1+C_3 t^{\alpha}\right)^{2}} \int_{\mathbb{R}_n} \left(1+|y|^{2}\right)^{-1} \left|\hat{f}(y)\right|^{2} dx.$$

Аналогично мы можем найти и для остальных случаев. При $i\lambda_k \in \mathbb{C}_{\alpha}^{-}$ для любых $y \in \mathbb{R}_n$,

$$\max_{k+|\beta|\le m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} D_x^{\beta} u(t,x)\right|^{2} dx \le \int_{\mathbb{R}_n} \exp\left(-C_1 |y|^{1/\alpha} t\right) \left|\hat{f}(y)\right|^{2} dy + \frac{C_2}{\left(1+C_3 t^{\alpha}\right)^{2}} \int_{\mathbb{R}_n} \left(1+|y|^{2}\right)^{-1} \left|\hat{f}(y)\right|^{2} dy,$$

и для $i\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_{\alpha}$ мы получим

$$\max_{k+|\beta|\le m-1} \int_{\mathbb{R}_n} \left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} D_x^{\beta} u(t,x)\right|^{2} dx \le \frac{C_1}{\left(1+C_2 t^{\alpha}\right)^{2}} \int_{\mathbb{R}_n} \left(1+|y|^{2}\right)^{-1} \left|\hat{f}(y)\right|^{2} dx.$$

1.3. Обсуждение результатов

Случай при $i\lambda_k \in \mathbb{C}_{\alpha}^{0}$ для любых $y \in \mathbb{R}_n$, можно с некоторой уверенностью сказать, что система является гиперболической. Так как все наши оценки являются оценками по сечению времени, мы можем оценить его дробные производные при $t = \tau_1 > 0$ и получим, что

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} u(t,x)\Big|_{t=\tau_1} = f_k^{[1]}(x),$$

$$\left|\hat{f}_k^{[1]}(y)\right| \sim \left(1+|y|^{2}\right)^{(1+k-m)/2} \left|\hat{f}(y)\right|.$$

И решая соответствующую задачу Коши, начиная уже с этого момента. Для удобства сдвинув время на τ_1 получим следующую задачу Коши

$$\begin{gathered} P\left(\partial_{0t}^{\alpha}, D_x\right) u^{[1]}(t,x) = \sum_{k+|\beta|=m} A_{k,\beta} \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} D_x^{\beta} u^{[1]}(t,x) = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \\ \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} u^{[1]}(t,x)\Big|_{t=0} = f_k^{[1]}(x),\ k = 0,\dots,m-1. \end{gathered} \tag{4}$$

Ну и чтобы получить оценки поступим следующим образом. В силу однородности нашего уравнения мы решим для каждого отдельного $f_k^{[1]}(x)$, т. е. все начальные данные равны нулю кроме одного некоторого $k = r$. Получение оценок не будет отличаться от того, как мы его получали до этого, с той лишь разницей что

$$Z_r(t,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(i\lambda\right)^{m-1-r} \left(P(i\lambda, iy)\right)^{-1} E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha}) d\lambda.$$

Откуда получим следующие оценки

$$\max_{k+|\beta|\le m-1}\int_{\mathbb{R}_n}\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta}u^{[1]}(t,x)\right|^2 dx \le C_1\sum_{r=1}^{m-1}\int_{\mathbb{R}_n}\left(1+|y|^2\right)^{m-1-r}\left|\hat{f}_r^{[1]}(y)\right|^2 dy \le C_2\int_{\mathbb{R}_n}\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy.$$

Тогда $u(t,x)$ с течением времени, в сечении по времени не становится «хуже» по x.

Дела начинают становиться страннее, в случае если $i\lambda_k \in \mathbb{C}_{\alpha}^{-}$ для любых $y \in \mathbb{R}_n$. Ведь в оценках функции Миттаг — Леффлера при таких λ_k, главным членом является его степенная часть, и убывающей экспонентой можно пренебречь. Поступим так же, как и в прошлый раз, получим задачу (4) а также

$$\left|\hat{f}_k^{[1]}(y)\right|^2 \sim \left(C_1\exp\left(-2C_2|y|^{1/\alpha}\tau_1\right)\left(1+|y|^2\right)^{1+k-m} + C_2\left(1+|y|^2\right)^{k-m}\right)\left|\hat{f}(y)\right|^2.$$

И соответственно оценки получим следующие

$$\max_{k+|\beta|\le m-1}\int_{\mathbb{R}_n}\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta}u^{[1]}(t,x)\right|^2 dx \le \sum_{r=1}^{m-1}\int_{\mathbb{R}_n}\left(C_1\exp\left(-2C_2|y|^{1/\alpha}\tau_1\right)\left(1+|y|^2\right)^{m-1-r} +$$

$$+C_3\left(1+|y|^2\right)^{m-r-2}\right)\left|\hat{f}_r^{[1]}(y)\right|^2 dy \le \int_{\mathbb{R}_n}\left(C_4\exp\left(-2C_2|y|^{1/\alpha}(\tau_1+t)\right)+$$

$$+C_5\left(1+|y|^2\right)^{-1/2}\exp\left(-2C_2|y|^{1/\alpha}t\right)+C_6\left(1+|y|^2\right)^{-1/2}\Big)\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy.$$

Продолжив также, по индукции получим для $u^{[n]}(t,x)$

$$\max_{k+|\beta|\le m-1}\int_{\mathbb{R}_n}\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta}u^{[n]}(t,x)\right|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}_n}\left(\exp\left(-2C_1|y|^{1/\alpha}t\right)+C_2\left(1+|y|^2\right)^{-1/2}\right)\times$$

$$\times\left(C_3\exp\left(-2C_1|y|^{1/\alpha}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)+C_4\left(1+|y|^2\right)^{-1/2}\right)^n\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy.$$

В силу произвольности $\tau_i > 0$ мы можем переписать его в виде

$$\max_{k+|\beta|\le m-1}\int_{\mathbb{R}_n}\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta}u^{[n]}(t,x)\right|^2 dx \le C_1\int_{\mathbb{R}_n}\left(\exp\left(-2C_1|y|^{1/\alpha}t\right)+C_2\left(1+|y|^2\right)^{-1/2}\right)\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy.$$

Откуда в конечном итоге получим, что

$$\max_{k+|\beta|\le m-1}\int_{\mathbb{R}_n}\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta}u(t,x)\right|^2 dx \le C_1\int_{\mathbb{R}_n}\left(\exp\left(-2C_2|y|^{1/\alpha}t\right)+C_3\left(1+|y|^2\right)^{-1/2}\right)\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy.$$

Тогда получили, что уравнение (2) в данном случае будет похоже на что-то параболическое. Отметим, что тут благодаря произвольности τ_i, экспоненту удержали около единички, тем самым получили, «адекватную» оценку.

Не «адекватной» оценка у нас будет в последнем рассмотренном нами случае, а именно при $i\lambda_k \in \mathbb{C}\setminus\mathcal{L}_{\alpha}$ для всех $y \in \mathbb{R}_n$. Стоит отметить что при $\alpha \to 1$ данная область исчезнет. Снова поставим задачу (4), где

$$\left|\hat{f}_k^{[1]}(y)\right| \sim \left(1+|y|^2\right)^{(k-m)/2}\left|\hat{f}(y)\right|.$$

Откуда сразу получим

$$\max_{k+|\beta|\le m-1}\int_{\mathbb{R}_n}\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta}u^{[1]}(t,x)\right|^2 dx \le C_1\int_{\mathbb{R}_n}\left(1+|y|^2\right)^{-2}\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy,$$

что уже не есть хорошо, ведь тогда оценка для $u^{[n]}(t,x)$ будет иметь вид

$$\max_{k+|\beta|\le m-1}\int_{\mathbb{R}_n}\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k D_x^{\beta}u^{[n]}(t,x)\right|^2 dx \le C_1\int_{\mathbb{R}_n}\left(1+|y|^2\right)^{-n-1}\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy.$$

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSRG-2023-0025.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. – М. : Физматлит, 2003. – 272 с.

2. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнение дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем. – 1968. – № 3. – С. 3–28.

3. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. – 1997. –P. 223–276.

4. *Попов А. Ю., Седлецкий А. М.* Распределение корней функций Миттаг — Леффлера // СМФН. – 2011. – № 40. – С. 3–171.

УДК 517.9

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ КЛАССОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНЫХ ИНВАРИАНТОВ

З. Н. Хакимова

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского

Аннотация. Рассматриваются мультипликативные классы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с произвольными функциями, в частности, степенного вида. Обсуждается метод интегрирования уравнений с помощью инвариантов дискретных преобразований. Этот метод проиллюстрирован для нескольких различных классов уравнений. В результате, приведены общие решения мультипликативного двухпараметрического класса уравнений с двухфункциональным произволом, а также его различных спецификаций; в частности, приведено общее решение трехпараметрического класса уравнений степенного вида.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка, дискретное преобразование, инвариант дискретного преобразования, конкомитант, общее решение ОДУ.

Введение

Разработанный В. Ф. Зайцевым дискретно-групповой анализ (ДГА) ОДУ [1], включает в себя интегрирование уравнений с помощью дискретных симметрий для исследуемых классов уравнений.

Для нахождения точных решений уравнений в рамках ДГА используются два основных метода: метод «размножения» разрешимых случаев по найденной дискретной группе для рассмотренного класса уравнений, а также метод дискретных инвариантов, который в данной статье применяется к ОДУ 2-го порядка с мультипликативными правыми частями.

1. Интегрирование степенного $\mathbf{r}$-инвариантного класса уравнений

Рассмотрим четырёхпараметрический класс ОДУ 2-го порядка со степенной правой частью:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l \left(y'_x\right)^m \left(xy'_x - y\right)^n, \tag{1}$$

который при $n = 0$ содержит класс обобщённых уравнений Эмдена — Фаулера

$$y''_{xx} = Ax^k y^l \left(y'_x\right)^m, \tag{2}$$

имеющий много приложений, в первую очередь, в теоретической физике. Будем обозначать класс уравнений (1) вектором параметров $(k,l,m,n \mid A)$.

Известно несколько дискретных преобразований (являющихся образующими дискретных циклических групп), которые замкнуты в классе уравнений (1) [2–4], в том числе, точечное преобразование

$$\mathbf{r}:\ x \to y,\ \ y \to x,\ \ (k,l,m,n \mid A) \to \left(l,k,3-m-n,n \mid (-1)^{n-1} A\right),\ \ \mathbf{r}^2 = \mathbf{E}. \tag{3}$$

Найдём точный $\mathbf{r}$-инвариант (с точностью до коэффициента A) в классе уравнений (1). Для этого в (3) приравняем соответствующие параметры — показатели степеней:

$$k = l,\ \ m = 3 - m - n.$$

В результате получается $\mathbf{r}$-инвариант — двухпараметрический подкласс класса уравнений (1):

$$y''_{xx} = Ax^k y^k \left(y'_x\right)^{\frac{3-n}{2}} \left(xy'_x - y\right)^n \text{ или } \left(k, k, \frac{3-n}{2}, n \mid A\right). \tag{4}$$

Класс уравнений (4) можно записать в виде

$$y''_{xx} = A\left(xy\right)^k \left(\frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^n \left(y'_x\right)^{\frac{3}{2}} \tag{5}$$

или

$$a\frac{y''_{xx}}{\left(y'_x\right)^{\frac{3}{2}}} = aA\left(xy\right)^k \left(\frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^n.$$

Положим

$$\theta = xy,\ \dot{V}_\theta = a\frac{y''_{xx}}{\left(y'_x\right)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$V'_x = \theta'_x \dot{V}_\theta = \frac{a\left(xy'_x + y\right)y''_{xx}}{\left(y'_x\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{6}$$

Интегрируя (6), получаем

$$V = 2a\frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Положим $2a = 1$, тогда

$$\theta = xy,\ V = \frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

Легко видеть, что функция θ является точным **r**-инвариантом, а V — **r**-инвариантом с точностью до знака.

Совокупность функций θ и V в (7) является конкомитантом — согласованным инвариантом дискретного преобразования **r**.

Замечание 1. Особенно эффектным является процесс нахождения функции V при $n = 0$, т. е. для подкласса (2) — когда нет подсказки, как в (5).

С помощью конкомитанта (7) понижается порядок уравнения (5) — оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{2}\theta^k V^n, \tag{8}$$

имеющему общее решение при $k \neq -1$, $n = 1$:

$$V\left(\theta\right) = \left[\frac{\left(1-n\right)A}{2\left(k+1\right)}\theta^{k+1} + C_2\right]^{\frac{1}{1-n}}. \tag{9}$$

Рассматривая конкомитант (7) как систему уравнений относительно x и y, можно найти преобразование, обратное к конкомитанту (7):

$$x = C_1 e^{2\int \frac{d\theta}{V^2+4\theta \pm V\sqrt{V^2+4\theta}}},\ y = \frac{1}{C_1}\theta e^{-2\int \frac{d\theta}{V^2+4\theta \pm V\sqrt{V^2+4\theta}}}. \tag{10}$$

Если подставить (9) в (10), то получим общее решение **r**-инварианта (5).

2. Интегрирование r-инвариантного уравнения с произвольными функциями

Можно обобщить приведенный в пункте 1 результат на случай произвольных функций, т. е. для уравнения

$$y''_{xx} = Af\left(xy\right)g\left(\frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(y'_x\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{11}$$

частным случаем которого является (5) при $f(\alpha) = \alpha^k$, $g(\beta) = \beta^n$.

С помощью того же конкомитанта (7) уравнение (11) приводится к легко разрешимому уравнению 1-го порядка:

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{2} f\left(\theta\right) g\left(V\right), \tag{12}$$

общее решение которого:

$$V = G^{-1}\left(F\left(\theta\right)\right),\ F\left(\theta\right) = \frac{A}{2}\int f\left(\theta\right)d\theta + C_2,\ G\left(\zeta\right) = \int \frac{d\zeta}{g\left(\zeta\right)} \tag{13}$$

(в (13) показатель «–1» означает обратную функцию).

Подстановка (13) в обращение (10) конкомитанта (7) даёт общее решение уравнения (11).

3. Интегрирование мультипликативных классов уравнений — обобщений (5) и (11)

Пусть

$$\theta = x^k y^l,\ V = \left(xy'_x - y\right)\left(y'_x\right)^\lambda. \tag{14}$$

В результате вычислений получаем следующее: для того, чтобы $\dot{V}_\theta$ имело степенной вид, необходимо положить $\lambda = -\frac{k}{k+l}$, тогда

$$\dot{V}_\theta = \frac{y''_{xx}}{\left(k+l\right)x^{k-1}y^{k-1}\left(y'_x\right)^{\frac{2k+l}{k+l}}}.$$

Получается обобщение результата, изложенного в пункте 2: класс уравнений

$$xyy''_{xx} = Af\left(x^k y^l\right)g\left(\frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{k}{k+l}}}\right)\left(y'_x\right)^{\frac{2k+l}{k+l}} \tag{15}$$

с помощью преобразования

$$\theta = x^k y^l,\ V = \frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{k}{k+l}}} \tag{16}$$

приводится к уравнению 1-го порядка

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{k+l}\frac{f\left(\theta\right)}{\theta} g\left(V\right), \tag{17}$$

общее решение которого

$$V\left(\theta\right) = G^{-1}\left(F\left(\theta\right)\right),\ F\left(\theta\right) = \frac{A}{k+l}\int \frac{f\left(\theta\right)}{\theta} + C_2,\ G\left(\zeta\right) = \int \frac{d\zeta}{g\left(\zeta\right)}. \tag{18}$$

Для нахождения общего решения класса уравнений (15) необходимо найти преобразование, обратное к (16); оно имеет следующий вид:

$$x = C_1\theta^{\frac{l-1}{l}} e^{\frac{k}{l}\int\frac{d\theta}{\theta\left(lVz^k+k+l\right)}},\ \ y = \frac{1}{C_1}\theta^{\frac{1}{l}} e^{-\frac{k}{l}\int\frac{d\theta}{\theta\left(lVz^k+k+l\right)}}, \tag{19}$$

где функция $z(\theta,V(\theta))$ удовлетворяет алгебраическому уравнению $(k+l)$-го порядка:

$$\theta^{\frac{1}{k}} z^{k+l} - Vz^k - 1 = 0. \tag{20}$$

Подставив (18) в (19), (20), получаем общее решение двухпараметрического уравнения (15) с двухфункциональным произволом.

Если в (15) положить $f(\alpha)=\alpha,\ \ g(\beta)=\beta^n,\ \ k\to k+1,\ \ l\to l+1,$ то получим степенной трехпараметрический класс уравнений

$$y''_{xx} = Ax^k y^l \left(y'_x\right)^{\frac{k(2-n)+l-n+3}{k+l+2}} \left(xy'_x - y\right)^n, \tag{21}$$

который при подстановке преобразования

$$\theta = x^{k+1}y^{l+1},\ \ V = \frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{k+1}{k+l+2}}} \tag{22}$$

приводится к уравнению

$$\dot{V}_\theta = \frac{A}{k+l+2}V^n,$$

общее решение которого

$$V = \left[\frac{A(1-n)}{k+l+2}\theta + C_2\right]^{\frac{1}{1-n}}. \tag{23}$$

Подстановка (23) в (19), т. е. в обращение преобразования (22) (при $k\to k+1,\ \ l\to l+1$) даёт общее решение степенного трёхпараметрического класса уравнений (21).

Замечание 2. Интегрируемость степенного класса уравнений (21) была обнаружена ещё прежде [5], но не было выписано общее решение.

Заключение

1. С помощью дискретных инвариантов был понижен порядок нескольких мультипликативных классов уравнений с константным и функциональным произволом.

2. Удалось найти обращение всех найденных конкомитантов и их обобщений. Благодаря этому, удалось выписать общие решения всех исследуемых мультипликативных классов уравнений.

3. В дальнейшем можно попытаться выписать общие решения инвариантов других, отличных от **r**, преобразований, а также их обобщений. Кроме того, можно далее использовать метод «размножения» — «размножить» найденные разрешимые случаи с помощью дискретных групп преобразований.

Литература

1. *Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М. : Наука, 1993. – 464 с.

2. *Хакимова З. Н.* Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Актуальные вопросы современной науки, № 3 / З. Н. Хакимова, О. В. Зайцев. – СПб., 2014. – С. 3–11.

3. *Хакимова З. Н.* Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математиче-

ского образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2017» / З. Н. Хакимова. – СПб. : РГПУ, 2017. – С. 112–117.

4. *Хакимова З. Н.* Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы управления / З. Н. Хакимова, О. В. Зайцев. – 2021. – № 1(4). – С. 61–92. – URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4.html

5. *Хакимова З. Н.* Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Труды Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского / З. Н. Хакимова. – 2014 – С. 8–16.

УДК 517.927.2

О ЯВНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

В. Ю. Чурсин

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка на отрезке с постоянным матричным коэффициентом с нелокальным краевым условием, содержащим как неизвестную функцию, так и ее производную. Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения. Найдено явное представление для функции Грина.
Ключевые слова: краевая задача, функция Грина, функциональное исчисление, жорданова форма матрицы, матричная экспонента, дифференциальное уравнение с матричным коэффициентом.

Введение

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x'(t) - Ax(t) = h(t), \qquad t \in [a,b],$$

с краевым условием

$$f(x) = \int_a^b (\lambda x(t) - x'(t))g(t)dt.$$

Для этой краевой задачи выписываются необходимые и достаточные условия существования и единственности решения при любом свободном члене h, а также выписывается явный вид функции Грина.

Формулировка основного результата

Обозначим через $C = C([a,b],C^n)$ линейное пространство всех непрерывных векторных функций $h:[a,b] \to C^n$, а через $C^1 = C^1([a,b],C^n)$ — линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций x, для которых $x, x' \in C$. Эти пространства являются банаховыми относительно норм

$$\|h\| = \max_{t\in[a,b]} \|h(t)\|,$$
$$\|x\| = \max\{\max_{t\in[a,b]} \|x(t)\|, \max_{t\in[a,b]} \|x'(t)\|\},$$

где в C^n используется произвольная норма. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'(t) - Ax(t) = h(t), \qquad t \in [a,b],$$

с краевым условием

$$f(x) = 0,$$

где

$$f(x) = \int_a^b (\lambda x(t) - x'(t))g(t)dt.$$

Здесь A — комплексная матрица размера $n \times n$, $h:[a,b] \to C^n$ — непрерывная функция, $g:[a,b] \to C$ — непрерывная функция, $\lambda \in C$ — константа. Доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \notin \sigma(A)$, а матрица $\int_a^b e^{A\tau} g(\tau)d\tau$ обратима. Тогда рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение $x \in C^1$ при любом свободном члене $h \in C$ и это решение задается формулой*

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)h(s)ds,$$

где

$$G(t,s)=\begin{cases}\left(\int_a^b e^{A\tau}g(\tau)d\tau\right)^{-1}e^{At}\left((\lambda I-A)^{-1}g(s)+e^{-As}\int_a^s e^{A\tau}g(\tau)d\tau\right), & a\le s<t,\\ \left(\int_a^b e^{A\tau}g(\tau)d\tau\right)^{-1}e^{At}\left((\lambda I-A)^{-1}g(s)-e^{-As}\int_s^b e^{A\tau}g(\tau)d\tau\right), & t<s\le b.\end{cases}$$

Из условий теоремы следует, что поскольку существует резольвента $(\lambda I-A)^{-1}$, а матрица $\int_a^b e^{A\tau}g(\tau)d\tau$ обратима, то функция G определена корректно. Назовем ее функцией Грина рассматриваемой краевой задачи.

Идея доказательства. Сначала находится формула для решения скалярной краевой задачи

$$x'(t)-\mu x(t)=h(t),\qquad t\in[a,b],$$
$$f(x)=0,$$

где

$$f(x)=\int_a^b(\lambda x(t)-x'(t))g(t)dt.$$

Это делается путем прямых вычислений. Ответ получается следующий:

$$x(t)=\int_a^b G(t,s)h(s)ds,$$

где

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{e^{\mu t}g(s)}{(\lambda-\mu)\int_a^b e^{\mu\tau}g(\tau)d\tau}+\dfrac{\int_a^s e^{\mu(\tau-s+t)}g(\tau)d\tau}{\int_a^b e^{\mu\tau}g(\tau)d\tau}, & a\le s<t,\\ \dfrac{e^{\mu t}g(s)}{(\lambda-\mu)\int_a^b e^{\mu\tau}g(\tau)d\tau}-\dfrac{\int_s^b e^{\mu(\tau-s+t)}g(\tau)d\tau}{\int_a^b e^{\mu\tau}g(\tau)d\tau}, & t<s\le b.\end{cases}$$

После этого в полученную формулу для G вместо μ подставляется матрица A и выполняется проверка, для чего доказываются следующие леммы.

Лемма 2. *Функция G удовлетворяет рассматриваемому дифференциальному уравнению.*

Лемма 3. *Функция G удовлетворяет рассматриваемому краевому условию.*

В ходе доказательства полезным также оказалось следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\lambda\notin\sigma(A)$, $g:[a,b]\cup[c,d]\to C$ — непрерывная функция, а матрица $\int_a^b e^{A\tau}g(\tau)d\tau$ обратима. Тогда следующие матрицы коммутируют: A, $(\lambda I-A)^{-1}$, e^{At}, $\int_c^d e^{As}g(s)ds$, $\left(\int_a^b e^{A\tau}g(\tau)d\tau\right)^{-1}$.*

Его доказательство базируется на свойствах матричной экспоненты [1].

Условия обратимости матрицы $\int_a^b e^{A\tau}g(\tau)d\tau$ приводятся в следующей лемме.

Лемма 5. *Для того чтобы матрица $\int_a^b e^{A\tau}g(\tau)d\tau$ была обратима, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\lambda\in\sigma(A)$ выполнялось $\int_a^b e^{\lambda t}g(t)dt\neq 0$.*

Доказательство опирается на преобразование к жордановой форме матрицы [2], свойства матричной экспоненты [3] и явное представление экспоненты от жорданова блока [4].

Литература

1. *Боровских А. В.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. В. Боровских, А. И. Перов. – Москва – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 540 с.

2. *Курбатов В. Г.* Алгебра : учебное пособие / В. Г. Курбатов. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. – 604 с.

3. *Курбатов В. Г.* Вычислительные методы спектральной теории : учебное пособие / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. – 323 с.

4. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства) / Г. Е. Шилов. Москва : Наука, 1969. – 432 с.

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ, РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ

УДК 004.08

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ВЫЯВЛЕНИЕ РАКА МОЛОЧНОЙ ЖЕЛЕЗЫ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Халиль Аббуд

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена разработке алгоритма обработки медицинских изображений для диагностики раковых опухолей. Рассматривается роль цифровых изображений в медицине, их разнообразие по характеристикам контрастности и четкости, а также необходимость автоматизации диагностики. Основное внимание уделено созданию алгоритма на MATLAB для анализа МРТ молочной железы, выявления опухолей, их изоляции и расчета площади. Используются методы морфологической обработки, такие как операции вскрытия и закрытия, которые улучшают выделение опухолей. Результаты алгоритма способствуют автоматизации диагностики и повышению точности прогнозирования состояния, заданного пользователем.

Ключевые слова: обработка изображений, морфологические операции, расширение, эрозия, нейронные сети.

Введение

С быстрым развитием науки о цифровой обработке изображений и её широким применением в медицине, диагностика заболеваний с использованием медицинских изображений становится всё более эффективной. Сегодня исследователи сосредоточены на разработке методов, позволяющих быстро, точно и легко извлекать необходимую информацию из визуальных данных, улучшая качество диагностики.

Компьютерная диагностика определяется как процесс анализа медицинских изображений с использованием компьютерных технологий. Она предоставляет врачу вторичное заключение, помогая выявлять патологические изменения и уточнять диагноз. Однако окончательное решение всегда остается за врачом. Компьютерная диагностика выступает в роли вспомогательного инструмента, который используется как «второй считыватель» и повышает точность и скорость работы специалистов.

Система компьютерной диагностики опухолей делится на три этапа:

Этап выявления: определение подозрительных областей, представляющих интерес (например, аномалий в ткани молочной железы).

Извлечение признаков: анализ параметров, используемых для классификации.

Классификация: разделение случаев на здоровые и патологические.

Рак молочной железы развивается, когда клетки ткани молочной железы начинают бесконтрольно делиться, образуя опухоль. Большинство опухолей доброкачественные, однако некоторые клетки могут стать злокачественными. Злокачественные опухоли обладают способностью проникать в соседние ткани и распространяться через лимфатические сосуды и кровоток, поражая удалённые органы. Тяжесть заболевания зависит от типа рака:

Локализованный рак: поражение ограничено областью молочной железы и не выходит за её пределы. На ранних стадиях этот тип поддается успешному лечению, но при отсутствии диагностики и лечения он может прогрессировать.

Метастатический рак: характеризуется проникновением опухоли через стенки протоков молочных желез в жировую ткань груди. Через кровеносные и лимфатические сосуды этот рак распространяется на другие части тела, значительно усложняя лечение. Эффективность раннего выявления и правильной диагностики является ключевым фактором в борьбе с этим заболеванием.

1. Обработка изображений

Это одна из отраслей компьютерных наук, которая заинтересована в выполнении операций с изображениями с целью их улучшения в соответствии с определенными критериями или извлечения из них некоторой информации

Система обработки изображений выполняет четыре основные задачи:

1) получение изображения, т. е. преобразование оптического изображения в цифровое в памяти компьютера;

2) сохранение изображения;

3) обработка;

4) изображение.

Обработка изображений направлена на:

1. Улучшение фотографической информации для ее интерпретации человеком, например, улучшение контрастности, устранение шумов, обработка ложных цветов и восстановление изображений путем извлечения из них некоторой недостающей информации.

2. Обработка данных изображений для понимания и восприятия компьютером.

Покажем две морфологические операции, расширение и эрозия, которые являются двумя основными операциями, от которых зависят многие алгоритмы обработки изображений.

Расширение: Расширение выполняется оперативно путем перемещения центра формирующего элемента по всему изображению, начиная с верхнего левого угла (0,0), и в каждом элементе изображения, если формирующий элемент пересекается с каким-либо элементом (значение 1), мы создаем элемент изображения, расположенный под центром формирующего элемента. элемент — элемент изображения, содержащий результат расширения (ему присваивается значение 1).

Таким образом, процесс расширение расширяет объекты на изображении, удлиняет их конечности и сужает отверстия.

Эрозия: Процесс эрозии осуществляется аналогично процессу растяжения путем перемещения центра формирующего элемента по всему изображению, начиная с левого верхнего угла (0,0) и у каждого элемента изображения Z2. Если элемент формирования равен единице, принимается значение результирующего элемента изображения, соответствующего центру элемента формирования. Исходная фотография равна единице.

Поэтому процесс эрозии сжимает объекты на изображении, укорачивает их края и расширяет отверстия.

Выполнение операций расширения и удаления изображения в определенной последовательности приводит к двум новым морфологическим операциям, открытия и закрытия, которые определяются следующим образом:

открытие: это операция удаления, за которой следует операция расширения.

закрытие: это процедура расширения, за которой следует операция удаления.

На рис. 1 показаны в иллюстративной форме процессы открытия и закрытия, где (*a*) — необязательная форма, содержащая выступы и впадины, (*c*) — результат эрозии *a* с помощью круглого формующего элемента, (*e*) — результат раскрытия *a*, (*g*) — результат значения расширения *a* и (*i*) являются результатом закрытия a, в то время как цифры (*h*, *f*, *d*, *b*) являются иллюстрацией эффекта процесса, в результате которого была создана фигура, следующая за каждой из них.

2. Нейронные сети

Искусственная нейронная сеть состоит из ряда обрабатывающих элементов, называемых нейронами, узлами или единицами, каждая ячейка имеет ряд входных сигналов с периферии

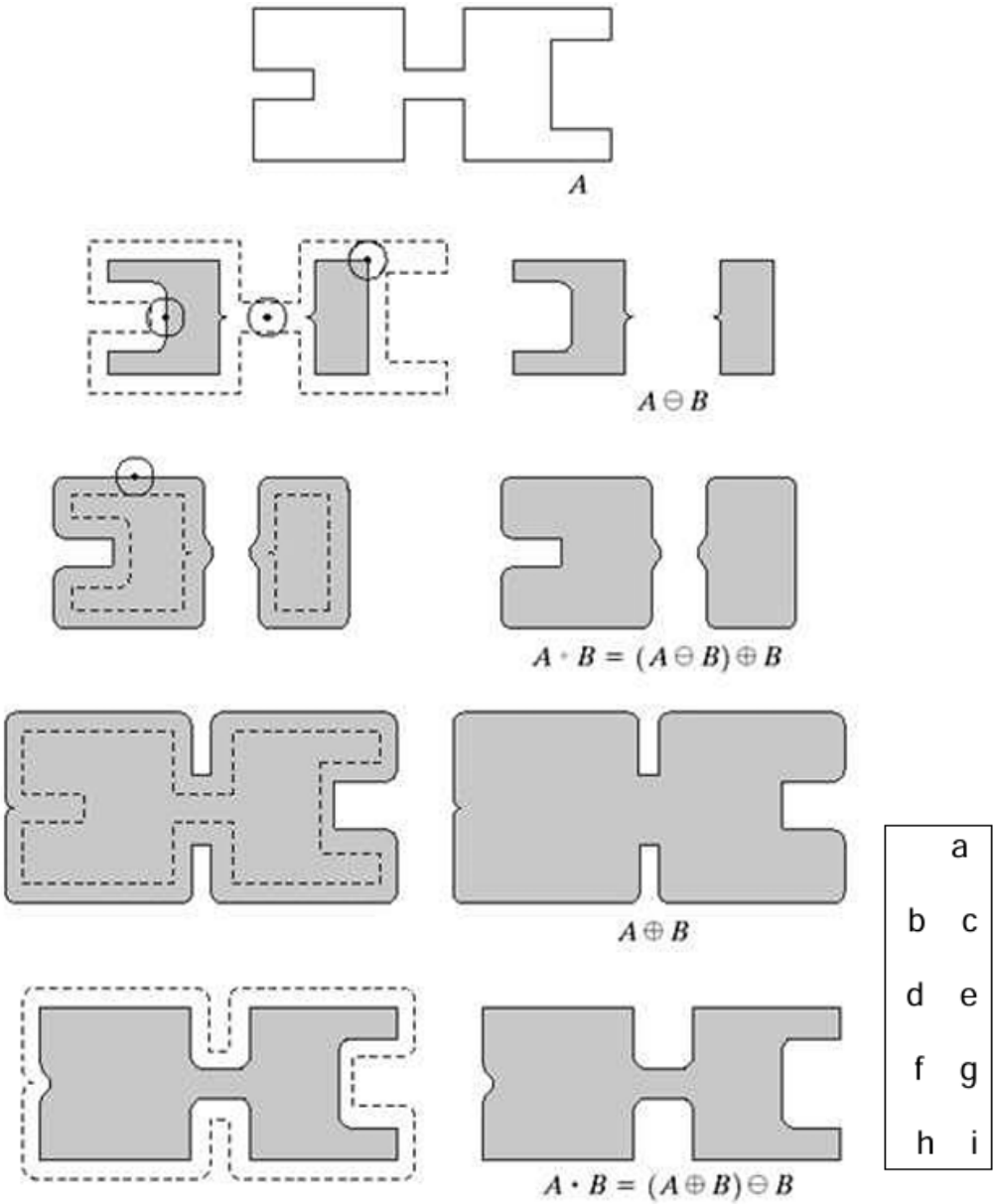


Рис. 1. Операции открытия и закрытия с использованием круглого формующего элемента

или от других нейронов и имеет только один выходной сигнал, распределенный между другими нейронами или выходящий на периферию. Нейронам удалось решить многие задачи с высокой эффективностью, например, в распознавании образов, обработке изображений, распознавании звуков и в области управления.

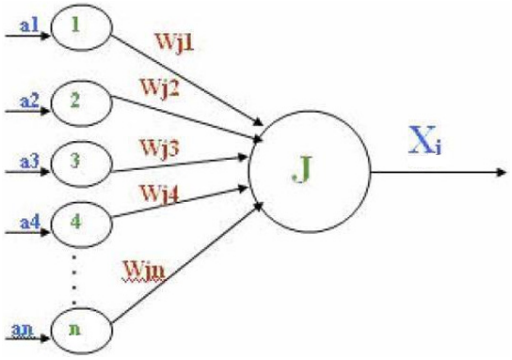


Рис. 2. Искусственная нервная клетка

Из рисунка видно, что нейрон состоит из:

1 — **входных сигналов** (a1,a2,a3,..... an)

2 — **силы тяжести** (веса: w1, w2, w3, win), где вес выражает интенсивность корреляции между элементом до и элементом после.

3 — **обрабатывающий элемент** (Processing Element), и этот элемент разделен на две части:

– Коллектор (Adder) для сбора сигналов на входе

– Передаточная функция или функция активации. Эта функция ограничивает выходной сигнал нейрона, поэтому она называется функцией сжатия, поскольку она помещает выходной сигнал в диапазон [0,1] или в диапазон [–1,1].

4 — **вывод** Xj (Output).

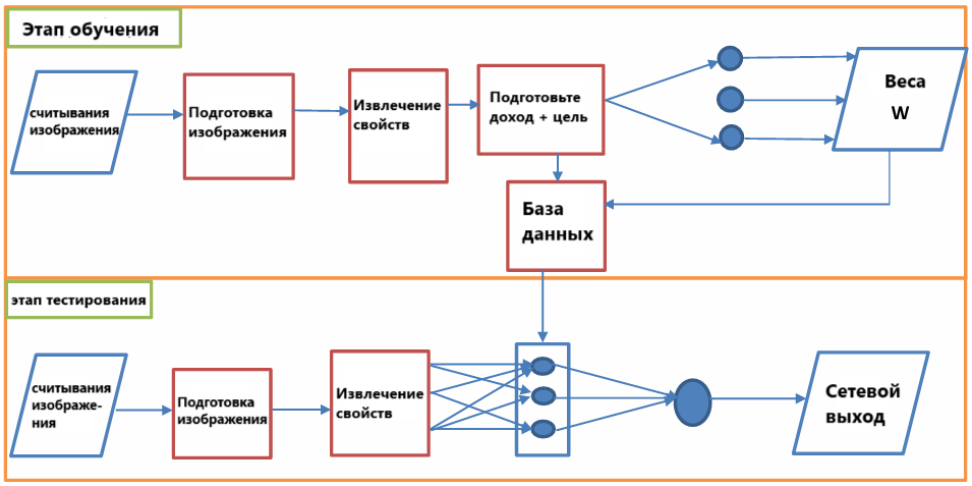


Рис. 3. Алгоритм, использованный при проектировании модели

На рис. 3 показаны два этапа обучения и тестирования, где на этапе обучения считывается изображение, а затем обрабатывается с помощью некоторых морфологических процессов, после чего из изображения извлекаются интересующие характеристики, чтобы обучить на них нейронную сеть для диагностики текущего состояния, и на основе выходных данных нейронной сети получается значения веса и сохраняется в файле базы данных. На этапе тестирования считывается изображения и обрабатывается, как на этапе обучения, а затем извлекаются характеристики изображения, такие как входные данные нейронной сети, с весами, полученными на этапе обучения, чтобы получить диагностический результат на выходе сети.

3. Практическая часть проекта

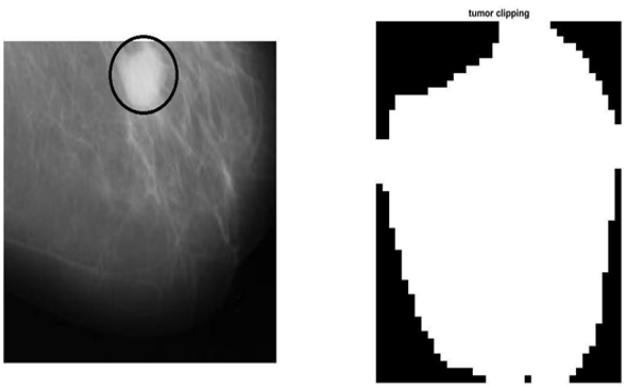


Рис. 4. Отделение опухоли от остальной части изображения

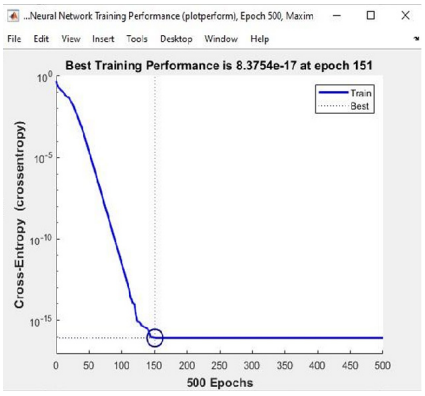


Рис. 5. Тренировочные роли для достижения наилучшего результата

Рис. 5 показывает снижение ошибки (Cross-Entropy) при обучении нейронной сети. Синяя линия отражает процесс оптимизации, резкое снижение в начале свидетельствует об успешном обучении. Последующая стабилизация указывает на достижение оптимального уровня без переобучения.

Результаты

Протестировано в системе 30 изображений, включая 15 изображений, на которых сеть была предварительно обучена, разделенных на 5 изображений здоровых людей, 5 изображений злокачественных раковых образований и 5 изображений доброкачественных раковых образований. Уровень точности результатов системы составил 100 %. Затем протестировалась система на 15 изображениях, на которых сеть не была обучена. Заранее было 5 изображений здорового образования, 5 изображений злокачественного образования и 5 изображений доброкачественного образования. Точность системы составила 90 %, так как среди из 5 нормальных изображений система распознает 5, из 5 изображений доброкачественного образования 4, а из 5 изображений злокачественного образования 4.

Заключение

Разработанная программа продемонстрировала свою эффективность как вспомогательный и поддерживающий диагностический инструмент для принятия обоснованных медицинских решений относительно выбора метода лечения. Она позволяет врачам заранее определить площадь опухоли в квадратных сантиметрах, что способствует оценке целесообразности лечения, включая возможность проведения операции по удалению опухоли. Данная функциональность помогает медикам учитывать площадь и стадию опухоли при выборе стратегии лечения, что в конечном итоге повышает точность и персонализированность медицинской помощи.

Перспективы дальнейшего развития программы включают:

Сегментацию опухоли в трех измерениях, что позволит повысить точность анализа и предоставить врачам более детальную информацию о ее форме и размере.

Развитие алгоритмов на основе глубокого обучения, чтобы нейронная сеть могла различать типы опухолей, что является важным шагом для персонализированной диагностики и лечения.

Добавление функций измерения расстояния от краев опухоли до ближайших чувствительных областей, что позволит врачу определить максимально допустимый размер удаляемой ткани, минимизируя риск повреждения жизненно важных структур.

Реализация этих перспективных направлений существенно расширит функциональные возможности программы, повысит ее клиническую ценность и интеграцию в процесс принятия медицинских решений. Это создаст основу для дальнейшего внедрения современных технологий в медицину, улучшая качество лечения и прогнозы для пациентов.

Литература

1. *Маан Амма* Системы отображения и обработки медицинских изображений. – Публикации Дамасского университета, 2007–2008 г.

2. *Марьям Сай* Нейронные сети. – Публикации Университета Аль-Баас, 2017–2018 г.

3. *Майк Диксон* Рак молочной железы. Публикации Аль-Муалеф. 2013 г.

УДК 004.85 : 004.946

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В ТЕХНОЛОГИЯХ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ

Т. В. Азарнова, Д. А. Поздняков

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается влияние методов машинного обучения (ML) на развитие технологий виртуальной реальности (VR). Благодаря интеграции ML, VR-технологии становятся более доступными и многогранными, открывая новые возможности в таких областях, как образование, медицина, развлечения и производство. Машинное обучение способно улучшить взаимодействие пользователей с виртуальными средами, адаптируя контент под индивидуальные потребности и эмоции. Также в работе представлены примеры применения ML в образовательных и медицинских VR-системах, описаны перспективы и вызовы, связанные с внедрением ML в VR, например, необходимость в больших объемах данных и вычислительных мощностей, а также возможные направления будущих исследований.

Ключевые слова: виртуальная реальность, VR, машинное обучение, ML, адаптивные алгоритмы, образование, медицина, реабилитация, эмоциональное состояние, 3D-моделирование, обратная связь, системы распознавания жестов, персонализация, вычислительные ресурсы.

Введение

В последние годы технологии виртуальной реальности (VR) претерпели значительные изменения благодаря внедрению методов машинного обучения (ML). Эти технологии стали более доступными и многофункциональными, что открывает новые горизонты для их применения в различных областях, таких как образование, медицина, развлечения и производство. В данной статье рассматривается влияние методов машинного обучения на развитие технологий виртуальной реальности, преимущества и перспективы их внедрения.

1. Виртуальная реальность и машинное обучение

Виртуальная реальность — это иммерсивная технология, которая создает искусственную среду, позволяя пользователям оперировать с 3D-объектами в трехмерном пространстве. Основные технологии, задействованные в VR, включают шлемы виртуальной реальности, трекеры движений и контроллеры [1].

Машинное обучение является важнейшим направлением искусственного интеллекта, позволяющим обрабатывать большие объемы информации, находить скрытые закономерности и использовать данные закономерности в задачах управления и принятия решений.

Комбинация технологий VR и ML может быть направлена на развитие и улучшение уже существующих VR технологий. Эти технологии могут включать в себя приложения в сферах образования, медицины, развлекательной индустрии и производства.

Машинное обучение может предоставить возможность для развития более интерактивных и адаптивных пользовательских интерфейсов. Данные алгоритм помогают улучшить восприятие пользователями виртуальной среды, что делает взаимодействие более естественным и продуктивным. Например, алгоритмы могут анализировать поведение пользователей, чтобы в реальном времени адаптировать содержание и сложность взаимодействия, что значительно улучшает пользовательский опыт.

1.1. Применение ML для улучшения взаимодействия в VR

Одним из ключевых аспектов использования методов машинного обучения в виртуальной реальности является улучшение взаимодействия между пользователями и технологиями виртуальной реальности.

Алгоритмы ML могут анализировать данные о взаимодействиях, распознавать паттерны и адаптировать сценарии взаимодействия на основе поведения и эмоционального состояния пользователя. В работе Oyebola O. [2] для предсказания успешности взаимодействия используется логистическая регрессия, описывающая зависимость вероятности успешного взаимодействия от различных факторов взаимодействия. Если алгоритм обнаруживает, что вероятностная модель логистической регрессии указывает на наличие трудностей (1), то применяются методы кластеризации (2) для группировки пользователей с похожими проблемами:

$$P(X) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n)}}, \tag{1}$$

где $P(X)$ — вероятность того, что пользователь испытывает трудности при управлении объектом,

$$J = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left\| x_j^{(i)} - c_i \right\|^2, \tag{2}$$

где J — функция стоимости, $x_j^{(i)}$ — точки данных в кластере i, c_i — центроид кластера.

В результате, если пользователь испытывает трудности с управлением объектом, ML-алгоритмы могут своевременно предложить подсказки или изменить параметры взаимодействия для облегчения процесса, используется графическая визуализация данных для лучшего понимания паттернов поведения. Таким образом, если пользователь испытывает трудности с управлением объектом, ML-алгоритмы могут обнаружить это и предлагать подсказки или осуществлять изменение параметров взаимодействия для облегчения процесса.

Алгоритмы ML в сочетании с технологиями компьютерного зрения могут распознавать эмоции пользователей по выражению лица и жестам [3, 4]. Это открывает возможность для адаптации виртуальной среды в зависимости от эмоционального состояния пользователя. Так, в обучающих VR приложениях, если система определяет, что студент испытывает стресс, она может снизить уровень сложности задач, обеспечивая комфортную атмосферу для обучения [4].

Алгоритмы машинного обучения могут автоматически генерировать 3D-объекты и анимацию, что значительно облегчает и ускоряет процесс разработки [5]. Это позволяет разработчикам сосредоточиться на более важных аспектах, таких как пользовательский опыт и содержание приложения. На рис. 1. приведен пример генерации 3D моделей с помощью машинного обучения.

Кроме того, системы распознавания жестов и голосового управления, основанные на ML, становятся важными элементами управления в VR. Эти технологии позволяют пользователям

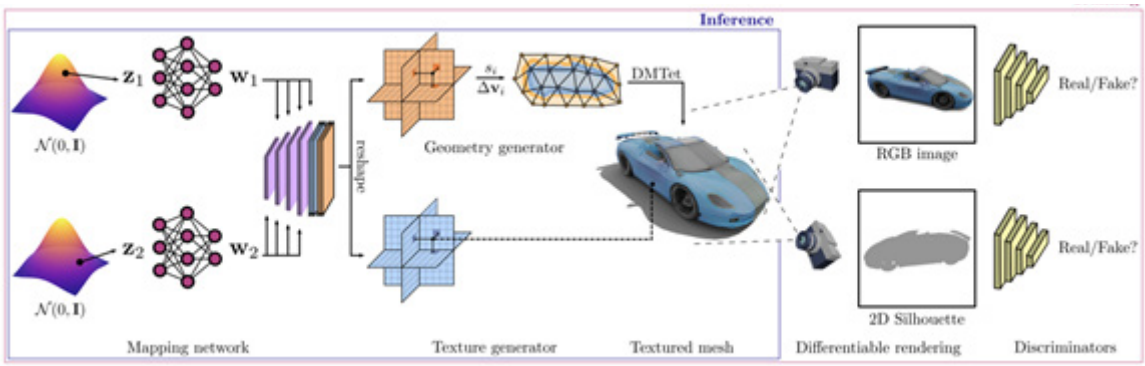


Рис. 1. Генерация 3D моделей с помощью машинного обучения

взаимодействовать с виртуальными объектами без необходимости использования традиционных контроллеров. Они обеспечивают большую свободу движений и делают интерфейсы более интуитивно понятными. Например, такие компании, как Leap Motion, разрабатывают решения, основанные на машинном обучении, для отслеживания движений рук, что позволяет пользователям манипулировать виртуальными объектами только с помощью жестов [6].

1.2. Применение ML в VR технологиях обучения и образования

Технологии виртуальной реальности уже продемонстрировали свою эффективность применительно к сфере образования, позволяя создавать симуляции, которые помогают учащимся лучше понимать сложные концепции. Машинное обучение добавляет еще один уровень адаптивности в образовательные VR-программы. С помощью анализа данных об успеваемости и взаимодействии студентов, алгоритмы могут подстраивать учебный процесс под индивидуальные потребности каждого ученика. Это включает в себя предоставление персонализированных заданий, рекомендаций по материалам и динамическую настройку сложности задач [7].

Технологии VR и ML в образовании существенно используются в медицинских учебных заведениях, где студенты могут проводить виртуальные операции или исследования. Применение машинного обучения позволяет данные компоненты учебного процесса адаптировать к уровню квалификации учащихся, предоставляя обратную связь и рекомендации, что в конечном итоге улучшает качество обучения. Такой подход не только повышает вовлеченность, но и способствует лучшему усвоению материала, позволяя студентам учиться на своих ошибках в безопасной и контролируемой среде.

В медицине виртуальная реальность уже зарекомендовала себя как инструмент для тренировки хирургов, лечения фобий и управления болевыми синдромами. Использование методов машинного обучения в этой области открывает новые возможности для повышения точности и эффективности лечения. Например, ML-алгоритмы могут анализировать данные о состоянии пациента и предсказывать, какая терапия будет наиболее эффективной. Это может включать не только традиционное лечение, но и VR-терапию, которая может быть адаптирована в зависимости от индивидуальных предпочтений и чувствительности пациента [8].

1.3. Применение ML в VR технологиях психотерапии и реабилитации

В последние годы VR применяется в психотерапии, особенно в лечении посттравматического стрессового расстройства (ПТСР). Методы машинного обучения могут быть использованы для анализа поведения клиентов, а также для адаптации сценариев в зависимости от их реакций. Например, алгоритмы могут отслеживать уровень тревожности пациентов и изменять интенсивность терапии в реальном времени [9].

Виртуальные симуляторы также используются в процессе реабилитации после травм [10]. Они позволяют пациентам выполнять упражнения в игровой форме, одновременно собирая данные о их прогрессе. МЛ может анализировать собранные данные для определения наиболее эффективных реабилитационных программ для каждого конкретного пациента [11].

1.4. Применение ML в VR технологиях развлекательной индустрии

Развлекательная индустрия, особенно игровая, также активно исследует возможности, которые предоставляет сочетание VR и ML. Игры, использующие виртуальную реальность, могут стать более персонализированными и динамичными благодаря алгоритмам машинного обучения [12].

Современные игровые компании, такие как Valve и Epic Games, уже изучают возможности применения машинного обучения для создания более реалистичных и интерактивных игровых миров. Это может включать в себя улучшение графики, более сложные сценарии взаимодействия и реалистичное поведение окружающей среды. Такие инновации не только увеличивают привлекательность игр, но и поднимают планку ожиданий пользователей, что неизменно требует от разработчиков новых решений и технологий.

Виртуальные туры, использующие VR, также могут расширить свои возможности за счет применения методов машинного обучения. Например, анализируя пользовательские предпочтения и их поведение, системы могут генерировать персонализированные маршруты и рекомендации, улучшая общее впечатление от виртуального пейзажа [13].

2. Проблемы и сложности внедрения ML в VR технологиях

Несмотря на множество преимуществ, использование машинного обучения в виртуальной реальности сталкивается с рядом проблем и вызовов. Во-первых, для успешного применения ML требуется значительное количество данных для обучения моделей. Сбор и обработка таких данные может быть трудоемким и затратным процессом. Кроме того, качество данных напрямую влияет на результат — плохая или неполная информация может привести к неточным предсказаниям и негативному пользовательскому опыту [14].

Другой значимой проблемой является необходимость в мощных вычислительных ресурсах. Алгоритмы машинного обучения, особенно глубокие нейронные сети, требуют значительных объемов вычислительных мощностей, которые не всегда доступны в условиях VR. Для решения этой проблемы необходимо разрабатывать более эффективные алгоритмы и методы оптимизации, которые смогут работать в реальном времени с ограниченными ресурсами.

3. Перспективы применения машинного обучения в технологиях VR

Проведенный анализ показывает мощные перспективы применения методов машинного обучения в технологиях виртуальной реальности. Ожидается, что дальнейшее развитие методов машинного обучения будет способствовать созданию более сложных и адаптивных VR-приложений [15]. В частности, можно ожидать улучшения в области естественного языка и распознавания эмоций, что позволит создать более глубокое и эмоционально насыщенное взаимодействия между пользователями и виртуальными мирами.

С повышением уровня аппаратного обеспечения технологий VR откроются новые возможности для внедрения ML. Более мощные и доступные устройства позволят разработчикам реализовывать сложные алгоритмы, которые в настоящий момент могут быть недоступны. В результате можно ожидать появления новых форматов контента и способов взаимодействия, которые в корне изменят наше восприятие виртуальных пространств.

Заключение

Методы машинного обучения открывают новые возможности для технологий виртуальной реальности, значительно улучшают взаимодействие пользователей с виртуальными объектами и обогащая пользовательский опыт. Во всех сферах ML и VR работают в тандеме, предоставляя уникальные решения и формируя будущее этих технологий. Однако для эффективного внедрения требуется преодолеть объективные сложности, что создает новые направления инновационных исследований.

Литература

1. *Vince J.* Introduction to Virtual Reality / J. Vince. – National Centre for Computing Animation Bournemouth University, UK, 2004. – 163 p.

2. *Oyebola O.* AI in education: A review of personalized learning and educational technology / O. Oyebola et al // GSC Advanced Research and Review. – 2024. – URL: https://gsconlinepress.com/journals/gscarr/sites/default/files/GSCARR-2024-0062.pdf (дата обращения: 07.09.2024)

3. *Fathma F.* Virtual reality and machine learning for predicting visual attention in a daylit exhibition space: A proof of concept / F. Fathma et al // Ain Shams Engineering Journal. – V. 14, Iss. 6. – 2023. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2090447922004099 (дата обращения: 09.09.2024)

4. *Abinaya M.* Enhancing the Potential of Machine Learning for Immersive Emotion Recognition in Virtual Environment / M. Abinaya, G. Vadivu // EAI Endorsed Transactions on Scalable Information Systems. – 2024. – URL: https://publications.eai.eu/index.php/sis/article/view/5036/2871 (дата обращения: 11.09.2024)

5. *Song B.* Progress and Prospects in 3D Generative AI: A Technical Overview including 3D human / B. Song, L. Jie // 2024. – URL: https://arxiv.org/pdf/2401.02620 (дата обращения: 15.09.2024)

6. *Frank W.* Analysis of the Accuracy and Robustness of the Leap Motion Controller / W. Frank, B. Daniel, R. Bartholomäus, F. Denis // Physical Sensors. – 2013. – URL: https://arxiv.org/pdf/2401.02620 (дата обращения: 15.09.2024)

7. *Mariia H.* Virtual Reality Platform Using ML for Teaching Children with Special Needs / H. Mariia, A. Vasyl, C. Lyubomyr // 2020. – URL: https://ceur-ws.org/Vol-2631/paper16.pdf (дата обращения: 17.09.2024)

8. *Mahnaz S.* The Applications of Virtual Reality Technology in Medical Groups Teaching / S. Mahnaz et al // National Library of Medicine. – 2018. – URL: https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PM6039818/ (дата обращения: 18.09.2024)

9. *Jessica L.* The use of virtual reality technology in the treatment of anxiety and other psychiatric disorders / L. Jessica // Harv Rev Psychiatry. – 2017. – URL: https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC5421394/ (дата обращения: 21.09.2024)

10. *Pinar T.* Virtual Reality in the Rehabilitation of Patients with Injuries and Diseases of Upper Extremities / T. Pinar et al // Healthcare (Basel). – 2022. – URL: https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC9222955/ (дата обращения: 22.09.2024)

11. *Hamid B.* Use of Virtual Reality in Physical Therapy as an Intervention and Diagnostic Tool / B. Hamid et al // Rehabil Res Pract. – 2024. – URL: https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/38304610/ (дата обращения: 22.09.2024)

12. *Wang X.* Research on Application of Artificial Intelligence in VR Games / X. Wang // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. – Volume 331: Fuzzy Systems and Data Mining VI. – 2024. – URL: https://www.researchgate.net/publication/346805454_Research_on_Application_of_Artificial_Intelligence_in_VR_Games (дата обращения: 22.09.2024)

13. *Chourouk O.* The Impact of Virtual Reality (VR) Tour Experience on Tourists' Intention to Visit / O. Chourouk // Digital Economy and Management. – 2023. – URL: https://www.mdpi.com/2078-2489/14/10/546 (дата обращения: 22.09.2024)

14. *Tayebeh B.* Challenges and Practical Considerations in Applying Virtual Reality in Medical Education and Treatment / B. Tayebeh, M. Seyed, M. Niloofar // Oman Med J. – 2020. – URL: https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7232669/ (дата обращения: 23.09.2024)

15. *I Gede P. S.* Systematic Literature Review of Machine Learning in Virtual Reality and Augmented Reality / Partha Sindu I Gede [et al] // Jurnal Nasional Pendidikan Teknik Informatika (JANAPATI). – 2023. – URL: https://www.researchgate.net/publication/372094412_Systematic_Literature_Review_of_Machine_Learning_in_Virtual_Reality_and_Augmented_Reality (дата обращения: 24.09.2024)

УДК 004.942

МУЛЬТИМОДЕЛЬНЫЙ ПОДХОД К РАЗРАБОТКЕ СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ СНИМКОВ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ

А. А. Арзамасцев[1,2], О. Л. Фабрикантов[2], Н. А. Зенкова[3], Е. В. Кулагина[2]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Тамбовский филиал Федерального государственного автономного учреждения Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С. Н. Федорова
[3]Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

Аннотация. Оптическая когерентная томография (ОКТ) — современный метод выявления патологии сетчатки глаза и преретинальных слоев стекловидного тела. Однако описание и интерпретация результатов исследования требуют высокой квалификации и специальной подготовки врача-офтальмолога, значительных временных затрат врача и пациента. Целью данной работы является разработка мультимодельного подхода классификации снимков ОКТ, имитирующего в общих чертах последовательность действий врача-офтальмолога. Предложен общий алгоритм метода, базируемый на последовательном глубоком обучении и использовании девяти различных моделей сверточных нейронных сетей (ИНС-моделей), обученных на уникальных датасетах. Осуществлен выбор оптимальных архитектур ИНС-моделей) и их гиперпараметров. Проведено сравнение результатов вычислительных экспериментов, проведенных с использованием средств Python в Google Colaboratory при одномодельном и нескольких этапов многомодельного подхода. Получены оценки точности классификации.
Ключевые слова: глубокое машинное обучение, классификация, оптическая когерентная томография, модели искусственного интеллекта, сверточные нейронные сети, мультимодельный подход.

Введение

Оптическая когерентная томография (ОКТ) является современным высокотехнологичным и информативным методом выявления патологии сетчатки глаза и преретинальных слоев стекловидного тела [1] в офтальмологии. Однако описание и интерпретация результатов исследования требуют высокой квалификации и специальной подготовки врача, значительных временных затрат офтальмолога и пациента. По этой причине решение задач, связанных с автоматизацией процесса классификации снимков ОКТ, является актуальным.

Вместе с этим, в настоящее время наблюдается быстрое развитие компьютерного инструментария и технологий, позволяющих создавать системы искусственного интеллекта на основе нейронных сетей различной архитектуры и назначения [2–4].

В наших работах [5, 6], опубликованных в материалах предыдущих конференций, мы описали компьютерные методы анализа стекловидного тела, выделения и аппроксимации границы сетчатки, определения кривизны границы, расчетов средней толщины сетчатки и др., выполненных в том числе и с использованием искусственных нейронных сетей (ИНС). В работе [7] авторами опубликованы результаты классификации с использованием одномодельной схемы, а также впервые сформулированы основные этапы мультимодельного подхода классификации снимков ОКТ, имитирующего в общих чертах последовательность действий врача-офтальмолога. В данном докладе, являющимся логическим продолжением работ [5–7], приведены результаты, полученные при классификации снимков ОКТ с использованием мультимодель-

ного подхода, базируемого на последовательном применении девяти различных моделей сверточных нейронных сетей (ИНС-моделей), обученных на уникальных датасетах.

Цели данной работы. Разработать оптимальные архитектуры ИНС-моделей на основе глубокого обучения сверточных искусственных нейронных сетей, также значения гиперпараметров для классификации снимков ОКТ с использованием библиотек Python Keras и Tensorflow в Google Colaboratory. Сравнить результаты классификации снимков при использовании одномодельного и мультимодельного подходов.

Материалы и методы

Предлагаемый способ классификации должен различать следующие 14 видов снимков ОКТ: норма, кистозный макулярный отек (КМО), диффузный макулярный отек (ДМО), отслойка нейроэпителия (ОНЭ), отслойка пигментного эпителия (ОПЭ), твердые экссудаты (ТЭ), эпиретинальный фиброз (ЭРФ), эпиретинальная мембрана (ЭРМ), друзы пигментного эпителия (ДПЭ), ламеллярный макулярный разрыв (ЛМР), сквозной макулярный разрыв (СМР), задняя отслойка стекловидного тела (ЗОСТ), витреомакулярная тракция (ВМТ), витреомакулярная адгезия (ВМА). Первоначальный датасет для обучения ИНС-моделей для первых трех этапов технологии представлял собой обезличенные снимки ОКТ реальных пациентов и включал 2801 изображения, полученных непосредственно с томографа DRI OCT Triton 3D optical coherence tomography в разрешении 1920 × 969 × 24 BPP в виде файлов формата .JPG. В ходе предварительной обработки из всех снимков автоматизировано были выделены целевые фрагменты в формате 1024 × 512 × 24 BPP. Весь датасет был разделен опытными врачами — офтальмологами на части следующим образом. Для обучения ИНС-моделей первого этапа 1405 изображений, для валидации — 200 изображений. Для обучения ИНС-моделей второго этапа 599 изображений, для валидации — 100 изображений. Для обучения ИНС-моделей третьего этапа 447 изображений, для валидации — 50 изображений.

Количество изображений каждого класса соответствовало частоте встречаемости патологии у пациентов.

При обучении ИНС-моделей использовали следующие параметры компиляции: оптимизатор Adam — один из самых эффективных алгоритмов оптимизации, использующий при адаптации скорости обучения параметров первый и второй моменты градиента; функция потерь categorical_crossentropy — категориальная перекрестная энтропия, метрика accuracy — доля правильных ответов алгоритма. Все технологические процессы с моделями проводили с использованием средств языка Python в Google Colaboratory.

Полученные результаты и их обсуждение

На рис. 1 представлена общая технология классификации снимков ОКТ в соответствии с мультимодельным подходом. Она, по сути, имитирует процесс идентификации снимков опытным врачом-офтальмологом. Технология включает девять этапов, на каждом из которых работает специальная ИНС-модель, предназначенная для решения одной из узких проблем. Технический результат достигается тем, что с помощью глубоких сверточных нейронных сетей с использованием сканов ОКТ, содержащих изображения различных патологических структур, последовательно дифференцируют наличие, по меньшей мере, 13 основных классов патологий сетчатки и витреомакулярного интерфейса, представленных в табл. 1. Для проведения обучения ИНС-моделей используют исходный набор сканов ОКТ нормы и патологий, приведенный в табл. 1. Из них формируют датасеты для каждой модели.

Первый датасет предназначен для обучения ИНС-модели 1, позволяющей классифицировать норму и патологию, состоит из двух массивов сканов: сканов нормы (класс 1) и сканов, указанных в табл. 1 тринадцати патологий (классы 2–14).

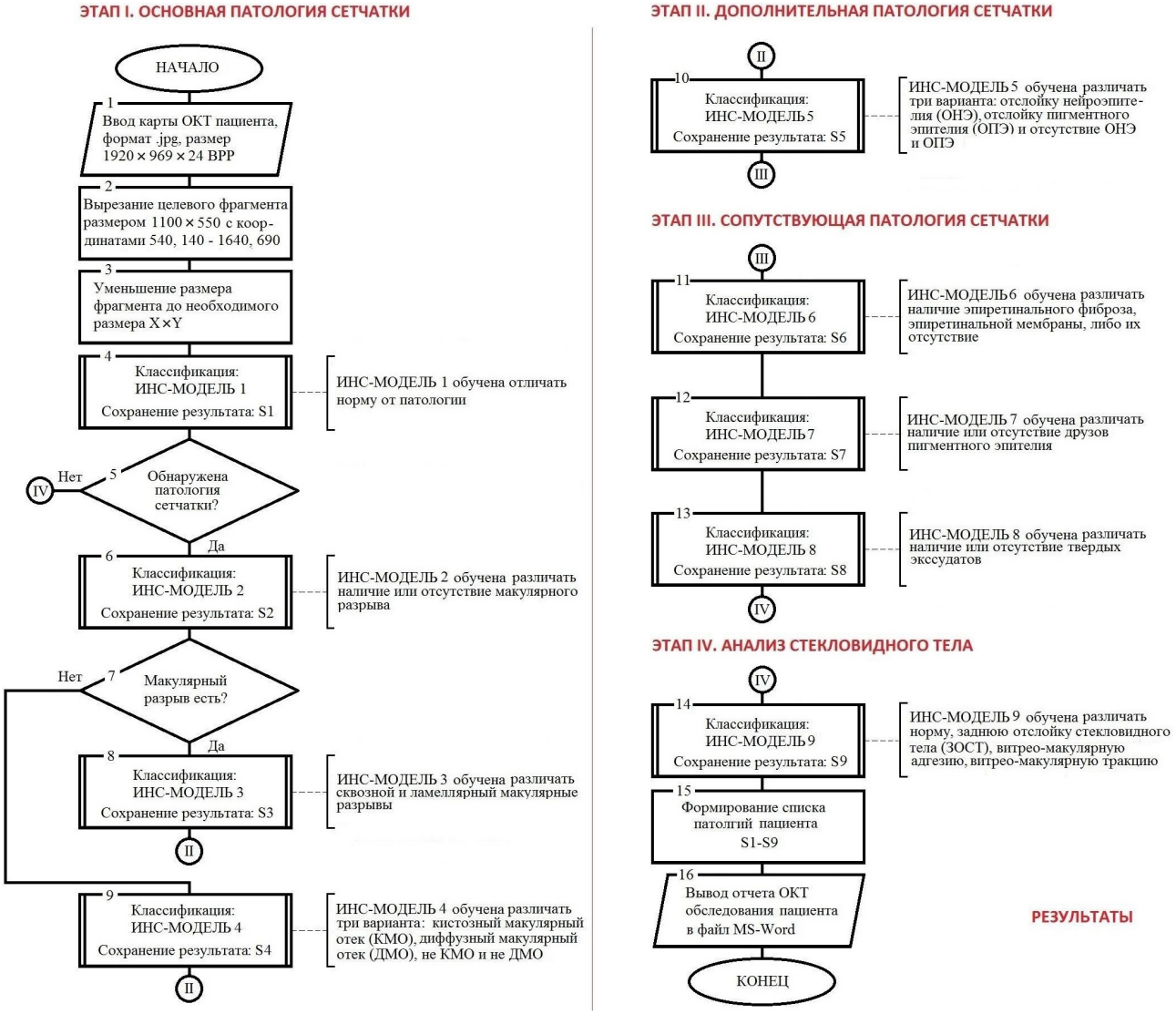


Рис. 1. Общая блок-схема реализации мультимодельного подхода классификации снимков ОКТ

Таблица 1

Классы нормы и патологий для формирования датасетов

Номер класса	Название класса
1	Норма
2	Кистозный макулярный отек (КМО)
3	Диффузный макулярный отек (ДМО)
4	Отслойка нейроэпителия (ОНЭ)
5	Отслойка пигментного эпителия (ОПЭ)
6	Твердые экссудаты (ТЭ)
7	Эпиретинальный фиброз (ЭРФ)
8	Эпиретинальная мембрана (ЭРМ)
9	Друзы пигментного эпителия (ДПЭ)
10	Ламеллярный макулярный разрыв (ЛМР)
11	Сквозной макулярный разрыв (СМР)
12	Задняя отслойка стекловидного тела (ЗОСТ)
13	Витреомакулярная тракция (ВМТ)
14	Витреомакулярная адгезия (ВМА)

Второй датасет предназначен для обучения ИНС-модели, позволяющей выявить наличие или отсутствие МР, состоит из двух массивов сканов: первый массив — сканы с СМР и ЛМР (классы 10,11) и второй массив — сканы указанных в таблице 1 патологий (классы 1–9 и 12–14).

Третий датасет предназначен для обучения ИНС-модели, которая при наличии МР позволяет определить, имеет ли место СМР или ЛМР и состоит из двух массивов сканов: первый массив — сканы с СМР (класс 11), второй массив — сканы с ЛМР (класс 10).

Четвертый датасет предназначен для обучения ИНС-модели, позволяющей определить наличие, либо отсутствие КМО либо ДМО, состоит из трех массивов сканов: первый массив — сканы с КМО (класс 2), второй массив — сканы с ДМО (класс 3) и третий массив — сканы указанных в таблице 1 патологий классов 4–9 и 12–14).

Пятый датасет предназначен для обучения ИНС-модели, способной классифицировать три варианта — ОНЭ, ОПЭ, либо отсутствие ОНЭ и ОПЭ, состоит из трех массивов сканов: первый массив — сканы с ОНЭ (класс 4), второй массив — сканы с ОПЭ (класс 5) и третий массив — сканы указанных в таблице 1 патологий (классы 2, 3 и 6–14).

Шестой датасет предназначен для обучения ИНС-модели, позволяющей выявить наличие или отсутствие ЭРФ либо ЭРМ, состоит из трех массивов сканов: первый массив — сканы ЭРФ (класс 7), второй массив — сканы с ЭРМ (класс 8) и третий массив — сканы указанных в таблице 1 патологий (классы 2–6 и 9–14).

Седьмой датасет предназначен для обучения ИНС-модели, способной классифицировать наличие, либо отсутствие ДПЭ, состоит из двух массивов сканов: первый массив — сканы с ДПЭ (класс 9) и второй массив — сканы указанных в таблице 1 патологий (классы 2–8 и 10–14).

Восьмой датасет предназначен для обучения ИНС-модели, способной классифицировать наличие, либо отсутствие ТЭ, состоит из двух массивов сканов: первый массив — сканы с ТЭ (класс 6) и второй массив — сканы указанных в таблице 1 патологий (классы 2–5 и 7–14).

Девятый датасет предназначен для обучения ИНС-модели, способной классифицировать норму, ЗОСТ, ВМА и ВМТ, состоит из четырех массивов сканов: первый массив —сканы нормы (класс 1), второй массив — сканы с ЗОСТ (класс 12), третий массив — сканы с ВМА (класс 14) и четвертый массив — сканы с ВМТ (класс 13).

В настоящее время осуществлена реализация трех первых этапов схемы, показанной на рис. 1. Все технологические процессы с моделями проводили с использованием средств языка Python в Google Colaboratory. Одновременно с обучением ИНС-моделей проводили практическую оптимизацию гиперпараметров сверточных нейронных сетей, важнейшими из которых являлось число сверточных слоев, количество и размер фильтров на каждом слое, определяющие общее число оптимизируемых параметров. На рис. 2 и 3 представлены примеры трехслойной сверточной сети, которая принималась в качестве стартовой при оптимизации.

На рис. 4 a), b) показан процесс обучения одной из ИНС-моделей. Видно, что принятая архитектура и число оптимизируемых параметров хорошо соответствуют задаче, так что функция потерь быстро убывает практически до нулевых значений, в то время как точность на обучении и валидации достигает в конце процесса 100 %.

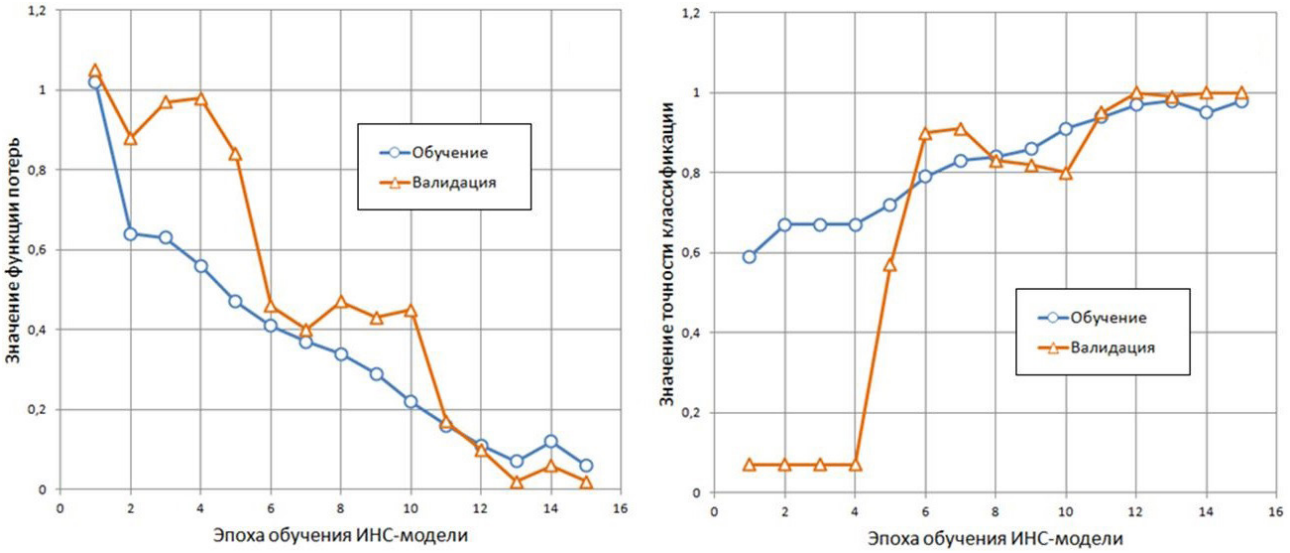
В ходе исследования проверяли модели с тремя–семью сверточными слоями для всех трех этапов технологии. При этом число эпох обучения из-за значительных затрат времени было ограничено 25 эпохами. Результаты показаны в табл. 2, из анализа которой можно сделать общее заключение о том, что архитектура сети и значения гиперпараметров, некоторые из которых показаны на рис. 2, хорошо соответствуют поставленной задаче и датасетам снимков патологий и нормы, так как точность обучения и валидации во всех случаях была равна 100 % или близка к этому значению. Однако на тестовой выборке, состоящей из новых снимков, которые в процессе обучения моделей не участвовали (test2), точность заметно ниже. Этот параметр позволяет определить оптимальное число сверточных слоев для ИНС-моделей всех этапов. Этот параметр зависит от специфичности снимков датасета.

```
model = tf.keras.models.Sequential([
    tf.keras.layers.Conv2D(4, (9,9), activation='relu', input_shape=(IMG_SHAPE, IMG_SHAPE, 3)),
    tf.keras.layers.MaxPooling2D(2, 2),

    tf.keras.layers.Conv2D(8, (5, 5), activation='relu'),
    tf.keras.layers.MaxPooling2D(2, 2),

    tf.keras.layers.Conv2D(16, (3, 3), activation='relu'),
    tf.keras.layers.MaxPooling2D(2, 2),

    tf.keras.layers.Flatten(),
    tf.keras.layers.Dense(225, activation='relu'),
    tf.keras.layers.Dense(2, activation='softmax')
])
model.compile(optimizer='adam',
              loss='categorical_crossentropy',
              metrics=['accuracy'])
```

Рис. 2. Архитектура и параметры модели искусственной нейронной сети с тремя свёрточными слоями и параметры ее компиляции. Первая цифра в Conv2D — число используемых фильтров в слое свёртки, две следующие цифры — размер фильтра в пикселях. Активационные функции нейронов сети — relu, в выходном слое классификации — softmax. Первая цифра в полносвязном слое Dense — число нейронов

```
Model: "sequential"
_________________________________________________________________
 Layer (type)                Output Shape              Param #
=================================================================
 conv2d (Conv2D)             (None, 504, 504, 4)       976

 max_pooling2d (MaxPooling2  (None, 252, 252, 4)       0
 D)

 conv2d_1 (Conv2D)           (None, 248, 248, 8)       808

 max_pooling2d_1 (MaxPoolin  (None, 124, 124, 8)       0
 g2D)

 conv2d_2 (Conv2D)           (None, 122, 122, 16)      1168

 max_pooling2d_2 (MaxPoolin  (None, 61, 61, 16)        0
 g2D)

 flatten (Flatten)           (None, 59536)             0

 dense (Dense)               (None, 225)               13395825

 dense_1 (Dense)             (None, 2)                 452

=================================================================
Total params: 13399229 (51.11 MB)
Trainable params: 13399229 (51.11 MB)
Non-trainable params: 0 (0.00 Byte)
_________________________________________________________________
```

Рис. 3. Параметры ИНС-модели, представленной на рис. 2



а) *б)*

Рис. 4. Пример обучения и валидации ИНС-модели с тремя сверточными слоями для первого этапа: a) график уменьшения функции потерь, b) график увеличения точности

Так, на этапе 1 оптимальной является ИНС-модель, содержащая 5 сверточных слоев, обеспечивающая 87 % верных ответов на новой выборке. Видно, что зависимость точности от числа сверточных слоев имеет максимум, приходящийся на пять. Сети с меньшим числом сверточных слоев имеют большее число оптимизируемых параметров, показывают хорошие результаты при обучении и валидации, но их результаты на новых данных существенно ниже.

Таблица 2

Результаты обучения, валидации и проверки на дополнительных тестовых выборках ИНС-моделей первого — третьего этапов

Этап	Число сверточных слоев	Эпох обучения	Точность обучения, %	Точность валидации, %	Верных ответов (test1), %	Верных ответов (test2), %	Число оптимизируемых параметров
Этап 1	3	18	100	100	100	77	13399229
	4	19	100	100	100	77	6063469
	5	25	98	99	97	87	1234317
	6	25	96	97	98	76	396013
	7	25	95	97	51	39	87341
Этап 2	3	11	100	100	100	64	13399229
	4	9	100	100	100	68	6063469
	5	15	100	100	100	86	1234317
	6	14	100	100	100	85	396013
	7	13	100	100	100	84	87341
Этап 3	3	7	100	100	100	100	13399229
	4	13	100	100	100	100	6063469
	5	9	100	100	100	100	1234317
	6	11	100	100	100	100	396013
	7	7	100	100	100	100	87341

Можно сделать вывод о необходимости увеличения размера обучающей выборки и добавления в неё большего разнообразия снимков, являющихся нормой и тринадцати вариантов других патологий. Также видно, что при увеличении числа сверточных слоев количество оптимизируемых параметров уменьшается, и низкие результаты в этом случае можно связать с этим фактором.

Аналогичный оптимум для ИНС-моделей этапа 2 также существует — это также нейронная сеть с пятью сверточными слоями.

Для третьего этапа все модели показали практически одинаковые стопроцентные результаты. Данное обстоятельство может быть связано, как с малым количеством снимков в датасете, так и с их «простотой», заключающейся в близком соответствии изображений патологий.

Отметим, что полученные модели и их исследование (табл. 2) несколько улучшают результаты использования в аналогичной ситуации одномодельного подхода, где наилучшая точность классификации достигала 85 % [7].

Заключение

Таким образом, в докладе приведены результаты реализации первых этапов многомодельного подхода классификации снимков ОКТ в офтальмологии. Определены гиперпараметры ИНС-моделей: число сверточных слоев, размеры и количество фильтров. Вычислительные эксперименты показали удовлетворительную точность классификации, что позволяет надеяться на реализуемость подхода и его использовании в системах поддержки принятия решений в области офтальмологии.

Благодарности

Работа выполнена в соответствии с договором о научно-техническом сотрудничестве Воронежского государственного университета и Федерального государственного автономного учреждения «Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С.Н. Федорова», Тамбовского филиала от 28.11.2022.

Литература

1. Оптическая когерентная томография сетчатки / Под ред. Дж. С. Дакера, Н. К. Вэхид, Д. Р. Голдмана; пер. с англ. под ред. А. Н. Амирова. – 3-е изд. – М. : МЕДпресс-информ, 2021. – 192 с.

2. *Будума Н.* Основы глубокого обучения. Создание алгоритмов для искусственного интеллекта следующего поколения / Нихиль Будума, Николас Локашо ; пер. с англ. А. Коробейникова; [науч. ред. А. Созыкин]. – М. : Манн, Иванов и Фербер, 2020. – 304 с.

3. *Фостер Д.* Генеративное глубокое обучение. Творческий потенциал нейронных сетей / Д. Фостер – СПб. : Питер, 2020. – 336 с.

4. *Постолит А. В.* Основы искусственного интеллекта в примерах на Python. – СПб. : БХВ-Петербург, 2021. – 448 с.

5. *Арзамасцев А. А.* Автоматизированный анализ протоколов оптической когерентной томографии сетчатки глаза с использованием системы искусственного интеллекта / А. А. Арзамасцев, О. Л. Фабрикантов, Н. А. Зенкова, Е. В. Кулагина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13–15 декабря 2021 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2022. – С. 823–827.

6. *Арзамасцев А. А.* Алгоритмы глубокого машинного обучения в решении задач автоматизированной обработки данных в офтальмологии / А. А. Арзамасцев, О. Л. Фабрикантов, Е. В. Кулагина, С. В. Беликов, Н. А. Зенкова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2023. – С. 285–293.

7. *Арзамасцев А. А., Фабрикантов О. Л., Кулагина Е. В., Зенкова Н. А.* Классификация снимков оптической когерентной томографии с использованием методов глубокого машинного обучения // Digital Diagnostics. – 2024. – Т. 5, № 1. – С. 5–16. DOI: https://doi.org/10.17816/DD623801

УДК 004.942

МОДЕЛИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ ПРЕДОПЕРАЦИОННОГО РАСЧЕТА ИНТРАОКУЛЯРНЫХ ЛИНЗ

А. А. Арзамасцев[1,2], О. Л. Фабрикантов[2], Н. А. Зенкова[3], А. А. Чикина[2]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Тамбовский филиал Национального медицинского исследовательского центра «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С. Н. Федорова
[3]Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина

Аннотация. Для предоперационного расчета интраокулярных линз (ИОЛ) в офтальмологии используются формулы первого–третьего поколений, такие как SRK II, SRK/T, Hoffer-Q, Holladay II, Haigis, Barrett. С развитием систем искусственного интеллекта связано появление современных формул четвертого поколения, таких как Barrett Universal II, Hill-RBF, Kane и Pearl DGS. Главным недостатком первой группы формул является их низкая точность (средняя относительная погрешность на значительных массивах эмпирических данных составляет 11–15 %), что снижает процент попаданий расчетных значений в необходимый для офтальмологов диапазон ±0,5 дптр до 13–14 %. Формулы четвертого поколения имеют существенно меньшую среднюю относительную погрешность (2,7–3,2 %), что позволяет получить больший процент попаданий в диапазон ±0,5 дптр (55–67%). Данные формулы представлены в сети в виде специализированных калькуляторов, их структура и коэффициенты скрыты от пользователей, что исключает возможность анализа влияния и взаимовлияния входных показателей на оптическую силу ИОЛ, а также их использование в системах поддержки принятия решений в области офтальмологии. В данной работе авторы продолжили серию исследований, посвященных разработке систем искусственного интеллекта для расчета оптической силы интраокулярных линз на основе моделей искусственных нейронных сетей (ИНС-моделей). В докладе приведены: авторские разработки систем искусственного интеллекта на основе ИНС-моделей для расчета ИОЛ, внедренные в офтальмологическую практику, а также их сравнение с моделями, полученными в результате аппроксимации данных, полученных с калькуляторов формул Barrett Universal II, Hill-RBF, Kane и Pearl DGS. На значительных по объему локальных датасетах разработанные модели незначительно превосходят известные формулы, однако, их открытость и возможность переучивания по мере накопления новых данных открывают значительную перспективу использования в системах поддержки принятия решений в области офтальмологии.

Ключевые слова: модели искусственного интеллекта, искусственные нейронные сети, глубокое машинное обучение, оптическая сила интраокулярной линзы формулы расчета ИОЛ, формулы четвертого поколения.

Введение

Имплантация современных интраокулярных линз (ИОЛ) позволяют офтальмологам успешно решать задачи по хирургическому лечению катаракты. При этом улучшение зрительных функций пациента напрямую связано с точностью предоперационного расчета оптической силы ИОЛ. Повышение точности таких расчетов представляет собой актуальную проблему, для решения которой в последнее время используют системы искусственного интеллекта на основе искусственных нейронных сетей (ИНС-модели).

Наиболее точными методиками расчета ИОЛ, используемыми в настоящее время в мировой офтальмологической практике являются формулы Barrett Universal II, Hill-RBF, Kane и Pearl DGS (формулы четвертого поколения), полученные, по утверждению авторов, с использованием систем искусственного интеллекта [1–4]. Они представлены в сети в виде специа-

лизированных калькуляторов, их структура и коэффициенты скрыты от пользователей, что исключает возможность анализа влияния и взаимовлияния входных показателей на оптическую силу ИОЛ, а также их использование в системах поддержки принятия решений в области офтальмологии.

Имеется несколько современных работ, посвященных анализу точности этих формул и некоторых систем искусственного интеллекта.

Так работа [5] посвящена исследованию использования машинного обучения для прогнозирования возникновения послеоперационной рефракции после операции по удалению катаракты и сравнение точности этого метода с традиционными формулами расчета оптической силы интраокулярной линзы. При этом коэффициенты формул расчета оптической силы ИОЛ и модели машинного обучения были оптимизированы с использованием обучающих выборок, т.е. адаптированы к локальным данным. Были оценены результаты, полученные по формулам SRK/T, Haigis, Holladay 1, Hoffer Q и Barrett Universal II. Показано, что среди традиционных формул Barrett Universal II имела самую низкую среднюю и медианную абсолютную ошибку прогноза. Поэтому авторы сравнили точность моделей машинного обучения с точностью Barrett Universal II. Абсолютные ошибки некоторых методов машинного обучения были ниже, чем у Barrett Universal II. Однако статистически значимой разницы не наблюдалось. Авторы сделали вывод, что точность методов машинного обучения не уступала точности формулы Barrett Universal II.

В обзоре [6] оценивали точность формул для расчета оптической силы ИОЛ, основанных на искусственном интеллекте на основе анализа статей, опубликованных с 2017 по июль 2023 года. Всего было рассмотрено 25 рецензируемых статей на английском языке с максимальной выборкой и наибольшим количеством сравниваемых формул. Для оценки точности формул использовались оценки средней абсолютной ошибки и процента пациентов, для которых рефракционная ошибка расчета попадала в диапазоны ±0,5 дптр и ±1,0 дптр. В большинстве случаев формула Kane позволила получить наименьшую среднюю абсолютную ошибку и самый высокий процент пациентов в указанных диапазонах. Второе место обычно занимала формула Pearl DGS.

В наших предыдущих работах [7–14] были получены следующие результаты в области разработки методов предоперационного расчета оптической силы ИОЛ с использованием ИНС-моделей:

– показана генерализуемость эмпирических данных, полученных от большого числа пациентов офтальмологической клиники в рамках одной ИНС-модели, сделан вывод об оптимальной архитектуре такой модели, полученной на основе разложения функции многих переменных в ряд Тейлора и реализованной с использованием машинного обучения искусственных нейронных сетей средствами Python в Google Colaboratory;

– проведена оценка значимости входных параметров;

– предложена концепция и ее реализация для динамически развивающейся системы искусственного интеллекта, переобучаемой по мере поступления новых эмпирических данных о пациентах;

– реализован способ расчета оптической силы ИОЛ на основе системы искусственного интеллекта, внедренный в офтальмологическую практику.

Однако, проблема повышения точности ИНС-моделей и повышения процента попаданий расчетных значений оптической силы ИОЛ в диапазон ±0,5 дптр по-прежнему остается.

Целью данной работы является дальнейшее совершенствование ИНС-моделей для системы искусственного интеллекта расчета оптической силы ИОЛ, их сравнение с калькуляторами четвертого поколения и изучение влияния на целевой показатель главных входных факторов.

Материалы и методы

При разработке ИНС-модели использовали датасеты, состоящие из 904 (890) обезличенных записей пациентов Тамбовского филиала МНТК «Микрохирургия глаза» им. академика С. Н. Федорова. Для получения аппроксимационных моделей формул Barrett Universal II, Hill-RBF, Kane, Pearl DGS использовали по 400 записей, полученных с online-калькуляторов [1–4] для реальных входных параметров. Для доказательства стационарности полученных результатов все расчеты были сделаны сначала на датасете в 150 записей, а затем для всех 400 записей. Использование такой технологии было необходимо для подтверждения репрезентативности выборки ввиду небольшого количества записей. Сравнение результатов показало их полную идентичность. Для обучения ИНС-моделей использовали градиентные методы спуска, а также безградиентные — покоординатного спуска и Монте-Карло, реализованные средствами Python в Google Colaboratory. Оценку точности ИНС-моделей проводили по средней относительной погрешности и проценту попадания расчетных значений оптической силы ИОЛ в диапазон ±0,5 дптр.

Полученные результаты и их обсуждение

Оптимальная архитектура ИНС-моделей была получена в наших предыдущих работах по генерализуемости данных на основе разложения функции многих переменных в ряд Тейлора [7, 8, 11]. Эта архитектура показана на рис. 1 и соответствует формуле:

$$Y = w_{19}\sum_{i=1}^{6} w_i x_i + \left(w_{20}\sum_{i=1}^{6} w_{i+6} x_i \right)^2 + \left(w_{21}\sum_{i=1}^{6} w_{i+12} x_i \right)^3 + w_{22},$$

где символом w обозначены весовые коэффициенты, значения которых определяются в результате решения оптимизационной задачи на основе датасетов эмпиричес ких данных.

Получены следующие показатели точности ИНС-модели и аппроксимационных моделей известных офтальмологических формул (табл. 1). Таким образом, полученная на локальных данных ИНС-модель имеет меньшие значения средней относительной и максимальной относительной погрешностей по сравнению с аппроксимационными моделями известных формул четвертого поколения. Процент попадания расчетных значений оптической силы ИОЛ в диапазон ±0,5 дптр у ИНС-модели лучше, чем у формул Hill-RBF, Kane, Pearl DGS и сопоставим с формулой Barrett Universal II. Данная ИНС-модель оформлена патентом РФ на способ расчета оптической силы ИОЛ [14] и внедрена в офтальмологическую практику в виде специализированного калькулятора системы поддержки принятия решений врачей-офтальмологов.

После получения адекватной ИНС-модели оценивали влияние входных факторов — константы А, глубины передней камеры, длины глаза, рефракции сильного и слабого меридианов, толщины линзы, на величину оптической силы ИОЛ по различным моделям. Вычислительный эксперимент проводили таким образом, чтобы получить однопараметрические зависимости от каждого из входных факторов при средних значениях других факторов. Такие зависимости полезны для врачей-офтальмологов и позволяют понять направление и силу влияния каждого входного фактора на целевой показатель (рис. 2–4).

Результаты данных вычислительных экспериментов, обсуждаемые в докладе, свидетельствуют о близости оценок оптической силы ИОЛ, полученным по различным моделям в диапазонах их применимости.

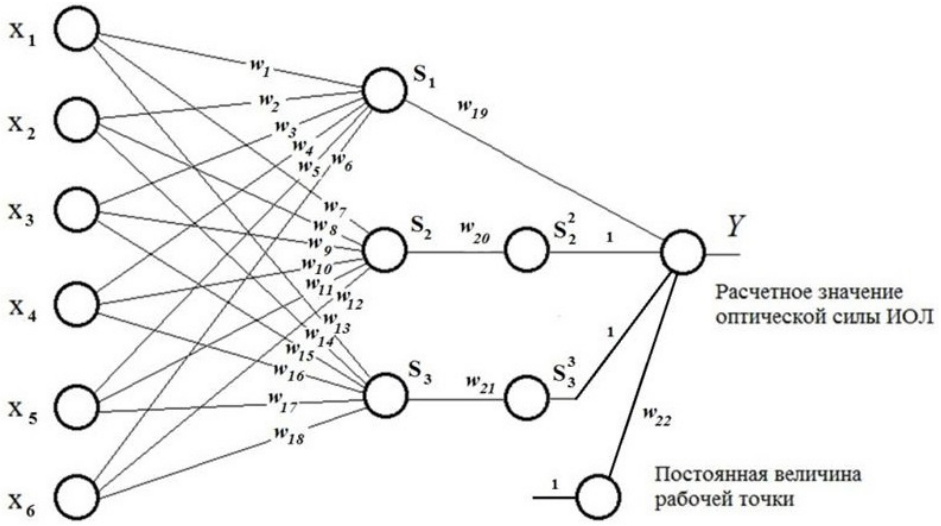


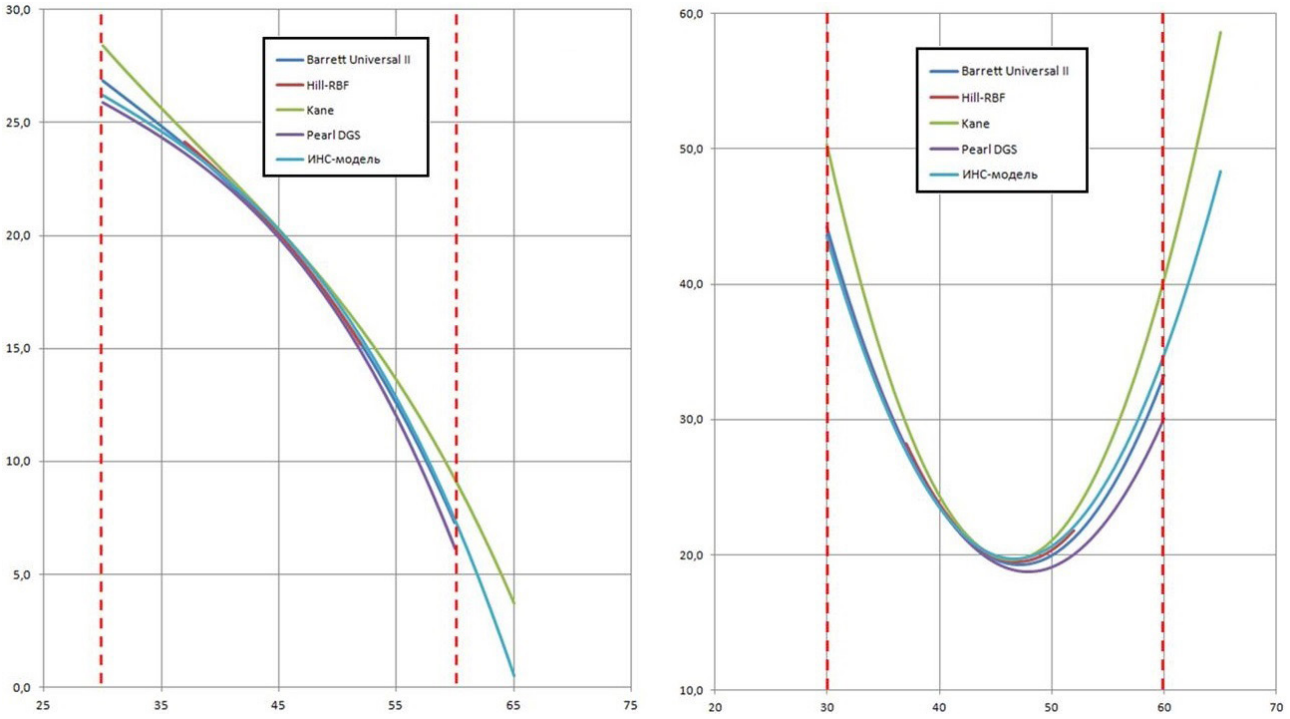
Рис. 1. Схема ИНС-модели

Таблица 1

Результаты расчетов оптической силы ИОЛ для ИНС-модели и аппроксимационных моделей формул четвертого поколения на локальных данных

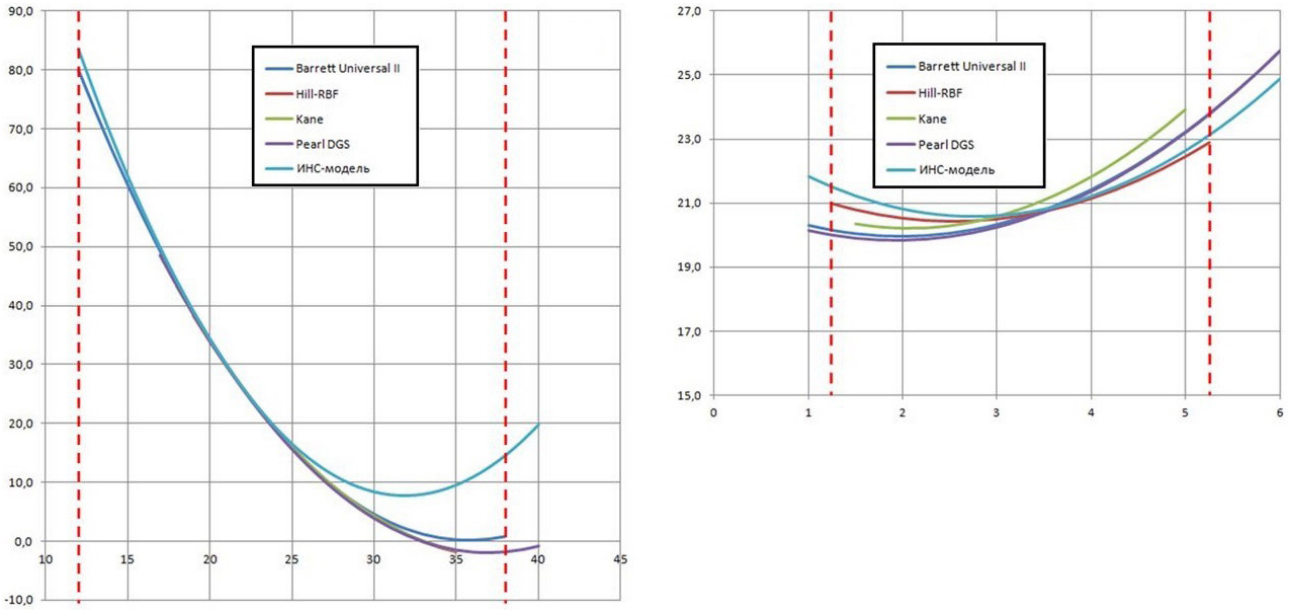
ИНС-модель или формула, год опубликования	Входные параметры	Средняя относительная погрешность расчетов, %	Попаданий расчетной величины в диапазон ±0,5 дптр, %	Максимальная относительная погрешность расчетов, %	Примечание
ИНС-модель, 2024	A, ACD, AL, K1, K2, LT	2,33	67,0	44	Результаты получены на локальных данных (890 записей)
Barrett Universal II, 2019, [1]	A, ACD, AL, K1, K2, LT	2,67	67,8	64,3	Результаты получены на локальных данных (400 записей)
Hill-RBF, 2020, [2]	A, ACD, AL, K1, K2, LT	2,75	63,0	71,4	Результаты получены на локальных данных (400 записей)
Kane, 2017, [3]	A, ACD, AL, K1, K2, LT	2,78	55,3	71,4	Результаты получены на локальных данных (400 записей)
Pearl DGS, 2021, [4]	A, ACD, AL, K1, K2, LT	3,21	64,5	71,4	Результаты получены на локальных данных (400 записей)

A — константа, модель ИОЛ; ACD — глубина передней камеры, мм; AL — длина глаза, мм; K1 — рефракция слабого меридиана, дптр; K2 — рефракция сильного меридиана, дптр; LT — толщина линзы, мм.



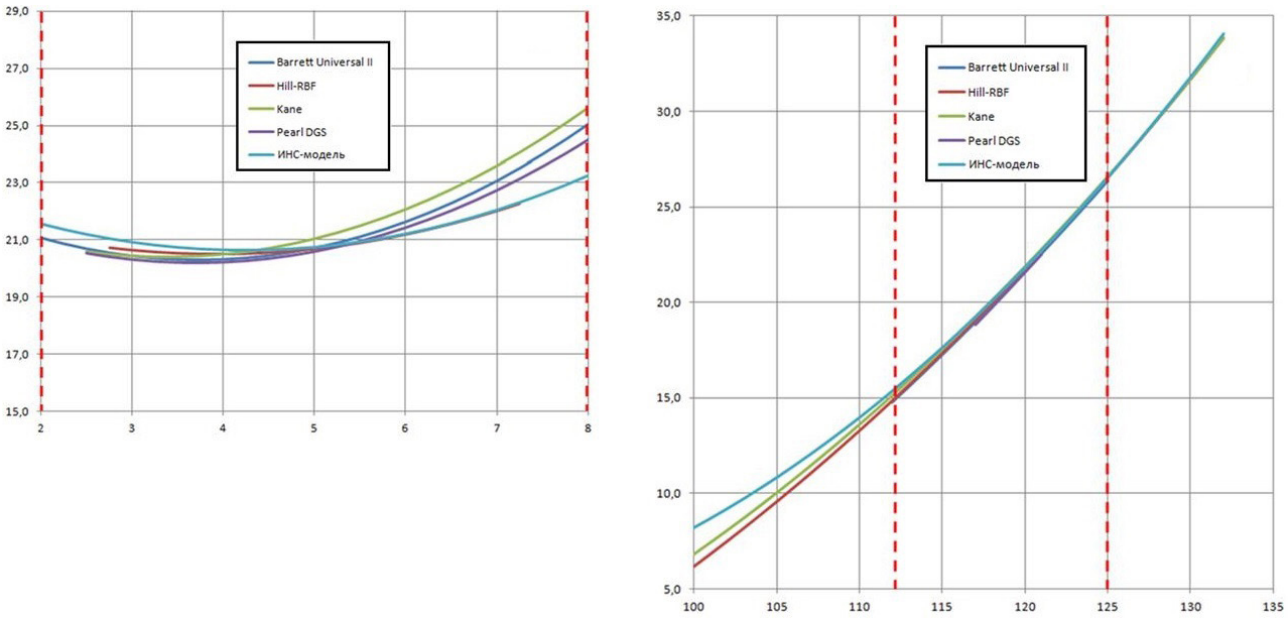
а) *б)*

Рис. 2. Зависимость оптической силы ИОЛ от рефракции сильного меридиана (dптр) — a) и рефракции слабого меридиана (dптр) — b) по различным формулам и ИНС-модели. Красная пунктирная линия — ограничения по формуле Barrett Universal II



а) *б)*

Рис. 3. Зависимость оптической силы ИОЛ от оптической длины глаза (мм) — a) и от глубины передней камеры (мм) — b) по различным формулам и ИНС-модели. Красная пунктирная линия — ограничения по формуле Barrett Universal II



а) *б)*

Рис. 4. Зависимость оптической силы ИОЛ от толщины хрусталика (мм) — a) и от модели ИОЛ (коэффициент A) — b) по различным формулам и ИНС-модели. Красная пунктирная линия — ограничения по формуле Barrett Universal II

Заключение

Таким образом, в данной работе показано, что способность моделей на основе искусственных нейронных сетей к хорошей генерализации офтальмологических данных открывает возможности создания интеллектуальной экспертной системы с динамическим поступлением новых данных и многократным глубоким машинным обучением интеллектуального ядра. Основной особенностью такой системы по сравнению с использованием традиционных формул расчета является ее адаптивность, позволяющая решать проблемы нестационарности объекта и локализации вследствие наличия в ней обратной связи. В случае, если для пациента известны не все данные, возможно также построить ИНС-модель и с использованием обучающей выборки меньшего размера или заменить недостающие данные средними или прогнозируемыми.

Благодарности

Работа выполнена в соответствии с договором о научно-техническом сотрудничестве Воронежского государственного университета и Федерального государственного автономного учреждения «Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С. Н. Федорова», Тамбовского филиала от 28.11.2022.

Литература

1. Barrett Universal II Formula. [Last cited on 2019 Feb 22]. Available from: – URL: https://www.apacrs.org/barrett_universal2/ (дата обращения: 04.07.2024).

2. Hill-RBF calculator version 2.0. – URL: https://rbfcalculator.com/ online/index.html (дата обращения: 04.07.2024).

3. Kane formula. – URL: https://www.iolformula.com/about/ (дата обращения: 04.07.2024).

4. *Debellemaniere G.* The PEARL-DGS formula: the development of an open-source machine learning-based thick IOL calculation formula / G. Debellemaniere, M. Dubois, M. Gauvin, A. Wallerstein, F. Brenner Luis, R. Rampat, A. Saad, D. Gatinel // American Journal of Ophthalmology. – 2021. – May 13: S0002-9394(21)00276-2. doi: 10.1016/j.ajo.2021.05.004.

5. *Yamauchi T.* Use of a machine learning method in predicting refraction after cataract surgery / T Yamauchi., T Tabuchi., K. Takase, H Masumoto // Journal of Clinical Medicine. – 2021. – 10, 1103. doi: 10.3390/jcm10051103

6. *Stopyra W.* Review of intraocular lens power calculation formulas based on artificial intelligence / W. Stopyra, D. L. Cooke, A. A. Grzybowski // Journal of Clinical Medicine. – 2024. – 13, 498. https://doi.org/10.3390/jcm13020498

7. *Арзамасцев А. А.* Генерализация данных при расчете интраокулярных линз с использованием ИНС-моделей / А. А. Арзамасцев, О. Л. Фабрикантов, Н. А. Зенкова, С. В. Беликов // Вестник ВГУ: серия «Системный анализ и информационные технологии». – 2023. – № 1. – С. 80–95. DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2023/1/80-95

8. *Арзамасцев А. А.* Расчет интраокулярных линз (ИОЛ) в офтальмологии с использованием моделей искусственного интеллекта / А. А. Арзамасцев, О. Л. Фабрикантов, Н. А. Зенкова, С.В. Беликов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13–15 декабря 2021 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2022. – с. 291–296.

9. *Arzamastsev A. A.* Algorithms and methods for extracting knowledge about objects defined by arrays of empirical data using ANN models / A. A. Arzamastsev, N. A. Zenkova, N. A. Kazakov // Journal of Physics: Conference Series 1902 (2021) 012097. doi:10.1088/1742-6596/1902/1/012097.

10. *Арзамасцев А. А.* Алгоритмы глубокого машинного обучения в решении задач автоматизированной обработки данных в офтальмологии / А. А. Арзамасцев, О. Л. Фабрикантов, Е. В. Кулагина, С. В. Беликов, Н. А. Зенкова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2023. – с. 285–293.

11. *Арзамасцев А. А., Фабрикантов О. Л., Зенкова Н. А., Беликов С. В.* Применение технологии машинного обучения для прогнозирования оптической силы интраокулярных линз: генерализация диагностических данных / А. А. Арзамасцев, О. Л. Фабрикантов, Н. А. Зенкова, С. В. Беликов // Digital Diagnostics. – 2024. – Т. 5, № 1. – С. 53–63. DOI: https://doi.org/10.17816/DD623995

12. *Arzamastsev A. A, Fabrikantov O. L., Zenkova N. A., Belikov S. V.* Predicting the optical power of intraocular lenses by means of dynamically developing artificial intelligence system / A. A. Arzamastsev, O. L. Fabrikantov, N. A. Zenkova, S. V. Belikov // Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (AMCSM). – 2023. – IEEE | DOI: 10.1109/AMCSM59829.2023.10525908

13. *Арзамасцев А. А., Фабрикантов О. Л., Беликов С. В., Зенкова Н. А.* Прогнозирование оптической силы интраокулярных линз динамически развивающейся системой искусственного интеллекта / А. А. Арзамасцев, О. Л. Фабрикантов, С. В. Беликов, Н. А. Зенкова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4–6 декабря 2023 г. – Воронеж, Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 150–154.

14. Патент РФ № 2021133515/22, заявл. 25.02.22, опубл. 06.03.23 Арзамасцев А. А., Фабрикантов О. Л., Сырых К. К., Беликов С. В. Способ определения оптической силы интраокулярной линзы с использованием искусственной нейронной сети // Патент России № 2791204 : МПК A61F 2/14, G16H 10/60, G06N 3/02. 2023, Бюл. № 7.

УДК 004.08

АНАЛИЗ ТОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАРРАТИВА: РУССКОЯЗЫЧНЫЙ ТЕКСТ И SENTIART

Е. В. Бирюкова, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Представлено сравнение различных подходов к определению тональности художественного текста в рамках задачи моделирования нарратива, а также анализ проблем, возникающих при применении стандартных алгоритмов для художественной литературы. Представлен экспериментальный подход, основанный на использовании модели SentiArt, который позволяет определять валентность текста без необходимости обучения на больших объемах данных.
Ключевые слова: нарратив, нарратология, моделирование нарратива, анализ тональности текста, машинное обучение, словарь тональности, LSA.

Введение

Нарратив представляет собой последовательное описание взаимосвязанных событий, представленное аудитории в виде вербального или визуального ряда. Компьютерная нарратология фокусируется на анализе существующих нарративов, преимущественно текстовых, с применением вычислительных методов.

Исследование [1] детально формулирует задачу анализа нарративов и предлагает алгоритм ее решения, учитывая специфику работы с русским языком. Работа [2] анализирует проблемы, возникающие при использовании стандартных алгоритмов для определения тональности художественной литературы. Эксперименты, проведенные в рамках этого исследования, демонстрируют неприменимость стандартных методов в контексте моделирования нарратива. Отмечено, что наиболее сложная архитектурная модель показала наилучшие результаты. Необходимо провести более глубокое исследование относительно узкого диапазона выраженности сантимента, выявленного в ходе анализа.

Проведённые в работе [3] эксперименты демонстрируют, что замена русского языка на английский не приводит к существенному повышению точности. Полученные результаты указывают на превалирующее влияние особенностей жанра на итоговые показатели, что обуславливает необходимость дальнейших исследований, направленных на адаптацию к стилистическим свойствам текста. Ввиду отсутствия соответствующих аннотированных корпусов, применение методов машинного обучения, требующих значительного объема данных для обучения модели, представляется нецелесообразным. Необходимо изучить возможность адаптации к русскому языку таких решений, как SentiArt [4] и SÉANCE [5].

Рассмотрим эксперименты с использованием более простых моделей, обучение которых не требует большого объема обучающих данных, где также применяется предварительное кодирование корпуса с помощью специального инструмента на основе модели векторного пространства.

1. Описание эксперимента

Для определения валентности текстового сегмента с помощью SentiArt используется следующий алгоритм:

Шаг 1. Создается обучающий корпус, общий или специализированный для конкретной задачи, который объединяет все тексты в один составной документ. Затем рассчитывается век-

торное пространство слов (VSM) с использованием простого в использовании инструмента fasttext [6].

Шаг 2. Рассчитываются значения семантической связи между каждым словом в VSM и метками из списка меток. Например, вычисление косинусного сходства между целевым словом «мучение» («AGONY») и тремя первыми положительными и отрицательными метками из набора меток Ekman99 («счастье», «удовольствие», «гордость»), эмпирически подтвержденных в предыдущих исследованиях английских и немецких текстов [4] даст среднее значение 0,33 для положительных меток и 0,51 для отрицательных. Вычитание одного из другого дает валентность -0,18, что указывает на отрицательную валентность слова «мучение» («AGONY»). Эта процедура применяется ко всем словам в VSM, вычисляя значения как валентности, так и интенсивности.

Шаг 3. Данная процедура создает двумерное Пространство Эмоционального Потенциала (валентность, умноженная на интенсивность). Это пространство может служить справочной точкой для многих будущих исследований анализа тональности. Таким образом, каждое слово из заданного тестового текста может быть размещено в этом пространстве получая стандартизированные (относительные) значения валентности и интенсивности. На третьем шаге рассчитываются средние баллы для интересующих текстовых сегментов (например, те, которые оценены как страшные или радостные), которые затем используются в качестве входных данных для классификаторов.

Необходимо вычислить показатели анализа настроений, используя словари: SentiWordNet [7] Rusentilex_2017 [8]. После вычисления трех показателей анализа настроений для каждого из 360 текстовых сегментов, эти показатели были стандартизированы и использованы как входные данные для пяти классификаторов, реализованных в Skitlearn [9], чтобы проверить точность прогнозирования категории настроения тестового набора (после обучения на обучающем наборе из 70% из 360 сегментов). Случайная выборка была стратифицированной (то есть сбалансированной по трем текстовым категориям) и повторялась 100 раз с различными обучающими и тестовыми наборами, чтобы получить стабильные результаты. В качестве контрольного условия использовалась LSA [10], реализованная в Gensim [11]. Эта система не является системой анализа настроений, что позволило оценить ее способность классифицировать текстовые сегменты без использования специфичных показателей настроения.

2. Результаты экспериментов

Результаты, обобщенные в табл. 1, представляют собой показатели классификации для каждого из трех методов анализа тональности (SAT) и LSA. Текущее сравнение классификаторов демонстрирует оптимальную производительность для признака валентности SentiArt (с использованием логистической регрессии), а также более низкие показатели для признака словаря Rusentilex_2017 с использованием нейронной сети) и признака Rusentilex_2017 (с использованием логистической регрессии). Точность контрольного метода (LSA), хотя и уступает другим, свидетельствует о том, что абстрактные семантические признаки, вычисленные LSA, все же улавливают аффективные аспекты, позволяющие классифицировать (в определенной степени) тексты в категории тональности.

Таблица 1

Сравнительные покаказатели классификации

Классификатор	SentiWordNet	Rusentilex_2017	SentiArt	LSA
Neural network	0.593	0.751	0.783	0.547
Logistic regression	0.614	0.739	0.816	0.531
AdaBoost	0.551	0.645	0.791	0.558
kNN	0.562	0.658	0.791	0.523
Naïve Bayes	0.578	0.745	0.746	0.539

Заключение

Анализ тональности текста — ключевой элемент построения модели текстового русскоязычного нарратива. Несмотря на трудности, вызванные спецификой жанров и особенностями русского языка, эксперименты показали, что использование английского языка не приводит к существенному повышению точности анализа. Это говорит о том, что проблемы жанровой принадлежности оказывают наибольшее влияние на результаты. Следовательно, дальнейшие исследования должны быть направлены на адаптацию моделей к стилистическим особенностям текста. Ввиду отсутствия необходимых аннотированных корпусов для обучения моделей машинного обучения, необходимо обратить внимание на существующие решения, адаптированные к русскому языку, такие как SentiArt и SÉANCE.

Использование инструмента SentiArt позволяет достичь точности выше 75 % при отсутствии необходимости обучать классификаторы на больших корпусах, что критично для решения задачи. Таким образом, при демонстрации такого же результата на других текстах, можно применять его при анализе тональности любого художественного текста с целью построения его нарратива.

Следует подчеркнуть, что моделирование нарративов представляет собой сложную задачу, не имеющую простого решения. Поэтому поиск и оценка различных подходов к решению этой задачи имеет первостепенное значение. Каждый положительный результат в этой области обладает значительной новизной, поскольку открывает новые горизонты для исследования и понимания механизмов построения нарративов.

Литература

1. *Бирюкова Е. В.* Методы моделирования и анализа нарративов русскоязычных текстов / Е. В. Бирюкова, И. Е. Воронина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции (Воронеж, 12–14 декабря 2022 г.). – Воронеж, 2022. – С. 176–180.

2. *Бирюкова Е. В.* Анализ тональности текста как метод моделирования русскоязычного нарратива / Е. В. Бирюкова, И. Е. Воронина // Международная научно-практическая конференция им. Э.К. Алгазинова «Информатика: проблемы, методы, технологии» (IPMT) (Воронеж, 15–17 февраля 2023 г.) – Воронеж, 2022. – С. 934–938.

3. *Бирюкова Е. В.* Сравнение анализа тональности англоязычных и русскоязычных художественных текстов / Е. В. Бирюкова, И. Е. Воронина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4-6 декабря 2023 г. – Воронеж, 2024. – С. 1079–1085.

4. *Jacobs A. M.* Sentiment analysis for words and fiction characters from the perspective of computational (neuro-) poetics / A. Jacobs // Frontiers in Robotics and AI. – 2019. – Т. 6. – С. 53.

5. *Crossley S.* A Sentiment Analysis and Social Cognition Engine (SEANCE): An automatic tool for sentiment, social cognition, and social-order analysis / S. Crossley, K. Kyle, D. McNamara D // Behavior research methods. – 2017. – Т. 49. – С. 803–821.

6. *Mikolov T.* Advances in Pre-Training Distributed Word Representations / T. Mikolov, E. Grave, P. Bojanowski, C. Puhrsch, A. Joulin // ArXiv – 2017. – Т. 1712. – С. 9405–9415.

7. *Baccianella S.* Sentiwordnet 3.0: an enhanced lexical resource for sentiment analysis and opinion mining / S. Baccianella, A Esuli, F. Sebastiani // Lrec. – 2010. – Т. 10. – № 2010. – С. 2200–2204.

8. *Loukachevitch N.* Creating a General Russian Sentiment Lexicon / N. Loukachevitch, A. Levchik // Lrec. – 2016. – Т. 16. – №. 2016. – С. 1171–1176.

9. Skitlearn – URL: https://scikit-learn.org

10. *Deerwester S.* Indexing by Latent Semantic Analysis / S. Deerwester, S. Dumais, G. Furnas, T. Landauer // Journal of the American Society for Information Science. – 1990. – Т. 41. – С. 391–397.

11. Gensim – URL: https://scikit-learn.org

УДК 004.048

ОБЗОР МЕТОДОВ ПРИМЕНЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ТРАЕКТОРНОЙ ОБРАБОТКЕ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Д. А. Василевский, И. Л. Каширина

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В статье поднимается проблема классических методов траекторной обработки. На сегодняшний день эти методы постепенно теряют свою актуальность, поскольку имеют ряд существенных недостатков, ограничивающий их применимость в определённых условиях. Это приводит к снижению точности выдаваемой информации, увеличению длительности вычислений, невозможности работы в режиме реального времени и т. д. В данной работе рассмотрены способы применения технологии искусственного интеллекта для решения задач траекторной обработки с целью устранения недостатков классического подхода.

Ключевые слова: траекторная обработка, Multi-Target Tracking, распознавание, нелинейная экстраполяция, рекуррентные нейросети, несвёрточные нейроны.

Введение

В настоящее время радиолокация используется повсеместно не только в военных, но и в гражданских целях. При этом требования, предъявляемые к современным радиолокаторам, постоянно растут. Главным образом эти требования заключаются в повышении точности оценки параметров, улучшении вероятностных характеристик обнаружения и, конечно же, увеличению темпа выдачи радиолокационной информации.

Ещё в 70-ых годах прошлого века радиолокационная обработка стала выполняться автоматически — без участия человека принимается решение об обнаружении цели, завязке траектории и т. д. Однако в силу сложности математического аппарата, задачи радиолокации не могут быть решены в самом общем виде, в связи с чем автоматические радиолокаторы при расчётах принимают ряд допущений, таких, например, как стационарность помех, выделение сигнала на фоне белого шума, ограниченность числа целей и т. д. В условиях динамически меняющийся внешней обстановки классические алгоритмы значительно теряют свои преимущества: повышается вероятность ложных обнаружений, увеличивается время обработки, снижается точность. В присутствии нестационарных, негауссовых помех или большого числа целей возникает ошибочное отождествление целей и траекторий, появляется огромное количество ложных отметок и трасс.

Современный подход к решению перечисленных проблем заключается во внедрении искусственного интеллекта в системы обработки радиолокационной информации. Целью данной работы является изучение и анализ подходов к применению машинного обучения для модернизации классических радиолокаторов.

1. Классические методы траекторной обработки

Траекторная обработка радиолокационной информации обеспечивает возможность сопровождения цели на протяжении нескольких периодов обзора РЛС. На этапе траекторной обработки решаются следующие задачи:

1. *Завязка траектории* — принимается решение о взятии на сопровождение новой цели по результатам нескольких её обнаружений;

2. *Экстраполяция координат* — по имеющейся информации о траектории движения цели производится предсказание её будущего положения и выставление строба, где ожидается новое обнаружение;

3. *Идентификация отметки и траектории* — необходимо установить однозначное соответствие между множеством отметок, обнаруженных на новом периоде обзора, и множеством целей, сопровождаемых в данный момент

Рассмотрим классические методы решения задач траекторной обработки, а также проблемы, возникающие при этом.

1.1. Основные принципы траекторной обработки

В настоящее время традиционным базовым принципом траекторной обработки считается *принцип фильтрации Калмана*. Фильтр Калмана — адаптивный алгоритм предсказания эволюции системы (в данном случае — движения цели) на основании взвешенной суммы результатов измерений и предыдущих предсказаний. Для предсказания будущего состояния цели используется некоторая модель её движения. Для измерения текущего состояния используются результаты обнаружения цели на каждом новом периоде обзора. Весовые коэффициенты предсказания и измерения динамически изменяются и зависят от дисперсии ошибок, соответственно, модели и измерителя координат. Суть подхода можно свести к следующему. Если имеется неточный обнаружитель, с высокой дисперсией ошибок, весовой коэффициент измерений будет малым, тем самым вклад измерителя в предсказанное состояние цели уменьшается, а фильтр будет больше доверять предсказанию модели. Если же уменьшается точность модели движения, то фильтр станет больше доверять измеренным значениям, чем предсказанным. Таким образом, калмановская фильтрация позволяет системе адаптироваться к изменениям поведения цели.

Процесс завязки траектории сводится к следующему алгоритму (рис. 1). После появления в результате очередного обзора новой обнаруженной отметки создаётся формуляр траектории, включающий в себя информацию о координатах цели и её скорости. Далее выставляется строб завязки — некоторая область вокруг полученной отметки, где ожидается новое измерение координат. На следующем периоде обзора все отметки, попавшая внутрь строба, создают новые формуляры траектории, для каждого из которых выставляется собственный строб завязки.

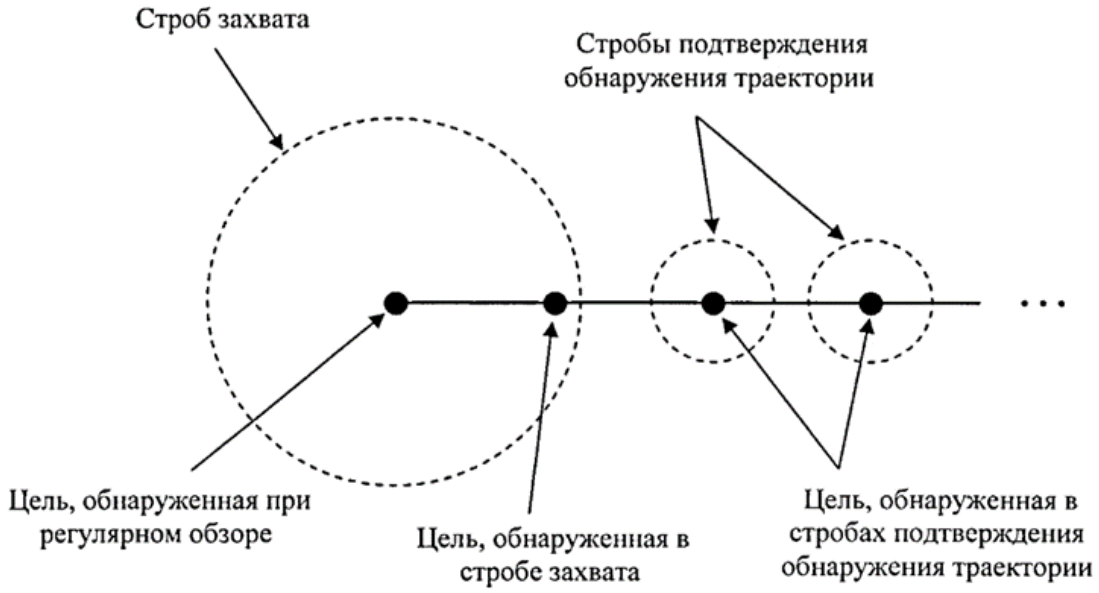


Рис. 1. Процесс завязки траектории

Решение о взятии цели на сопровождение принимается по нескольким результатам обнаружения цели в стробе. Типичным критерием может являться 3 обнаружения за 4 периода обзора. Пока этого не произошло, цель не взята на сопровождение и траектория всё ещё находится на стадии завязки. Если критерий завязки выполнен, траектория считается истинной, цель берётся на сопровождение. На основании текущих измерений с помощью экстраполяции и алгоритма калмановской фильтрации формируется предсказание следующего состояния цели. Вокруг предсказанных координат формируется строб сопровождения, размеры которого меньше строба завязки. Следующее измерение цели ожидается именно в этой области. Если же критерий завязки не выполнен (цель в стробе не обнаружена), траектория сбрасывается. Сброс сопровождаемой траектории осуществляется по новому критерию, например, 3 пропуска подряд [1].

Все перечисленные выше алгоритмы рассмотрены пока что для случая сопровождения одной цели. В случае, когда траекторий и отметок несколько, ставится задача их взаимного отождествления.

Отождествление (идентификация) производится последовательно. Сперва каждая из отметок, обнаруженных за период повторения, проверяется на возможность продолжения существующих траектории. Для каждой траектории выбирается наиболее подходящая, согласно заданному критерию оптимальности, отметка. В дальнейшей обработке эти отметки не участвуют. Для оставшихся отметок оценивается возможность продолжения траекторий, находящихся на стадии завязки. Отметки, «не пригодные» не для существующих траекторий, ни для формируемых, считаются новыми целями, для которых снова создаётся формуляр траектории, выставляется строб завязки и так далее.

Критерий оптимальности отождествления отметок формулируется на основе классической теории принятия решений: например, байесовский критерий максимального правдоподобия. Для этого следует определить совместную плотность вероятности обнаруженных отметок (измерений) и предсказаний, экстраполированных на предыдущем обзоре. Предполагая измерения координат независимыми, можно записать совместную плотность распределения в виде произведения гауссовых случайных величин:

$$w(x_1,\ldots x_n, y_1,\ldots y_n) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J}\frac{(x_{ij}-y_{kj})}{\sigma_{ij}^2}\right),$$

где x_i — вектор предсказанных координат i-й траектории;

y_i — вектор измеренных координат i-й отметки;

J — количество измеряемых координат;

σ_{ij} — дисперсия отклонений j-й координаты от предсказания;

k — выбранный набор номеров идентифицируемых отметок.

Задача заключается в подборе таких номеров k, при которых функция правдоподобия будет максимальна (присвоить отметкам номера соответствующих им траекторий). Такой аппарат требует достаточно трудоёмких и объёмных вычислений. При этом количество отметок не всегда совпадает с количеством траекторий: возможны появления новых целей, ложные тревоги и отсутствие измерений.

Альтернативой этому методу может послужить построение двудольного взвешенного графа. Рёбрам графа присваиваются веса, равные сумме дисперсий отклонений измеряемых координат от предсказания σ_{ij}^2. Минимизация суммарного веса такого графа приведёт к оптимальной идентификации отметок по критерию минимума среднего квадрата ошибки. В некоторых случаях такой подход позволяет сократить объём вычислений, однако он всё ещё будет расти пропорционально 4-й степени размерности задачи.

1.2. Основные недостатки классических методов траекторной обработки

Все изложенные выше алгоритмы и методы имеют ряд существенных недостатков. Самым главным из них можно назвать *огромный объём трудоёмких вычислений*. В этом можно убедиться на примере решения задачи отождествления отметок, который при большом количестве обнаружений сводится к перебору огромного числа вариантов сочетаний отметка-траектория для оценки функции правдоподобия.

Другим недостатком является *линейность* алгоритма калмановской фильтрации. В ситуациях, когда цель активно маневрирует, фильтр Калмана накапливает ошибку предсказания из-за невозможности нелинейной экстраполяции движения, в результате чего цель может сброситься с сопровождения.

Кроме того, следует отметить, что величина строба в классических методах траекторной обработки определяется величиной ошибки измерения соответствующих координат, которая может достигать нескольких сотен метров. Эта проблема не проявляет себя при сопровождении одиночной цели, однако в условиях интенсивного налёта в стробе появляется слишком большое число отметок, что может привести к ошибочной завязке траектории.

Особенно сильно ухудшение качества сопровождения проявляется при *сопровождении групповой цели* (например, рой БПЛА). В этом случае, как правило, сопровождение целей по отдельности становится практически невозможным, а число ложных траекторий может составлять до 6 для одной группы из четырёх целей.

Для повышения точности сопровождения были предложены различные методы *кластеризации (группирования) отметок* [1]. При таком подходе цели на этапе завязки траектории не различаются в рамках кластера и сопровождаются единой целью. В дальнейшем, для каждой цели внутри группы формируются отдельные стробы сопровождения. Однако такой подход не позволяет достичь требуемой эффективности траекторной обработки, поскольку точность измерения центра кластера существенно зависит от количества целей в его пределах, их скоростей, логики расположения и построения, которые при этом не учитываются.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что классические методы траекторной обработки обеспечивают приемлемое качество сопровождения в достаточно ограниченных условиях. При резких маневрах цели или движении целей в группах приведённые алгоритмы становятся непригодными в силу роста вычислительной сложности и ошибки сопровождения.

2. Методы применения искусственного интеллекта в траекторной обработке

Использование нейронных сетей в системах траекторной обработки может существенно сгладить недостатки классических методов. При этом появляется возможность уменьшения вычислительной сложности и распараллеливания алгоритмов обработки, что сокращает время, затрачиваемое на решение задач сопровождения. Среди таких методов можно выделить *многомерный трекинг (Multi-Target Tracking), распознавание целей и ситуаций и нелинейная экстраполяция временных рядов*.

Рассмотрим подробнее эти методы и возможности их применения.

2.1. Многомерный трекинг (Multi-Target Tracking)

Метод многомерного трекинга заключается в создании нейросетевой структуры (как правило, используются рекуррентные нейросети), способной успешно распознавать принадлежность измерений, полученных за период обзора, к траекториям, сопровождаемым в данный момент, то есть решать задачу идентификации отметка-траектория. При этом предполагается

повышение эффективности идентификации по сравнению с классическими методами в случае сопровождения групповой цели.

Для реализации данного метода может быть использована *технология DeepSORT*, применяемая для трекинга объектов изображений. Главным преимуществом архитектуры DeepSORT является возможность оценивать так называемый «внешний вид» – набор некоторых уникальных свойств объектов, запоминать его и использовать для отождествления с ним новых измерений. Таким образом, идентификация происходит путём оценки расстояния между измерением и предсказанием не только по пространственным координатам, но и по некоторому пространству признаков по формуле [2]:

$$D = k * D_m + (1-k) * D_a,$$

где D — совокупная оценка расстояния между измерением и предсказанием;

k — весовой коэффициент;

D_m — метрика Махалонобиса;

D_a — расстояние по внешней схожести (в пространстве внешних признаков)

Метрика Махалонобиса здесь представляет собой статистический аналог привычного евклидова расстояния, который устраняет учитывает ковариационные моменты между приходящими измерениями [2]:

$$D_m(x) = \sqrt{(x-\mu)^T * S^{-1} * (x-\mu)^T},$$

где x — вектор измерений;

μ — вектор математических ожиданий (средних значений) измеряемых величин;

S^{-1} — обратная ковариационная матрица измерений

Благодаря возможности анализировать схожесть отметки и сопровождаемой цели, обеспечивается не только повышение точности идентификации, но и уменьшение количества ложных траекторий. Так, например, в ситуациях, когда измерения от цели отсутствуют на протяжении нескольких периодов обзора (высокий уровень шума, помеховый сигнал, сложная фоно-целевая обстановка), траектория сбрасывается, а если с новым обзором приходит новая отметка от той же самой цели, вместо завязки новой траектории, возможно идентифицировать цель по набору внешних признаков и возобновить её сопровождение даже после сброса. Такое преимущество достижимо при объединении процессов первичной и вторичной обработки, что является перспективной областью для исследований.

Кроме технологии DeepSORT следует также упомянуть метод многомерного трекинга, рассмотренный в работе [3]. Здесь проанализирована модификация широко-используемой технологии JPDA (*joint probabilistic data association* — совместное сопоставление вероятностных данных). Основным недостатком этой технологии является необходимость решать сложную статистическую задачу максимизации функции совместного распределения вероятностей, мерность которой увеличивается многократно при увеличении числа целей.

Решить указанную проблему предлагается путём добавления в скрытый слой структуры блоков LSTM (*long short-term memory* — длительная краткосрочная память), которые позволяют лучше удерживать информацию о статистических связях измерений, пришедших за несколько периодов обзора. На рис. 2 представлена схема процесса предсказания и идентификации в такой сети. Кроме того, сопоставление измерений и траекторий при этом происходит для каждой цели по отдельности, в результате чего уменьшается вычислительная сложность. Время решения задачи также уменьшается при параллельной реализации алгоритма.

2.2. Нелинейная экстраполяция временных рядов

Данный метод позволяет устранить недостаток линейности калмановской фильтрации. Это позволяет обеспечить высокую точность сопровождения в условиях маневрирующей цели.

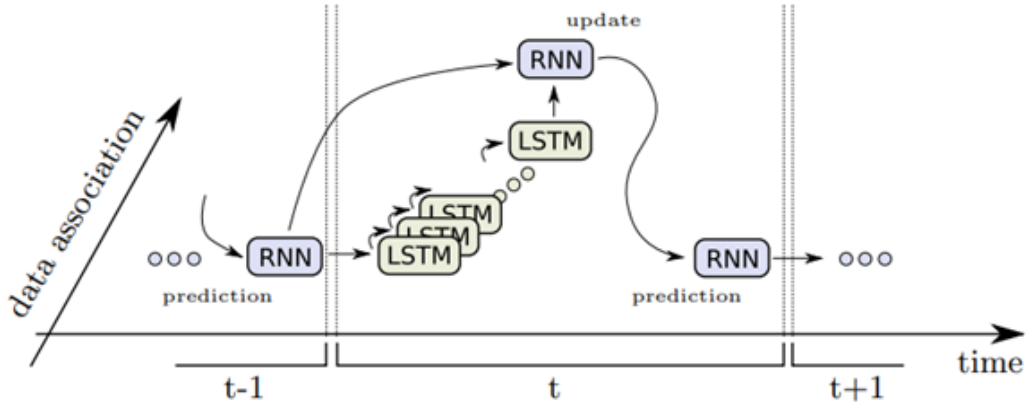


Рис. 2. Схема процесса предсказания с использованием LSTM

Основная идея использования нейронных сетей для экстраполяции координат основана на возможности *экстраполяции временных рядов*, которыми могут являться координаты сопровождаемых целей. В этом случае экстраполяция производится не по единичному измерению координат и скорости, а по совокупности всех предшествующих измерений. Следует только учесть, что данный метод должен быть обобщён для многомерного пространства (экстраполяция векторной величины).

Для решения данной задачи могут быть использованы *несвёрточные нейроны*. Их активационная функция использует семейство нелинейных функций вместо традиционной свёртки входного воздействия с вектором весовых коэффициентов. Такими нелинейными функциями могут быть, например, ряды Фурье, полиномы различных степеней и т. д.

В работе [4] было проведено исследование модели нейросети, активационная функция которых является рациональной полиномиальной дробью. Результаты моделирования показали, что рациональная функция способна повысить точность экстраполяции на 30…40 % по сравнению с полиномиальной апроксимацией. При этом для достижения такой точности достаточна сравнительно низкая степень полиномов, что означает уменьшение количества оптимизируемых коэффициентов. Кроме того, если экстраполируемая функция имеет низкий порядок, появляется возможность ещё больше понизить степень рациональной функции путём отбрасывания коэффициентов, влияние которых на экстраполяцию выражается слабо.

На практике, при решении задач траекторной обработки, заранее неизвестен характер экстраполируемой функции, поскольку цель может быть как высокоманевренной (как, например, БПЛА), так и маломаневренной (дирижабль, баллистическая ракета, боинг). В связи с этим возможно расширение возможностей нейросети адаптироваться под характер движения объекта с целью упрощения задачи экстраполяции.

Также рассматривается возможность гибридного подхода, суть которого заключается в совместном использовании классического фильтра Калмана и результатов нелинейной экстраполяции. При таком подходе на этапе завязки траектории система больше опирается на предсказания калмановского фильтра для формирования некоторой выборки отметок от цели. А уже после того, как выборка предшествующих измерений сформирована, система производит нелинейную экстраполяцию траектории.

2.3 Распознавание целей и ситуаций

Как уже было показано, информация о типе сопровождаемой цели может играть огромное значение для траекторной обработки. Во-первых, тип цели во многом определяет характеристики её движения: типичную и максимальную скорости, ускорения, способности к маневрированию и т. д. Во-вторых, при отождествлении отметок и траекторий может быть исполь-

зована информация о «внешнем виде» цели (её радиолокационный портрет). В-третьих, зная размер и скорость цели, можно выставить соответствующего размера строб завязки и сопровождения. Для малоподвижной цели не требуется выставлять большой строб, соответственно, в него может попасть значительно меньше прочих отметок.

При *распознавании целей* используются спектральные и траекторные признаки. К *спектральным признакам* относятся характерные пики на определённых частотах, наличие флуктуаций в характерных спектральных областях и пр. Кроме того, характерным признаком любой цели может являться эффективная площадь рассеяния, определяющая габариты цели и ракурс её обнаружения. К *траекторным признакам* относят типовую скорость, высоту полёта, маневр.

В классических методах возможно распознавание, как правило, двух классов целей. При увеличении числа классов растёт количество анализируемых признаков цели, из-за чего сложность задачи и объём вычислений возрастают многократно.

Технология нейронных сетей является наиболее подходящим инструментом для решения задачи распознавания объектов, поскольку изначально искусственный интеллект создавался именно для этих целей. Он способен различать гораздо большее число классов, выделять больше характерных признаков. При этом обработка по многомерному пространству этих признаков может проводиться с помощью алгоритмов нечёткой логики, особенно в задачах, когда формализованное математическое их описание затруднено. Особенно применим здесь иерархический принцип перебора признаков, например: сперва цели классифицируются по размеру, потом по максимальной скорости и так далее.

Такой же подход может быть применим и к *распознаванию ситуаций*. Для данного метода наиболее типичной задачей может являться выделение наиболее приоритетной цели, либо оценка тактики передвижения целей в группах. Структурировать эти задачи для описания строгим математическим аппаратом невозможно, однако можно использовать нейронные сети с так называемым *механизмом внимания*, рассмотренные в работах [5,6].

Модель такой нейронной сети имеет архитектуру *автоэнкодера*, модифицированного слоем рекуррентной Stacked LSTM, представленную на рис. 3. Механизм внимания расширяет информацию, поступающую от энкодера, дополняя её некоторым ситуативным контекстом. Благодаря этому контексту, декодер способен выделять некоторые скрытые состояния энкодера в качестве приоритетных и «концентрироваться» на них при формировании выходной последовательности. Stacked LTSM при этом выступает в роли некоторого накопительного буфера, информация в котором служит основой для формирования контекста.

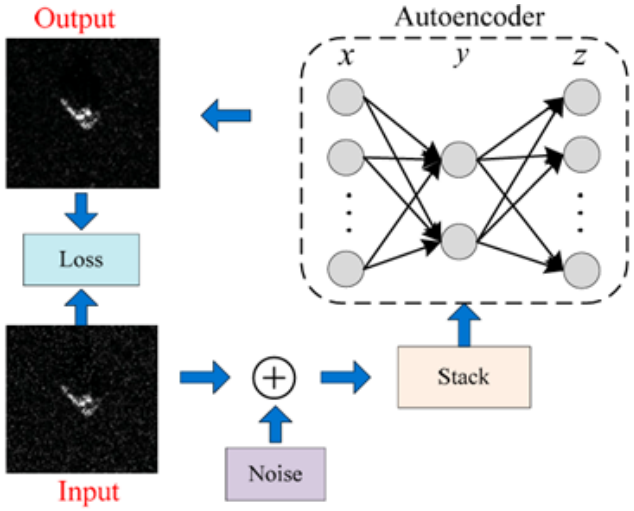


Рис. 3. Архитектура автоэнкодера с механизмом внимания

Распознавание целей и ситуаций относится скорее к третичной обработке радиолокационной информации, однако её результаты могут в значительной степени облегчить решение задач траекторной обработки. Таким образом, применение технологии нейронных сетей способствует объединению процессов и этапов радиолокационной обработки.

Заключение

В рамках данной статьи поднята проблема методов классической траекторной обработки. Были выявлены основные недостатки этих методов, заключающиеся в линейности предсказательной модели фильтра Калмана, сложности и неточности алгоритма идентификации в случае попадания нескольких отметок в строб завязки (или сопровождения), а также применение ряда допущений, которые не выполняются при сопровождении реальных целей. Все эти недостатки способствуют ухудшению результата обработки в ситуациях движения целей в группах, наличия негауссовских помех, сложной фоно-целевой обстановки и т. д. Для сглаживания этих недостатков возможно применение технологии искусственного интеллекта для решения задач траекторной обработки. В работе были рассмотрены методы применения нейронных сетей для решения обозначенных проблем. Нелинейная экстраполяция обеспечивает более высокую точность сопровождения цели в случае маневра. Для решения задачи идентификации в случае групповой цели возможно применение технологии DeepSORT, способной распознавать объекты на основании их «внешних» признаков. Алгоритм обработки может также быть упрощён, если имеется некоторая информация и типах сопровождаемых целей, которая может быть получена с помощью нейронных сетей с механизмом внимания. Все эти подходы могут использоваться совместно друг с другом и с классическими алгоритмами. В этом случае возможно значительно повысить точность сопровождения и уменьшить количество ложных траекторий. При этом также важным преимуществом является способность нейросетей к параллельному проведению вычислений, что может ускорить проведение траекторной обработки для работы системы в режиме реального времени.

Литература

1. *Татузов А. Л.* Нейронные сети в задачах радиолокации. Кн. 28. – Москва : Радиотехника, 2009. – 432 с.

2. Multi-Object Tracking with DeepSORT – URL: https://www.mathworks.com/help/fusion/ug/multi-object-tracking-with-deepsort.html (дата обращения: 14.11.2024)

3. Online Multi-target Tracking using Recurrent Neural Networks – URL: https://arxiv.org/pdf/1604. 03635v1.pdf (дата обращения: 20.11.2024)

4. *Толстых В. Н.* Нейронные сети для экстраполяции временных рядов // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. – 2023. – Т. 15, № 6. – С. 4–11.

5. *Jiang W., Wang Y., Li Y., Lin Y., Shen W.* Radar Target Characterization and Deep Learning in Radar Automatic Target Recognition: A Review. Remote Sens. 2023. – URL: https://doi.org/ 10.3390/rs15153742 (дата обращения: 16.112024)

6. Attention Mechanism in Neural Networks. – URL: https://arxiv.org/2204.13154v1 (дата обращения: 18.11.2024)

7. *Vaswani A., Shazeer N., Parmar N. [et al.]* Attention Is All You Need. – URL: https://arxiv.org/1706.03762 (дата обращения: 18.11.2024)

8. Simple Online and Real-time Tracking. – URL: https://arxiv.org/pdf/1602. 00763v2.pdf (дата обращения: 12.11.2024)

УДК 004.855.5

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ЦЕНООБРАЗУЮЩИХ ФАКТОРОВ СТОИМОСТИ НОУТБУКА

И. С. Демидова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе произведен анализ машинного обучения для выявления факторов, определяющих стоимость ноутбука. Рассмотрены и использованы такие модели, как дерево решений, случайный лес, градиентный бустинг.
Ключевые слова: машинное обучение, дерево решений, случайный лес, градиентный бустинг, ноутбуки, прогнозирование цен.

Введение

В последние годы рынок ноутбуков претерпел значительные изменения, обусловленные стремительным развитием технологий, изменением потребительских предпочтений и глобальными экономическими факторами. В условиях высокой конкуренции производители стремятся оптимизировать свои предложения, а покупатели ищут наилучшее соотношение цены и качества. В этой связи возникает необходимость в глубоком анализе факторов, влияющих на стоимость ноутбуков, что позволяет не только понять динамику цен, но и предсказать их изменения в будущем.

Машинное обучение, как один из наиболее перспективных инструментов анализа данных, предоставляет уникальные возможности для выявления скрытых закономерностей и взаимосвязей между различными характеристиками ноутбуков и их ценами.

В процессе исследования будут рассмотрены различные алгоритмы машинного обучения, проведен анализ данных и оценка эффективности моделей. Результаты данного исследования могут быть полезны как для производителей при формировании ценовой политики, так и для потребителей при выборе оптимального устройства в соответствии с их потребностями и бюджетом.

1. Параметры

На цену ноутбука влияют различные факторы. В данной работе стоимость ноутбука будет оцениваться с помощью следующих параметров:

– компания, производящая ноутбук, бренд;
– тип ноутбука;
– оперативная память;
– вес ноутбука;
– наличие сенсорного экрана;
– оригинальное зарядное устройство;
– ppi, единица измерения разрешающей способности монитора;
– центральный процессор;
– жесткий диск;
– накопитель;
– графический процессор;
– операционная система.

2. Обработка данных

Исходные данные требуют предварительной обработки перед тем, как на них будут обучаться модели. Первые несколько строк загруженного набора данных представлены на рис. 1.

	Company	TypeName	Ram	Weight	Price	TouchScreen	Ips	Ppi	Cpu_brand	HDD	SSD	Gpu_brand	Os
0	Apple	Ultrabook	8	1.37	11.175755	0	1	226.983005	Intel Core i5	0	128	Intel	Mac
1	Apple	Ultrabook	8	1.34	10.776777	0	0	127.677940	Intel Core i5	0	0	Intel	Mac
2	HP	Notebook	8	1.86	10.329931	0	0	141.211998	Intel Core i5	0	256	Intel	Others
3	Apple	Ultrabook	16	1.83	11.814476	0	1	220.534624	Intel Core i7	0	512	AMD	Mac
4	Apple	Ultrabook	8	1.37	11.473101	0	1	226.983005	Intel Core i5	0	256	Intel	Mac

Рис. 1. Первые строки загруженного набора данных

Необходимо проверить, есть ли пропуски в параметрах, для этого воспользуемся функцией *info()*. На рис. 2 представлена информация о ненулевых параметрах и типах данных. Нулевых параметров нет, дополнительно проставлять значения не нужно.

```
Data columns (total 13 columns):
 #   Column       Non-Null Count  Dtype
---  ------       --------------  -----
 0   Company      1273 non-null   object
 1   TypeName     1273 non-null   object
 2   Ram          1273 non-null   int64
 3   Weight       1273 non-null   float64
 4   Price        1273 non-null   float64
 5   TouchScreen  1273 non-null   int64
 6   Ips          1273 non-null   int64
 7   Ppi          1273 non-null   float64
 8   Cpu_brand    1273 non-null   object
 9   HDD          1273 non-null   int64
 10  SSD          1273 non-null   int64
 11  Gpu_brand    1273 non-null   object
 12  Os           1273 non-null   object
dtypes: float64(3), int64(5), object(5)
```

Рис. 2. Информация о параметрах

На рис. 2 видно, что пять параметров не имеют численного представления. Можно закодировать данные, не имеющие численного представления, с помощью метода dummy-кодирования, который заключается в кодировании категориального признака с *n* возможными значениями с помощью *n* бинарных признаков. Каждый бинарный признак соответствует одному из возможных значений категориального признака и является индикатором того, что на данном объекте он принимает данное значение. После кодирования всех признаков удаляются лишние исходные столбцы и получаются данные, представленные на рис. 3.

	Ram	Weight	Price	TouchScreen	Ips	Ppi	HDD	SSD	Company_Acer	Company_Apple	...	Cpu_brand_Intel Core i3	Cpu_brand_Intel Core i5	Cpu_brand_Intel Core i7	Cpu_brand_Other Intel Processor	Gpu_brand_AMD	Gpu_brand_Intel	Gpu_brand_Nvidia	Os_Mac	O
0	8	1.37	11.175755	0	1	226.983005	0	128	False	True	...	False	True	False	False	False	True	False	True	
1	8	1.34	10.776777	0	0	127.677940	0	0	False	True	...	False	True	False	False	False	True	False	True	
2	8	1.86	10.329931	0	0	141.211998	0	256	False	False	...	False	True	False	False	False	True	False	False	
3	16	1.83	11.814476	0	1	220.534624	0	512	False	True	...	False	False	True	False	True	False	False	True	
4	8	1.37	11.473101	0	1	226.983005	0	256	False	True	...	False	True	False	False	False	True	False	True	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
1268	4	2.20	10.555257	0	0	100.454670	500	0	False	False	...	False	False	True	False	False	False	True	False	
1269	4	1.80	10.433899	1	1	157.350512	0	128	False	False	...	False	False	True	False	False	True	False	False	
1270	16	1.30	11.288115	1	1	276.053530	0	512	False	False	...	False	False	True	False	False	True	False	False	
1271	2	1.50	9.409283	0	0	111.935204	0	0	False	False	...	False	False	False	True	False	True	False	False	
1272	6	2.19	10.614129	0	0	100.454670	1000	0	False	False	...	False	False	True	False	True	False	False	False	

1273 rows x 44 columns

Рис. 3. Подготовленные для обучения данные

Используемые модели машинного обучения

Для анализа были выбраны следующие модели машинного обучения:

– модель дерева решений;

– модель случайного леса;

– модель градиентного бустинга.

3. Оценка качества регресии

Коэффициент детерминации R^2 — статистический показатель, отражающий объясняющую способность регрессии $f : X \to X$ и определяемый как доля дисперсии зависимой переменной, объяснённая регрессионной моделью с данным набором независимых переменных.

Модель «Дерево решений»

Дерево решений — это метод, позволяющий предсказывать значения зависимой переменной в зависимости от соответствующих значений одной или нескольких независимых переменных. У данного метода точность R^2 составила 0.84 при максимальной глубине дерева (max_depth) равной 10.

На рис. 4 представлена диаграмма важности признаков для модели «Дерево решений», которая показывает, как параметры набора данных влияют на модель. Можно сделать вывод, что признаки «Оперативная память», «Вес ноутбука», «Процессор Intel», «Тип ноутбук», «Единица измерения разрешающей способности монитора», «Процессор Intel Core i5», «Процессор Intel Core i7», «Накопитель», «Наличие сенсорного экрана», «Процессор AMD», «Операционная система», «Операционная система Windows», «Бренд Acer», «Бренд HP», «Бренд Lenovo» , «Бренд Dell» влияют на модель, а значит остальные признаки можно удалить для более быстрого обучения модели.

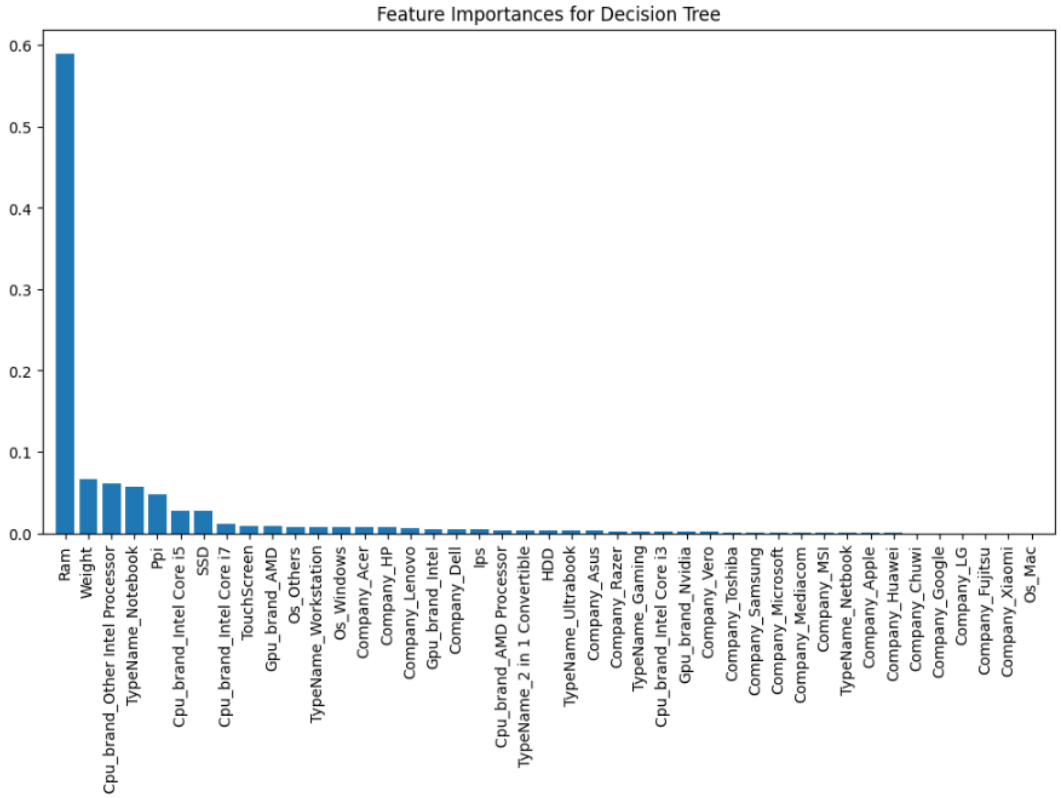


Рис. 4. Диаграмма важности признаков для модели «Дерево решений»

Модель «Случайный лес»

Модель случайного леса — алгоритм машинного обучения, заключающийся в использовании ансамбля решающих деревьев.

У данного метода точность R^2 составила 0.89 при оптимальном числе деревьев (n_estimators) равным 100 и максимальной глубине дерева (max_depth) равной 10.

На рис. 5 представлена диаграмма важности признаков для модели «Случайный лес», которая показывает, как параметры набора данных влияют на модель. Можно сделать вывод, что признаки «Оперативная память», «Вес ноутбука», «Процессор Intel», «Тип ноутбук», «Единица измерения разрешающей способности монитора», «Процессор Intel Core i5», «Накопитель», «Наличие сенсорного экрана», «Жесткий диск», «Операционная система», «Бренд Acer», «Бренд HP», «Оригинальное зарядное устройство» , «Процессор Intel Core i3» влияют на модель, а значит остальные признаки можно удалить для более быстрого обучения модели.

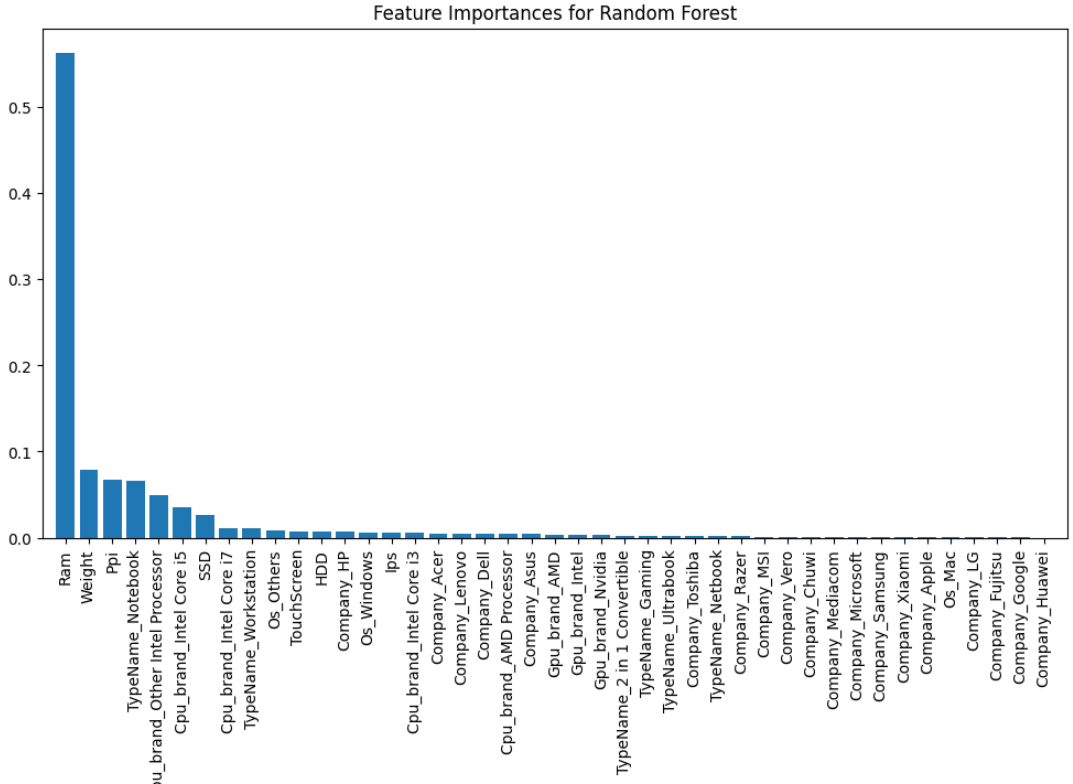


Рис. 5. Диаграмма важности признаков для модели «Случайный лес»

Модель «Градиентный бустинг»

Градиентный бустинг — это техника машинного обучения для задач классификации и регрессии, которая строит модель предсказания в форме ансамбля слабых предсказывающих моделей, обычно деревьев решений. У данного метода точность R^2 составила 0.85 при оптимальном числе деревьев (n_estimators) равным 100 и максимальной глубине дерева (max_depth) равной 4.

На рис. 6 представлена диаграмма важности признаков для модели «Градиентный бустинг», которая показывает, как параметры набора данных влияют на модель. Можно сделать вывод, что признаки «Оперативная память», «Вес ноутбука», «Процессор Intel», «Тип ноутбук», «Единица измерения разрешающей способности монитора», «Процессор Intel Core i5», «Процессор Intel Core i7», «Накопитель», «Операционная система», «Операционная система Windows», «Бренд HP», «Стационарный компьютер» влияют на модель, а значит остальные признаки можно удалить для более быстрого обучения модели.

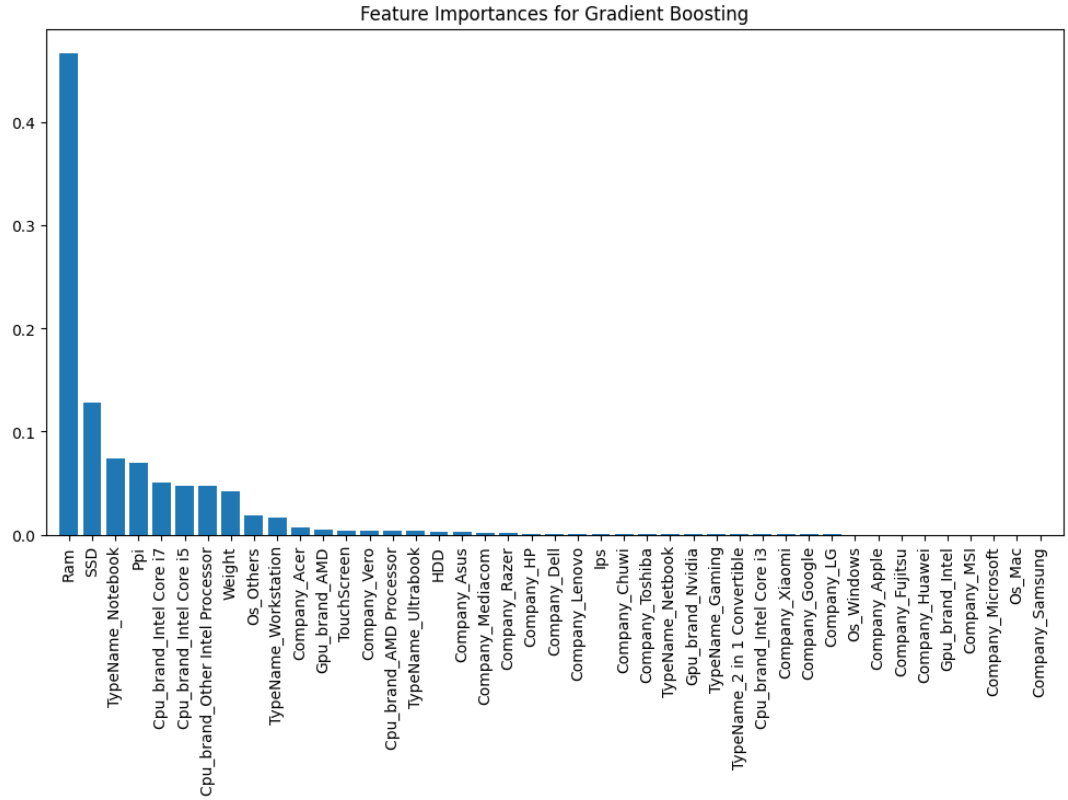


Рис. 6. Диаграмма важности признаков для модели «Градиентный бустинг»

Диаграмма рассеивания

Для оценки точности каждой из рассмотренных моделей помимо метрики R^2 была построена диаграмма рассеивания, которая показывает соотношение предсказанных и реальных значений. На рис. 7 видно, что больше совпадений в диапазоне цен от 95000 до 120000. Значительно хуже предсказываются цены на ноутбуки от 121000 рублей.

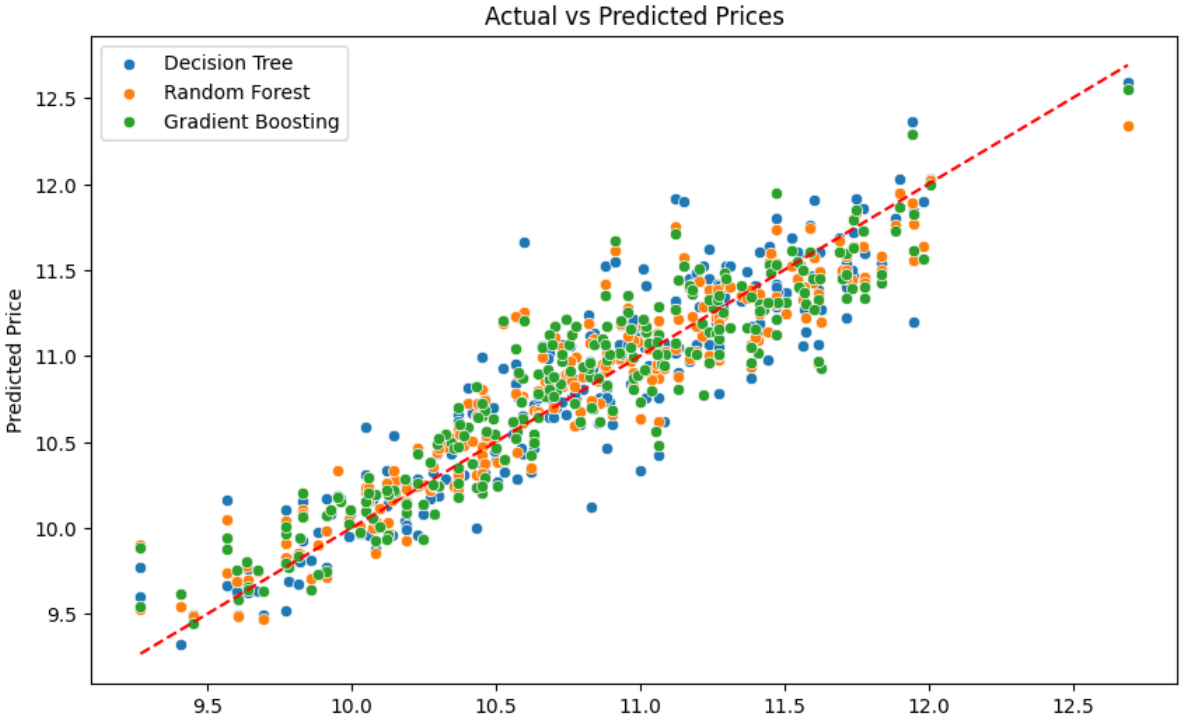


Рис. 7. Диаграмма рассеивания

Заключение

В результате сравнения наилучший коэффициент детерминации показала модель случайного леса. Среди рассмотренных моделей она лучше всего подходит для прогнозирования цен на ноутбуки.

Главным фактором, влияющим на стоимость ноутбука, у трёх моделей является оперативная память.

Литература

1. Теория и практика машинного обучения : учеб. пособие / В. В. Воронина, А. В. Михеев, Н. Г. Ярушкина, К. В. Святов. – Ульяновск : УлГТУ, 2017. – 290 с.

2. Современные ноутбуки – от чего зависит их стоимость. – URL:https://www.infoconnector.ru/devices/notebook/sovremennye-noutbuki-ot-chego-zavisit-ikh-stoimost (дата обращения 10.09.2024).

3. Метод случайного леса : основы и примеры. – URL: https://sky.pro/wiki/python/metod-sluchajnogo-lesa-osnovy-i-primery (дата обращения 20.09.2024).

4. Градиентный бустинг. – URL:https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/gradientnyj-busting (дата обращения 17.09.2024).

5. Модели классификации: дерево решений. – URL:https://python-school.ru/blog/osnovy-ml/decisiontreeclassifier (дата обращения 23.09.2024).

УДК 004.023

ОПТИМИЗАЦИЯ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ АКТИВАЦИИ СКРЫТОГО СЛОЯ МАШИН ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ ТЕКСТОВ

Л. А. Демидова, В. Е. Журавлев

МИРЭА — Российский технологический университет

Аннотация. В данной работе рассматривается машина экстремального обучения (ELM), использующая кубические сплайны для активации скрытого слоя, применительно к решению задачи анализа тональности текстовых отзывов на рестораны. Координаты опорных точек для построения сплайнов подбираются с помощью представленной в данной работе островной модификации популяционного алгоритма оптимизации ETFSS, основанной на модели мягкого острова (SIM). В проведенном численном эксперименте итоговая точность классификации с использованием кубических сплайнов превосходит результаты, полученные классической моделью ELM с сигмоидальной функцией активации.
Ключевые слова: машинное обучение, классификация, обработка текстов на естественном языке (NLP), анализ тональности, векторные представления, FastText, кубический сплайн, машина экстремального обучения (ELM), оптимизация, популяционные алгоритмы, островная модель.

Введение

Классификация текстов представляет собой сложную комплексную задачу на стыке таких научных направлений, как компьютерная лингвистика, машинное обучение и математическая статистика. Любой осмысленный текст, написанный на естественном языке, всегда обладает определенной структурой и подчиняется различным правилам, например, синтаксическим или лексическим, иначе его было бы невозможно понять. Однако в реальной жизни тексты часто содержат ошибки и неточности, но не теряют при этом закладываемый в них смысл. Огромную роль играет также контекст, в зависимости от которого одна и та же фраза может иметь совершенно разные значения.

Таким образом, обработка текстовой информации прочно ассоциируется с большими объемами данных, сложной структурой и неточными условиями. Поэтому для качественного машинного анализа текстов недостаточно строгих алгоритмов с четкой логикой, требуются интеллектуальные методы, например, с использованием моделей машинного и глубокого обучения. В последнее время наблюдается рост производительности вычислительных машин, поэтому данное направление активно развивается, в результате чего регулярно появляются модели, способные воспринимать и анализировать тексты на сопоставимом с человеком уровне. Тем не менее обработка текстов по-прежнему остается вычислительно сложной задачей, поэтому наиболее актуальные исследования в данной сфере направлены не только на реализацию новых подходов и методов, но и на их оптимизацию и упрощение.

В данной работе рассматривается применение машины экстремального обучения для классификации текстов. Вместо классических функций активации для нейронов внутри модели используются кубические сплайны, значения параметров которых подбираются популяционным алгоритмом оптимизации с целью повышения точности классификации.

1. Модели и методы

1.1. Классификация

Одной из наиболее популярных моделей для решения задачи классификации, сочетающих в себе как скорость работы, так и точность производимых результатов, является машина экстремального обучения (Extreme Learning Machine, ELM), описанная в работе [1]. Модель ELM представляет собой полносвязную нейронную сеть прямого распространения, состоящую из входного, скрытого и выходного слоев, как это показано на рис. 1.

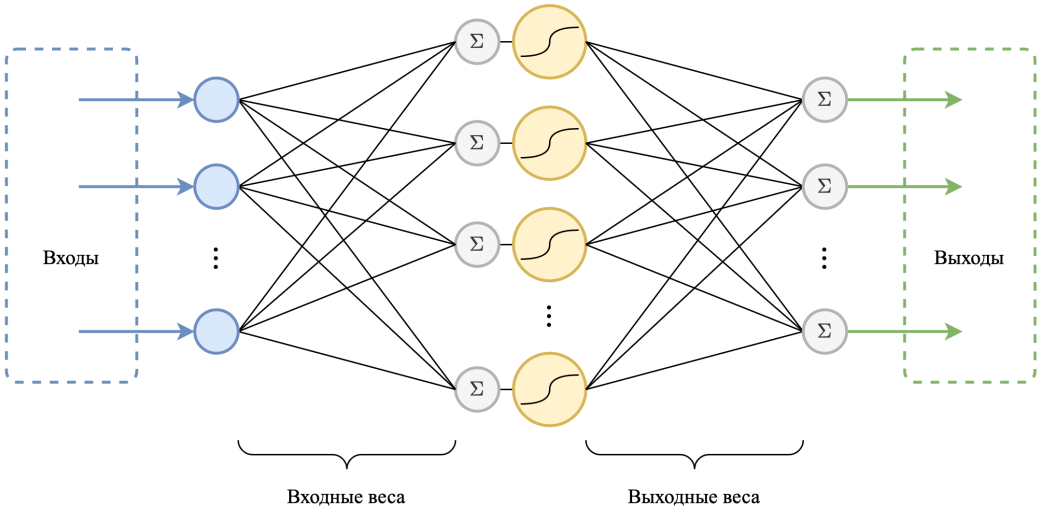


Рис. 1. Модель ELM

Ключевой особенностью данной модели является принцип ее обучения, отличающийся от классических подходов, основанных на градиентном спуске. Сначала веса связей между входным и скрытым слоями инициализируются случайными числами, которые затем не изменяются ни при обучении, ни при использовании модели. Далее для всех данных из обучающей выборки выполняется прямой проход до скрытого слоя, использующего нелинейную функцию активации. От получившегося результата вычисляется псевдообратная матрица по методу Мура — Пенроуза [2], которая умножается на матрицу правильных меток классов, чтобы получить веса связей между скрытым и выходным слоями.

Таким образом, процесс обучения модели ELM не является итеративным, что положительно сказывается на скорости ее работы. В работах [3, 4] показано, что, будучи одной из самых быстрых, данная модель также оказывается одной из самых точных в сравнении с классическими алгоритмами классификации.

Для активации нейронов скрытого слоя модели ELM может использоваться любая нелинейная функция, но чаще всего применяется так называемая сигмоида [1]. В данной работе рассматривается подход с использованием кубических сплайнов в качестве функций активации. Кубический сплайн представляет собой гладкую функцию, область определения которой состоит из конечного числа отрезков, каждый из которых соответствует некоторому кубическому многочлену. Для формирования сплайна необходимо задать набор точек, через которые будет проходить кривая, затем, составив и решив систему уравнений, найти коэффициенты для многочленов каждого из отрезков между заданными точками. Значение первых производных для многочленов в краевых точках принимается равным нулю, поскольку в данной работе поведение сплайна за их пределами моделируется как прямая, параллельная оси абсцисс. На рис. 2 представлен пример случайно сгенерированных кубических сплайнов для пяти нейронов скрытого слоя модели ELM.

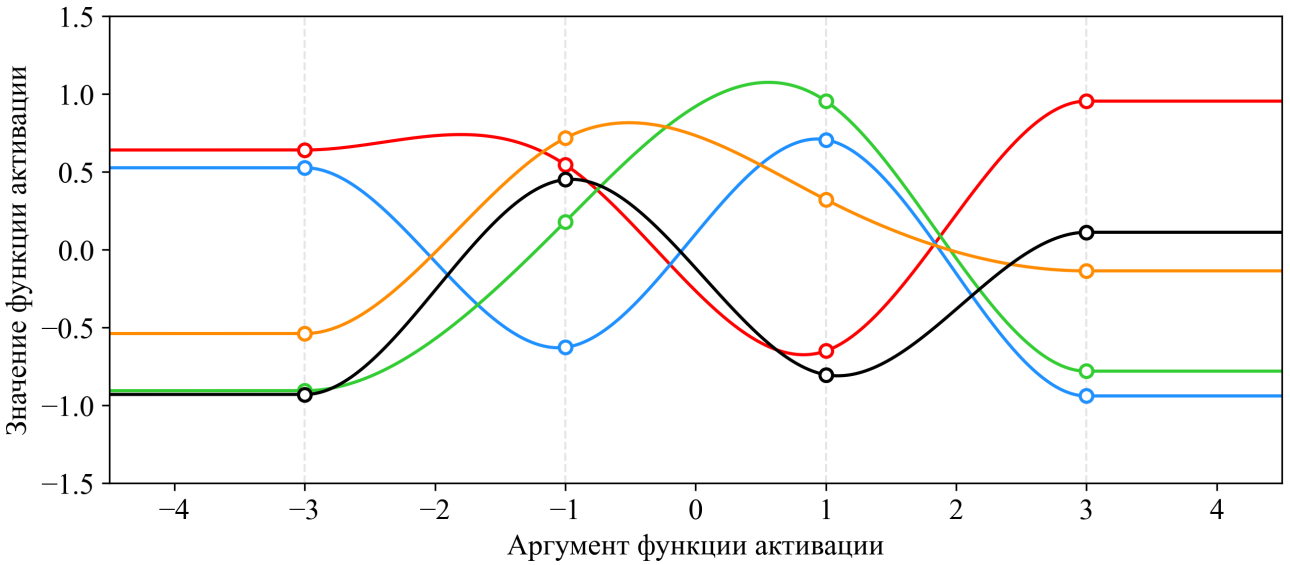


Рис. 2. Случайно сгенерированные кубические сплайны

Опорные точки для формирования сплайнов расставляются равномерно вдоль оси абсцисс на отрезке от минимального до максимального возможного значения, передаваемого каждому нейрону скрытого слоя. Координата каждой точки вдоль оси ординат выбирается из диапазона от –1 до 1.

1.2. Векторное представление текста

Ключевым шагом в реализации любого алгоритма для классификации текстов является их преобразование в числовой формат. В настоящее время известно несколько подходов для векторизации текстов, одним из которых является модель FastText [5].

Модель FastText реализует идею о дистрибутивной семантике, согласно которой семантические свойства слов или их частей определяются контекстом, в котором они появляются. Например, слова «автомобиль» и «такси» часто употребляются в схожем окружении слов, из чего можно сделать вывод об их семантической близости. Каждое слово в данной модели представляется в виде n-грамм, то есть частей, состоящих из небольшого числа символов, что позволяет учитывать морфологические свойства слов при формировании векторных представлений. Для векторизации целых предложений используется усреднение векторов всех слов, которые в него входят, с предварительным делением каждого из них на евклидову норму.

Для векторизации текстов в данной работе предлагается использовать готовые векторные представления, сформированные с помощью модели FastText [6]. Для их обучения использовались огромные наборы текстов, сформированные из статей онлайн-ресурса Wikipedia [7] и репозитория Common Crawl [8]. Каждый вектор состоит из 300 чисел, но в рамках данной работы размерность векторов была уменьшена до 50 с помощью метода главных компонент (Principal Component Analysis, PCA) [9].

1.3. Оптимизация кубических сплайнов

Для поиска наиболее подходящих координат опорных точек для кубических сплайнов, способных улучшить качество классификации, необходимо определить целевую функцию, чтобы перейти к задаче оптимизации. В данной работе для оценки координат опорных точек предлагается осуществлять 5-проходную кросс-валидацию модели ELM, использующей созданные по данным координатам сплайны в качестве функций активации, с вычислением какой-либо метрики качества решения задачи классификации и ее последующим усреднением по всем проходам.

Такая целевая функция не имеет явной и интерпретируемой аналитической формулы, поэтому ее оптимизация представляется нетривиальной задачей. Для решения подобных задач лучше всего подходят популяционные алгоритмы, принцип работы которых основан на разных эвристиках, чаще всего заимствованных из природы. Для оптимизации целевой функции в таких алгоритмах создается набор случайных решений, называемый популяцией. Ее отдельные индивиды в ходе последовательных итераций перемещаются по области поиска, обмениваясь информацией и постепенно сходясь к локальному или глобальному экстремуму. В отличие от традиционных математических подходов, популяционные алгоритмы не требуют от оптимизируемой функции непрерывности, существования производных или иных дополнительных сведений кроме возможности ее вычисления в произвольной точке. Популяционные алгоритмы часто используются для решения реальных практических задач, поскольку они способны работать в условиях неопределенности и высокой сложности имеющихся данных.

Одним из известных популяционных алгоритмов оптимизации является поиск косяком рыб (Fish School Search, FSS) [10]. Его главная идея заключается в моделировании поведения рыб, плавающих по аквариуму и взаимодействующих друг с другом в поисках как можно большего количества корма. В контексте решения задачи оптимизации косяк таких рыб представляет собой популяцию из точек в пространстве признаков, за аквариум принимается заданная область поиска, а количество корма определяется значением целевой функции. На рис. 3 представлено четыре основных этапа развития популяции в ходе одной итерации алгоритма FSS.

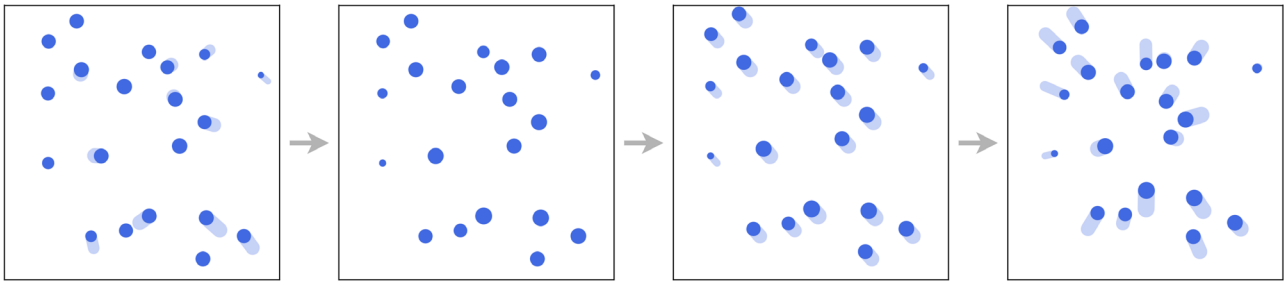


Рис. 3. Основные этапы одной итерации алгоритма FSS

На первом этапе рыбы делают индивидуальные шаги в случайных направлениях и остаются в новых позициях, если значение целевой функции в них лучше. В зависимости от достигнутых результатов на втором этапе рыбы увеличивают или уменьшают свой вес. На третьем этапе осуществляется коллективно-инстинктивное движение, в ходе которого все рыбы перемещаются в одном направлении, которое в среднем оказалось наиболее выгодным. Наконец, на четвертом этапе все рыбы подчиняются коллективно-волевому движению и перемещаются либо по направлению к общему центру масс, либо от него, в зависимости от того, улучшились ли результаты в сравнении с предыдущей итерацией.

В работе [11] была представлена модификация данного алгоритма, которая показала превосходство над оригиналом в ряде задач. Представленный авторами алгоритм ETFSS использует отображение тент в качестве генератора псевдослучайных чисел, а размеры шагов для индивидуальных и коллективно-волевых движений рыб уменьшаются по экспоненциальному закону с течением итераций.

В контексте решаемой задачи об оптимизации кубических сплайнов размерность пространства поиска напрямую зависит от количества нейронов в скрытом слое модели ELM. Если использовать всего три опорные точки для каждого сплайна, то уже с десятью нейронами размерность решаемой задачи достигнет тридцати. По этой причине имеет смысл рассмотреть возможность реализации островной модели для алгоритма оптимизации, поскольку такой подход показывает более качественные результаты на больших и сверхбольших размерностях.

Идея островной модели заключается в разбиении популяции на несколько отдельных групп, называемых островами. При этом каждый остров решает задачу независимо от других, но периодически они обмениваются друг с другом индивидами, участвуя в процессе миграции. В работе [12] была представлена модель мягкого острова (Soft Island Model, SIM). В рамках данной модели авторы предлагают подход, при котором во время миграции каждый агент с определенной вероятностью остается на своем острове и с обратной вероятностью покидает его. Данная вероятность является гиперпараметром алгоритма и не изменяется в ходе выполнения итераций. В данной работе предлагается модификация алгоритма ETFSS, основанная на SIM.

2. Проведение экспериментов

Для решения задачи классификации в данной работе рассматривается набор данных о рецензиях на рестораны [13]. Каждая рецензия в наборе данных состоит из текстового отзыва, числовой оценки по пятибалльной шкале, а также других сведений, например, дате или идентификаторе автора. Предлагается выполнить анализ тональности текстов, определив рецензии с оценкой выше трех положительными, а с оценкой ниже трех — отрицательными. Всего в наборе данных 10000 уникальных рецензий, но среди них наблюдается дисбаланс классов, а также отсутствие оценок для некоторых отзывов. По этой причине случайным образом было выбрано только 2000 положительных рецензий и столько же отрицательных. Получившийся набор данных из 4000 объектов далее был преобразован в набор векторов размерности 50 с помощью модели FastText, каждому из которых соответствует метка класса (0 для отрицательных рецензий, 1 — для положительных).

Для классификации использовалась модель ELM, имеющая 50 входов для векторизированных текстов, 100 нейронов в скрытом слое и 1 выход. Поскольку количество объектов обоих классов сбалансировано, было решено использовать долю правильных ответов модели в качестве метрики оценки точности классификации.

Все дальнейшие расчеты были выполнены с применением языка программирования Python в среде Jupyter Notebook. В ходе экспериментов использовался следующий компьютер: MacBook Pro 13 2017 A1708 (процессор: Intel(R) Core(TM) i5-7360U CPU 2.3 ГГц, 2.3 ГГц, 2 ядра; оперативная память: 8 Гб; 64-разрядная операционная система).

В качестве базовой модели для дальнейшего сравнения с предлагаемым подходом к оптимизации кубических сплайнов была реализована классическая модель ELM с сигмоидальной функцией активации. Данная модель была 1000 раз независимо обучена и протестирована 5-проходной кросс-валидацией с оценкой доли правильных ответов. В табл. 1 представлена статистика полученных результатов.

Таблица 1

Результаты оценки модели ELM с сигмоидальной функцией активации

Минимальное значение доли правильных ответов	0,8648
Максимальное значение доли правильных ответов	0,8875
Среднее значение доли правильных ответов	0,8768
Медианное значение доли правильных ответов	0,877

Затем для такой же конфигурации модели ELM, но уже с использованием кубических сплайнов в качестве функций активации, был запущен процесс их оптимизации с помощью островной модификации алгоритма ETFSS. Для каждого сплайна было использовано по 4 опорных точки, таким образом, размерность решаемой задачи составила 400. В табл. 2 представлены значения гиперпараметров алгоритма оптимизации.

Таблица 2

Значения гиперпараметров для алгоритма оптимизации

Количество итераций	50
Количество островов	3
Общий размер популяции	300 (по 100 на каждый остров при инициализации)
Вероятность агента остаться на своем острове	0,8
Максимальный размер шага при индивидуальном движении	0,25
Максимальный размер шага при коллективно-волевом движении	0,125

На рис. 4 представлена история глобального улучшения метрики качества с течением итераций алгоритма оптимизации.

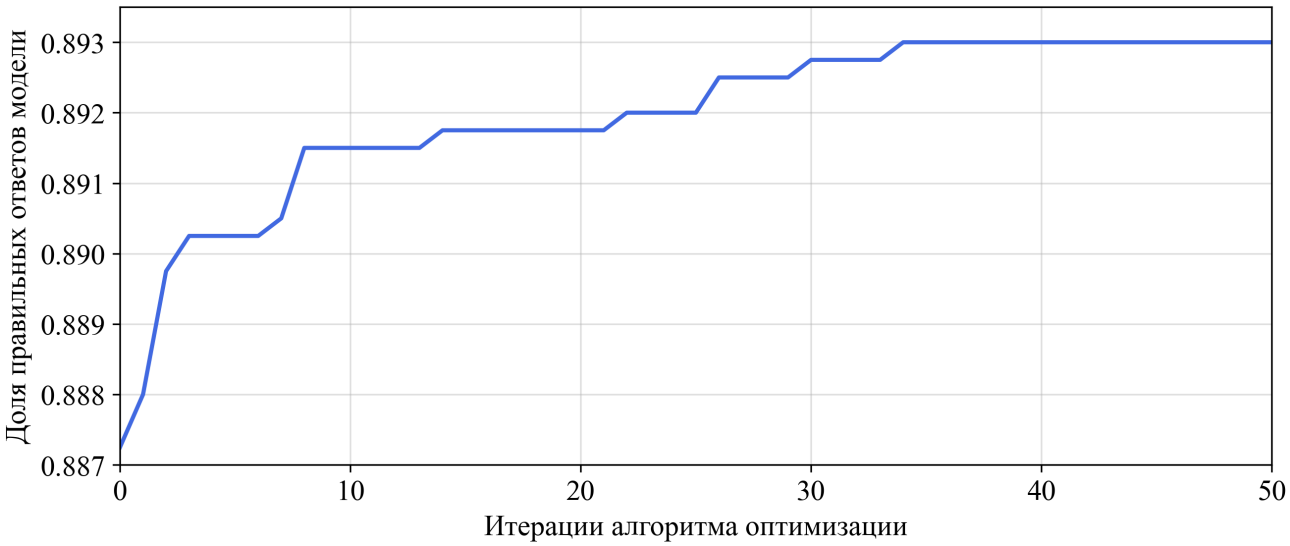


Рис. 4. Оптимизация целевой функции

По рис. 4 видно, что уже в течение первых 5 итераций алгоритма оптимизации модель ELM с кубическими сплайнами для активации скрытого слоя продемонстрировала результаты, превосходящие максимальную оценку из 1000 результатов тестирования такой же модели, но с использованием сигмоидальной функции активации. Отдельно стоит отметить и тот факт, что целевая функция уже при инициализации островного алгоритма ETFSS приняла значение, сопоставимое со средними показателями, полученными на классической модели.

Заключение

В данной работе была представлена модель ELM с кубическими сплайнами в качестве функций активации. Координаты опорных точек для построения сплайнов было предложено подбирать с помощью оптимизации целевой функции, в роли которой выступает 5-проходная кросс-валидация модели с вычислением доли правильных ответов.

Для решения задачи оптимизации была предложена и реализована островная модификация популяционного алгоритма ETFSS, основанная на SIM.

В рамках проведения экспериментов был рассмотрен набор данных о текстовых рецензиях на рестораны. После его предварительной обработки была сформулирована задача класси-

фикации текстовых отзывов по смысловому тону на положительные и отрицательные. Для числового представления текстов использовались готовые векторные представления, полученные с помощью модели FastText.

В процессе оптимизации кубических сплайнов для модели ELM была достигнута точность, соответствующая 89,3 % правильных ответов, что превышает максимальный результат, полученный с использованием классической сигмоидальной функции активации.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на улучшение процесса подбора значений параметров для кубических сплайнов.

Литература

1. *Guang-Bin Huang*. Extreme learning machine: Theory and applications / Guang-Bin Huang, Qin-Yu Zhu, Chee-Kheong Siew // Neurocomputing. – 2006. – Vol. 70. – P. 489–501. – DOI 10.1016/j.neucom.2005.12.126.

2. *Penrose R.* On best approximate solutions of linear matrix equations / Penrose R. // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1956. – Vol. 52(1). – P. 17–19. – DOI 10.1017/S0305004100030929.

3. *Gupta C. A.* Machine Learning Techniques and Extreme Learning Machine for Early Breast Cancer Prediction / C. A. Gupta, N. S. Gill, P. N. Sing, Gill, V Conclusion // International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering. – 2020. – Vol. 9(4). – P. 163–167. – DOI 10.35940/ijitee.D1411.029420.

4. *Mercaldo F.* Extreme Learning Machine for Biomedical Image Classification: A Multi-Case Study / F. Mercaldo, L. Brunese, A. Santone, F. Martinelli, M. Cesarelli // EAI Endorsed Transactions on Pervasive Health and Technology. – 2024. – Vol. 10. – DOI 10.4108/eetpht.10.5542.

5. *Bojanowski P.* Enriching Word Vectors with Subword Information (Version 2) / P. Bojanowski, E. Grave, A. Joulin, T. Mikolov // arXiv. – 2016. – DOI 10.48550/ARXIV.1607.04606.

6. *Grave E.* Learning Word Vectors for 157 Languages (Version 2) / E. Grave, P. Bojanowski, P. Gupta, A. Joulin, T. Mikolov // arXiv. – 2018. – DOI 10.48550/ARXIV.1802.06893.

7. Wikipedia – свободная энциклопедия: официальный сайт. – URL: https://www.wikipedia.org/ (дата обращения: 20.11.2024).

8. Common Crawl repository: официальный сайт. – URL: https://commoncrawl.org/ (дата обращения: 20.11.2024).

9. *Maćkiewicz A.* Principal components analysis (PCA) / Maćkiewicz, A., & Ratajczak, W. // Computers & Geosciences. – 1993. – Vol. 19(3). – P. 303–342. – DOI 10.1016/0098-3004(93)90090-R.

10. *Filho C. J.* A novel search algorithm based on fish school behavior / C. J. Filho, F. B. Lima-Neto, A. Lins, A. I. Nascimento, M. P. Lima // 2008 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. – 2008. – P. 2646-2651. – DOI 10.1109/ICSMC.2008.4811695.

11. *Demidova L. A.* A Study of Chaotic Maps Producing Symmetric Distributions in the Fish School Search Optimization Algorithm with Exponential Step Decay / L. A. Demidova, A. V. Gorchakov // Symmetry. – 2020. – Vol. 12(5). – P. 784. – DOI 10.3390/sym12050784.

12. *Akhmedova S.* Soft Island Model for Population-Based Optimization Algorithms / S. Akhmedova, V. Stanovov, E. Semenkin // Lecture notes in computer science. – 2018. – P. 68–77. – DOI 10.1007/978-3-319-93815-8_8.

13. 10000 Restaurant Reviews // Kaggle: [сайт]. – 2023. – URL: https://www.kaggle.com/datasets/joebeachcapital/restaurant-reviews (дата обращения 20.11.2024).

УДК 004.032.26

ЧАТ-БОТ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАБОЛЕВАНИЯ ЛЕГКИХ

М. О. Дудич, Н. Н. Максимова

Амурский государственный университет

Аннотация. В данной статье описывается процесс разработки и обучения свёрточной нейронной сети для классификации патологий лёгких на основе рентгеновских снимков из набора данных. Модель была обучена с точностью 94.97 %; кроме того, анализировались метрики precision и recall, выявившие некоторые ошибки, в частности при диагностике пневмонии. Для практического применения был создан телеграм-бот, позволяющий пользователям загружать рентгеновские снимки и получать результаты диагностики в реальном времени. Это делает технологию более доступной для использования в медицинской практике и улучшает качество оказания медицинских услуг. Исследование демонстрирует потенциал методов глубокого обучения в области медицинской диагностики.
Ключевые слова: искусственный интеллект, глубокое обучение, свёрточные нейронные сети, набор рентген-снимков, медицинская диагностика, Python, телеграм-бот.

Введение

Искусственный интеллект (ИИ) — это технология, которая стала очень быстро развиваться с появлением больших вычислительных мощностей. В современном мире он играет важнейшую роль в таких сферах как наука и бизнес. С повышением сложности нетривиальных задач и объёма необходимых данных методы машинного обучения становятся всё более востребованными. ИИ активно применяется в различных областях, включая медицину, где он помогает анализировать большие массивы данных, диагностировать заболевания и предлагать рекомендации по лечению. Благодаря возможности решать сложные задачи, для которых сложно определить чёткий алгоритм, ИИ автоматизирует процессы в прикладных и научных сферах, включая медицинскую.

Наиболее эффективным направлением в ИИ сегодня является обучение на глубоких нейронных сетях. Различные типы нейронных сетей решает конкретные прикладные задачи. Для анализа изображений в настоящее время используются, как правило, свёрточные нейронные сети.

Цель данной работы — разработка и обучение свёрточной нейронной сети для определения заболеваний лёгких по рентгеновским снимкам а также создание удобного интерфейса для её использования.

1. Описание набора данных

Набор данных — подборка рентген-снимков лёгких, разделённых на 9 классов. В наборе присутствуют изображения лёгких без патологий, а также изображения легких с 8 патологиями, такими как пневмония, обструктивные нарушения и другое. Данные взяты из открытого набора, размещённого на платформе Kaggle. В наборе представлено 6743 изображения. С информацией о каждом классе можно ознакомиться в табл. 1.

2. Архитектура нейронной сети

Свёрточные нейронные сети (СНС) считаются наиболее эффективным инструментом в задачах анализа изображений [2]. Особенность таких нейронных сетей заключается в том,

что обучаемые веса расположены в ядре свёртки, которое меньше по размеру в сравнении с исходным изображением. Это позволяет сети выделять ключевые признаки, такие как грани, контуры и края объектов.

Один свёрточный слой СНС включает:

1. одну или несколько свёрток с функциями активации;
2. слой пуллинга.

Между такими свёрточными слоями рекомендуется вставлять слои Dropout для борьбы с переобучением модели.

Таблица 1

Исходные данные

Номер набора	Количество изображений	Метка класса (норма или тип патологии)
0	1340	Здоровые лёгкие
1	1060	Пневмония
2	678	Повышенная плотность
3	629	Пониженная плотность
4	644	Обструкция лёгких
5	594	Инфекционные заболевания
6	658	Физические травмы
7	596	Измененное средостение
8	544	Нарушение развития лёгких

Как правило, сеть состоит из нескольких таких слоёв. Свёрточный слой применяет операцию свёртки к входным данным, создавая карту признаков. Далее следует слой пуллинга, который извлекает наиболее значимые параметры — обычно максимальные, либо средние значения. Результаты всех свёрточных слоёв, по сути — матриц, которые значительно меньше, чем обрабатываемое изображение, передаются на обычную полносвязную нейросеть, которая состоит из нескольких внутренних слоев и выходного слоя, который, в свою очередь, решает поставленную задачу.

Для задачи классификации изображений была создана СНС, с архитектурой которой можно ознакомиться в работе [3].

Самые первые три слоя, каждый из которых состоит из свертки, пуллинга и активации, образуют карту признаков, извлекают максимальные значения и по объёму уменьшают размер входных данных для следующих слоёв. Четвертый слой разворачивает полученную карту признаков в соответствующий вектор, который затем подаётся на последующие полносвязные слои. Последние слои с функцией активации softmax используются для классификации.

Потом начинается обучение модели. Параметры обучения включают: функция потерь — категориальная кроссэнтропия, оптимизатор — Nadam, метрика оценки — Accuracy, количество эпох — 30, размер мини-выборки — 100 изображений. Для валидации выделено 20 % данных из обучающего набора.

3. Анализ качества прогнозирования

В результате обучения модель достигла точности 94.97 % по метрике accuracy, что можно считать вполне приемлемым результатом. История обучения представлена на рис. 1.

При этом, метрика accuracy не является достаточной для качественной оценки модели. Для полноценного анализа необходимо дополнительно использовать другие метрики — например precision с recall и матрицу ошибок. Метрика precision показывает, сколько из предсказанных

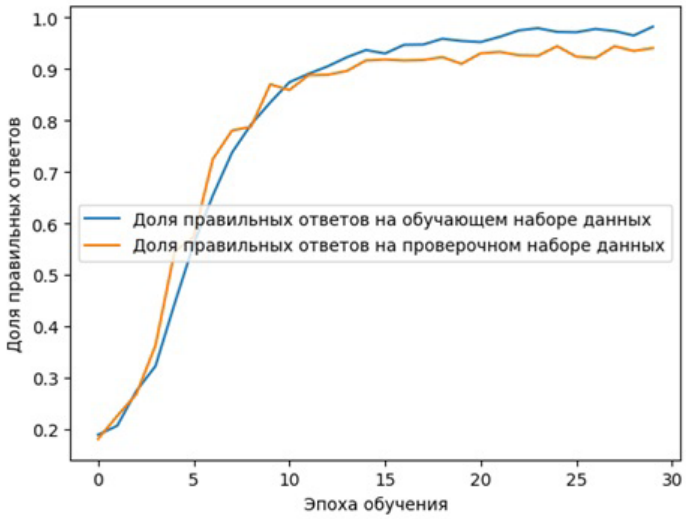


Рис. 1. История обучения нейросетевой модели

моделью объектов конкретного класса действительно принадлежат этому классу. Метрика recall отражает, какую долю от всех реальных объектов данного класса модель правильно отнесла к этому классу. Матрица ошибок (confusion matrix) демонстрирует соотношение верных и ошибочных предсказаний по всем классам. Она представлена на рис. 2, где приняты следующие обозначения: ВП — высокая плотность, НП — низкая плотность.

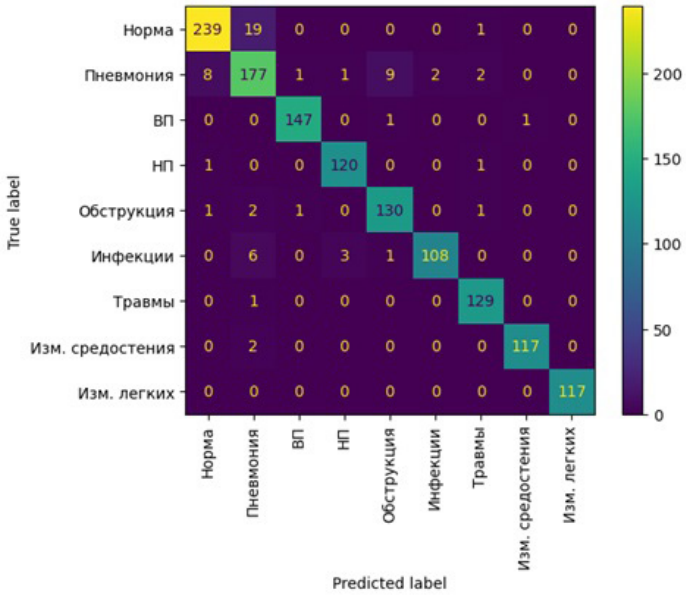


Рис. 2. Confusion matrix для обученной модели на тестовом наборе данных

Несмотря на то, что в общем результат является приемлемым, стоит отдельно обратить внимание на первый столбец матрицы ошибок. Модель ошиблась и классифицировала восемь рентгеновских снимков лёгких с пневмонией, один снимок с низкой плотностью и один с обструкцией как изображения здоровых лёгких. Хотя такие ошибки в целом считаются малыми, в медицине они являются критичными, так как приводят к пропуску патологий, которые могу усугубить здоровье пациента. Обратная ситуация — когда снимки здоровых легких классифицируются как патологии — также нежелательная, но менее опасная ситуация.

На рис. 3 показан классификационный отчёт (classification report). Видно, что изменения лёгких классифицируются с точностью 100 %. Это может быть связано с:

1. выраженным внешним отличием от других классов;

2. ограниченным количеством разнообразных изображений с изменёнными лёгкими.

По тем же причинам можно объяснить высокий уровень точности классификации «ВП», «Травмы» и «Изменения средостения». Самый низкий уровень всех метрик у модели вызывает второй класс «Пневмония». Почти 14 % всех экземпляров, помеченных как класс «Пневмония», оказываются представителями других патологий. Кроме этого, у модели не получилось правильно определить 11 % изображений, относящихся к классу «Пневмония». Эти факты показывают — настоящее качество обученной модели может быть несколько ниже, чем если судить по метрике accuracy.

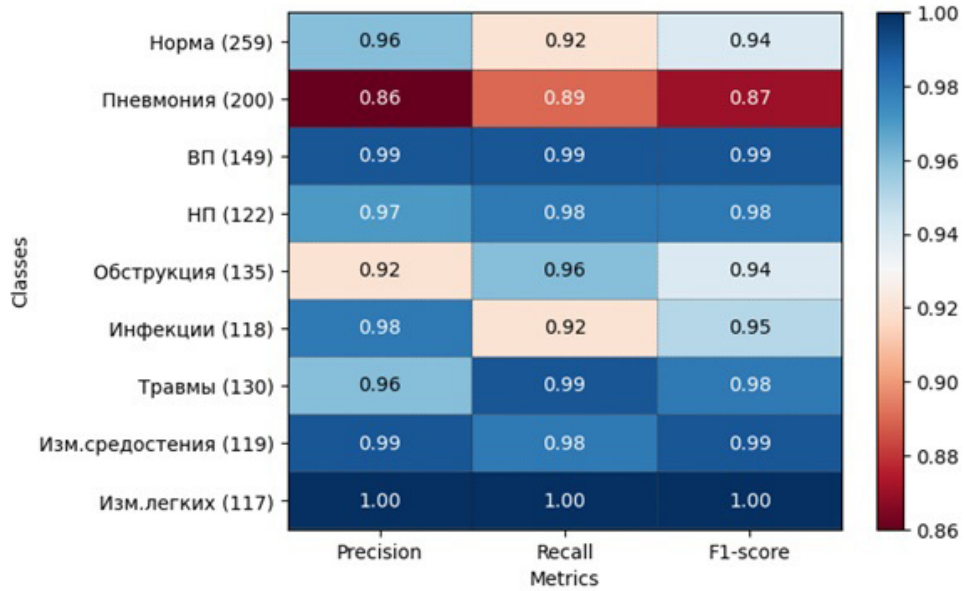


Рис. 3. Classification report для обученной модели на тестовом наборе

4. Чат-бот на основе обученной нейронной сети

Для практического использования нейросети был создан интерфейс в виде чат-бота в мессенджере Telegram (далее — телеграм-бот).

Выбор данного способа взаимодействия с нейронной сетью обуславливается несколькими причинами:

1) простота создания: для создания рабочего телеграм-бота не требуются дорогое оборудование или специальные умения — только базовые навыки программирования. Такой вариант подходит для как предварительной демонстрации работы нейронной сети, так и, при дальнейших улучшениях, для полноценного использования в медицинской сфере.

2) простота эксплуатации: в отличие от существующих решений, требующих сложных установок и специализированного ПО, телеграм-бот предлагает максимально простой и доступный интерфейс через любой смартфон с выходом в интернет. Это значительно расширяет доступ к технологии, делая её удобной и для крупных медицинских учреждений, и для небольших клиник в удалённых регионах, где может отсутствовать доступ к сложному оборудованию и квалифицированным специалистам.

Программный код написан с помощью Telegram Bot API для Python [4]. Пользователь совершает некоторые действия — формирует команду, либо составляет запрос, который передается на программное обеспечение, расположенное на серверах разработчиков. В качестве посредника используется анонимный сервер Telegram. Он отвечает за обработку шифрования и обратную связь между телеграм-ботом и пользователем.

После запуска программного кода, бот готов принимать сообщения от пользователей. Примеры использования бота для распознавания рентген-снимков легких представлен на рис. 4 и рис. 5.

Бот может работать, пока запущен программный код. При размещении на удаленном сервере, телеграм-бот может работать круглосуточно, принимая снимки от многих людей. Количество человек, обслуживаемых ботом, зависит от мощностей аппаратного обеспечения.

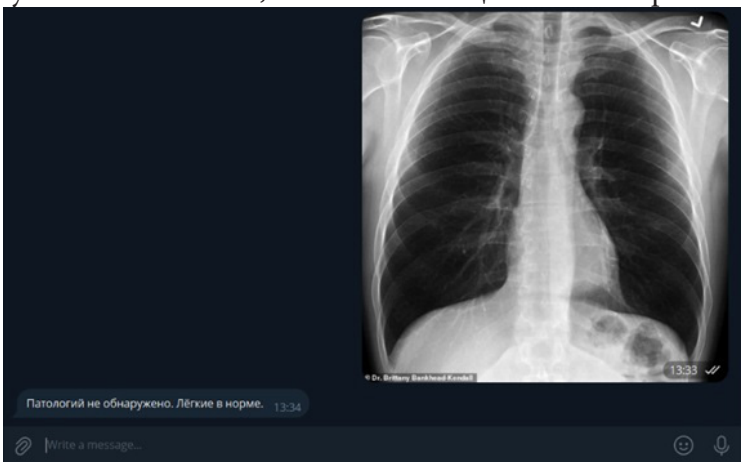


Рис. 4. Распознавание здоровых легких с помощью телеграм-бота

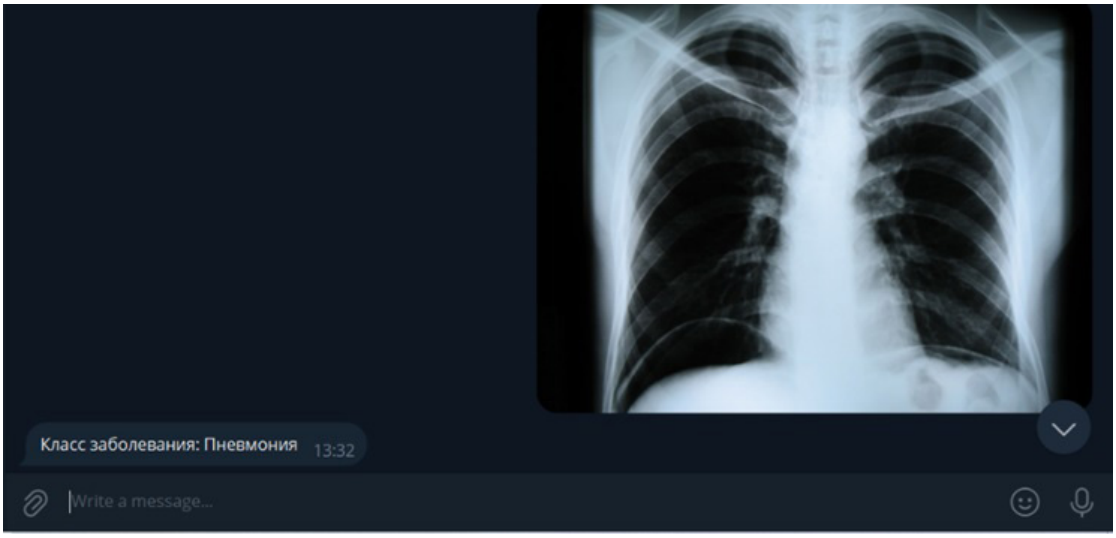


Рис. 5. Распознавание легких с пневмонией

Заключение

В рамках проведенной работы была обучена нейронная сеть по набору рентген-снимков легких, а также был создан интерфейс в виде бота мессенджера телеграм для работы с данной нейронной сетью.

Изначальный набор данных включает более 6000 изображений, на которых представлены легкие без патологий или с патологиями, относящимися к одному из восьми классов. В ходе экспериментов была выбрана архитектура и оптимизированы гиперпараметры нейронной сети, обеспечивающие максимальную точность распознавания на тестовых данных. Для разработки нейронной сети использовались библиотеки TensorFlow и Keras на языке программирования Python в среде Google Colaboratory [5].

Кроме того, был создан удобный интерфейс для взаимодействия с обученной моделью в виде телеграм-бота. Бот позволяет пользователям загружать снимки легких и получать резуль-

тат диагностики, что делает разработку более доступной для практического использования и облегчает внедрение модели в медицинскую практику. Такая интеграция способствует оперативной и удаленной оценке состояния легких, что может быть полезно для врачей и пациентов.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8).

Литература

1. X-ray Lung Diseases Images (9 classes) [Электронный ресурс]. URL: https://www.kaggle.com/datasets/fernando2rad/x-ray-lung-diseases-images-9-classes (дата обращения: 10.01.2024)

2. *Гудфеллоу Я.* Глубокое обучение / Я. Гудфеллоу, И. Бенджио, А. Курвилль. Перевод с английского А.А. Слинкина. – 2-е изд. – М. : ДМК Пресс, 2018. – 652 с.

3. *Дудич М. О.* Свёрточные нейронные сети в задачах диагностики заболеваний легких / М. О. Дудич, Н. Н. Максимова // Материалы V региональной научной-практической конференции «ТОГУ-СТАРТ: фундаментальные и прикладные исследования молодых» (Хабаровск, 16-20 апреля 2024 года). – Хабаровск : Издательство Тихоокеанского государственного университета, 2024. – С. 138–144.

4. Telegram Bot API [Электронный ресурс]. URL: https://core.telegram.org/bots/api (дата обращения 28.10.2024)

5. Google Colaboratory [Электронный ресурс]. URL: https://colab.google (дата обращения: 09.10.2023)

УДК 004.8

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА ВОДЫ В РАЗНЫХ РАЙОНАХ МОСКВЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

И. В. Есипов, А. Д. Личагина, А. Л. Шкерин

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В данной работе проведен анализ качества воды с целью кластеризации водоподготовительных станций. Данные были собраны с официального сайта АО «МОСВОДОКАНАЛ» и приведены к нормализованному виду. Первоначально была выполнена кластеризация с фиксированным количеством кластеров определённым числом водоподготовительных станций Москвы, а следующим шагом была проведена кластеризация с автоматическим определением оптимального числа кластеров. Результаты показали, что оптимальное число кластеров отличается от первоначально заданного.
Ключевые слова: качество воды, машинное обучение, кластеризация, водоподготовка, хлорирование, водоподготовительные станции, метод локтя, силуэтный коэффициент.

Введение

Вода — неотъемлемая часть человеческой жизни. Благодаря воде свой функционал поддерживают предприятия, промышленность, точки общественного питания, различные объекты инфраструктуры и городские квартиры. Чтобы обеспечить население питьевой водой, необходимо очистить воду, доведя ее показатели до гигиенических нормативов, так как ее забор идет из рек и водохранилищ. Очисткой воды занимаются водоподготовительные станции, в Москве их четыре: Рублевская, Западная, Северная и Восточная [1]. По оценке экспертов, в совокупности эти станции выпускают более шести миллионов кубометров чистой воды в сутки. В данной работе рассматривается вопрос «слепой» кластеризации воды по местам ее очистки.

1. Сбор и подготовка данных

Данные о качестве воды были собраны с официального сайта АО «МОСВОДОКАНАЛ». Согласно информации с сайта были выбраны основные показатели, влияющие на качество воды (табл. 1).

Таблица 1

Основные показатели качества воды

Наименование	Обозначение
Водородный показатель, pH	Ед.
Железо общее	мг/л
Запах при 20°C	баллы
Запах при 60°C	баллы
Мутность	мг/л
Остаточный хлор	мг/л
Цветность	градус

2. Нормализация данных

Для корректного проведения кластеризации данные были нормализованы по формуле:

$$x_{норм} = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}},$$

где x — исходное значение показателя,

$x_{\min}$ — минимальное значение показателя в выборке,

$x_{\max}$ — максимальное значения показателя в выборке соответственно.

3. Методика кластеризации

3.1. Кластеризация при k = 4

Первоначально использован алгоритм k-средних с заданным числом кластеров $k = 4$. Цель — проверить, соответствует ли эмпирически заданное число кластеров структурированной группировке данных.

Формула функции расстояния для метода k-средних:

$$J = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} |x_j^{(i)} - \mu_i|^2,$$

где μ_i — центр кластера i,

$x_j^{(i)}$ — j-й объект кластера i.

3.2. Автоматическое определение числа кластеров

Для определения оптимального числа кластеров применены методы:

– Метод локтя (Elbow Method)

– Средний силуэтный коэффициент

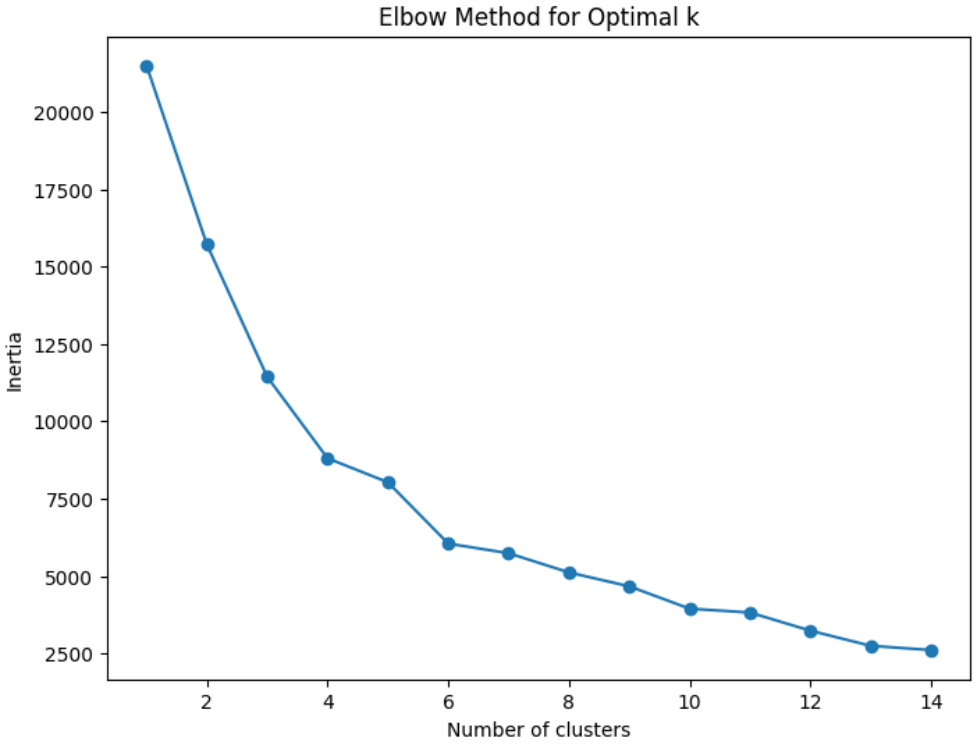


Рис. 1. График зависимости суммы квадратов ошибок от числа кластеров —Метод локтя

На графике зависимости суммы квадратов ошибок от числа кластеров наблюдается заметное снижение инерции до $k = 5$. После этой точки темп уменьшения инерции значительно

замедляется, что подтверждает выбор $k = 5$ как оптимального числа кластеров. Однако также стоит отметить, что инерция продолжает немного снижаться и после $k = 5$, что указывает на возможность дальнейшего разделения данных, если это необходимо для более детального анализа. Метод локтя чётко указывает на $k = 5$ как оптимальную точку сглаживания, где достигается баланс между компактностью кластеров и объяснением структуры данных.

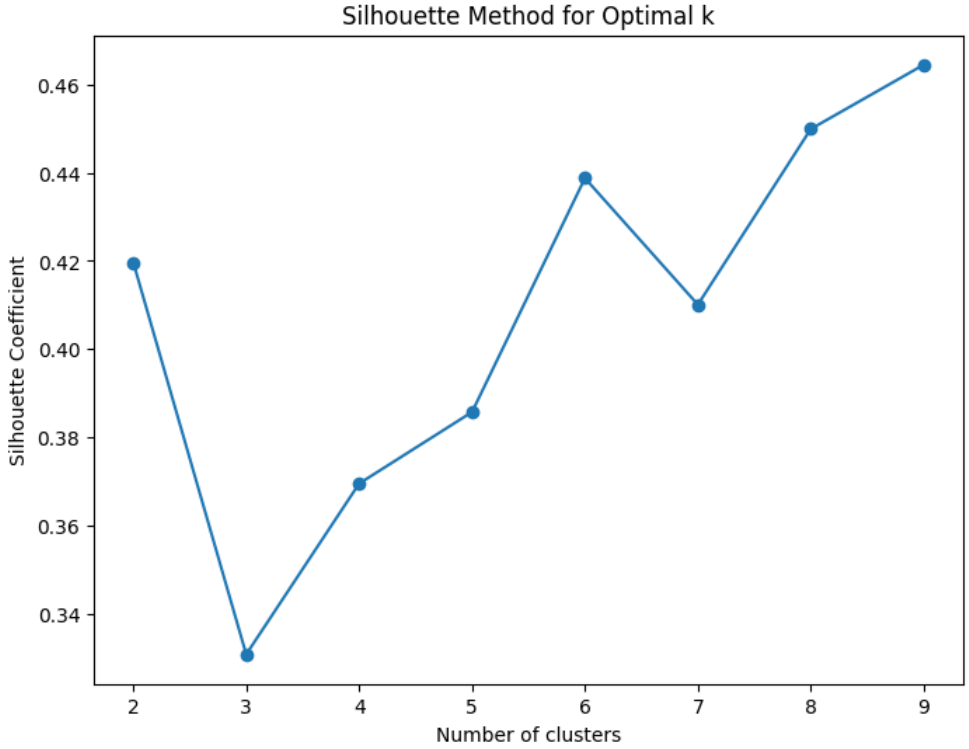


Рис. 2. График среднего силуэтного коэффициента в зависимости от числа кластеров

На графике среднего силуэтного коэффициента максимальное значение достигается при $k = 8$, а не $k = 5$, как это ранее утверждалось. Это говорит о том, что компактность и разделимость кластеров лучше при $k = 8$. Однако выбор $k = 5$ может быть оправдан при условии, что дальнейшее деление не даёт значимых улучшений для задачи анализа. Хотя коэффициент силуэта достигает пика при $k = 8$, выбор $k = 5$ может быть обоснован задачами исследования, поскольку он даёт приемлемую группировку при меньшем числе кластеров. Это снижает сложность анализа и интерпретации.

4. Результаты и обсуждение

4.1. Результаты при k = 4

Кластеризация при $k = 4$ показала следующую группировку объектов, результаты которых приведены на рис. 3.

Анализ показал неоднородность и пересечение кластеров при $k = 4$. Это может свидетельствовать о недостаточной разделимости данных при фиксированном числе кластеров. При фиксированном числе кластеров $k = 4$ наблюдаются недостатки в группировке, что указывает на необходимость уточнения параметров.

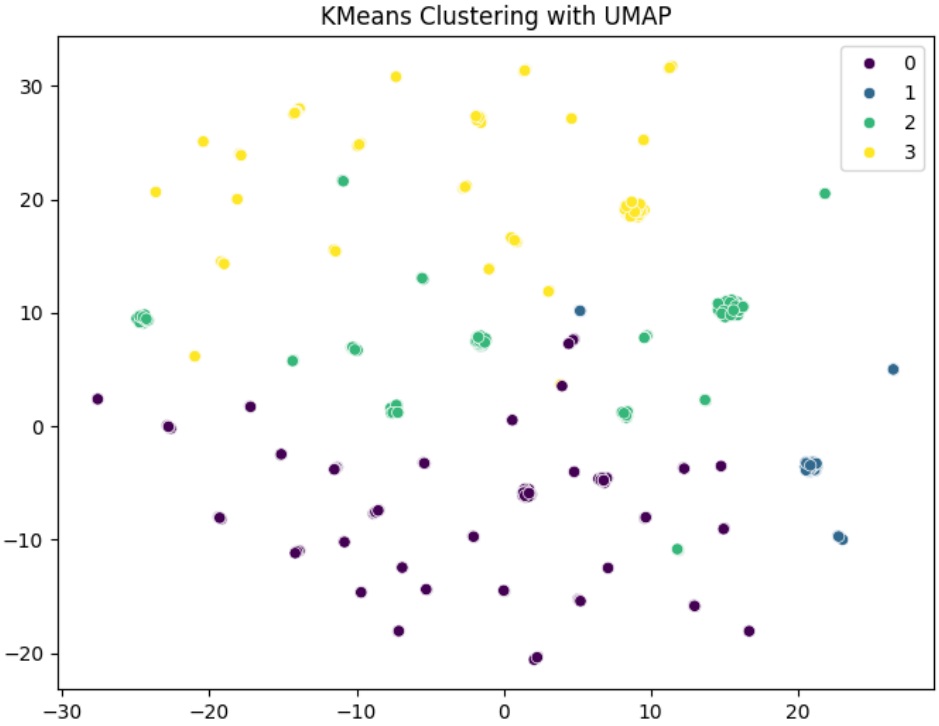


Рис 3. Распределение объектов по кластерам при k = 4

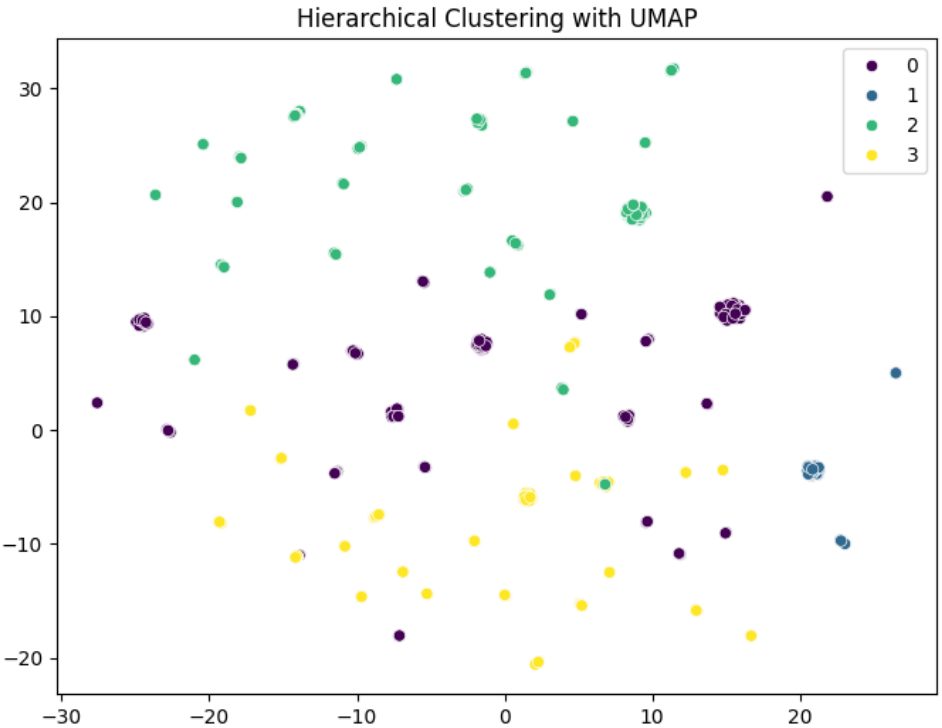


Рис 4. Распределение объектов по иерархическим кластерам при k = 4

4.2. Оптимальное число кластеров

Методы определения оптимального числа кластеров указали на то, что оптимальным является $k = 5$:

– Метод локтя показывает сглаживание кривой при $k = 5$.

– Максимальный средний силуэтный коэффициент достигается при $k = 5$.

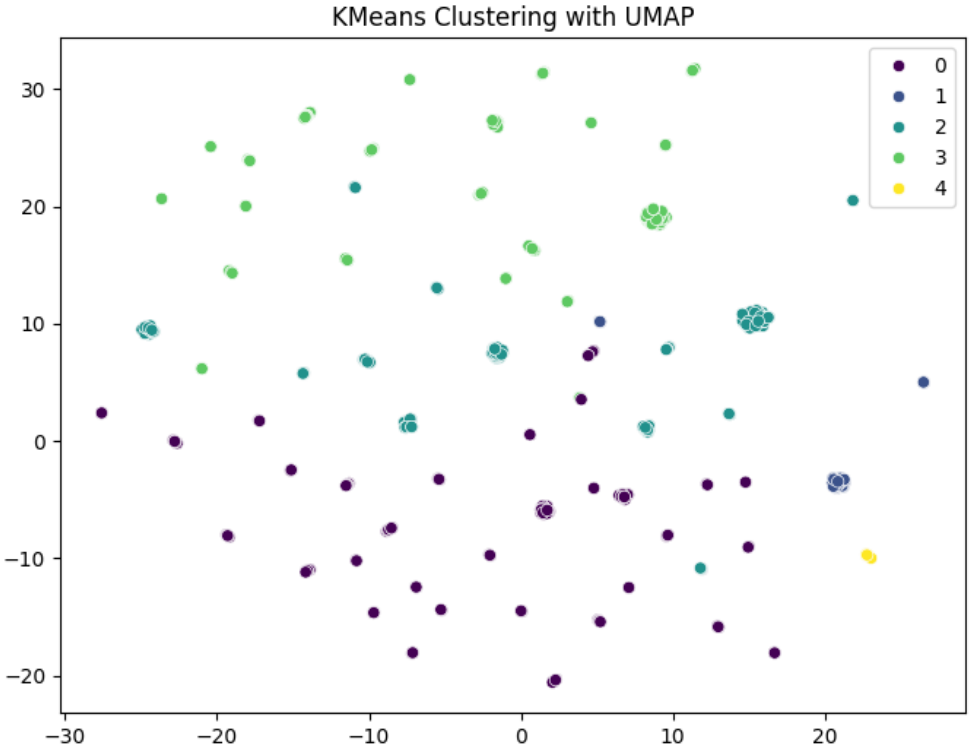


Рис. 5. Визуализация кластеров при оптимальном k = 5

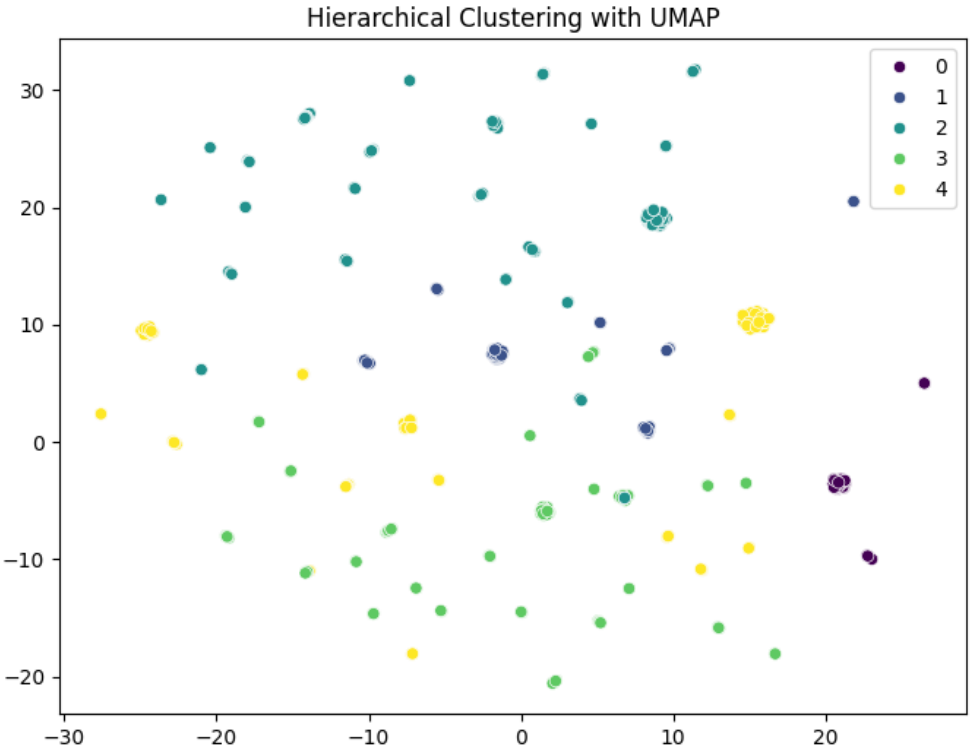


Рис. 6. Визуализация иерархических кластеров при оптимальном k = 5

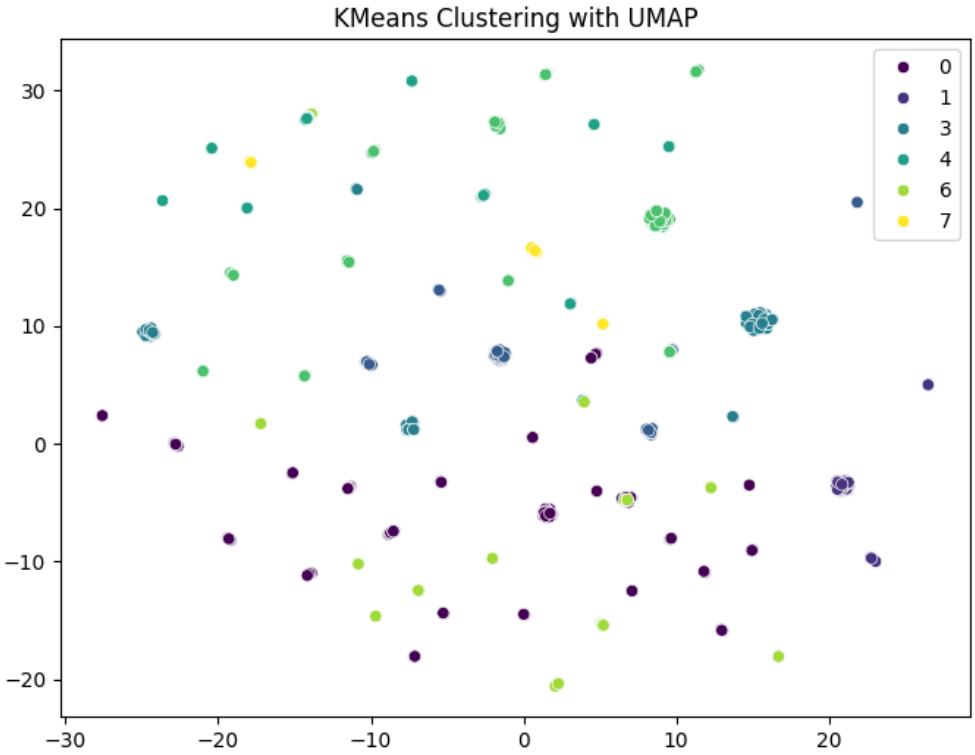


Рис. 7. Визуализация кластеров при оптимальном k = 8

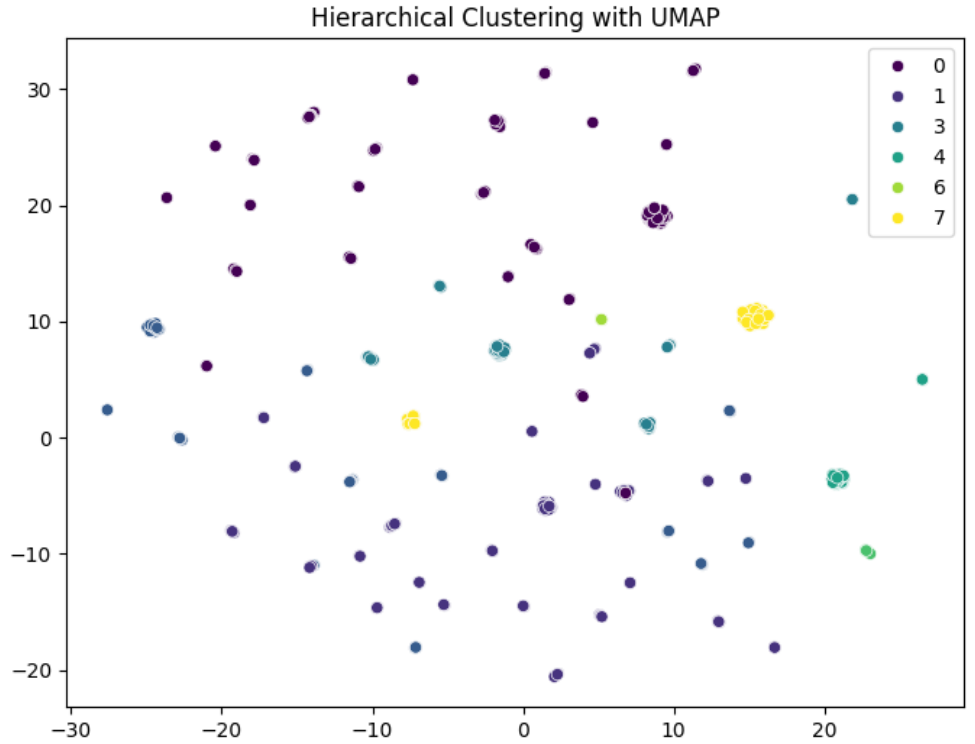


Рис. 8. Визуализация иерархических кластеров при оптимальном k = 8

4.3. Обсуждение результатов

Полученные результаты свидетельствуют о том, что очистные сооружения можно разделить на 5 групп с схожими характеристиками качества воды. Это может быть связано с различиями в технологиях очистки или географическим расположением.

Заключение

Проведенный анализ показал, что автоматическое определение числа кластеров позволяет более точно сгруппировать данные о качестве воды. Оптимальное число кластеров $k = 5$ лучше отражает структуру данных, чем первоначально заданное $k = 4$. Результаты исследования могут быть использованы для улучшения работы очистных сооружений и управления качеством воды.

Литература

1. МОСВОДОКАНАЛ. Официальный сайт. URL: https://www.mosvodokanal.ru (дата обращения: 07.11.2024).

2. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning. Springer. – 2009. – 745 p.

3. *Kaufman L., Rousseeuw P. J.* Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis. – Wiley-Interscience, 1990. – 368 p.

4. *Ковалёв В. А., Ковалёва А. В.* Кластерный анализ в задачах экологии и охраны окружающей среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Химия. Биология. Фармация. 2018. № 2. С. 45–50.

5. *Иванов И. И., Петров П. П.* Применение методов машинного обучения для оценки качества воды // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2019. – № 3. – С. 112–118.

6. *Смирнов С. С., Кузнецова Е. Е.* Анализ качества воды с использованием методов кластеризации // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 4. – С. 89–95.

УДК 004.89, 517.977

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СКОРОСТИ МИГРАЦИИ ДАННЫХ В МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

И. В. Замятин, К. С. Некрасов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача миграции больших объемов данных с гарантиями сохранности и отказоустойчивости. Миграция выполняется на мощностях заказчика с помощью специального программного обеспечения MaaS (Migration as a Service) и по определению включает интеграцию с внешними программно-аппаратными комплексами. Данные факторы являются источником нестабильности общего процесса миграции. Задача миграции рассматривается как задача управления по прогнозирующей модели (MPC). Постулируется существование стратегий поведения ПО MaaS, которые улучшают суммарную производительность миграции. Выбор наиболее предпочтительной стратегии поведения в текущий момент времени предполагается с учетом нечетких и заранее неизвестных характеристик внешней среды. В статье представлены подходы к адаптивной оптимизации производительности ПО MaaS на основе использования моделей и методов машинного обучения.

Ключевые слова: оптимизация, машинное обучение, миграция данных, управление по прогнозирующей модели, model predictive control, MPC, обучение с подкреплением, reinforcement learning.

Введение

В статье рассматривается задача оптимизации производительности программного продукта, реализующего сервис миграции данных — Migration as a Service (далее — ПО MaaS). ПО MaaS решает задачи переноса больших объемов медиа-данных из старых ленточных хранилищ в хранилища облачные, гарантируя отказоустойчивость и целостность данных. Типовой объем данных, подлежащих переносу, составляет от 2,5 до 22 петабайт, следовательно, миграции занимают месяцы или даже годы.

Следует отметить, что ПО MaaS является нишевым продуктом. Сама область т.н. промышленных систем хранения медиа-данных (англ. Media Asset Management system, MAM), на которую он ориентирован, довольно закрыта, и инновации в этой сфере с большой вероятностью представляют коммерческую тайну крупных игроков рынка. В этой связи проблема увеличения производительности подобных систем представляется крайне актуальной.

Особенностью ПО MaaS является то, что оно разворачивается на мощностях заказчика и работает в его сетевой инфраструктуре. Кроме того, исходным ленточным хранилищем продолжают пользоваться, поэтому ПО MaaS, при том, что оно должно работать максимально быстро, не должно при этом перегружать исходное хранилище своими запросами. Иными словами, для любой миграции помимо прочего существуют и явные ограничения сверху в виде расписания максимально допустимой нагрузки, которую может создать ПО MaaS.

Архитектура сервиса MaaS представлена на рис. 1. Как видно из рис. 1, ПО MaaS не имеет прямого контроля над ленточными считывателями. Общая статистика запросов к хранилищу недоступна так же, как и статистика ошибок чтения/записи конкретной ленты (т. е. если лента в силу возраста перестала считываться, ПО MaaS сможет узнать об этом только по косвенным признакам). При этом как состояние лент, так и нагруженность хранилища запросами других пользователей влияет на скорость выполняемой миграции данных.

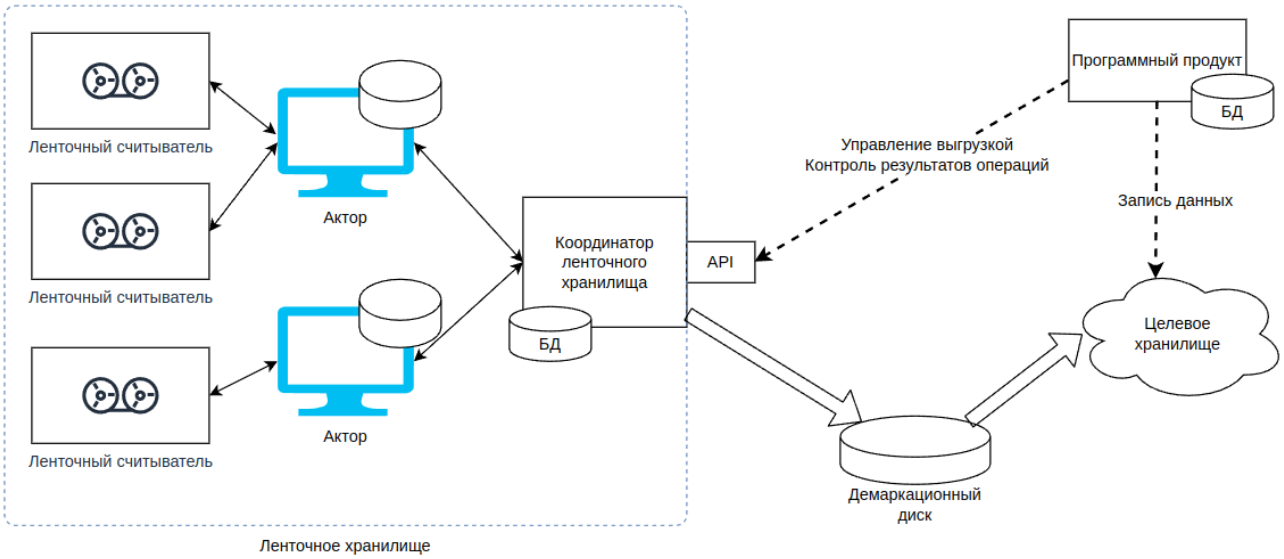


Рис. 1. Архитектура сервиса MaaS

1. Граф переходов состояний миграции

Миграция представляет собой многоступенчатый процесс. Каждый медиа-объект, подлежащий миграции, проходит через последовательность этапов обработки. Пример такой последовательности приведен на рис. 2.

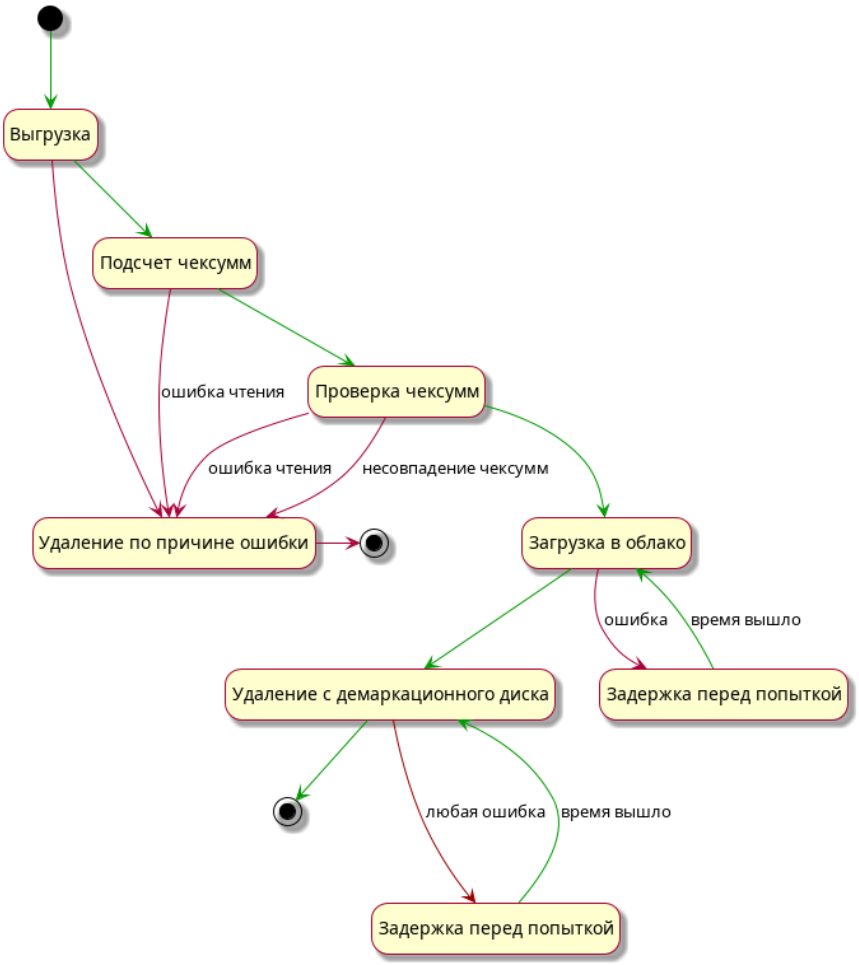


Рис. 2. Пример графа переходов состояний миграции медиа-объекта

Приведенный граф переходов описывает процедуру миграции каждого отдельного объекта из исходного хранилища. Данная процедура должна обеспечивать возможность следующих действий:

- возможность возобновления миграции после сбоя;
- возможность обработки нескольких объектов параллельно.

Заметим, что каждый из узлов представленного графа предполагает действие над объектом; это действие потребляет некоторый аппаратный ресурс (сетевой канал, вычислительный ресурс процессора, очередь ввода/вывода демаркационного диска). Таким образом, в многопоточной среде между разными потоками возникает конкуренция за общие ресурсы (resource contention), причем эта конкуренция зависит как от формы графа переходов, так и от нюансов аппаратной инфраструктуры конкретного заказчика.

Пусть (N, E) — ориентированный граф переходов состояний миграции, где $N = \{N_j\}$ — множество узлов графа, E — множество ребер (переходов) $(N_i, N_j) \in E,\ N_i \in N,\ N_j \in N$. Обозначим через N_0 начальное состояние миграции, N^ω — множество терминальных узлов.

Пусть $D = \{D_k\}$ — множество всех объектов, подлежащих миграции. Обозначим через D^{N_j} множество всех объектов, находящихся на узле N_j. Заметим, что $\bigcup_j D^{N_j} = D$.

Начальное состояние миграции выглядит следующим образом: $D^{N_0} = D,\ D^{N_j} = \varnothing,\ \forall j > 0$. Миграция полностью выполнена, когда верно $\bigcup_k D^{N_k} = D,\ \forall N_k \in N^\omega$.

Перемещением каждого медиа-объекта по графу состояний занимаются рабочие потоки приложения[1]. В каждый момент времени обязанностью рабочего потока является перевод объекта D_k по дуге $(N_i, N_j) \in E,\ N_i \notin N^\omega$, Очевидно, что для каждого нетерминального узла $N_i \notin N^\omega$ может существовать более одного результирующего узла $N_j,\ (N_i, N_j) \in E$. Неоднозначности в выборе результирующего узла для рабочего потока нет, поскольку поток лишь выполняет необходимое действие для текущего узла, а выбор дуги перехода зависит от результата этого действия. Реализация алгоритма такова, что существует только одна дуга, соответствующая успеху выполненной операции; все прочие переходы соответствуют логике обработки негативных сценариев.

2. Стратегии управления миграцией

Вся работа в рамках общей задачи миграции, возможная в данный момент времени, инкапсулирована в виде команд вида $C_i = (N_k, A, M_A)$, где A — медиа-объект, N_k — узел, на котором сейчас находится A, M_A — дополнительная информация об объекте (здесь могут быть знания об объекте, накопленные на предыдущих узлах графа миграции (N, E)). Получив команду, рабочий поток имеет всю необходимую информацию, чтобы продвинуть медиа-объект A по графу состояний на один переход вперед.

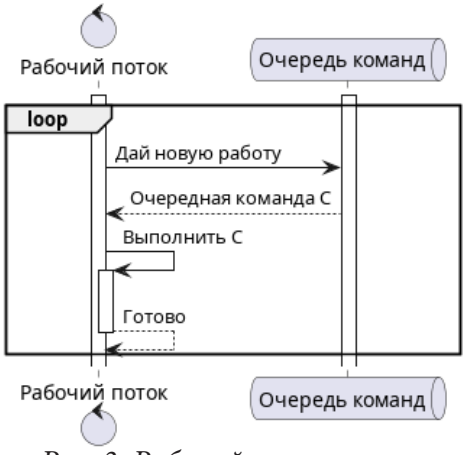


Рис. 3. Рабочий цикл потока

Рабочий цикл потока представлен на рис. 3.

Таким образом, время жизни каждой команды C_i можно представить следующим графиком (рис. 4).

Промежуток времени T_1 соответствует времени ожидания команды в очереди, T_2 — времени ее выполнения некоторым потоком. Суммарное время миграции T_Σ можно представить, как время от точки t_0 самой первой

[1]Здесь и далее под термином «поток» понимается один из подпроцессов (англ. *thread*) в выполнении программы.

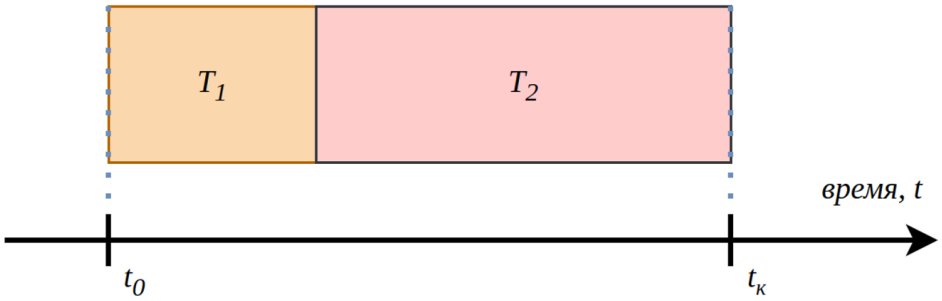


Рис. 4. Время жизни команды

команды, которая появилась в очереди, до точки $t_к^*$ самой последней команды, переводящей последний оставшийся медиа-объект в терминальное состояние. Опыт показывает, что наивное увеличение количества рабочих потоков далеко не всегда приводит к уменьшению T_Σ (а в ряде случаев к увеличению) как минимум, по следующим причинам:

• взаимная конкуренция между узлами графа (N, E) за аппаратные ресурсы, когда последовательное исполнение может оказаться быстрее, чем параллельное;

• ограниченное количество считывателей лент в исходной системе хранения.

Помимо этого, параллелизм, безусловно, ограничен, например, следующими факторами:

• ограничение на количество запросов к исходной системе хранения (как правило, ею продолжают пользоваться во время миграции, и ее доступность критична);

• объем демаркационного диска на порядки меньше, чем объем данных, которые необходимо смигрировать.

Таким образом, на скорость миграции влияют такие параметры системы, как

1. количество рабочих потоков,
2. максимальная степень параллелизма на узлах N_j графа W,
3. приоритет выполнения команд C_i.

В силу того, что процесс миграции характеризуется значительным количеством параметров (куда входят как параметры, описывающие граф переходов, так и параметры и ограничения на уровне многопоточной среды исполнения), вычленение «выигрышных» параметров в контексте данной задачи может оказаться серьезной проблемой как на этапе подготовки репрезентативного датасета, так и на этапе обучения модели. В связи с этим предлагается упрощение в виде готовых поведенческих стратегий $S = \{S_i\}$, реализованных в виде программного кода в ПО MaaS. Каждая стратегия может быть представлена как последовательность определенных команд C_i, определяющих конкретные действия с объектами миграции D_k в определенных узлах графа переходов состояний (N, E).

Изменение стратегии поведения в контексте данной задачи имеет смысл в дискретные моменты времени t_i, а промежуточную агрегированную статистику о состоянии процесса миграции стоит анализировать по временным окнам вида $[t_{i-1}, t_i]$. Предположим, что скорость миграции в момент времени t_{i+1} описывается функцией $F_{i+1} = F\left(x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_k(t_i), S, \Theta(t_i)\right)$, где $x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_k(t_i)$ — измерения, полученные на временном окне $[t_{i-1}, t_i]$, S — выбранная стратегия поведения ПО MaaS, $\Theta(t_i)$ — неизвестные внешние параметры среды (включающие, в частности, поведение других пользователей хранилища и состояние аппаратной и сетевой инфраструктуры). Тогда задачу выбора оптимальной стратегии S на следующем временном шаге t_{i+1} можно описать как задачу регрессии, построив приближенную оценку скорости миграции $F^*(x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_k(t_i), S)$.

3. Архитектура предлагаемого решения

Для решения задачи управления миграцией предлагается включить в ПО MaaS новый компонент, обозначенный на рис. 5 как Модуль анализа и принятия решений (АПР):

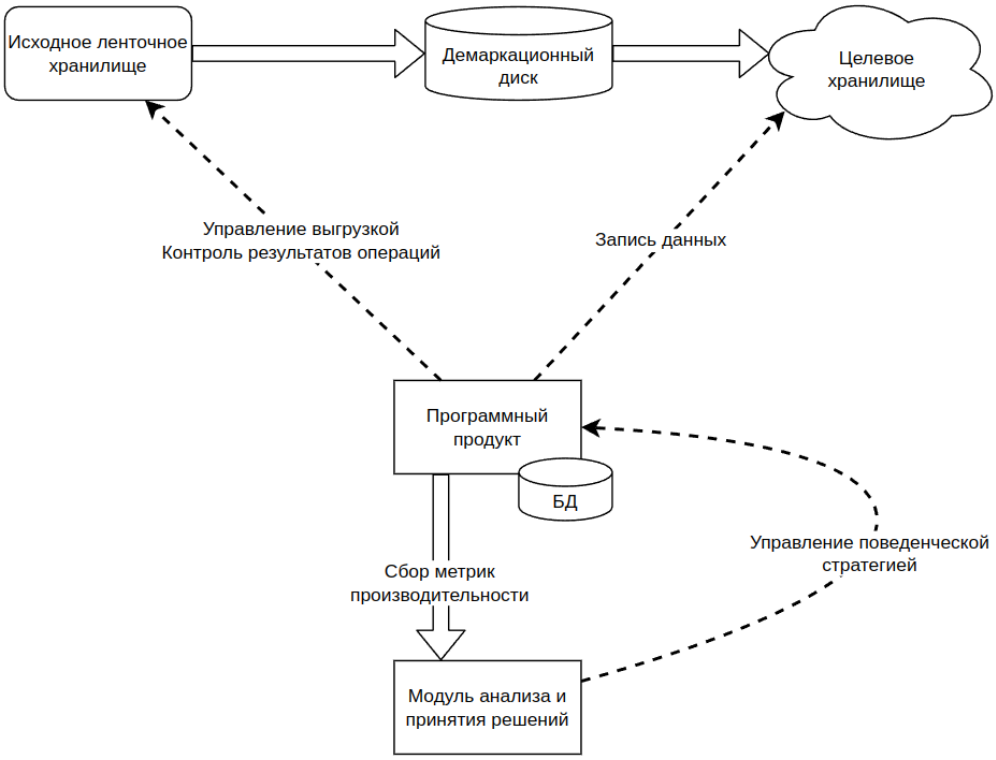


Рис. 5. Предлагаемая архитектура сервиса MaaS

Модуль АПР представляет собой программно-алгоритмический комплекс, функциями которого являются:

1. сбор и агрегирование метрик, поступающих от ПО MaaS;
2. принятие решение о смене стратегии поведения ПО MaaS;
3. отправка управляющих инструкций для ПО MaaS.

Сообщения, отправляемые ПО MaaS в Модуль АПР, по смыслу представляют собой трассировку некоторых событий. В рамках ПО MaaS реализована отправка низкоуровневых событий по шине сообщений ZeroMQ [3]. Примерами таких событий могут быть: факт добавления команды C_i в очередь исполнения, факт начала исполнения команды, факт завершения исполнения команды и т. п. Указанные события агрегируются Модулем АПР в более высокоуровневые метрики, такие как средний размер объекта, который совершил переход по дуге $(N_i, N_j) \in E$ или длительность нахождения объекта на узле N_i, а также более общие метрики, описывающие состояние миграции в целом. Агрегирование метрик предлагается выполнять с использованием колоночной базы данных ClickHouse [4].

Для решения поставленной задачи предлагаются следующие метрики:

Таблица 1

Метрики состояния миграции

Обозначение	Комментарий
x_1	Принятая стратегия поведения $S_i \in S$, где S — конечное счетное множество стратегий поведения, реализованных в Программном продукте.
x_2	Количество ошибок операций, соответствующих узлам $N_j \in N$
x_3	Медианная длительность миграции одного медиа-объекта (т. е. время прохождения маршрута по графу от начального узла до положительного терминального состояния).
x_4	Медианный размер медиа-объектов, завершивших миграцию до конца рассматриваемого временного окна.

Таблица 1 (продолжение)

x_5	Количество объектов, завершивших миграцию до конца рассматриваемого временного окна.
x_6	Суммарный размер объектов, завершивших миграцию до конца рассматриваемого временного окна.

Рассматривая ПО MaaS как совокупность параллельно выполняющихся потоков, требуется построить такое управление выбором стратегий, чтобы суммарная скорость миграции была максимальной. Такая задача, однако, имеет нечеткий характер в связи с тем, что:

• рассматриваемый программный продукт запускается на аппаратуре заказчика и в его сетевой инфраструктуре, что исключает получение информации о ее состоянии в каждый момент времени;

• у исходной системы хранения существует свой неизвестный нам график активности (включающий архивирование, использование в бизнес-процессах и т. п.).

В этой связи Модуль АПР должен стать управляющей системой, которая определяет выбор стратегии в соответствии с нечеткими зависимостями между состоянием системы, метриками состояния миграции и выполняемыми командами.

4. Адаптивная оптимизация миграции

Проблему увеличения производительности миграции логично рассматривать как задачу управления по прогнозирующей модели (MPC — Model Predictive Control) [5, 6]. Одним из наиболее эффективных способов решения данной задачи является использование моделей машинного обучения.

Исходные данные для обучения такой модели в нашем случае представляют собой временной ряд, состоящий из однотипных строк вида $\langle t, t_{DOW}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$, где t — время начала окна измерения (в пределах одного дня), t_{DOW} — номер дня недели, значения x_i, $i = \overline{1,6}$ соответствуют одноименным метрикам из табл. 1. Предполагается, что окно измерения константно и это значение является гиперпараметром. На указанных данных обучается предиктивная модель, описывающая, как прореагирует процесс миграции на изменение стратегии поведения.

Наиболее перспективными моделями, которые могут быть использованы в качестве предиктивной модели, представляются:

• рекуррентная нейронная сеть, в частности, LSTM, позволяющая учитывать последовательности состояний метрик и примененных при этом стратегий;

• модель обучения с подкреплением (Reinforcement Learning — RL).

Литература

1. *Yarens J. Cruz, Alberto Villalonga, Fernando Castaño, Marcelino Rivas, Rodolfo E. Haber* Automated machine learning methodology for optimizing production processes in small and medium-sized enterprises // Operations Research Perspectives. – 2024 ю – Vol. 12, 100308. – URL: https://doi.org/10.1016/j.orp.2024.100308 (дата обращения 24.10.24)

2. *Liang Fei, Zhang Taowen*. Application of Neural Network in Optimization of Chemical Process. – 2021. – 10.48550/arXiv.2110.04942. — URL: https://arxiv.org/abs/2110.04942 (дата обращения 24.10.24)

3. ZeroMQ : официальный сайт. — URL: https://zeromq.org/ (дата обращения 02.11.2024)

4. СУБД ClickHouse : официальный сайт. — URL: https://clickhouse.com/ (дата обращения 02.11.2024)

5. Оптимальное управление в математике // Большая российская энциклопедия. — URL: https://bigenc.ru/c/optimal-noe-upravlenie-v-matematike-5f9a4a (дата обращения 02.11.2024)
6. Basics of model predictive control // Do-MPC toolbox. — URL: https://www.do-mpc.com/en/latest/theory_mpc.html (дата обращения 18.11.2024)

УДК 004.4

ПРИМЕНЕНИЕ TENSORFLOW FRAMEWORK В СИСТЕМЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ПОИСКА В СЕТИ ИНТЕРНЕТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИИ

А. И. Камышанов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается применение фреймворка TensorFlow для создания системы интеллектуального поиска в сети Интернет. Приведён анализ ключевых этапов разработки, включая обработку естественного языка, ранжирование результатов и персонализацию поиска. Особое внимание уделено архитектуре приложения, интеграции моделей машинного обучения и оптимизации процессов с использованием GPU. Представлены практические примеры реализации и схемы, демонстрирующие связь между компонентами системы. Сделан вывод о значимости TensorFlow для повышения точности и эффективности поиска.

Ключевые слова: TensorFlow, искусственный интеллект, интеллектуальный поиск, обработка естественного языка, ранжирование результатов, персонализация, архитектура приложения, машинное обучение, рекомендации, GPU-ускорение, поисковая система.

Введение

В эпоху информационного взрыва перед пользователями стоит задача быстрого и точного нахождения релевантных данных среди огромного объема информации. Традиционные поисковые системы не всегда способны удовлетворить эти требования, особенно при необходимости учитывать контекст запросов и индивидуальные предпочтения пользователей. Современные технологии искусственного интеллекта, такие как TensorFlow, предоставляют мощный инструментарий для создания интеллектуальных поисковых систем нового поколения. Эти системы способны обрабатывать запросы на естественном языке, ранжировать результаты на основе их релевантности и формировать персонализированные рекомендации. В статье подробно рассматриваются способы интеграции TensorFlow в архитектуру поискового приложения, особенности применения моделей машинного обучения для анализа данных, а также преимущества GPU-ускорения при обработке больших объемов информации. Обсуждаются ключевые подходы, которые позволяют значительно улучшить пользовательский опыт и производительность интеллектуальных систем поиска.

1. Архитектура приложения и интеграция TensorFlow

Приложение для интеллектуального поиска построено на многослойной архитектуре, обеспечивающей модульность и высокую производительность. Основу системы составляют четыре ключевых компонента. Веб-интерфейс служит точкой взаимодействия пользователя с системой, предоставляя удобный способ отправки запросов и получения результатов. Обработчики управляют запросами от веб-интерфейса, передавая их сервисам для обработки, что обеспечивает структурированное взаимодействие между слоями. Модели данных формируют надежное хранилище для всех данных, включая запросы пользователей, результаты поиска и метрики, необходимые для обучения моделей. Сервисы выполняют основную бизнес-логику, включая обработку данных и вызовы моделей TensorFlow, что позволяет реализовать интеллектуальный поиск. Архитектура приложения представлена на схеме (рис. 1).

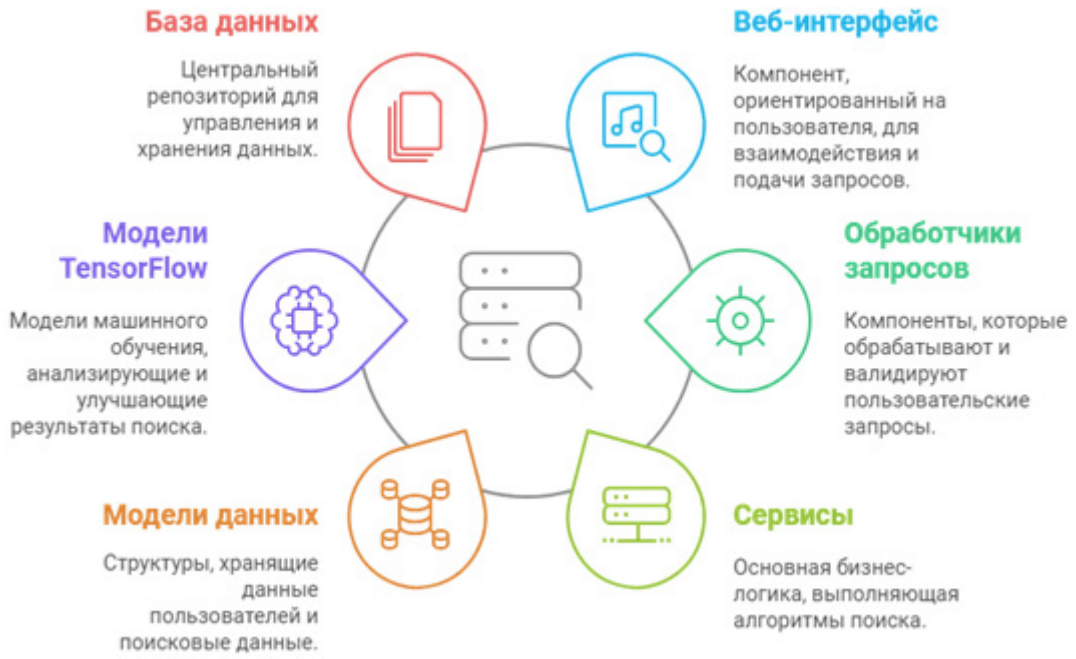


Рис. 1. Схема архитектуры приложения для интеллектуального поиска

TensorFlow играет ключевую роль в реализации интеллектуального поиска, обрабатывая сложные задачи машинного обучения на уровне сервисов. Он используется для обработки запросов пользователей с применением технологий обработки естественного языка (NLP), что позволяет системе лучше понимать намерения пользователя. Модели, разработанные с использованием TensorFlow, обеспечивают точное ранжирование результатов поиска, оценивая их релевантность запросу. Кроме того, система генерирует персонализированные рекомендации, анализируя поведение пользователей и их предпочтения. Интеграция TensorFlow в архитектуру позволяет добиться высокой эффективности и масштабируемости приложения, делая поиск более точным и удобным.

2. Использование TensorFlow для обработки естественного языка

Современные системы интеллектуального поиска требуют мощных инструментов для анализа и интерпретации текстовых данных. В рамках данного проекта для обработки запросов пользователей используются трансформерные модели, такие как BERT и GPT, которые поддерживаются TensorFlow. Эти модели позволяют анализировать семантическую структуру запросов, выявляя скрытые намерения пользователя. Это особенно важно для поиска, где корректная интерпретация запроса напрямую влияет на качество выдачи.

Благодаря поддержке TensorFlow данные модели способны автоматически исправлять ошибки в запросах, что улучшает пользовательский опыт. Также они предлагают варианты уточнений, если исходный запрос оказывается недостаточно точным. Это достигается за счет предварительного обучения моделей на больших текстовых коллекциях и последующего дообучения на данных, специфичных для задачи поиска.

Для реализации обработки запросов в реальном времени используется TensorFlow Serving, что позволяет минимизировать задержки и обеспечивать мгновенный отклик. При поступлении запроса он проходит предварительную обработку, после чего анализируется моделью трансформера. На основе предсказаний модели формируется результат, который возвращается пользователю. Схема обработки представлена на схеме (рис. 2).

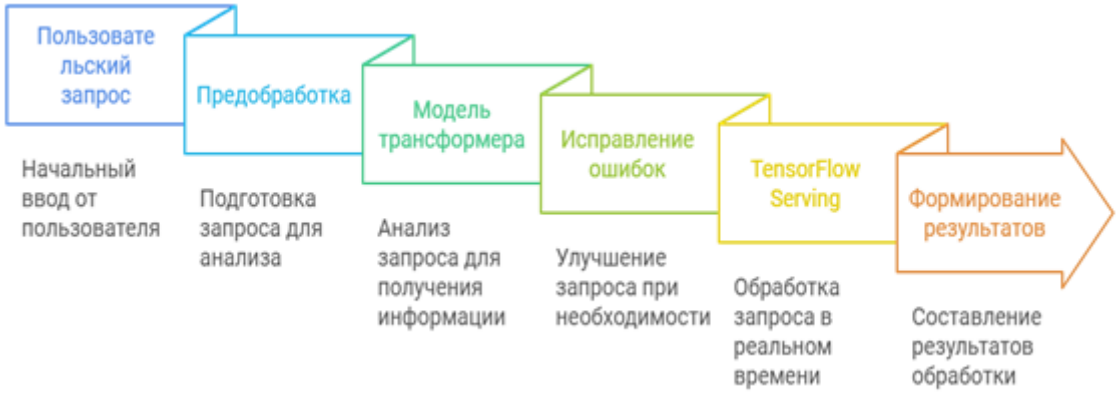


Рис. 2. Схема обработки запросов

3. Ранжирование результатов поиска

TensorFlow предоставляет мощные инструменты для создания моделей ранжирования, которые могут учитывать различные факторы, такие как частота ключевых слов, контекст запроса, а также поведение пользователей с похожими запросами. Эти алгоритмы помогают улучшить релевантность выдачи результатов поиска, ориентируясь на реальные предпочтения и действия пользователей. Для анализа работы таких моделей и мониторинга ключевых метрик, таких как Precision и Recall, можно использовать TensorBoard. Этот инструмент позволяет визуализировать данные и отслеживать качество алгоритмов ранжирования на разных этапах их обучения. В рамках конкретного примера для обучения модели ранжирования были использованы данные поисковых сессий. В них входила информация о текстах запросов, URL, кликах и времени взаимодействия с результатами. Итоговая модель способна прогнозировать вероятность удовлетворения пользователя предложенным результатом, что делает её применение эффективным для улучшения пользовательского опыта.

4. Ускорение обучения с использованием GPU

Разработка интеллектуальной поисковой системы на основе искусственного интеллекта требует обработки больших объемов данных, что делает вычислительные ресурсы ключевым фактором успеха. TensorFlow предоставляет встроенную поддержку графических процессоров (GPU), что позволяет значительно ускорить обучение моделей глубокого обучения. Благодаря технологии CUDA от NVIDIA, которая обеспечивает высокую параллельную производительность, обучение моделей, таких как рекомендательные системы или системы кластеризации данных, происходит в разы быстрее. Например, модель на базе BERT, адаптированная для анализа запросов пользователей, показала значительное снижение времени обучения: с 24 часов на CPU до 4 часов на GPU при обработке 100 000 запросов. Это ускорение позволяет быстрее развивать систему интеллектуального поиска, тестировать и внедрять новые алгоритмы, обеспечивая высокую производительность в условиях реального времени.

5. Расширение функционала с помощью TensorFlow

TensorFlow является незаменимым инструментом в создании системы интеллектуального поиска, так как предоставляет широкий набор инструментов для реализации ключевых функций. Одной из них является использование рекомендательных систем, которые анализируют историю запросов пользователей, выявляют их предпочтения и формируют персонализированные результаты. Это не только улучшает качество поиска, но и повышает уровень взаимо-

действия с пользователем, предлагая релевантные материалы, соответствующие их интересам. Другой важной функцией является кластеризация результатов поиска. TensorFlow позволяет применять алгоритмы кластеризации, чтобы группировать найденные результаты по категориям. Например, запрос на тему «искусственный интеллект» может быть разделён на такие категории, как «научные статьи», «программные библиотеки», «новости» и «курсы». Это делает интерфейс системы более удобным, а поиск — более структурированным и эффективным. В результате система интеллектуального поиска не только быстрее реагирует на запросы, но и предоставляет более понятные и организованные ответы, что особенно важно для работы в интернете с большими объемами данных.

Заключение

В ходе работы была разработана система интеллектуального поиска, использующая TensorFlow и искусственный интеллект. Приложение эффективно анализирует запросы пользователей, улучшает качество поиска благодаря рекомендательным системам и кластеризации. Использование GPU ускоряет обучение моделей, что повышает производительность и точность системы, обеспечивая быстрые и релевантные результаты для пользователей.

Литература

1. *Абрамов С.* Введение в TensorFlow: Практическое руководство / С. Абрамов. — СПб. : БХВ-Петербург, 2019. – 320 с.

2. *Хинтон Д.* Глубокое обучение / Д. Хинтон, Я. Бенгио, Ю. Лекун. – Москва : Вильямс, 2019. – 672 с.

3. *Гудвин П.* Python и машинное обучение / П. Гудвин, Д. Эммонс. — СПб. : Питер, 2018. – 448 с.

УДК 004.8:004.056

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В СИСТЕМАХ ЗАЩИТЫ ОТ СПАМА

А. А. Карташов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматриваются возможности применения алгоритмов машинного обучения в системах защиты от спама. Обсуждаются популярные алгоритмы машинного обучения, такие как наивный байесовский классификатор, метод опорных векторов, деревья решений, и другие. Приводится анализ эффективности различных моделей, оцениваются их преимущества и ограничения. Результаты работы могут быть использованы для разработки более точных и адаптивных систем фильтрации спама в электронной почте и мессенджерах.

Ключевые слова: машинное обучение, защита от спама, классификация сообщений, фильтрация, кибербезопасность, искусственный интеллект, обработка текстов, нейронные сети, наивный байесовский классификатор, метод опорных векторов, фишинг, автоматизация, анализ данных.

Введение

Современные средства коммуникации играют ключевую роль в обмене информацией. С увеличением объема передаваемой информации по всем этим каналам, проблема нежелательных сообщений, известных как спам, становится все более острой. Эффективное противодействие этому явлению требует инновационных подходов, а в современных технологиях защиты от спама ключевую роль играет искусственный интеллект и машинное обучение. Данная тема работы направлена на описание и анализ применения методов машинного обучения в технологии обнаружения и фильтрации спама.

1. Постановка задачи

На сегодняшний день существует обширный набор алгоритмов для идентификации спама. С учетом этого, разумным представляется их систематизация в соответствии с определенным критерием. Предлагается провести классификацию на основе применяемого метода или категории математического аппарата, лежащего в основе алгоритма фильтрации спама.

Для проведения анализа и обучения алгоритмов идентификации спама необходимо установить формальные параметры и определения:

Обозначим множество документов как $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_i\}$. Зададим множество классов, представленных как $C = \{spam, not\ spam\}$. Определим множество терминов как $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_i\}$ с количеством терминов $|T| = n$.

Обозначим обучающее множество документов как $D' \subseteq D$. Это множество состоит из документов, классы которых известны заранее.

Введем функцию классификации $class : D \to C$, которая сопоставляет каждый документ с определенным классом (spam или not spam).

Документ $d \in D$ может иметь различные формы представления. Введем понятие формы документа $R(d)$, которое зависит от конкретного алгоритма извлечения терминов из документа.

На основании этой терминологии рассмотрим существующие алгоритмы фильтрации спама, основанные на машинном обучении.

2. Вероятностные классификаторы

Введем понятие «мягкого» и «жесткого» вероятностного классификатора.

«Мягкий» вероятностный классификатор представляет собой функцию вероятности, которая оценивает вероятность того, что данный документ, представленный в форме $R(d) = x$, принадлежит к определенному классу C. Формула для «мягкого» классификатора выглядит следующим образом:

$$c_{soft}(d,c) = p\left(\text{class}(d) = cR(d) = x\right). \tag{1}$$

Этот подход позволяет проводить нечеткую классификацию, где документ может быть присвоен различным классам с разной степенью уверенности.

«Жёсткий» вероятностный классификатор также оценивает вероятность принадлежности документа к определенному классу, но с использованием порогового значения t. Если вероятность превышает пороговое значение t, то документ классифицируется как спам. Формула «жёсткого» классификатора выглядит следующим образом:

$$c_{soft}(d,c) = p\left(class(d) = cR(d) = x\right) > t. \tag{2}$$

Этот метод приводит к бинарной классификации, где документ либо относится к классу, либо нет, в зависимости от превышения порогового значения.

Приведенные выше понятия предоставляют основу для понимания алгоритмов классификации в контексте борьбы со спамом, таких как логистическая регрессия, наивный байесовский классификатор и алгоритмы, использующие марковские поля.

Алгоритм «наивной» байесовской классификации: пусть документ $d \in D$ представлен в форме вектора в пространстве терминов $x^{[d]} = \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$. «Наивный» байесовский классификатор определяет класс документа как наиболее вероятный из всех возможных классов, то есть с помощью оценки апостериорного максимума (MAP).

$$c_{MAP} = argmax_{c \in C} P\left(c|x^{[d]}\right). \tag{3}$$

Для идентификации спама, этот классификатор применяет следующий критерий:

$$c_{MAP} = \begin{cases} spam, & если \;\; c_{soft}(d, spam) > c_{soft}(d, not\, spam) \\ not\, spam, & иначе \end{cases} \tag{4}$$

Применяя теорему Байеса к формуле (1), получаем:

$$c_{soft}(d,c) = \frac{p(c) \times p\left(x^{[d]}|c\right)}{p\left(R(d) = x^{[d]}\right)}. \tag{5}$$

В связи с тем, что вероятности рассчитываются для одного и того же документа, вероятность $p(R(d) = x^{[d]})$ не влияет на результат сравнения при использовании критерия (4), и её можно опустить:

$$c_{soft}(d,c) = p(c) \times p\left(x^{[d]}|c\right). \tag{6}$$

Вероятность $p(x^{[d]} \mid c)$ может быть получена из обучающего множества данных, и для упрощения этого процесса используется «наивное» предположение о статистической независимости всех терминов в представлении документа. Это предположение приводит к тому, что:

$$p\left(x^{[d]}|c\right) = \prod_i p\left(x_i|c\right). \tag{7}$$

Преобразуем формулу (6) с учетом формулы (7):

$$c_{soft}(d,c) = p(c) \times \prod_i p\left(x_i|c\right). \tag{8}$$

Таким образом, «наивный» байесовский классификатор оценивает вероятности классов, основываясь на вероятностях появления каждого термина в документе. Его основными преимуществами являются малое время обучения и сравнительно высокая точность, однако он может быть уязвим к атакам с подбором «хороших» слов.

Алгоритм «не наивной» байесовской классификации: рассмотрим метод, который улучшает качество классификации в сравнении с классическим «наивным» байесовским классификатором. Основная идея заключается в аппроксимации статистической зависимости между терминами, что позволяет лучше учесть взаимосвязи между ними.

Рассмотрим следующую вероятность:

$$p\left(x^{[d]}|c\right) = p\left(x_1,\ x_2,\dots,x_i|c\right) = p\left(x_1|c\right)\times p\left(x_2,\ x_3,\dots,x_i|x_1,c\right) = \\ = p\left(x_1|c\right)\times\theta\left(x^{[d]},x_1,c\right)\times p\left(x_2,\ x_3,\dots,x_i|c\right). \tag{9}$$

При этом θ является некоторым неизвестным, но существующим распределением.

Для аппроксимации используется следующая формула вместо формулы (7):

$$p\left(x^{[d]}|c\right) = \prod_i p\left(x_i|c\right)\times\theta\left(x_i,c\right). \tag{10}$$

$\theta(x_i,c)$ изначально устанавливается в 1 для всех i (при этом формула (10) становится аналогичной формуле (6), то есть случаю классического «наивного» байесовского классификатора). При каждой ошибке в классификации происходит коррекция параметра θ с помощью так называемых коэффициентов уверенности α и β.

Такой метод проявляет высокую точность в классификации, обеспечивает быструю обработку и характеризуется относительно низким использованием памяти. Основной недостаток заключается в данный алгоритм не до конца изучен.

3. Линейные классификаторы

Линейный классификатор представляет собой вектор из n коэффициентов $\beta = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$, где $n = |T|$, и граничное значение t. Уравнение плоскости в пространстве терминов задается как

$$\beta\times x^{[m]} = t. \tag{11}$$

Эта гиперплоскость разделяет пространство терминов на два подпространства: одно содержит точки, классифицируемые как спам, а другое — как не спам.

Гиперплоскость считается разделяющей, если для каждого $d \in D$ выполняются условия:

$$\left(\beta\times x^{[m]} > t\right) \Leftrightarrow class\left(m\right) = spam \tag{12}$$

$$\left(\beta\times x^{[m]} \le t\right) \Leftrightarrow class\left(m\right) = not\ spam \tag{13}$$

Множество документов считается линейно разделимым, если для него существует такая разделяющая гиперплоскость.

Основной задачей линейных классификаторов является поиск оптимальной разделяющей гиперплоскости для заданного множества документов.

Персептрон: алгоритм, который итеративно находит разделяющую плоскость для заданного множества документов. Если множество документов линейно разделимо, то персептрон ищет любую разделяющую плоскость. В случае отсутствия такой плоскости алгоритм может зациклиться, если не установлено максимальное количество итераций. На каждой итерации происходит коррекция коэффициентов, соответствующих терминам точек, которые были некорректно классифицированы. Эта коррекция выполняется путем прибавления или вычитания некоторой константы.

Преимущества персептрона включают простоту, скорость и адаптивность. Однако полученная гиперплоскость не обязательно является наилучшей для данного набора документов.

Алгоритм Winnow: представляет собой вариацию персептрона с некоторыми ключевыми отличиями. Основные особенности алгоритма включают:

1. Элементы всегда положительны: в отличие от персептрона, где веса могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, в алгоритме Winnow элементы (веса) всегда остаются положительными.

2. Мультипликативная коррекция коэффициентов: вместо аддитивной коррекции, применяемой в персептроне, алгоритм Winnow использует мультипликативную коррекцию. При ошибке первого рода (ложное срабатывание), коэффициенты β, соответствующие терминам некорректно классифицированного документа, умножаются на некоторый коэффициент $\alpha > 1$. При ошибке второго рода, коэффициенты умножаются на $0 < \gamma < 1$.

Модификация алгоритма Winnow с использованием ортогональных разреженных биграмм (которые формируют базис в пространстве терминов и позволяют наличие других слов между словами в биграмме) обеспечивает высокую точность, достигающую порядка 99 %.

Алгоритм опорных векторов (SVM): метод машинного обучения, который вычисляет разделяющую гиперплоскость, наиболее удаленную от ближайших точек обучающего множества документов. Гиперплоскость полностью определяется небольшим количеством точек, известных как опорные векторы. Линейная комбинация этих опорных векторов формирует классификатор.

Уже существуют эффективные реализации этого алгоритма для идентификации спама, так как он имеет высокую точность и подходит к нашей задаче.

4. Классификаторы на основе сходства

Рассмотрим документ $d \in D$ и множество корректно классифицированных документов $D' \subseteq D$. Пусть задана некоторая функция расстояния $distance : D \times D \to \mathbb{R}$, являющаяся метрикой на пространстве терминов T, то есть удовлетворяющая следующим требованиям:

1. $\forall x, y \in D, distance(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2. $\forall x, y \in D, distance(x, y) = distance(y, x)$;

3. $\forall x, y, z \in D, distance(x, z) \le distance(x, y) + distance(y, z)$.

Основная идея данного алгоритма заключается в том, что документы одного класса находятся близко друг к другу в векторном пространстве, в то время как документы разных классов расположены далеко друг от друга. Это предположение формирует основу для различных классификаторов, использующих сходство документов в пространстве терминов для определения их принадлежности к классам.

Алгоритм k-ближайших соседей: простым и интуитивным методом классификации документов является присвоение документу класса, совпадающего с классом ближайшего известного документа. Однако более эффективным подходом к этой задаче является использование алгоритма k-ближайших соседей

Этот метод учитывает классы k наиболее близких к рассматриваемому документам и принимает решение в пользу класса, которому принадлежит большинство из этих документов. Ключевой особенностью данного метода является учет не только ближайших соседей, но и их коллективного влияния на принятие решения о классификации.

Важно отметить, что несмотря на свою простоту и широкое использование в различных областях, данные методы не всегда обеспечивают высокую точность при решении задачи идентификации спама.

5. Логические классификаторы

Логические классификаторы представляют собой группу алгоритмов, которые используют аппарат логики для описания связей между терминами в документах. В данной категории выделяются два основных подхода:

Деревья принятия решений: деревья принятия решений в процессе обучения последовательно разбивают тренировочный набор данных по одному атрибуту за раз, используя определенный критерий (например, наибольшую информационную выгоду). В контексте классификации спама, обычные деревья принятия решений могут демонстрировать недостаточную эффективность. Однако, с применением модификаций, можно достичь существенного улучшения качества алгоритма.

Логический вывод на основе набора правил: алгоритмы, использующие логический вывод из заранее определенного набора правил, обладают сравнимой эффективностью по сравнению с алгоритмами на деревьях принятия решений. Тем не менее, существуют и комбинированные подходы, обеспечивающие более высокую точность классификации.

Заключение

Методы машинного обучения, такие как Наивный Байесовский Классификатор и Алгоритм опорных векторов (SVM), предоставляют эффективные инструменты для выделения паттернов и классификации текстовых данных. Классификаторы на основе сходства, такие как k-ближайших соседей, рассматривают структуру пространства терминов, учитывая близость документов.

Логические классификаторы, такие как деревья принятия решений, используют логические правила для описания связей между терминами. Вместе с тем, некоторые комбинированные подходы, такие как логический вывод на основе набора правил, могут обеспечить более высокую точность в сравнении с чистыми деревьями принятия решений.

Выбор подходящего метода зависит от конкретных требований и характеристик задачи. Эффективное решение проблемы спама требует тщательного анализа и выбора подходящего алгоритма в зависимости от особенностей текстовых данных и поставленных целей.

Литература

1. *Серано Л.* Грокаем машинное обучение / Л. Серано ; пер. с англ. А. Рыбиной. – Санкт-Петербург : Питер, 2021. – 448 с. (Серия «Грокаем») (дата обращения: 08.11.2024).

2. Применение технологий искусственного интеллекта в информационной безопасности. – URL: https://www.anti-malware.ru/analytics/Technology_Analysis/using-artificial-intelligence-technologies-in-information-security (дата обращения: 12.11.2024).

3. Наивный Байес, или о том, как математика позволяет фильтровать спам. – URL: https://habr.com/ru/articles/415963/ (дата обращения: 15.11.2024).

УДК 004.896

ВЛИЯНИЕ АРХИТЕКТУРЫ ГЛУБОКОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА ГРАДИЕНТА СТРАТЕГИИ ИСПОЛНИТЕЛЬ-КРИТИК A2C

В. В. Кашко, С. А. Олейникова

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Объектом исследования является алгоритм Advantage Actor Critic (A2C), позволяющий обеспечить процесс обучения с подкреплением на основе взаимодействия двух аппроксиматоров: исполнителя и критика. Предметом исследования является архитектура связи нейронных сетей, которые в процессе функционирования соответственно прогнозируют стратегии и функции ценности. Для этого был проведен вычислительный эксперимент, позволяющий оценить эффективность взаимодействия исполнителя и критика и конечного результата на примере задачи перевернутого маятника путем применения различных комбинаций архитектуры.

Ключевые слова: глубокое обучение с подкреплением, метод градиента стратегии, метод исполнитель критик, A2C, агент, окружающая среда, бутстреппинг, ценность состояния, суммарный доход, подкрепление, нейронные сети, скрытый слой, архитектура, устойчивость алгоритма, сходимость.

Введение

Глубокое обучение с подкреплением открывает новые горизонты в разработке адаптивных автономных самообучающихся систем. Применение аппарата нейронных сетей позволяет решить проблему «проклятия размерности» за счёт обобщения, но при этом вносит дополнительные расходы на настройку гиперпараметров и сложность анализа функционирования агента [1–5, 7]. В отличие от стандартных приложений распознавания образов или задач классификации, которые требуют заранее подготовленных пакетов данных, глубокое обучение с подкреплением, в основном, обучается в online-режиме, непрерывно взаимодействуя со средой [1, 6–9]. Исходя из специфики соответствующих алгоритмов, следует прямая зависимость качества функционирования агента от способности аппроксиматора корректно и точно осуществлять предсказание.

В настоящее время всё больший интерес представляют гибридные методы, объединяющие в себе, как стратегические [5] — аппроксимирующие политику, так и ценностные — базирующиеся на вычислении ценности состояния (состояния-действия) [1–5]. Ярким представителем таковых является метод исполнитель-критик — Advantage Actor Critic или A2C. Особенностью стратегических алгоритмов, например REINFORCE, является отсутствие смещения значений и высокая дисперсия случайной величины, описывающей суммарный доход, которая возрастает с увеличением длины эпизода. Для устранения существующей проблемы предпринимались различные попытки. Одна из них заключалась в применении базы — базового уровня оценки дохода, что ознаменовало появление метода REINFORCE с базой [1–5]. Предложенный подход позволил уменьшить дисперсию с сохранением отсутствия смещения, но очень медленно сходится, поскольку требует больше эпизодов взаимодействия со средой. В попытке устранить данный эффект, было предложено использовать бутстреппинг — возможность оценки ценности текущего состояния на основе оценок последующих [1–5]. В результате возник метод исполнитель-критик, где в качестве исполнителя выступает стратегия, а критика — функция ценности, на основании которой производится корректировка поведения. Важное преимущество данного алгоритма заключается в его применении к неэпизодическим задачам, поскольку

он способен обучаться по неполным траекториям [3]. Подробнее с данным методом можно ознакомиться в [1–5]. В случае применения глубоких нейронных сетей для реализации алгоритма возникает вопрос организации взаимодействия между исполнителем и критиком для обеспечения корректного функционирования и сходимости. В процессе работы метода, для генерации действий и ценности состояния используются одни и те же входные данные, но корректировка весовых коэффициентов осуществляется на основании полученного дохода и предсказанной оценки. Целью данной работы является анализ воздействия архитектуры взаимодействия между глубокими сетями исполнителя и критика на функционирование алгоритма A2C.

1. Архитектура сети исполнитель-критик

Аппарат нейронных сетей в контексте алгоритма аппроксимирует две параметрические функции. Первая представляет собой стратегию, вторая функцию ценности состояния. Настройка параметров оценки оказывает прямое воздействие на эффективность прогнозирования дохода, так же как параметризация стратегии на оптимальность выбираемых действий в соответствующих состояниях. В процессе проектирования возникает вопрос о необходимости объединения сети исполнителя и критика. В связи с этим, возникает проблема организации взаимодействия аппроксиматоров для достижения наилучших показателей работы алгоритма. В случае раздельного использования сетей возрастает количество настраиваемых параметров. При этом может возникнуть ситуация, в результате которой сеть исполнителя будет осуществлять некорректное прогнозирование действий до тех пор, пока критик в достаточной степени не выполнит обучение [2]. В результате, потребуется больше данных, что приведёт к необходимости увеличения числа эпизодов. Качественная аппроксимация заключается в таком представлении пространства состояний, при котором подобные объединены в единый кластер [2, 7]. Связывание исполнителя и критика, частичное либо полное, имеет множество преимуществ, но содержит и недостатки. Поскольку стратегия и ценность предназначены для решения общей задачи, то будет целесообразно объединить обе сети в одну. Данный подход позволит использовать единый кластер признаков данных, что теоретически должно способствовать ускорению обучения. Так как при такой конфигурации сети связаны между собой, используется меньше параметров, по сравнению с разделённым вариантом, в результате чего обновление весов исполнителя происходит совместно с критиком без задержки, что очевидно должно ускорить процесс обучения алгоритма и снизить требования к количеству эпизодов. При всех преимуществах, объединение сетей предполагает наличие недостатка, связанного со снижением устойчивости алгоритма по причине обратного распространения градиентов двух компонент — исполнителя и критика [2]. На рис. 1 представлены варианты возможной архитектуры, при которых сети могут быть полностью разделены, так и частично (либо полностью) состоять из общих скрытых слоёв.

2. План проведения экспериментов

Поскольку основной задачей исследования являлось определение воздействия архитектуры нейронной сети на качество работы алгоритма исполнитель-критик A2C, были рассмотрены двухслойная и трёхслойная конфигурации аппроксиматоров. Данный выбор обусловлен наличием небольшого количества скрытых слоёв, что сопряжено с относительно малым числом вычислений, и низкой вариативностью способов конфигурации сети. В качестве решаемой агентом задачи была выбрана проблема балансировки перевёрнутого маятника.

Исходя из решаемой проблематики, в качестве среды взаимодействия использовалась OpenAI gym CartPole-v0, которая завершает эпизод в случае падения маятника (либо превы-

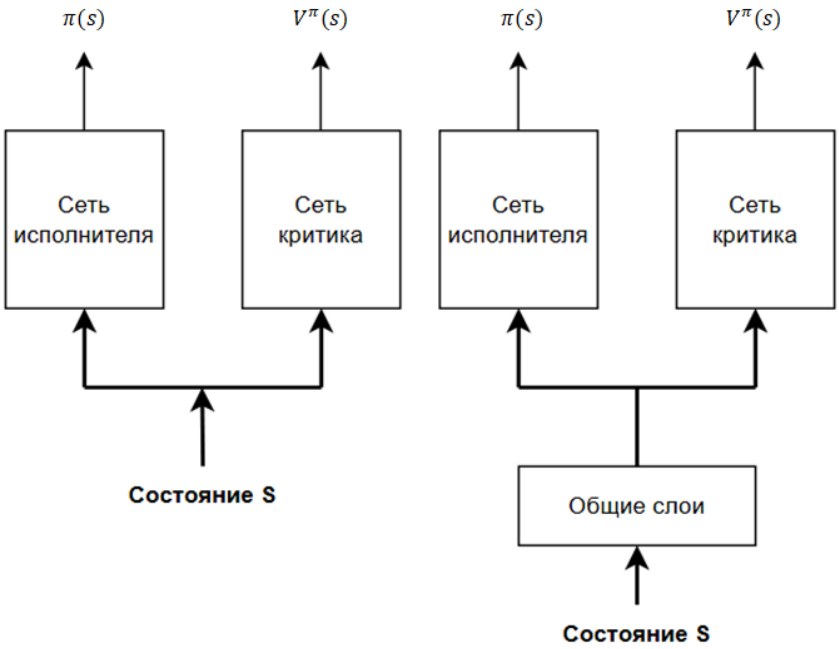


Рис. 1. Варианты архитектуры сети исполнитель-критик

шения допустимого порога отклонения), а при достижении 200 шагов, целевое состояние считается достигнутым. За каждый шаг агент вознаграждается наградой, равной 1.

Перед началом проведения экспериментов были подобраны соответствующие значения гиперпараметров алгоритма из диапазона рекомендуемых, которые не изменялись на протяжении всех опытов. В качестве коэффициента обесценивания дохода использовалось значение, равное 0.9 для каждого рассмотренного случая. В серии экспериментов с двухслойной сетью коэффициент скорости обучения — 0.003, для случая трёхслойной — 0.007. Размерности слоёв, используемых в стендах, соответственно равны 128, 64 и 32, с функцией активации relu. В качестве выхода для сети стратегии применялась операция softmax. Критик использовал необработанное активацией выходное значение.

На первом этапе рассматривался вариант двухслойных сетей. В начале, эксперимент заключался в использовании исполнителя и критика по отдельности. Далее сети были объединены первым скрытым слоем. В конце первого этапа изучалась конфигурация, объединяющая все скрытые слои. На втором этапе исследовалась трёхслойная сеть с отдельными сетями исполнителя и критика, с одним, двумя и полностью обобщёнными слоями. Результатом каждого эксперимента являлся график распределения суммарного дохода за 1000 эпизодов.

Стоит отдельно рассмотреть метрики, относительно которых рассматривалось влияние архитектуры глубокой сети на функционирование алгоритма A2C. В первую очередь главным показателем послужило непосредственное распределение суммарного вознаграждения, исходя из графика которого, можно оценить сходимость и устойчивость метода. Был использован порог суммарного дохода, который позволил определить количество удачных запусков алгоритма при соответствующей конфигурации сети, на основании которого рассчитывался показатель процента благоприятных исходов. Поскольку максимально возможное значение дохода за эпизод у используемой среды равно 200, то в качестве порогового выбрано 100. Оценки были получены по результатам 10 запусков алгоритма с соответствующей конфигурацией архитектуры нейронной сети.

3. Практические результаты

3.1. Двухслойная сеть

Вариант с разделённой конфигурацией исполнителя и критика для случая двухслойной сети продемонстрировал плохие показатели сходимости. Лишь в 30 % случаев алгоритм смог превысить выбранный порог суммарного дохода за эпизод. В очень редких случаях были получены хорошие результаты, но это связано больше с удачной генерацией начальных значений весовых коэффициентов, чем с влиянием архитектуры сети. Наличие данных примеров демонстрирует возможность обучения при разделённой конфигурации, способствующего сходимости данного алгоритма, но вероятность таких случаев достаточно низкая. После объединения первых слоёв сетей исполнителя и критика, стали заметны изменения в величине единичных всплесков дохода. Если для разделённой архитектуры количество опытов, достигших за 1000 эпизодов максимального значения, составляло всего 30% от общего числа, то для случая объединения первого слоя, оно возросло до 50 %. Количество опытов, обеспечивших полную сходимость, практически осталось без изменений. Полное слияние сетей исполнителя и критика значительно повысило качество работы алгоритма. Величина экспериментов, хотя бы раз превышающих за 1000 эпизодов пороговое значение, достигло 100 %, а случаев относительно равномерной сходимости до 70 %. Величины соотношений числа стабильных запусков и превысивших порог экспериментов для соответствующих конфигураций двухслойной нейронной сети представлены в табл. 1.

Таблица 1

Тип конфигурации	Соотношение количества опытов, превысивших порог хотя бы раз на протяжении 1000 эпизодов к общему числу экспериментов	Соотношение стабильно сходящихся опытов к общему числу экспериментов
Разделённые	~ 0.3	~ 0.2
Общий первый слой	~ 0.5	~ 0.2
Общие слои	~ 1	~ 0.7

3.2. Трёхслойная сеть

На втором этапе экспериментов был добавлен дополнительный скрытый слой, состоящий из 32 нейронов. При запуске разделённой конфигурации для трёхслойной сети, количество запусков, превысивших порог дохода, составило 80 % и продемонстрировало 40 % стабильно работающих примеров. Вариант с объединением первого скрытого слоя увеличил число достигших максимума экспериментов до 100 % при неизменном количестве стабильных случаев, которое так же, как и в предыдущем цикле опытов, составляет 40 %. Все последующие конфигурации в каждом из экспериментов демонстрировали стабильное превышение порога дохода. При объединении двух первых слоёв стало заметно увеличение количества сходящихся примеров, которое составило уже 50 %. Полное слияние сетей исполнителя и критика, так же, как и в случае двухслойной сети, продемонстрировало заметное возрастание числа стабильных результатов. Величины соотношений стабильных запусков и превысивших порог экспериментов для соответствующих конфигураций трёхслойной нейронной сети представлены в табл. 2. Стоит отметить, что на данном этапе, помимо архитектуры сети, изменилось количество скрытых слоёв. Как показывают результаты раздельного использования, расширение аппроксиматора вглубь, на данной задаче, привело к возрастанию процента пересёкших пороговое значение результатов и увеличило количество относительно равномерно сходящихся к максимуму, по сравнению с двухслойной сетью.

Таблица 2

Тип конфигурации	Соотношение количества опытов, превысивших порог хотя бы раз на протяжении 1000 эпизодов к общему числу экспериментов	Соотношение стабильно сходящихся опытов к общему числу экспериментов
Разделённые	~ 0.8	~ 0.4
Общий первый слой	~ 1	~ 0.4
Общие первые два слоя	~ 1	~ 0.5
Общие слои	~ 1	~ 0.8

Заключение

Исходя из полученных экспериментальных данных, следует, что для обеспечения увеличения вероятности стабильной работы глубокого алгоритма исполнитель-критик целесообразно использовать архитектуру нейронных сетей с общими глубокими слоями. Результаты подтвердили, описанный в [2] тезис, касательно проблем устойчивости алгоритма, связанных с использованием полностью связанных сетей.

Сеть критика оценивает текущее состояние, из которого принимается решение о предпринимаемом действии, поэтому для того, чтобы скорректировать выбор, необходимо корректно обновить веса данной сети. Как ранее было сказано, в случае раздельной архитектуры, до тех пор, пока критик не обучится в достаточной степени, исполнитель не способен корректно осуществлять выбор действия. Этим обусловлены плохие показатели данной конфигурации. Использование общих данных не гарантирует формирование одинакового пространства признаков для каждого аппроксиматора, что приводит к потере синхронизации между сетями исполнителя и критика.

Наличие связи гарантирует использование общей совокупности классов признаков. При этом в случае полного слияния сетей, распространение ошибки (сумма ошибок исполнителя и критика), в процессе обучения сразу, без задержки, оказывает влияние на весовые коэффициенты. Это в значительной степени ускоряет процесс обучения, уменьшая требования к количеству необходимых данных, но оказывает негативное воздействие на устойчивость, за счёт перекрёстного воздействия чужой ошибки на каждую из сетей. Данная проблема не являлась целью текущего исследования, поскольку рассматривалось непосредственное влияние архитектуры, а не подбор параметров для улучшения сходимости. При этом она заслуживает дальнейшего рассмотрения, поскольку уменьшение дисперсии и повышение качества алгоритма является основой проблематикой обучения с подкреплением с точки зрения приложений. Если нельзя полностью исключить влияние, то стоит рассмотреть возможность его уменьшения.

В процессе выполнения данной работы были определены эффекты от влияния архитектуры взаимодействия сетей исполнителя и критика на функционирование глубокого алгоритма обучения с подкреплением A2C. Экспериментальные данные сравнивались на основании метрик распределения суммарного дохода за эпизод, соотношения превысивших хотя бы раз за 1000 эпизодов горизонт случаев и соотношения примеров, осуществляющих равномерную сходимость к общему числу итераций производимого опыта. Сформулировано объяснение определённых в результате исследования эффектов.

Литература

1. *Саттон Р. С.* Обучение с подкреплением: Введение. 2-е изд. : Пер. с англ. / Р. Саттон, Э. Барто. – Москва : ДМК Пресс, 2020. – 552 с.

2. *Грессер Л.* Глубокое обучение с подкреплением: теория и практика на языке Python / Л. Грессер, Ван Лун Кенг. – Санкт-Петербург : Питер, 2022. – 416 с.

3. *Лонца А.* Алгоритмы обучения с подкреплением на Python: пер. с англ. А. А. Слинкина / А. Донца. – Москва : ДМК Пресс, 2020. – 286 с.

4. *Лю Ю. (Х.)* Обучение с подкреплением на PyTorch: сборник рецептов: пер. с англ. А. А. Слинкина / Ю. (Х.) Лю. – Москва : ДМК Пресс, 2020. – 282 с.

5. *Моралес М.* Грокаем глубокое обучение с подкреплением : учебное пособие / М. Моралес. – Санкт-Петербург : Питер, 2023. - 464 с.

6. *Траск Э.* Грокаем глубокое обучение : учебное пособие / Э. Траск. – Санкт-Петербург : Питер, 2021. – 352 с.

7. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс, 2-е издание: Пер. с англ. / С. Хайкин. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

8. *Гафаров Ф. М.* Искусственные нейронные сети и приложения: учеб. пособие / Ф. М. Гафаров, А. Ф. Галимянов. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2018. – 121 с.

9. *Сергеев А. П.* Введение в нейросетевое моделирование : учеб. пособие / А. П. Сергеев, Д. А. Тарасов ; под общ. ред. А. П. Сергеева. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. – 128 с.

УДК 004.056

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕЙКОВЫХ НОВОСТЕЙ

Е. С. Кенина

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье анализируется эффективность применения нейросетевых моделей для решения задачи классификации фейковых новостей. Рассматриваются основные этапы работы с нейронной сетью и некоторые виды нейросетевых архитектур. Проводится сравнительный анализ полученных результатов, включающих время обучения, время предсказания и точность классификации.

Ключевые слова: классификация фейковых новостей, препроцессинг, машинное обучение, сверточная нейронная сеть (CNN), рекуррентная нейронная сеть (RNN), сеть долгой краткосрочной памяти (LSTM), рекуррентная нейронная сеть с управляемыми блоками (GRU), двунаправленная LSTM (BiLSTM), модель BERT.

Введение

В современном мире дезинформация становится довольно значимой проблемой, затрагивающей различные аспекты общества. Развитие платформ социальных сетей способствует беспрецедентному ускорению распространения дезинформации. Это приводит ко многим негативным последствиям: подрыву доверия к средствам информации, поляризации общества, препятствию адекватного реагирования на новости.

Значительным подвидом дезинформации являются фейковые новости, представляющие собой ложную или искаженную информацию, созданную с целью ввести в заблуждение или манипулировать аудиторией. Фейковые новости представляют серьёзную угрозу для общественного мнения, восприятия реальности и принятия важных решений. Чтобы минимизировать риски человеческой ошибки, для решения задачи обнаружения фейковых новостей всё чаще используются автоматизированные классификаторы, основанные на технологиях машинного обучения. Такие классификаторы способны автоматически анализировать информацию и выявлять признаки, свидетельствующие о том, что новость является фейковой, что позволяет более эффективно противостоять распространению дезинформации.

В настоящее время разработаны сложные модели для классификации фейковых новостей, позволяющие обрабатывать большие объемы данных, улавливать нюансы языка, анализировать содержание статьей и распознавать более тонкие признаки и закономерности.

В данной работе анализируются результаты применения некоторых нейросетевых архитектур для решения задачи классификации фейковых новостей. Получены показатели времени обучения, времени предсказания и точности результатов при использовании различных моделей обучения, а также сделаны выводы на основе полученных результатов с целью сравнения данных моделей.

1. Анализ задачи

Классификация фейковых новостей является сложным процессом, включающим в себя анализ источника информации, проверку фактов, оценку стиля речи и множество других факторов, что подчеркивает необходимость автоматизации данного процесса. Кроме того, существует несколько категорий, к которым можно было бы отнести ложные сведения: неверные факты,

неверная интерпретация достоверной информации, псевдонаучные тексты, компиляции, состоящие в основном из чужих цитат и другие. В [1] приводится следующая классификация:

1) сатира, относящаяся к имитационным новостным программам, в которых обычно используется юмор или преувеличение, чтобы знакомить аудиторию с обновлениями новостей; пародия, которая вместо того, чтобы прямо комментировать текущие события с помощью юмора, играет на нелепости вопросов и подчеркивает их, придумывая полностью вымышленные новые истории;

2) фальсификация, которая относится к статьям, не имеющим фактической основы, но опубликованным в стиле новостных статей для создания легитимности (производитель товара часто имеет намерение ввести в заблуждение);

3) манипуляция, чаще с реальными изображениями или видео, чтобы создать ложное повествование;

4) реклама, распространяемая под видом настоящих новостных репортажей, а также выпуски со ссылкой на прессу, публикуемые как новости;

5) пропаганда, относящаяся к новостям, которые создаются политическим субъектом для влияния на общественное восприятие (открытая цель — принести пользу общественному деятелю, организации или правительству).

Однако, несмотря на то, что фейковые новости могут быть представлены в различных формах, все они направлены на манипулирование эмоциями, вследствие чего имеют общие черты и закономерности, которые могут быть выявлены с помощью технологий машинного обучения и обработки естественного языка (NLP). Это позволяет автоматически выявлять дезинформацию на основе ключевых слов, тональности текста, структуры предложений и других признаков.

2. Этапы решения задачи

Решение задачи классификации фейковых новостей можно разделить на несколько этапов.

На первом шаге необходимо получить датасет, представляющий собой всеобъемлющую подборку новостных статей, тщательно подобранных для предоставления сбалансированного и непредвзятого набора данных. Это имеет решающее значение для получения высококачественных обучающих данных и точных результатов. Для изучения фейковых новостей доступно несколько открытых наборов данных, эти наборы данных имеют существенные ограничения по размеру, категории или предвзятости. Чтобы устранить эти ограничения, можно объединить несколько существующих наборов данных, имеющих схожую структуру.

В [2] отмечено, что:

- новостные статьи, содержащие от 450 до 550 слов, как правило, более надежны;
- общие тенденции указывают на то, что более короткие, но содержательные новости часто более правдивы;
- читаемость текста фейковых новостей хуже, чем реальных новостей;
- субъективность статей о фейковых новостях более значима, чем статей о реальных новостях;
- количество статей, представляющих реальные новости, больше, чем статей, представляющих фейковые новости.

Эти наблюдения дают ценную информацию о характеристиках фейковых и реальных новостных статей, что может сыграть важную роль в дальнейшей разработке и совершенствовании алгоритмов обнаружения фейковых новостей.

На следующем этапе происходит препроцессинг, или предварительная обработка текста новости. Здесь выполняются операции преобразования текстового заголовка новости в формат, необходимый для использования классификатора. К функциям препроцессора можно отнести:

• удаление пробелов, знаков препинания и спецсимволов с помощью регулярных выражений;

• приведение слов к нижнему регистру;

• токенизацию с целью разбиения текста на отдельные части — токены;

• удаление нерелевантных слов (стоп-слов), не играющих значительной роли;

• лемматизацию с целью приведения всех данных к нормальной словарной форме (для существительных и прилагательных это именительный падеж в единственном числе, для глаголов, причастий и деепричастий — инфинитив). Это уменьшает количество уникальных значений, что способствует улучшению результатов работы.

Поскольку алгоритмы машинного обучения не могут работать с сырым текстом, на следующем этапе полученные в результате препроцессинга данные нужно конвертировать в последовательности числовых идентификаторов каждого токена. Это называется извлечением признаков. Одним из наиболее простых и популярных способов извлечения признаков при работе с текстом является «мешок слов». Он описывает вхождения каждого слова в текст.

Чтобы использовать модель, необходимо определить словарь известных токенов и выбрать степень присутствия известных слов. При этом любая информация о порядке или структуре слов игнорируется. Иными словами, для модели важно знать только то, встречается ли знакомое слово в документе, но неважно, где конкретно. Сложность этой модели состоит в том, как определить словарь и как подсчитать вхождение слов.

Можно использовать другой способ создания словаря с помощью сгруппированных слов. Это изменит размер словаря и даст мешку слов больше деталей о документе. Такой подход называется «N-грамма». N-грамма — это последовательность каких-либо сущностей (слов, букв, чисел, цифр и т. д.). В контексте языковых корпусов, под N-граммой обычно понимают последовательность слов. Цифра N обозначает, сколько сгруппированных слов входит в N-грамму. В модель попадают не все возможные N-граммы, а только те, что фигурируют в корпусе.

На заключительном этапе для обнаружения характерных признаков каждой из категорий новостей и для формирования классификационной оценки отнесения новости к одной из категорий с определенным уровнем достоверности результата необходимо обучить нейронную сеть.

В основе классификатора новостных заголовков могут лежать следующие популярные архитектуры нейронных сетей, которые хорошо показали себя в задачах NLP и рекомендуются к использованию [3].

Сверточная нейронная сеть (Convolutional neural network, CNN) содержит один или более объединенных или соединенных сверточных слоев. CNN использует вариацию многослойного перцептрона. Сверточные слои используют операцию свертки для входных данных и передают результат в следующий слой. Эта операция позволяет сети быть глубже с меньшим количеством параметров. Они могут быть эффективными при обработке коротких текстов, таких как анализ тональности. В статье [4] автор описывает процесс и результаты задач классификации текста с помощью CNN. В работе представлена модель на основе word2vec, которая проводит эксперименты и демонстрирует хорошие результаты.

Рекуррентная нейронная сеть (RNN) — это тип нейросетей, который широко используется в NLP. Они способны учитывать последовательность слов в тексте и учиться на основе контекста. Однако у RNN есть ограничения в обработке длинных последовательностей из-за проблемы исчезающего градиента.

Сеть долгой краткосрочной памяти (Long Short-Term Memory, LSTM) и *рекуррентная нейронная сеть с управляемыми блоками* (Gated Recurrent Unit, GRU) — модификации RNN, спроектированные для решения проблемы исчезающего градиента и широко используются в NLP для анализа длинных последовательностей. LSTM создана для более точного моделирования временных последовательностей и их долгосрочных зависимостей, чем традиционная рекуррентная сеть. В работе [5] представлена модель для автоматической морфологической

разметки, которая показывает точность 97.4 %. GRU является более легкой и вычислительно эффективной по сравнению с LSTM. Ее главное преимущество перед LSTM заключается в более низкой сложности и меньшем количестве параметров, что может быть важно при работе с ограниченными вычислительными ресурсами. Однако, стоит отметить, что LSTM всё равно остается более мощным в решении некоторых сложных задач, требующих учета долгосрочных зависимостей.

Двунаправленная LSTM, или *BiLSTM* — это модель последовательности, которая содержит два уровня LSTM, один из которых предназначен для обработки входных данных в прямом направлении, а другой — для обработки в обратном направлении. Он обычно используется в задачах, связанных с NLP. Двунаправленный LSTM помогает машине лучше понимать эту взаимосвязь, чем однонаправленный LSTM. Это обеспечивает дополнительный контекст для сети и приводит к более быстрому и даже полному изучению проблемы, что важно для точной классификации фейковых новостей [6].

Для улучшения точности и сокращения времени обучения каждая из нейросетевых моделей может использовать заранее предобученную на русском корпусе слов модель BERT [7].

BERT — двунаправленная модель с transformer-архитектурой, заменившая собой последовательные по природе рекуррентные нейронные сети (LSTM и GRU), с более быстрым подходом на основе механизма внимания. Модель также предобучена на двух задачах без учителя — моделирование языковых масок и предсказание следующего предложения. Это позволяет использовать предобученную модель BERT, настраивая её под конкретные задачи, такие как определение эмоциональной окраски текста, вопросно-ответные системы и многие другие. В работе [8] приводятся достаточно высокие результаты трех обученных гибридных нейросетевых моделеи — BERT-CNN, BERT-GRU, BERT-LSTM для идентификации фейковых новостей.

Полученные векторные представления передаются в нейросетевые слои в зависимости от конкретной модели для обнаружения характерных признаков. Таким образом, модели используют семантический анализ для выявления фейковой новости. Далее для обработки полученных признаков может быть использован полносвязный нейросетевой слой для улучшения точности распознавания. Кроме того, поскольку нейросетевые модели должны относить новости к одной из многих категорий, ключевой задачей является выполнение многоклассовой классификации. Для этого в конце каждой модели можно использовать полносвязный нейросетевой слой, содержащий столько нейронов, сколько существует классов, и каждый нейрон генерирует оценку вероятности для определенного класса в диапазоне от 0 до 1.

3. Сравнительный анализ полученных результатов

Для проведения сравнительного анализа моделей классификации фейковых новостей, использующих различные методы распознавания признаков и закономерностей, были использованы следующие архитектуры нейронных сетей:

сверточная нейронная;

сеть долгой краткосрочной памяти;

рекуррентная нейронная сеть с управляемыми блоками;

двунаправленная LSTM.

Также была рассмотрена реализация модели BERT, которая может повысить эффективности представленных моделей.

Для проведения анализа необходим большой объем достаточно разнообразных данных. Был выбран датасет, состоящий из двух частей: обучающего и тестового наборов. Обучающий набор содержал около 18000 новостных статей, классифицированных как фейковые или правдивые, а тестовый набор содержал около 5000 статей, которые были использованы для проверки правильности предсказаний модели после обучения.

Следующим этапом работы являлось преобразование текстового заголовка каждой новости в оптимальный для использования классификатора формат, включающее в себя удаление пробелов, знаков препинания и спецсимволов, а также приведение слов к нижнему регистру. После этого была проведена токенизация, представляющая собой процесс разбиения текста на отдельные части — токены, что необходимо для анализа каждого слова по отдельности, а также для последующего извлечения признаков. Затем были удалены нерелевантные слова (стоп-слова), поскольку они часто встречаются в предложениях, но при этом не имеют смысловой нагрузки. Заключительным шагом препроцессинга стала лемматизация, представляющая собой приведение всех данных к нормальной словарной форме с целью уменьшения количества уникальных значений и, следовательно, повышения эффективности работы.

После препроцессинга было проведено извлечение признаков, представляющее собой конвертацию полученных данных в последовательности числовых идентификаторов каждого токена. На заключительном этапе была обучена нейронная сеть, задача которой заключалась в выявлении характерных особенностей каждой категории новостей и предоставлении предсказания, представляющего собой оценку того, какой из категорий принадлежит новость. Время обучения при использовании различных нейросетевых архитектур, лежащих в основе классификатора новостных заголовков, время предсказания и точность полученных результатов, представляющая собой долю верных результатов (истинно положительных и истинно отрицательных) относительно общего объема данных, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Модель	Время обучения (мин)	Время предсказания (сек)	Точность (%)
CNN	40	1	83
LSTM	110	1.8	85
GRU	100	1.7	84
BiLSTM	120	2.5	88

Из представленных в таблице данных следует, что среди всех моделей самую высокую точность показывает двунаправленная LSTM. Это объясняется тем, что данная модель содержит два уровня LSTM, один из которых осуществляет обработку данных в прямом направлении, а другой — в обратном направлении, что приводит к более полному изучению задачи. Рекуррентная нейронная сеть с управляемыми блоками и сеть долгой краткосрочной памяти показывают хорошее сочетание скорости и точности, являясь более оптимальными по времени в сравнении с BiLSTM. При этом GRU является более быстрой, чем LSTM, поскольку использует меньшее количество параметров. Сверточная нейронная сеть продемонстрировала минимальное время обучения и предсказания, однако точность полученных результатов оказалась ниже, чем у рекуррентных моделей, так как CNN лучше обрабатывает локальные зависимости, но ограничена при работе с длинными последовательностями.

Использование модели BERT, предобученной для задач моделирования языковых масок и предсказания следующего предложения, существенно улучшило производительность всех упомянутых выше моделей, сократив время обучения и повысив точность предсказаний. Результаты использования BERT представлены в табл. 2.

Таблица 2

Модель	Время обучения (мин)	Время предсказания (сек)	Точность (%)
BERT-CNN	20	0.7	89
BERT-LSTM	50	0.9	90
BERT-GRU	40	0.8	89
BERT-BiLSTM	55	1.1	92

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы. Использование BERT значительно сократило время обучения каждой из моделей. BERT-CNN достигла высокой точности (89 %) при минимальном времени обучения и предсказания, а модели BERT-GRU и BERT-LSTM продемонстрировали хороший баланс между временем и точностью с небольшим преимуществом в скорости предсказаний у BERT-GRU. Максимальная точность (92%) была достигнута при использовании модели BERT-BiLSTM. Таким образом, интеграция BERT улучшает производительность любой используемой модели, при этом BERT-BiLSTM лучше всего подходит для задач, где важна максимальная точность, а BERT-CNN обеспечивает быстрое выполнение работы при довольно высокой, но не максимальной точности.

Заключение

В результате проведенной работы был проведен обзор решений в области идентификации фейковых новостей, рассмотрены модели глубокого обучения, используемые для задачи классификации, сделаны обоснованные выводы об эффективности рассмотренных моделей. При этом отмечается, что выбор модели зависит от поставленной задачи, поскольку каждая из них демонстрирует различное сочетание времени работы и точности результатов.

Литература

1. Fake News / C. Edson, Jr. Tandoc, Z. Lim, R. Ling. // Digital Journalism. – 2018. – Vol. 6, № 2. – P. 137–153.

2. *Padalko H.* A novel approach to fake news classification using LSTM-based deep learning models / H. Padalko, V. Chomko, D. Chumachenko // Frontiers in Big Data. – 2023. – Vol. 6. – URL: https://doi.org/10.3389/fdata.2023.1320800 (дата обращения: 15.07.2024).

3. 7 архитектур нейронных сетей для решения задач NLP. – URL: https://neurohive.io/ru/osnovy-data-science/7-arhitektur-nejronnyh-setej-nlp/ (дата обращения: 15.07.2024).

4. *Yoon K.* Convolutional Neural Networks for Sentence Classification / K. Yoon // The 2014 Conference on Empirical Methods In Natural Language Processing. – 2014. – P. 1746–1751.

5. *Wang P.* Part-of-Speech Tagging with Bidirectional Long Short-Term Memory Recurrent Neural Network / P. Wang, Y. Qian, F. K. Soong, L. He, H. Zhao // ResearchGate. 2018. – URL: https://www.researchgate.net/publication/283118024_Part-of-Speech_Tagging_with_Bidirectional_Long_Short-Term_Memory_Recurrent_Neural_Network (дата обращения: 15.07.2024).

6. *Zeng Z.-Y.* A Review Structure Based Ensemble Model for Deceptive Review Spam / Z.-Y. Zeng, J.-J. Lin, M.-S. Chen, M.-H. Chen, Y.-Q. Lan, J.-L. Liu. // Information. – 2019. – Vol. 10, № 7. – URL: https://doi.org/10.3390/info10070243 (дата обращения: 15.07.2024).

7. BERT в двух словах: Инновационная языковая модель для NLP. – URL: https://habr.com/ru/companies/otus/articles/702838/ (дата обращения: 15.07.2024).

8. *Тумбинская М. В.* Идентификация фейк-новостей с помощью веб-ресурса на основе нейронных сетей / М. В. Тумбинская, Р. А. Галиев // Программные продукты и системы. – 2023. – № 4. – С. 590–599.

УДК 004.032.26

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВЁРТОЧНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ СЕГМЕНТАЦИИ СПУТНИКОВЫХ СНИМКОВ ЛЕСНЫХ МАССИВОВ

К. С. Клименко

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Аннотация. В данной статье рассмотрена программная сегментация оптических спутниковых снимков лесных насаждений, которая имеет перспективы использования для проектировании сети лесовозных автомобильных дорог при освоении лесных хозяйств. В работе рассмотрены популярные методы и алгоритмы сегментации изображений на основе нейронных сетей, проведён анализ популярных программных библиотек для реализации нейронных сетей на языке программирования Python и описан процесс реализации сверточной нейронной сети с архитектурой U-Net.
Ключевые слова: сегментация изображений, обработка изображений, нейронные сети, Python, U-Net, Keras, спутниковые снимки, распознавание деревьев, лесные массивы, машинное обучение.

Введение

Одним из важных приоритетов лесопромышленной отрасли является развитие транспортной логистики, в которую входит проектирование и строительство лесовозных автомобильных дорог [1–3]. Таким образом возникает необходимость в анализе лесных массивов, использование которого актуально во многих сферах, включая сельское и лесное хозяйство.

Сегментации лесных насаждений на оптических спутниковых снимках высокого разрешения, при проектировании схем транспортного освоения лесных массивов, является крайне важным инструментом для анализа данных местности. Зачастую для сегментации оптических спутниковых снимков привлекают специалистов, работа которых трудозатратна. Для оптимизации процесса проектирования уместно применить программные решения, одним из которых являются технологии машинного зрения.

Целью данной работы является применение машинного распознавания для сегментации лесных насаждений на спутниковых снимках высокого разрешения. В работе рассмотрены наиболее популярные методы для сегментации изображений, программные библиотеки для разработки моделей машинного обучения, представлен алгоритм сегментации спутниковых снимков.

1. Методы и алгоритмы сегментации изображений

Для решения задачи сегментации изображений существует довольно большое множество методов. Рассмотрим самые популярные и эффективные методы для решения данной задачи. Метод случайного леса [4], является универсальным методом машинного обучения. Он использует комплексный набор деревьев на основе выборок данных с несколькими переменными для принятия решений о классификации пикселей на изображениях. Данный метод может использоваться в абсолютном большинстве задач машинного обучения, но требует слишком большого объём данных для увеличения точности результатов.

Ещё одним популярным методом, является метод основанный на графовых моделях, таких как графовые сверточные сети и марковские случайные поля [5]. Он учитывает многие факторы, включая связи между пикселями, цвета, текстуры и формы и позволяет получать высо-

кокачественную сегментацию. Однако, для обучения нейронной сети с применением данного метода требуется очень большой объём данных. Учитывая специфику задачи, данный метод не гарантирует получение результата с необходимой точностью.

Для точной сегментации изображений одними из популярных методов являются алгоритмы на основе свёрточной нейронной сети [5]. Данный метод применяет свёрточный слой для обнаружения особенностей изображения и нейронную сеть для принятия решений о классификации пикселей. В своем обучении нейронная сеть использует алгоритм обратного распространения. Происходит прямое распространение от первого слоя к последнему, затем вычисляется ошибка в выходном слое и осуществляется обратное распространение.

Метод на основе свёрточной нейронной сети, является наиболее подходящим для задач бинарной сегментации изображений, как требует относительно небольшой объём данных, а точность результатов получается довольно высокой.

2. Программная библиотека для реализации нейронной сети

Программный код нейронной сети удобнее всего реализуется на языке программирования Python, так как он имеет удобный в работе синтаксис и большие математические программные библиотеки. Для работы с нейронными сетями для данного языка программирования самыми популярными являются следующие библиотеки: PyTorch, TensorFlow и Keras.

Библиотека PyTorch имеет интуитивный синтаксис, схожий с синтаксисом языка программирования Python. В ней есть хорошая интеграция с другими инструментами и библиотеками для машинного обучения. Но её использование может быть осложнено, так-как при работе с большими моделями и данными она имеет низкую производительность в сравнении с другими библиотеками.

Библиотека TensorFlow имеет высокую производительность и широкий набор инструментов для разработки, отладки и развёртывания моделей. Она имеет поддержку большинства платформ, включая web и мобильные платформы, а модульная архитектура библиотеки позволяет удобно расширять функционал проектов. Однако, сложный синтаксис и отсутствие гибкости при работе с моделями, осложняют работу с данной библиотекой.

В данной работе, для реализации нейронной сети была выбрана библиотека Keras, так-как она имеет реализации широко применяемых блоков нейронных сетей, а также ряд заранее спроектированных и обученных моделей [4]. В неё ходят инструменты для упрощения работы с текстом и изображениями. Она проста в использовании, основана на модульной архитектуре и имеет высокую скорость развёртывания. Из недостатков данной библиотеки можно выделить проблемы на низкоуровневом API, которые возникают в специфических случаях и низкая производительность при работе с GPU в сравнении с другими библиотеками. Данные недостатки не влияют на качество и результаты при решении поставленной задачи.

3. Реализация алгоритма

Для программной сегментации оптических спутниковых снимков лесных массивов использован метод на основе свёрточной нейронной сети и архитектура U-Net. Изначально данная архитектура была разработана для использования в медицинских целях, но благодаря её результативности в решении задач бинарной сегментации изображений, со временем её начали использовать и в других сферах.

Программный код, реализующий свёрточную нейронную сеть, включающий в себя функционал для загрузки обучающих данных и модель нейронной сети, был реализован на языке программирования Python с применением модели U-Net и библиотеки Keras.

В качестве исходных данных был составлен массив данных для обучения нейронной сети, состоящий из 140 оптических спутниковых снимков высокого разрешения и соответствующих им изображений сегментированных вручную карт.

На основе массива данных нейронная сеть обучалась 28 эпох. Были проведены тесты на 20 спутниковых снимках, которых не было в составе данных для обучения. Точность результатов составила 73 %. Для улучшения точности было решено расширить массив данных для обучения нейронной сети до 250 спутниковых снимков и сегментированных вручную изображений, на основе которых удалось улучшить структура нейронной сети.

Нейронная сеть снова прошла обучение на расширенных данных, при этом точность сегментации выросла до 98 %. Один из снимков, использованных для тестирования представлен на рис. 1. Результат работы обученной нейронной сети представлен на рис. 2.

Рис. 1. Пример спутникового снимка для тестирования нейронной сети

Рис. 2. Результат сегментации спутникового снимка нейронной сетью

Заключение

Программная сегментация изображений применяется многих сферах для решения сложных задач, с которыми плохо справляются другие алгоритмы. Например, для построения сегментированных карт местности, для обнаружения объектов на фотографиях и т. д. Сегментация изображений сложный и трудозатратный процесс, требующий большой объём исходных данных для обучения. Однако, использование нейронных сетей, помогает упростить и уско-

рить этот процесс, что открывает большие перспективы для создания программного обеспечения, способного выполнять сложные, трудозатратные и специфические задачи.

Созданная и обученная в данной работе нейронная сеть может успешно использоваться для проектирования лесовозных автомобильных дорог. Также программную сегментацию изображений можно применить для своевременного обнаружения лесных пожаров, распознавания объектов на фотографиях, прогнозирования погоды по спутниковым снимкам и во многих других сферах.

Литература

1. Проектирование схем транспортного освоения лесных массивов с применением информационно-интеллектуальных систем / В. В. Никитин, А. Н. Брюховецкий, А. В. Скрыпников, И. А. Высоцкая, Р. С. Сапелкин, А. Б. Бондарев // Автоматизация. Современные технологии. – 2022. – Т. 76, № 3. – С. 130–134.
2. Экспериментальное исследование методов автоматизированного проектирования трассы лесовозной автомобильной дороги / Е. В. Чирков, А. В. Скрыпников, А. О. Боровлев, В. С. Прокопец, И. А. Высоцкая // Автоматизация. Современные технологии. – 2021. – Т. 75, № 1. – С. 29–33.
3. Информационно-интеллектуальная система проектирования лесотранспортных сетей / В. В. Никитин, И. А. Высоцкая, А. В. Скрыпников, А. Н. Брюховецкий, Р. С. Сапелкин, А. Б. Бондарев // Автоматизация. Современные технологии. – 2022. – Т. 76, № 4. – С. 185–188.
4. *Коул А.* Исскуственный интеллект и компьютерное зрение. Реальные проекты на Python, Keras и TensorFlow / А. Коул, С. Ганджу, М. Казам; РГБ. – Издательский дом «Питер», 2023. – 608 с.
5. *Постолит А. В.* Основы искусственного интеллекта в примерах на Python; БХВ – Петербург. 2022. – 448 с.
6. Обзор алгоритмов сегментации // Хабр: [сайт]. – 2024. – URL: https://habr.com/ru/companies/intel/articles/266347/ (дата обращения: 07.10.2024).
7. Библиотеки для глубокого обучения: Keras // Хабр: [сайт]. – 2024. – URL: https://habr.com/ru/companies/ods/articles/325432/ (дата обращения: 06.10.2024).

УДК 004.94

КЛАССИФИКАЦИЯ СЕРДЕЧНЫХ АРИТМИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРТОЧНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Т. А. Кувшинов, О. Ю. Марьясин

Ярославский государственный технический университет

Аннотация. В работе рассмотрена задача классификации различных сердечных аритмий на основе данных фотоплетизмографии. Описано современное состояние проблемы, методы, применяемые для классификации сердечных аритмий на основе машинного обучения и искусственных нейронных сетей, общедоступные наборы данных, которые могут быть использованы для решения подобных задач. Отмечено два основных подхода к решению задачи классификации сердечных аритмий на основе данных фотоплетизмографии. Из которых авторами был выбран подход на основе анализа сигнала фотоплетизмографии как временного ряда. Особенностью рассмотренной в работе задачи классификации, является то, что были добавлены отдельные классы для пульсовых волн разных типов для каждого вида сердечной аритмии. Это позволяет установить связь с такими болезнями как сахарный диабет, атеросклероз или гипертония. В качестве применяемой нейросетевой архитектуры авторы выбрали одномерную сверточную нейронную сеть. Значения точности полученное при решении задачи классификации с двенадцатью классами составило 99,3 %.

Ключевые слова: фотоплетизмография, сердечная аритмия, классификация, искусственная нейронная сеть, сверточная нейронная сеть.

Введение

Фотоплетизмография (ФПГ) (англ. Photoplethysmography — PPG) представляет собой оптический метод регистрации изменения объема крови в микрососудистом русле ткани. Объем крови в исследуемом участке ткани меняется по мере прохождения пульсовой волны, вызванной выбросом крови в результате сокращения сердца. Исследуемый участок ткани (например, палец руки) просвечивается светом с определенной длиной волны (такой, чтобы испускаемый свет поглощался эритроцитами в крови), и проходящий через ткани или отраженный (в зависимости от вида фотоплетизмографа) свет регистрируется фотоприемником. Объем крови в исследуемом участке ткани обратно пропорционален интенсивности регистрируемого света. Получаемая в результате фотоплетизмограмма отражает изменение объема крови в исследуемом участке ткани с течением времени. Чаще всего применяется пальцевая ФПГ, но могут использоваться и другие участки тела, например, запястье, мочка уха, лоб, области вокруг бицепса или мышц голени [1].

Пульсовые волны на ФПГ соответствуют динамике кровенаполнения за каждый сердечный цикл и синхронизированы с сокращениями сердца. По ФПГ можно измерять частоту сердечных сокращений (ЧСС), насыщение крови кислородом, кровяное давление, жесткость (ригидность) артериальной стенки, скорость распространения пульсовой волны и другие показатели. Сигнал ФПГ содержит широкий спектр информации о состоянии сердечно-сосудистой системы человека и, в том числе, о наличии сердечно-сосудистых заболеваний. Кроме того, на ФПГ присутствуют более медленные волны (волны второго порядка, дыхательные волны), синхронизированные с ритмом дыхания человека, по которым можно определять частоту дыхания.

Обычно в клинических условиях для анализа сердечной активности используют электрокардиографию (ЭКГ) — методику регистрации электрических полей, образующихся при работе сердца. Хотя ФПГ и ЭКГ являются разными технологиями, по своей сути обе технологии

предназначены для измерения активности сердца и диагностики состояния сердечно-сосудистой системы, поэтому во многих случаях ФПГ представляет собой практическую альтернативу ЭКГ.

ФПГ может уступать ЭКГ по точности и часто содержит артефакты в виде помех или шумов, но является более доступным и удобным для пациента методом оценки состояния сердечно-сосудистой системы. ФПГ может быть получена не только с помощью стационарных устройств, но и с помощью компактных портативных пульсоксиметров, предназначенных для персональной диагностики и широко представленных в продаже по доступной цене. В настоящее время большой популярностью пользуются фитнес-браслеты и смарт-часы, осуществляющие мониторинг различных показателей активности и здоровья организма, и в большинстве моделей для измерения ЧСС и других показателей используется ФПГ. Существуют приложения для смартфона, позволяющие снимать ФПГ и отображать различные рассчитываемые по ней показатели, лишь приложив палец к камере смартфона [2]. Существуют разработки в области дистанционной ФПГ — методики снятия ФПГ бесконтактным способом с помощью видеокамеры. Таким образом, снятие ФПГ, в отличие от ЭКГ, возможно не только в клинических, но и в домашних и даже в походных условиях, а использование носимых устройств позволяет обеспечить постоянный мониторинг. Сама процедура также является более простой, быстрой и комфортной для пациента — не нужно закреплять на теле электроды, достаточно закрепить на пальце «прищепку» или приложить палец к датчику, а в случае с носимыми устройствами или дистанционной ФПГ не требуется даже этого. Доступность средств автоматизированной диагностики по ФПГ и их удобство для пациента способствуют раннему обнаружению сердечно-сосудистых заболеваний [3].

1. Обзор литературных источников

В последнее время для автоматизированной диагностики по ФПГ все чаще используются методы машинного обучения (МО), в том числе, искусственные нейронные сети (ИНС). Данные технологии уже продемонстрировали свою высокую эффективность в различных задачах в медицине, и уже существует немало работ, описывающих их применение для диагностики по ФПГ.

В работе [4] были использованы классические методы МО для обработки данных ФПГ с умных часов и обнаружения: синусового ритма, фибрилляция предсердий, преждевременные сокращения желудочков или предсердий. Для каждого 30-секундного сегмента ФПГ был построен график Пуанкаре в виде растрового изображения и на его основе выделено 70 признаков с помощью различных методов обработки изображений. Для классификации были применены две модели МО: случайный лес и метод опорных векторов. При этом случайный лес продемонстрировал более высокие значения метрик качества.

В работе [5] ФПГ использовалась для классификации различных сердечных аритмий: тахикардии, брадикардии, желудочковой тахикардии и трепетания/фибрилляции желудочков. Предобработка данных включала полосовой фильтр, сглаживание с помощью фильтра скользящего среднего, устранение блуждающей нулевой линии с помощью вейвлет-преобразования, нормализацию сигнала и разбиение на 10-секундные сегменты. Был выделен 41 признак, включая морфологические и частотные признаки, и с помощью метода главных компонент были отобраны наиболее важные признаки. На полученных данных были обучены 4 модели МО: дерево решений, метод опорных векторов, метод k-ближайших соседей и ансамбль моделей. Значения метрики accuracy для полученных моделей составили 94 %, 98,4 %, 98 % и 98 % соответственно.

В работе [6] была использована глубокая сверточная ИНС для классификации по ФПГ синусового ритма или одного из 5 типов аритмии: преждевременные сокращения желудоч-

ков, преждевременные сокращения предсердий, желудочковая тахикардия, наджелудочковая тахикардия, фибрилляция предсердий. Предобработка данных включала полосовой фильтр, разбиение сигнала на 10-секундные сегменты, нормализацию сигнала и удаление сегментов с артефактами. В качестве модели использовалась глубокая сверточная нейронная сеть, являющаяся модификацией архитектуры VGGNet-16. Точность многоклассовой классификации по метрике accuracy составила 85 %. Также модель была протестирована для 4 классов (с объединением разных типов преждевременных сокращений и тахикардии) и 2 классов (синусовый ритм и аритмия) — точность составила 90,4 % и 97,8 % соответственно. В работе было проведено сравнение полученной модели с традиционными методами МО (метод k-ближайших соседей, случайный лес, метод опорных векторов) и простой полносвязной ИНС (для которых из сигнала ФПГ были выделены различные признаки). Предложенная авторами глубокая сверточная ИНС превзошла эти модели по всем метрикам качества.

В работе [7] для решения той же задачи была применена гибридная модель глубокого обучения Res-BiANet. Данная модель основана на параллельном включении улучшенной сверточной сети ResNet, извлекающей пространственные признаки, и рекуррентной сети BiLSTM с механизмом многоголового самовнимания (Multi-Head Self-Attention), извлекающей временные признаки. Затем полученные наборы признаков вместе подавались на вход двух полносвязных слоев для классификации. Метрики F1 и accuracy для многоклассовой классификации составили 86,88 % и 92,38 % соответственно. В работе было проведено сравнение модели с архитектурами AlexNet, VGG16 и ResNet18. Предложенная авторами модель продемонстрировала наилучшие метрики качества.

В работе [8] решалась задача классификации брадикардии и желудочковой тахикардии. По причине отсутствия общедоступных размеченных датасетов с эпизодами брадикардии и тахикардии, авторами было принято решение использовать искусственно сгенерированные сигналы ФПГ для тренировочной и валидационной выборки, а для тестовой выборки использовать вручную размеченные сигналы из реального датасета. Предобработка данных включала полосовой фильтр, адаптивный нормализованный фильтр наименьших среднеквадратичных значений (для устранения дрейфа), разбиение на 5-секундные сегменты, оценку качества сигнала с помощью спектрального анализа и исключение сегментов с артефактами. Для всех сегментов с помощью непрерывного вейвлет-преобразования были получены скалограммы (двумерное представление сигнала). Для классификации брадикардии и тахикардии по полученным скалограммам были использованы две отдельные 2D сверточные сети. Метрики Sensitivity/Specificity для брадикардии и тахикардии составили 98,1 %/97,9 % и 76,6 %/96,8 % соответственно.

2. Общедоступные наборы данных по ФПГ

Использование технологий МО и ИНС предполагает обучение и тестирование модели на некотором наборе данных. Существуют готовые общедоступные наборы данных (датасеты), которые позволяют упростить исследования и разработки в данной области. Рассмотрим некоторые из существующих общедоступных датасетов, подходящих для задачи выявления сердечно-сосудистых заболеваний по ФПГ.

MIMIC (Medical Information Mart for Intensive Care) [9] — это крупная общедоступная база данных, содержащая обезличенные медицинские данные пациентов отделений интенсивной терапии Beth Israel Deaconess Medical Center (г. Бостон, США). К 2016 году было выпущено 4 версии: MIMIC, MIMIC-II (включена в MIMIC-III), MIMIC-III и MIMIC-IV (частично включает MIMIC-III). База данных MIMIC включает в себя такую информацию, как демографические данные, регулярные измерения жизненно важных показателей, результаты лабораторных анализов, проводимые процедуры, назначаемые лекарства, записи о лицах, осуществляющих

уход, и данные о смертности (как в клинике, так и вне ее). За счет этого MIMIC может использоваться в широком спектре исследований и разработок. В том числе, MIMIC содержит записи физиологических сигналов (включая пальцевую ФПГ, а также ЭКГ, артериальное давление, дыхание и другие сигналы) и периодических измерений числовых показателей (таких как ЧСС и частота дыхания, насыщение крови кислородом, среднее и диастолическое кровяное давление и другие), с прикроватных медицинских мониторов. Они содержатся в отдельном модуле MIMIC Waveform Database.

На сайте Питера Чарльтона имеется большая коллекция наборов данных по ФПГ [10]. Наборы данных MIMIC PERform Training и MIMIC PERform Testing содержат 10-минутные записи ФПГ, ЭКГ и импедансной пневмографии 400 пациентов (взрослых и новорожденных). Датасет MIMIC PERform AF Dataset предназначен для выявления фибрилляции предсердий и содержит 20-минутные записи ФПГ, ЭКГ и импедансной пневмографии 35 пациентов с фибрилляцией предсердий и без нее. Датасет PPG-BP Database предназначен для исследований в области неинвазивного выявления сердечно-сосудистых и связанных с ними заболеваний, а также может быть использован для оценки кровяного давления и старения кровеносных сосудов по ФПГ. Он содержит обезличенные данные 219 пациентов возраста 20–89 лет: 3 коротких (около 3 волн) записи пальцевой ФПГ, пол, возраст, вес, индекс массы тела, систолическое и диастолическое кровяное давление, ЧСС, а также отметки о наличии заболеваний.

Соревнование The PhysioNet/Computing in Cardiology Challenge 2015 [11] было посвящено снижению количества ложных сигналов тревоги об угрожающей жизни пациента аритмии, посылаемых прикроватными мониторами в отделениях интенсивной терапии. Датасет данного соревнования содержит записи физиологических показателей пациентов перед сигналами тревоги об угрожающих жизни видах аритмии: асистолия, экстремальная брадикардия, экстремальная тахикардия, желудочковая тахикардия и трепетание/фибрилляция желудочков. В датасете содержатся записи 750 случаев как верных, так и ложных (присутствуют соответствующие отметки экспертов) сигналов тревоги с прикроватных мониторов в отделениях интенсивной терапии различных госпиталей США и Европы. Для каждого случая содержится запись ЭКГ, а также ФПГ и/или волны артериального давления за 5 минут до сигнала тревоги.

Датасет проекта DeepBeat [12], созданный в Стэнфордском университете (США), предназначен для выявления фибрилляции предсердий по ФПГ, полученной с помощью носимых устройств. Датасет содержит более 500 тысяч 25-секундных сегментов ФПГ, принадлежащих 175 пациентам: 107 с фибрилляцией предсердий и 68 без нее, полученных с помощью носимых на запястье устройств. Сигналы имеют уровень шума, соответствующий реальному качеству сигнала ФПГ, которое могут обеспечить носимые устройства.

3. Классификация сердечных аритмий на основе данных ФПГ

Анализ литературных источников показал, что существует два основных подхода к решению задачи классификации сердечных аритмий на основе данных ФПГ:

1. Подход, основанный на выделении признаков, описывающих сигнал ФПГ. Такими признаками могут быть первичные характеристики сигнала ФПГ, например, систолическая амплитуда, диастолическая амплитуда, интервал между пульсовыми волнами, интервал от пика до пика, признаки, полученные путем статистической обработки характеристик сигнала, признаки, полученные путем обработки изображений графиков или диаграмм, построенных в результате предварительной обработки сигнала и многие другие. Сформированные на основе данных признаков наборы данных используются для решения задач классификации с применением классических методов МО и ИНС.

2. Подход, основанный на анализе сигнала ФПГ как временного ряда. Сюда относятся методы, которые обрабатывают последовательности точек данных и производят классификацию

на основе вида временного ряда, например, формы пульсовой волны. Сюда также можно отнести методы, основанные на обработке изображений сигнала ФПГ.

Достоинством первого подхода является то, что для получения высокой точности классификации можно использовать относительно простые модели МО, такие как метод опорных векторов, случайный лес или метод k-ближайших соседей. К недостаткам данного подхода можно отнести необходимость применения сложных методов предобработки данных для выделения признаков, поиска и отбора наиболее важных признаков. Второй подход позволяет ограничиться более простыми методами предобработки данных такими как удаление шума, артефактов, нежелательных периодических составляющих, но для получения высокой точности классификации требует применения более сложных методов глубокого МО и сложных нейросетевых архитектур.

В данной работе для решения задачи классификации сердечных аритмий был выбран второй подход. В качестве базовой нейросетевой архитектуры, как и в работах [6–8], использовалась сверточная ИНС. Однако в отличии от ИНС, описанных в работах [6–8] авторы решили применить одномерные (1D) сверточные ИНС, которые хорошо зарекомендовали себя при обработке временных последовательностей [13].

При подготовке наборов данных для классификации сердечных аритмий авторы столкнулись с рядом проблем, часть из которых описана в приведенных ранее литературных источниках. Одной из которых является известная проблема сбалансированности классов. Для получения достоверных результатов желательно, чтобы число образцов данных для каждого класса было примерно соизмеримо и не сильно отличалось друг от друга, но это сложно обеспечить, используя реальные наборы данных, в которых записей для пациентов с одними болезнями может быть гораздо больше чем с другими. Другая проблема проявляется в том, что сигнал ФПГ получается в результате наложения сразу нескольких видов волн. Волны первого порядка — это пульсовые волны. Волны второго порядка синхронизированы с ритмом дыхания человека. Волны третьего порядка имеют период, больший, чем период дыхательных волн. Они расцениваются как отражение периодичной активности сосудодвигательного центра (волны Траубе-Геринга) [14]. Волны второго и третьего порядка могут быть слабо выражены или проявляться сильнее, например, при снятии сигнала ФПГ с носимых устройств.

Кроме проблем, связанных с подготовкой данных есть и проблемы, возникающие при обучении сверточных ИНС. Это проблемы затухания и взрыва градиента, характерные для глубоких ИНС. Появление данных проблем может быть вызвано наличием шума и артефактов в сигнале ФПГ, неудачным выбором параметров сверточной ИНС и алгоритмов ее обучения.

Описанные проблемы существенно затрудняют решение задачи классификации сердечных аритмий на основе реальных наборов данных. Поэтому авторы, стремясь снизить трудоемкость процесса подготовки и предобработки наборов данных на основе ФПГ, решили, подобно работе [8], использовать искусственно сгенерированные сигналы ФПГ. Такая стратегия позволяет значительно облегчить подготовку датасетов и обучение сверточной ИНС на начальных этапах исследования. В дальнейшем, в тренировочную и валидационную выборки планируется добавить отобранные и обработанные образцы данных из реальных датасетов. Это позволит приблизить свойства сформированных наборов данных к свойствам реальных датасетов.

Сгенерировать данные ФПГ для таких болезней как мерцательная аритмия, тахикардия и брадикардия можно с помощью приложения SIM_ARR [15]. Приложение позволяет генерировать сигналы ЭКГ и ФПГ на основе заданных значений параметров и сохранять их в файлы формата MATLAB. Для ФПГ можно задавать частоту дискретизации, длительность генерируемых сигналов, измеряемую числом R-R интервалов, медианную длительность эпизодов аритмии в интервалах R-R, процент времени, когда присутствует аритмия. Также возможно моде-

лирование пульсовых волн типа 1, 2, 3a, 3b и 4, и добавление различных типов артефактов. На рис. 1. показан фрагмент сигнала ФПГ типа 2 для случая мерцательной аритмии.

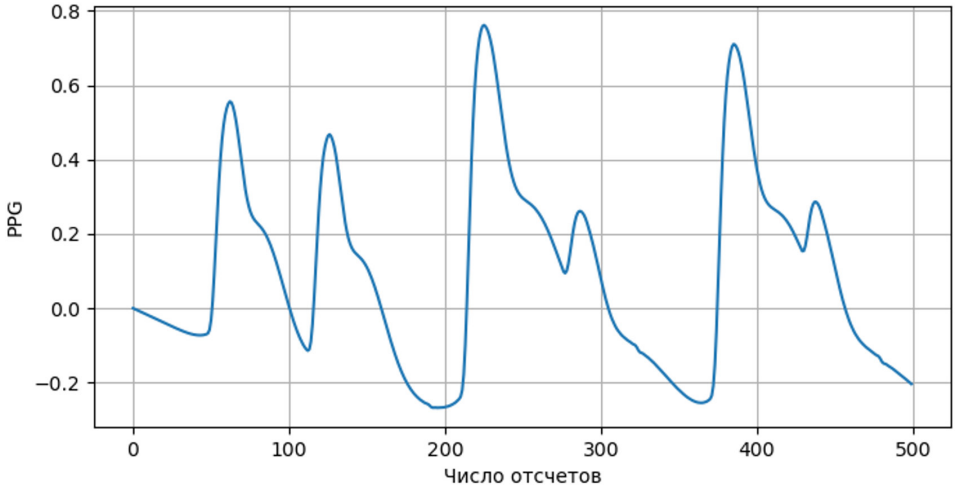


Рис. 1. Фрагмент сигнала ФПГ для случая мерцательной аритмии

Обработка данных включала загрузку данных из файлов MATLAB, разбиение на 5-секундные сегменты, разметку сегментов на классы. Кроме основных классов для синусового ритма, мерцательной аритмии, тахикардии и брадикардии было решено добавить отдельные подклассы для пульсовых волн типа 1, 2, 3a каждого вида сердечной аритмии. Пульсовые волны типов 3a, 3b и 4 имеют очень небольшие отличия, поэтому они все представлялись одним подклассом. Введение классов, связанных с типом пульсовых волн было связано с желанием получить дополнительную информацию о состоянии здоровья пациента и установить связь с такими болезнями как сахарный диабет, атеросклероз или гипертония. Это является особенностью данной работы по сравнению с другими работами, посвященными классификации сердечных аритмий, рассмотренными в обзоре литературы. Таким образом, при решении задачи классификации с использованием всех основных классов с подклассами общее количество классов достигало двенадцати.

Применяемая для классификации сверточная ИНС состояла из трех блоков, включающих 1D сверточный слой, слой батч-нормализации и слой активации “ReLU”. Выход последнего блока поступал на выравнивающий слой и выходной полносвязный слой с числом нейронов, равным числу классов в задаче классификации. Каждый 1D сверточный слой имел 64 фильтра размером 15×15. В качестве алгоритма поиска при обучении ИНС использовался алгоритм “Adam”, в качестве функции потерь использовалась категориальная кросс-энтропия (categorical cross-entropy), а в качестве метрики accuracy. При обучении ИНС размер минибатча принимался равным 128, число эпох равным 70. Такие значение гиперпараметров ИНС были определены в результате их оптимизации. На рис. 2 показаны графики точности, полученные для тренировочной и валидационной выборок в результате обучения сверточной ИНС при решении задачи классификации с 12 классами. Значения метрик F1 и accuracy для данной задачи составило 99,3 %.

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрена задача классификации различных сердечных аритмий на основе данных ФПГ. В работе описано современное состояние проблемы, методы, применяемые для классификации сердечных аритмий на основе МО и ИНС, общедоступные наборы данных по ФПГ, которые могут быть использованы для решения подобных задач. От-

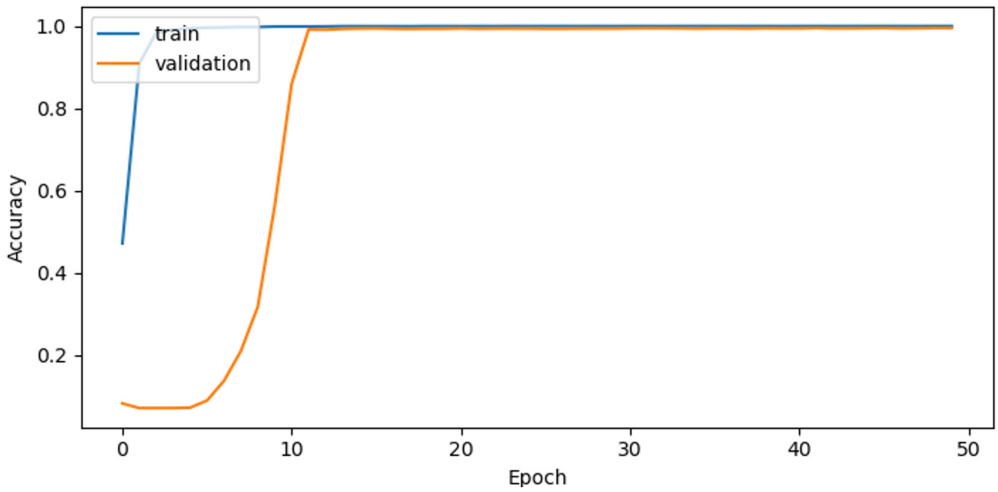


Рис. 2. Графики точности для тренировочной и валидационной выборок

мечено два основных подхода к решению задачи классификации сердечных аритмий на основе данных ФПГ. Из которых авторами был выбран подход на основе анализа сигнала ФПГ как временного ряда. Особенностью рассмотренной в работе задачи классификации, является то, что были добавлены отдельные классы для пульсовых волн разных типов для каждого вида сердечной аритмии. Это позволяет установить связь с такими болезнями как сахарный диабет, атеросклероз или гипертония. В качестве применяемой нейросетевой архитектуры авторы выбрали 1D сверточную ИНС. Значения метрики accuracy полученное при решении задачи классификации с 12 классами составило 99,3 %.

В дальнейшем, к сгенерированным данным планируется добавить отобранные и обработанные образцы данных из реальных датасетов. Это позволит выполнять классификацию на основе реальных данных. Результаты работы могут быть использованы для создания средств автоматизированной диагностики сердечных аритмий и состояния пациентов по данным ФПГ.

Литература

1. *Савостин А. А.* Метод автоматического детектирования характерных точек пульсовой волны / А. А. Савостин, Д. В. Риттер, Г. В. Савостина [и др.] // Труды университета. – 2024. – № 1(94). – С. 498–504. – DOI: 10.52209/1609-1825_2024_1_498

2. *Трофимов П. А.* Измерение вариабельности сердечного ритма человека с помощью камеры смартфона / П. А. Трофимов, К. С. Пуртов, В. С. Кубланов // Компьютерный анализ изображений: Интеллектуальные решения в промышленных сетях (CAI-2016): сборник научных трудов по материалам I Международной конференции, Екатеринбург. – Екатеринбург: ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2016. – С. 134–137.

3. *Волков И. Ю.* Фотоплетизмографическая визуализация гемодинамики и двухмерная оксиметрия / И. Ю. Волков, А. А. Сагайдачный, А. В. Фомин // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. – 2022. – Т. 22, № 1. – С. 15–45. – DOI: 10.18500/1817-3020-2022-22-1-15-45

4. *Han D.* Digital image processing features of smartwatch photoplethysmography for cardiac arrhythmia detection / D. Han, S.K. Bashar, F. Zieneddin [et al.] // 42nd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine & Biology Society (EMBC). – 2020. – С. 4071–4074. – DOI: 10.1109/EMBC44109.2020.9176142

5. *Qananwah Q.* Cardiac arrhythmias classification using photoplethysmography database / Q. Qananwah, M. Ababneh, A. Dagamseh // Scientific Reports. – 2024. – Vol. 14. – P. 1–10. – DOI: 10.1038/s41598-024-53142-9

6. *Zengding L.* Multiclass arrhythmia detection and classification from photoplethysmography signals using a deep convolutional neural network / L. Zengding, Z. Bin, J. Zhiming [et al.] // Journal of the American Heart Association. – 2022. – Vol. 11. – P. 1–26. DOI: 10.1161/JAHA.121.023555

7. *Wu Y.* Res-BiANet: A Hybrid Deep Learning Model for Arrhythmia Detection Based on PPG Signal / Y. Wu, Q. Tang, W. Zhan [et al.] // Electronics. – 2024. – Vol. 13. – P. 1–25. DOI: 10.3390/electronics13030665

8. *Sološenko A.* Training convolutional neural networks on simulated photoplethysmography data: application to bradycardia and tachycardia detection / A. Sološenko, B. Paliakaitė, V. Marozas [et al.] // Frontiers in physiology. – 2022. – Vol. 13. – P. 1–12. – DOI: 10.3389/fphys.2022.928098

9. MIMIC (Medical Information Mart for Intensive Care). – 2024. – URL: https://mimic.mit.edu/ (дата обращения: 25.10.2024)

10. Photoplethysmography Datasets. – 2024. – URL: https://peterhcharlton.github.io/post/ppg_datasets/ (дата обращения: 25.10.2024)

11. *Clifford G. D.* The PhysioNet/Computing in cardiology challenge 2015: reducing false arrhythmia alarms in the ICU / G. D. Clifford, I. Silva, B. Moody [et al.] // Computing in Cardiology Conference (CinC). – 2015. – P. 273–276.

12. *Torres-Soto J.* Multi-task deep learning for cardiac rhythm detection in wearable devices / J. Torres-Soto, E.A. Ashley // NPJ Digital Medicine. – 2020. – Vol. 3. – P. 1–8. – DOI: 10.1038/s41746-020-00320-4

13. *Шолле Ф.* Глубокое обучение на Python / Ф. Шолле. – СПб. : Питер, 2018. – 400 с. – ISBN 978-5-4461-0770-4.

14. Плетизмография | это... Что такое Плетизмография? – 2024. – URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_medicine/23708/Плетизмография (дата обращения: 25.10.2024)

15. Model for Simulating ECG and PPG Signals with Arrhythmia Episodes v1.3.1 – 2024. – URL: https://physionet.org/content/ecg-ppg-simulator-arrhythmia/1.3.1/zipped_binary/#files-panel (дата обращения: 25.10.2024)

УДК 004.93

ДЕТЕКЦИЯ ОПОР ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧ: НЕЙРОСЕТЕВОЙ ПОДХОД

И. А. Ларин

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается задача детекции опор линий электропередач на изображениях. В качестве метода был выбран нейросетевой подход и, в частности, архитектура свёрточных сетей последнего поколения YOLOv11. Описан процесс создания датасета для обучения и валидации нейросетевой модели. Рассмотрены особенности аннотирования такого рода изображений и проанализированы полученные результаты. Так, на валидационной выборке средняя точность (mAP) составила 85,5 %, а на тестовой — 87,3 %, что является хорошим показателем качества модели. В заключении представлены дальнейшие планы по улучшению текущей модели и возможного ее применения для задачи автоматического создания карты опор ЛЭП.
Ключевые слова: опоры ЛЭП, свёрточные нейронные сети, детекция объектов, YOLO, YOLOv11.

Введение

Обслуживание и инспекция линий электропередач (ЛЭП) является важной задачей для электрических энергокомпаний. Одним из основным трендов здесь является уменьшение доли ручного труда, что в итоге может существенно повысить эффективность и уменьшит затраты. Одной из начальных задач, которая является первым этапом для множества других, является задача детекции опор. Создание автономной системы автоматической детекции опор могло бы способствовать достижению описанных выше целей. Изображения для детекции могут быть получены с камеры, установленной на машине. В данной статье рассматриваются изображения в том числе и со штатного видеорегистратора.

Поставленную задачу можно решать различными способами. Существуют классические подходы в области компьютерного зрения, когда признаки на изображении выделяются предопределенным набором алгоритмов, и на основе этих признаков система пытается определить положение опор. Нужно признать, что эти подходы обладают рядом недостатков и показали недостаточную эффективность. Также могут быть применены технологии лазерного сканирования. Но такие устройства, как LiDAR (Laser Imaging Detection and Ranging) достаточно дороги или слишком тяжелые, чтобы применять их, например, на дронах.

В настоящее время большую популярность получили нейросетевые подходы. Они доказали свою эффективность и повсеместно используются для задач детекции объектов на изображениях. В этой работе мы создали датасет примерно из 2500 изображений и обучили на нем предобученную модель YOLOv11. На этапе проверки мы оценили эффективность обученной модели на тестовом наборе из 239 изображений. Основной целью данной работы являлось стремление показать эффективность выбранного подхода для решения задачи детекции опор ЛЭП.

1. Методы

1.1. Сбор данных и разметка (аннотирование)

Отметим, что датасет создавался итеративно, и на начальном этапе единственным источником изображений служил штатный видеорегистратор (рис. 1). Изображения формировались на основе видео, сохраняя кадры каждые 2–3 секунды в зависимости от скорости движения. В

дальнейшем для улучшения обобщающей способности нейросети были добавлены изображения, полученные в результате инспекционного обхода линий электропередач (рис. 2). На момент написания статьи последняя ревизия датасета включала 2417 изображений, из которых 1695 изображений содержится в тренировочной выборке, 483 — в валидационной и 239 — в тестовой.

Рис. 1. Изображение с видеорегистратора

Рис. 2. Изображение от обходчиков

Для подготовки датасета был выбран портал Roboflow [1]. Это популярная онлайн-платформа для подготовки и управления датасетами, предназначенными для задач компьютерного зрения, таких как детекция объектов, классификация изображений и сегментация. Она предоставляет удобные инструменты для обработки данных, аннотации и экспорта в различные форматы, которые поддерживаются популярными фреймворками машинного обучения (например, TensorFlow, PyTorch, YOLO и другими).

В процессе аннотирования возник ряд вопросов. В частности, оставалось неясным, следует ли включать в разметку мелкие объекты (рис. 3). На начальном этапе работы было принято решение добавлять в датасет объекты, которые могут быть визуально идентифицированы человеком как опоры на изображениях, предварительно приведенных к разрешению, используемому нейронной сетью. Стоит отметить, что это разрешение составляет 640 × 640 пикселей. На данный момент окончательная обоснованность данного подхода не подтверждена, и в будущем планируется провести дополнительное исследование для его оценки. Еще одним важным вопросом являлось включение скрытых частей опор в ограничивающие прямоугольники. Было принято решение включать эти элементы, что, как показала практика, позволило нейронной сети достаточно эффективно научиться предсказывать скрытые части опор, закрытые другими объектами. Так, на рис. 4 опора частично скрыта кроной дерева.

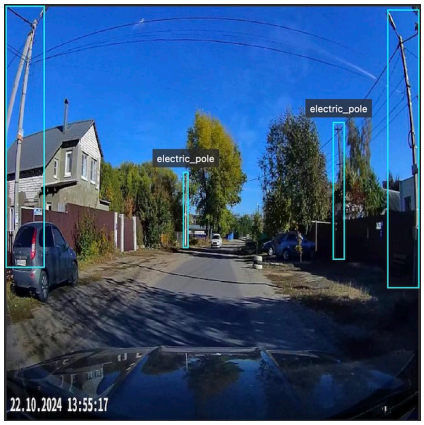


Рис. 3. Аннотирование, далеко расположенных объектов

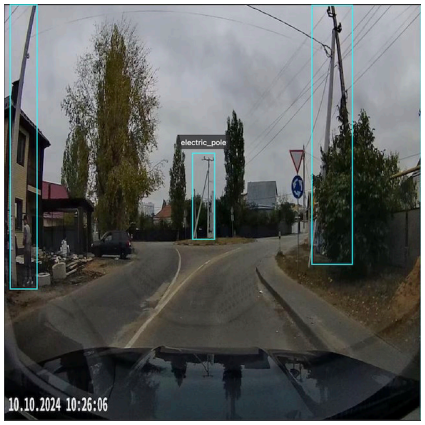


Рис. 4. Скрытые части опор

Как было сказано выше, датасет создавался итеративно, и на ранних стадиях также производилось обучение. Когда размер данных превысил 1000 изображений, нейросеть начала показывать достаточно хорошие результаты, что позволило использовать ее для аннотирования новых изображений и помогло сильно сократить время на дальнейшую подготовку данных.

1.2. Архитектура нейросети

Для нашей задачи детекции опор была выбрана архитектура YOLO (You Only Look Once), которая известна своей высокой скоростью и точностью. YOLO включает несколько версий и масштабов моделей, каждая из которых имеет предобученные веса, основанные на популярных наборах данных (например, COCO), что позволяет эффективно использовать их для задач Transfer Learning. Среди доступных вариантов мы выбрали YOLOv11n, наименьшую модель в семействе моделей YOLOv11 [2]. Она содержит 2.6 миллиона параметров, этого оказалось достаточно для нашей задачи. Данная модель была предобучена на датасете COCO val2017 [3]. Одной из причин, по которой мы выбрали данную сеть, является то, что она достаточно хорошо работает и с мелкими объектами, что для нас является немаловажным фактором.

1.3. Обучение модели

За основу была взята модель YOLOv11n. Она уже предобучена на популярном датасете COCO val2017. В качестве аппаратной платформы для обучения использовался ноутбук на базе процессора M1 pro с 16Gb объединенной памяти (процессор и графический модуль используют единое пространство).

На этапе подготовки датасета не использовались методы аугментации. Дело в том, что библиотека обучения YOLO уже включает возможности, которые позволяют использовать аугментацию сразу в процессе обучения. Не все методы аугментации применимы к нашим данным. В качестве основных были выбраны методы варьирования цветности и яркости изображения, а также весьма эффективный метод создания так называемых мозаик. Аугментации сдвигов и поворотов не применялись по причине того, что, получая изображения с видео, мы уже неявно их применили.

Остановимся подробнее на методе мозаики. Метод аугментации мозаики (Mosaic) — это техника, популяризированная в архитектуре YOLO, особенно начиная с версии YOLOv4. Она заключается в объединении четырех изображений из обучающего набора в одно, с произвольным размещением границ каждого изображения. Это создает новую композицию, где части разных изображений появляются вместе, сохраняя их аннотации. Данная техника позволяет повысить обобщающую способность сети, улучшает детекцию мелких объектов. На последних итерациях все же рекомендуется ее отключать, чтобы процесс обучения стабилизировался [4].

Так, на рис. 5 показан график метрик и значений функций потерь в процессе обучения. При его анализе можем заметить, что значения функции потерь уменьшались как на обучающей выборке, так и на валидационной, что может служить доказательством реального обучения нейросети. Однако отметим одну особенность. В тот момент как до конца обучения оставалось 30 эпох была отключена аугментация методом Mosaic.

После этого значения функции потерь на тренировочной выборке стали уменьшаться заметно быстрее, а на валидационной — немного даже расти. Это может говорить о некотором переобучении, но в то же время основные метрики на валидационной выборке стали увеличиваться, говоря о повышении качества модели. Эти данные подтверждают ранее сказанное о стабилизации процесса обучения в контексте отключения аугментации методом Mosaic на последних итерациях.

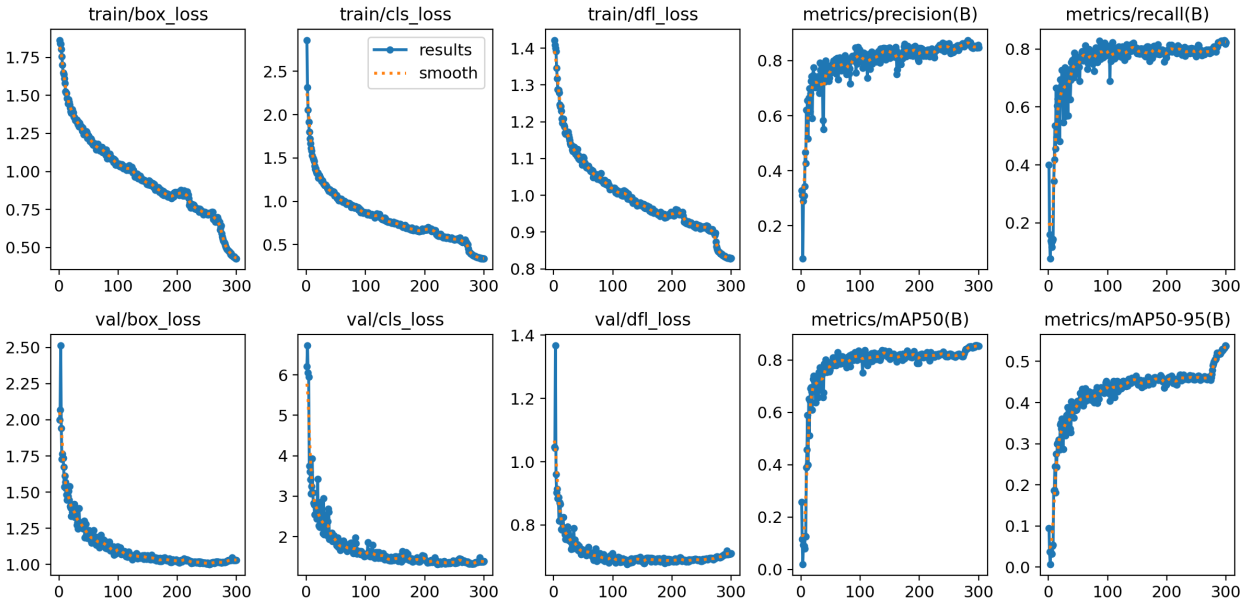


Рис. 5. Графики метрик и функции потерь

1.4. Оценка модели

Для оценки модели, в процессе обучения и после, использовались стандартные метрики mAP50 и mAP50-95. На валидационной выборке средняя точность (mAP) составила 85,5 %, а на тестовой — 87,3 %. Стоит отметить, что данные метрики могут не учитывать специфику конкретной задачи и искажать результаты в худшую сторону. В контексте задачи автоматического создания карты опор обнаружение близких объектов обладает большим приоритетом в сравнении с обнаружением дальних объектов. Для исправления потенциального искажения планируется создать специфическую метрику, которая бы, в частности, фильтровала удаленные объекты и не учитывала их при вычислении.

Также отметим, что в процессе анализа выяснилось, что на тренировочной выборке метрики значительно больше, чем на валидационной и тестовой, что может служить дополнительным поводом для увеличения размера датасета.

2. Результаты и дальнейшие планы

По результатам обучения можно сделать вывод, что нейросеть достаточно эффективно научилась детектировать опоры. Проверка модели показала ее способность определять опоры даже при достаточно сложных условиях (рис. 6–8): опоры на фоне деревьев или частично перекрытые другими объектами.

Дальнейшие исследования планируется проводить в контексте задачи автоматического создания карты опор. Для этого могут быть использованы те же данные видеорегистратора в связке с данными трека. Также есть интерес в использовании изображений сервисов Google Street View или Яндекс панорам. В частности, для использования данных Google Steet View есть ряд программ, позволяющих создавать изображения круговых панорам с информацией о геолокации и ориентации [5].

Другим направлением для дальнейшего исследования может служит задача уменьшения размера модели и увеличение ее быстродействия, используя различные техники. И конечно задача повышения точности сети все еще остается актуальной.

Рис. 6. Опора на фоне леса

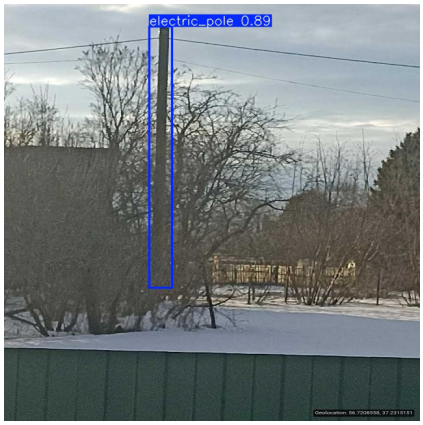


Рис. 7. Деревянная опора в дали за деревом

Рис. 8. Опора среди деревьев

Заключение

В целом поставленная цель исследования была достигнута. Создан датасет достаточных размеров для успешного обучения нейросети. Исследование показало, что предложенный подход вполне успешно может использоваться для задачи детекции опор электропередач.

Литература

1. Roboflow Docs. URL: https://docs.roboflow.com (дата обращения 12.10.2024).

2. *Rahima Khanam, Muhammad Hussain*. YOLOV11: An overview of the key architectural anhancements. arXiv:2410.17725v1 [cs.CV] 23 Oct 2024.

3. COCO val2017. URL: https://cocodataset.org/#home (дата обращения 15.11.2024)

4. Model Training with Ultralytics YOLO. URL: https://docs.ultralytics.com/modes/train (дата обращения 20.11.2024).

5. Street View Download 360. URL: https://svd360.com (дата обращения 20.11.2024).

УДК 004.8

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНЫХ ДАННЫХ

А. В. Лепендин, Т. В. Азарнова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена проблеме прогнозирования в условиях неполных данных, которая актуальна для многих областей науки и практики. Авторы рассматривают различные типы пропусков в данных (MCAR, MAR, MNAR), а также расширенные классификации, такие как неопределенные, условно зависящие и структурные пропуски. В работе анализируются традиционные и современные методы обработки пропущенных значений, включая простые импутации, множественное вменение, регрессионные модели, а также специализированные подходы, такие как скрытые марковские модели и байесовские методы. Особое внимание уделено методам подмоделей паттернов и стратегии полу-контролируемого обучения, которые демонстрируют высокую эффективность в условиях сложных механизмов пропусков. Результаты исследования подчеркивают важность выбора адекватных методов в зависимости от природы пропусков и целей анализа.
Ключевые слова: неполные данные, пропущенные значения, MCAR, MAR, MNAR, импутация, множественное вменение, прогнозирование, временные ряды, полу-контролируемое обучение, подмодели паттернов.

Введение

В современных задачах прогнозирования исследователи часто сталкиваются с проблемой неполных данных, которая возникает как в процессе сбора данных, так и при их анализе. Условие непостоянства данных приводит к необходимости разработки подходов, устойчивых к различным формам отсутствия информации и способных справляться с изменениями в данных.

Пропуски в данных могут иметь разную причину возникновения. Чаще всего пропуски образуются, когда данные по некоторым независимым переменным (предикторам) не известны, данные могут быть не зафиксированы из-за сбоев системы во время сбора данных, или из-за человеческого фактора во время предварительной обработки данных. [3] Также пропуски могут возникать в данных, представимых в виде временных рядов, когда временные интервалы между наблюдениями нерегулярны, что также возможно при технических неполадках во время записи результатов наблюдений

Пропуски в данных могут быть случайны или не случайны, игнорирование или удаления недостающих значений может привести к предвзятому или дезинформирующему анализу. [1] Для обработки пропусков существует ряд подходов, подбираемых и комбинируемых в зависимости от природы пропусков и целей анализа.

Во многих статьях с разбором задач машинного обучения и интеллектуального анализа проблеме пропусков в данных не уделяется должного внимания. [7] Для результативного прогнозирование в условиях неполных данных требуется углубленный разбор природы недостающих данных и применение современных комбинированных методов прогнозирования. Целью этой статьи является исследование проблемы недостающих данных, разбор существующих методов работы с ними, обзор статей на тему прогнозирования в условиях неполных данных.

1. Пропущенные данные

1.1. Классификация пропусков в данных

В традиционной классификации пропусков данных выделяется 3 основных класса:
Пропуски полностью случайны (MCAR)

Вероятность пропуска не зависит ни от наблюдаемых данных, ни от ненаблюдаемых. Такие пропуски считаются случайными, не влияют на анализ. Эффективными методами работы данными с такими пропусками являются удаление пропусков или простая импутация средним, медианным или наиболее часто встречающимся значением. [10]

Пропуски случайны (MAR)

Пропуски зависят только от наблюдаемых переменных. Например, если мужчины чаще пропускают ответ на конкретный вопрос, то вероятность пропуска связана с полом, но не с отсутствующим значением. Такие пропуски можно моделировать, учитывая корреляцию с другими переменными, и часто используются методы, такие как множественная импутация или подгонка модели для каждого паттерна пропуска. [10]

Пропуски не случайны (MNAR)

Вероятность пропуска связана с тем, каким было бы пропущенное значение, если бы его наблюдали. такие пропуски трудны для анализа. Например, если люди с более высоким доходом избегают вопросов о доходе, то пропуски зависят от самих отсутствующих значений. Для устранения смещения может понадобиться применение специализированных моделей или дополнительные данные о механизме пропусков. [10]

Помимо традиционной классификации пропусков на MCAR, MAR и MNAR, в последние годы также появляются и другие классификации, которые помогают точнее описывать природу отсутствующих данных и выбирать соответствующие методы их обработки:

1. Неопределенные

Если определить, является ли пропуск случайным или неслучайным трудно, его относят к неопределенным. Неопределенные пропуски могут вести себя как MCAR, MAR или MNAR в разных подвыборках данных, и стандартные подходы к их обработке часто не дают точного результата. Для обработки таких пропусков можно использовать гибридные методы, например, комбинацию множественной импутации и специфических моделей для подгрупп данных.

2. Условно зависящие пропуски

Этот тип пропусков схож с MAR, но предполагает, что отсутствие данных зависит от подмножества переменных, которые не всегда наблюдаемы в текущем анализе. Например, если в анкете о доходах пропуски чаще встречаются у людей с высоким уровнем образования, то наличие данных для анализа может зависеть от дополнительной информации о сфере занятости. Такие пропуски лучше обрабатывать методами, которые учитывают дополнительные внешние данные и корреляции.

3. Пропуски, зависящие от латентной переменной

Зависимость пропуска может проявляться и от ненаблюдаемой (латентной) переменной, которая не входит в имеющийся набор данных. Например, в медицинских данных наличие пропусков может зависеть от физического состояния пациента, которое напрямую не измерено, но может быть косвенно связано с другими переменными. Методы обработки здесь включают использование скрытых марковских моделей или факторного анализа для учёта латентных факторов.

4. Структурные пропуски

Такие пропуски связаны со структурой данных или логики их получения. Структурные пропуски лишь отражают неактуальность данных для некоторых наблюдений. Например, в некоторых вопросах опроса, собираются данные только по конкретным группам респондентов, отсутствующие значения других групп могут рассматриваться как структурные пропуски. Такие значения часто исключаются из анализа, так как не содержат значимой информации.

5. Пропуски во временных рядах с неравномерными интервалами

Временные ряды могут иметь пропуски, связанные с нерегулярными интервалами между наблюдениями. Этот вид пропусков возникает, когда события регистрируются случайно, а не по фиксированным временным интервалам. Например, стоимость товара или услуги. В таких

данных пропуски важно учитывать в контексте временной зависимости, и здесь применяются методы временной интерполяции или экстраполяции, а также специализированные модели временных рядов.

Пример линейной интерполяции недостающих значений для временного ряда с нерегулярными временными интервалами между наблюдениями, где точками обозначены значения имеющихся изначально наблюдений (рис. 1):

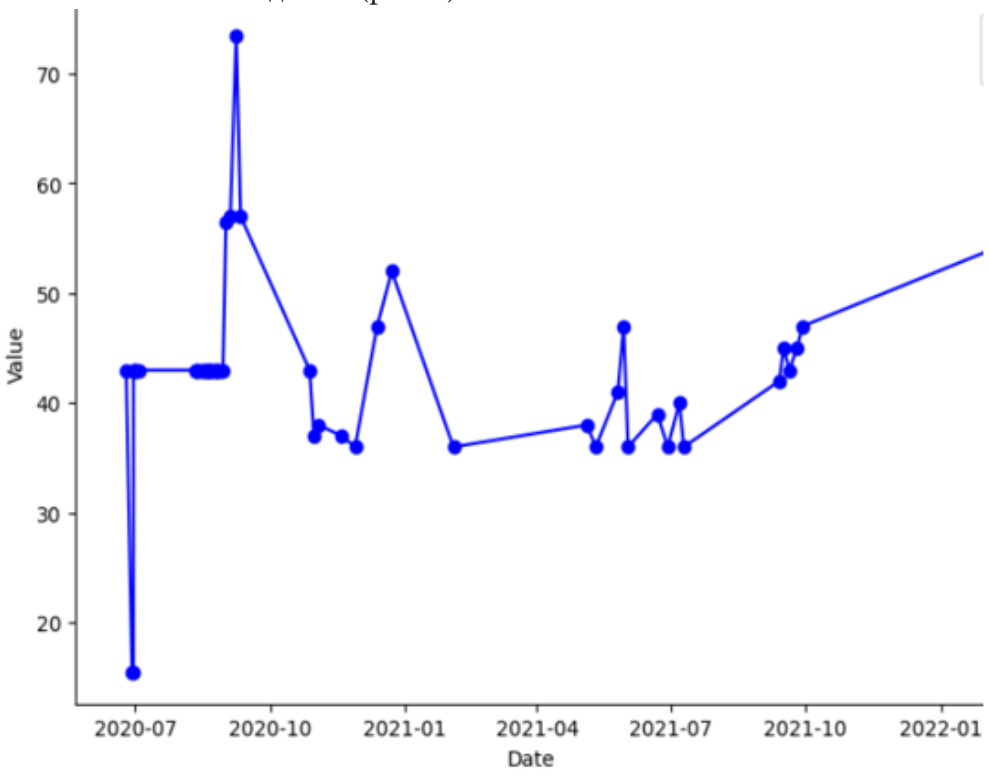


Рис. 1. Интерполяция пропущенных значений временного ряда

6. Селективные пропуски

Селективные пропуски представляют собой комбинацию пропусков, зависимых и независимых от значения. Например, данные могут отсутствовать в зависимости как от конкретной переменной, так и от действия исследователей (например, выборочных замеров или ограниченных ресурсов). Часто такие пропуски обрабатываются множественной импутацией с добавлением моделирования вероятности отсутствия данных на основе дополнительных метрик.

1.2. Методы обработки пропусков в данных

Традиционными методами обработки недостающих данных являются:

• Простое исключение наблюдений с пропущенными значениями. Метод прост, но может привести к потере значительного объема данных и к снижению статистической мощности.

• Заполнение пропусков средним или медианой по выборке, что минимизирует смещение для MCAR, но может ухудшить результаты для MAR и особенно MNAR, поскольку не учитывает структуру данных.

• Для временных рядов используется интерполяция и экстраполяция. Интерполяция подходит для небольших временных интервалов, в то время как экстраполяция может использоваться для предсказания значений за рамками имеющихся данных.

• Метод множественной импутации заполняет каждый пропуск несколькими возможными значениями, основанными на распределении наблюдаемых данных, и анализ проводится

для каждой из возможных версий данных. Этот метод хорошо работает для MAR, так как учитывает вероятностное распределение данных.

• Одним из наиболее предпочтительных статистических методов для обработки пропущенных значений является регрессионное вменение. В данном случае рассчитываются регрессионные уравнения из доступных данных, затем пропуски заменяются прогнозируемым значением на основе регрессионной модели. Эти модели могут быть достаточно точными, особенно если отсутствующие значения MAR, размер выборки достаточно велик, и данные имеют нелинейные взаимосвязи [3].

• Создание подмоделей для каждого паттерна пропуска, где каждая модель подстраивается под свой набор доступных данных. Этот метод показал высокую эффективность в ситуациях с непостоянными данными и разнообразными паттернами пропусков. [6]

Для оценки качества заполнения недостающих данных можно использовать различные способы тестирования, метрики качества. В целом, значения, которые та или иная модель предлагает на место пропусков, обычно отличаются от реальных данных, но соответствуют общим закономерностям в имеющихся данных (рис. 2):

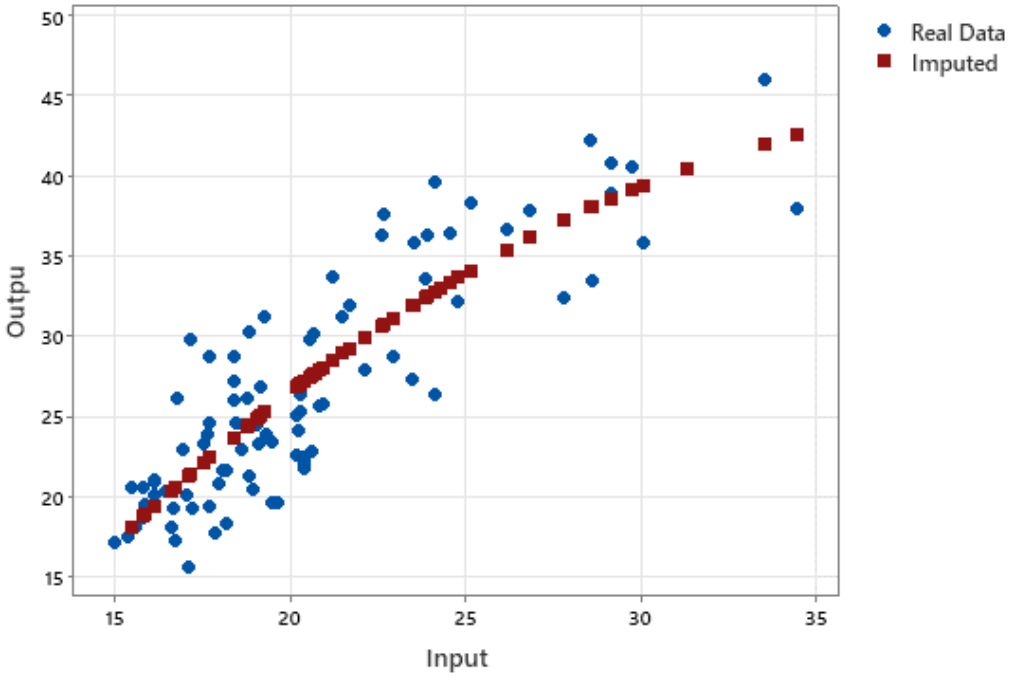


Рис. 2. Реальные значения и значения для заполнения пропусков (синим и красным цветом соответственно)

Приведу еще несколько специализированных методов обработки пропусков:

• Скрытые марковские модели используются для временных рядов с латентными переменными, где вероятности перехода между состояниями помогают учесть нерегулярные интервалы.

• Модели смешивания применяются, когда отсутствующие данные можно разделить на подмножества с различными механизмами пропусков. Они часто используются для MNAR данных, где можно предположить, что пропуски делятся на подгруппы с различными механизмами.

• Факторный анализ позволяет учитывать скрытые факторы, которые могут объяснять пропуски, используется для сложных наборов данных с множеством скрытых факторов.

• Байесовские подходы включают в себя моделирование вероятности пропуска для разных типов и комбинаций пропусков, где неопределённые или условно зависимые пропуски учитываются как вероятностные параметры модели.

Эти расширенные подходы помогают решать задачи прогнозирования и анализа, особенно когда простая классификация MCAR, MAR и MNAR не охватывает всей сложности данных.

Далее рассмотрим некоторые из методов подробнее.

2. Алгоритмы прогнозирования при неполных данных

2.1. Метод подмоделей паттернов

Традиционные методы заполнения пропусков в данных тривиальны в реализации, но часто приводят к неудовлетворительным по точности прогнозам, особенно когда неполные предикторы имеют высокую значимость в предсказании зависимой переменной. [6]

Множественное вменение обычно используется при построении модели, когда значения-заполнители выводятся из условных распределений, наблюдаемых данных для соответствия модели, а коэффициенты комбинируются с использованием правил Рубина. Этот метод повышает эффективность логических выводов за счет использования частичных данных при случайном отсутствии данных. Прогнозы, полученные на основе модели с множественным вменением, усредняются по наборам вменений. Однако применение этого подхода ограничено, если у пользователя есть только опубликованные оценки параметров, а не исходные данные. Для корректного заполнения пропусков в реальном времени требуется комбинировать новые данные с исходными и повторно запускать алгоритм множественного вменения. Этот процесс сложен, характеризуется высокими вычислительными затратами, особенно при использовании таких методов, как, например, метод k-ближайших соседей [6].

Множественное вменение с индикаторами пропусков в чем-то математически схожа с методом подмоделей паттернов (Pattern Submodels). Подход Pattern Submodels заключается в создании модели смесей паттернов и прогнозировании на основе модели, соответствующей профилю нового наблюдения с пропусками. Эффективность и гибкость подхода обеспечивается тем фактом, что подмодели строятся только на данных, относящихся к каждому конкретному паттерну, что позволяет сохранить высокую точность прогнозирования вне зависимости от механизма пропуска данных. PS снижает смещение прогноза за счет учета специфики паттерна. такие результаты достигаются благодаря минимизации специфических потерь для каждого паттерна недостающих данных. При этом возможное снижение точности параметров не оказывает влияния на качество прогноза.

Подход подмоделей паттернов эффективен с точки зрения вычислений, поскольку он обучает ряд моделей, в которых наблюдаются все необходимые данные. Таким образом, требуется выполнить обучения и перекрестную проверку подмоделей паттернов с использованием стандартных алгоритмов. Подмодели паттернов минимизируют потери для каждого конкретного паттерна пропущенных данных, что делает их эффективным инструментом в сравнении со стандартными методами, такими как нулевая или средняя импутация и анализ полных случаев.

В результате симуляции, состоящей из 1000 итераций по 6 шагов авторы статьи Missing data and prediction: the pattern submodel сравнили эффективность подмоделей паттернов с другими популярными методами работы с неполными данными. В результате предложенный ими подход показал лучшие результаты предсказания, степень улучшения в сравнении с другими методами сильно зависела от механизма отсутствия данных и от размерности отсутствующих предикторов. [6]

2.2. Стратегия полу-контролируемого обучения

Нередки случаи, когда предикторы с отсутствующими значениями содержат ценную информацию для прогнозирования зависимой переменной. В базе данных I/B/E/S, где представ-

лены ежеквартальные финансовые прогнозы по доходам публичных компаний, для небольших компаний зачастую отсутствуют данные и аналитические прогнозы. В популярной задаче классификации претендентов на получения банковского кредита, для многих людей отсутствуют данные по ключевому предиктору — кредитному рейтингу. В исследовании A Semi-Supervised Learning Approach to Handling Missing Data in Predictive Analytics авторы предлагают метод подсчета пропущенных данных, основанный на стратегии обучения под частичным наблюдением. В их подходе важным является включение механизма учета пропущенных данных в традиционный процесс подсчета с помощью программы обучения под частичным наблюдением. В отличие от обучения с учителем, в котором модель строится, используя только обучающий набор данных, в их подходе задействуется и тестовый набор данных. Авторы применяют эту стратегию для моделирования пропусков MNAR, которые затем используются для корректировки значения, полученного с помощью традиционных методов расчета. Авторы статьи подробно описывают проблему недостающих данных, а затем аналитически доказывают, что предложенный ими метод может повысить точность вычисления [4].

Стратегия обучения под частичным наблюдением направлена на изучение функции предельной плотности $f()$ от y, которая является прогнозируемой переменной, функция представима по формуле (1):

$$f(y \mid x, \vartheta), \tag{1}$$

параметр ϑ — неизвестный параметр совместного распределения, который необходимо оценить. При обучении под наблюдением параметр может быть найден при максимизации логарифмической функции правдоподобия, формула (2):

$$\vartheta = \arg\max_{\vartheta} \sum_{i=1}^{m} \ln f(x_i, y_i \mid \vartheta), \tag{2}$$

где нижний индекс i индексирует каждое наблюдение, m — это количество экземпляров в обучающем наборе.

При обучении под частичным наблюдением функция правдоподобия примет вид формулы (3):

$$\vartheta = \arg\max_{\vartheta} \sum_{i=1}^{m} \ln f(x_i, y_i \mid \vartheta) + \sum_{i=m+1}^{n} \ln f(x_i \mid \vartheta), \tag{3}$$

где n — количество экземпляров в тестовом наборе. После оценки параметра ϑ совместного распределения (ϑ, ϑ) значения ϑ в тестовом наборе могут быть выведены путем максимизации предельного распределения ϑ. Использование значений независимых переменных в тестовом наборе при обучении под частичным наблюдением позволяет получить более точную оценку ϑ в предположении о гладкости. [4]

Стоит отметить, что предлагаемый подход, хоть в общем и показал лучшие результаты прогнозирования, но не смог превзойти качество прогноза при заполнении пропусков деревом решений Авторы предполагают, что это связано с тем, что деревья решений не задают фиксированный набор параметров. Авторы рекомендуют использовать предлагаемый подход для получения более надежных прогнозов при использовании случайного леса, градиентного бустинга, нейронных сетей для заполнения пропусков.

Заключение

Таким образом, при изучении материалов для написания статьи были разобраны существующие классификации недостающих данных, рассмотрены имеющиеся методы обработки данных с пропусками, был проведен анализ эффективности различных методов в зависимости от механизма пропусков в данных. Дальнейшее исследование будет направлено на поиск, построение и анализ комбинированных моделей прогнозирования в условиях неполных данных.

Литература

1. Теория и практика машинного обучения / В. В. Воронина, А. В. Михеев, Н. Г. Ярушкина, К. В. Святов. – Ульяновск : УлГТУ, 2017. – 290 с.

2. *Хайндман Р.* Прогнозирование : принципы и практика / пер. с англ. А. Логунов / Р. Хайндман, Дж. Атанасопулос. – Москва : ДМК Пресс, 2023. – 382 с.

3. Emmanuel T. A survey on missing data in machine learning / T. Emmanuel, T. Maupong, D. Mpoeleng // Journal of Big Data. – 2021.

4. *Peng J.* A Semi-Supervised Learning Approach to Handling Missing Data in Predictive Analytics / J. Peng, F. Feng // PACIS 2024 Proceedings. 8. – 2024.

5. *Rios R.* Handling missing values in machine learning to predict patient-specific risk of adverse cardiac events: Insights from REFINE SPECT registry / R. Rios // Comput Biol Med. – 2022.

6. Fletcher Mercaldo S. Missing data and prediction: the pattern submodel / S. Fletcher Mercaldo, JD. Blume // Biostatistics – 2020. P. – 236-252.

7. *Nijman S.* Missing data is poorly handled and reported in prediction model studies using machine learning: a literature review / S. Nijman // Journal of Clinical Epidemiology – 2022. P. – 218–229.

8. *Shadbahr T.* The impact of imputation quality on machine learning classifiers for datasets with missing values / T. Shadbahr, M. Roberts, J. Stanczuk // Communications Medicine. – 2023 P. – 139–146.

9. *Saar-Tsechansky M.* Handling missing values when applying classification models / M. Saar-Tsechansky, F. Provost // Journal of Machine Learning Research – 2022. P. – 1625–1657.

10. Центр статистического анализа. – URL: https://scc.ms.unimelb.edu.au/ /resources/ preparing-your-data/missing-data/ (дата обращения: 01.11.2024).

УДК 004.855.5

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДСТВ РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ БОРЬБЫ: МЕТОДЫ И СПОСОБЫ ЕЕ ОБУЧЕНИЯ

К. В. Миронов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается проблема эффективности средств радиоэлектронной борьбы, возможности применения в данной сфере искусственного интеллекта, сопутствующие понятия, а также методы и способы обучения нейронной сети.
Ключевые слова: нейрон, нейросеть, БЛА, РЭБ, БАС, веса, смещения.

Введение

Начало специальной военной операции остро поставило вопрос о защите как стратегической, так и гражданской инфраструктуры от БЛА (беспилотных летательных аппаратов), применяемых недружественными странами с целью нанесения ущерба не только военным, но и гражданским объектам на территории, прилегающей к зоне СВО. Для предотвращения возможного поражения объектов, существуют различные способы выявления и подавления БЛА, однако ни один из них не дает высокой эффективности при использовании.

Способы противодействия беспилотным авиационным системам

Одним из самых распространенных способов подавления БЛА является противодроновое ружье. Оно направляется на летящий дрон, и оператор активирует систему подавления на нескольких частотах сразу, и, в случае попадания дрона в частоту противодронового ружья, дрон теряет управление и падает на землю. Ружья имеют небольшое количество диапазонов, поэтому, в случае подлета дрона на нестандартной частоте, действие ружья становится бесполезным. Также ружья имеют небольшой запас энергии батареи и работают не более 20–30 минут. Вторым распространенным способом подавления является применение стационарных комплексов радиоэлектронной борьбы (РЭБ), которые имеют большее число диапазонов подавления и могут питаться от стандартных источников (220 в) или автомобильной сети, но, несмотря на это, тоже закрывают не все диапазоны частот.

В связи с тем, что противодроновые ружья и стационарные системы не имеют функциональности распознавания дронов, эффективность этих систем противодействия зависит от случайности, попала ли частота подавления в диапазон дрона или нет. При этом, если частота дрона и системы противодействия совпадают, то дрон подавляется по этому диапазону, а другие диапазоны продолжают параллельно работать, тем самым, расходуя энергию, снижая общую продолжительность использования устройства. Эту проблему можно решить с помощью добавления в систему подавления подсистемы распознавания дронов. Ее принцип действия может быть основан на использовании нейросети, которая проведет анализ всего диапазона возможных частот для БЛА, сравнит сигнатуры и выдаст точную классификацию дрона с частотой его работы для оператора. В целевом состоянии подсистема автоматически должна не только распознавать дрон, но и сразу активировать систему подавления, включая нужный генератор шума.

Для решения задачи распознавания дрона, может использоваться обычная нейросеть, которую необходимо будет адаптировать для определения вида БЛА и частоты, на которой он работает. Для этого следует белее детально изучить некоторые понятия.

Основы работы нейронной сети

Нейронные сети бывают различных видов и вариантов, но все они используют в своей основе связанную структуру нейронов, которая может состоять из нескольких слоев. Нейрон является самой простой единицей обработки получаемых входных данных аналогично работе нервной клетки головного мозга человека. Он получает сигналы, которые «генерируют другие нейроны, расположенные ранее в цепочке обработки информации», создает свои выходные данные, передающиеся другим нейронам этой нейронной сети, находящимся на другом слое, или формируют ответ подсистемы [4].

Все нейроны в нейросети имеют свои собственные уникальные параметры, которые называются веса и смещения. Веса — это параметр обозначающий значимость каждого входного сигнала в работе отдельно взятого нейрона, а смещением называется показатель, прибавляемый к сумме входных сигналов. Он используется для достижения максимальной эластичности и получения решений в случае большого количества разнообразных данных на входе.

После получения нейроном входных данных, начинается работа с весами и смещениями. Следом нейрон применяет функцию активации, в результате работы которой он либо не активируется, либо происходит активация нейрона и дальнейшая передача сигнала по сети. Функции активации могут быть различными, их нужно подбирать в зависимости от задачи, поставленной нейросети. Например, они могут быть: сигмоидальными, ReLU и многих других видов.

Способы и методы обучения нейросетей

Для понимания принципов работы нейронной сети важно знать, что она обучается путем выставления показателей смещений и весов для получения более точного результата на тренировочных данных. Существует несколько разных способов обучения нейросети.

Процесс обучения с учителем, который также называется «обучение с подкреплением» [2], предлагает создание базы данных обучающих примеров, для того чтобы на их основе обучалась нейронная сеть. Чем больше будет эта база, тем лучше получится обучить сеть. Сами данные, как и результат, передают нейронной сети, а она, в свою очередь, начинает поиск закономерностей, устанавливает взаимосвязи, проводит сопоставление между соответствующими данными для обучения и результатами. Полученный результат сопоставляется с эталонным, и, если нейронная сеть видит, что полученное решение является неверным, то происходит корректировка параметров весов коэффициентов связи, процесс обучения автоматически перезапускается. Вероятность получения неправильных ответов заметно снижается. Все это происходит до тех пор, пока все ответы нейронной сети не совпадут с ответами в базе данных.

Отличительной чертой обучения с учителем является наличие низкого уровня ошибочных ответов сети. Он «может быть получен в результате сравнения реальных данных с прогнозируемыми нейронной сетью. При многократном повторении процесса происходит выявление стоимостной функции. Обучение с учителем подходит для решения вопросов, в которых есть возможность узнать достоверный результат, не прибегая к использованию других нейронных сетей» [1].

Существует и иной вариант обучения нейронной сети, который подразумевает «обучение без учителя, то есть наличие только вводных данных. Чтобы сеть могла из схожих по некоему признаку данных на «входе» выдать результат, обнаруживая взаимосвязи» [5], схожести и закономерности между этими данными, алгоритмы обучения нейронных сетей без учителя корректируют весовые коэффициенты. Во время обучения происходит выделение главных и характерных, для заданных моделей обучающего материала, параметров схожести и дальнейшая классификация этих моделей в группы по их признакам. Данные, поступающие на «вход», после обработки нейросетью складываются в один из нескольких вариантов ответа.

Особенностью обучения таким способом является невозможность прогнозирования конечного результата работы нейронной сети. Это возможно увидеть только тогда, когда процесс обучения подошел к концу, получены первые результаты. Происходит это потому, что нейросеть усваивает необходимые алгоритмы действий, находит закономерности и выстраивает логический процесс обработки данных, имея всего лишь переданную ей информацию. Обучение без учителя применяют для статистических моделей, кластеризации, обнаружения аномалий, языковых моделей и др. задач, где трудно или невозможно заранее узнать ответ.

Далее необходимо рассмотреть методы обучения нейронных сетей:

1. Метод обратного распространения также известен под названием Backpropagation. Он является одним из самых используемых способов обучения и основан на алгоритме вычисления градиентного спуска. Другими словами, расчет локального максимума и минимума функции происходит во время движения вдоль градиента. Поиск значений градиента происходит путем вычисления производной функции в необходимой точке. Имеющаяся точка получит случайное значение веса. В ней надо провести расчет градиента и определить направленность движения спуска. Вычисления делаются по очереди во всех точках до тех пор, пока не будет достигнута точка локального минимума функции, останавливающая дальнейший спуск. Чтобы преодолеть этот требовательный к большим вычислительным мощностям этап, нужно задать такое значение для момента, которое позволит преодолеть участок графика и оказаться в необходимой точке. В случае недостаточного значения преодолеть точку локального минимума не получится, а если значение будет слишком большим, то повысится вероятность потери глобального минимума.

Метод обучения «основан на общении нейронов с помощью синапсов, которые передают входные данные от одного нейрона другому» [3]. Передача осуществляется до тех пор, пока данные не достигнут слоя «выхода», трансформировавшись в ответ. Эта операция именуется как «передача вперед». Для данного типа алгоритмов обучения нейронных сетей необходимо использовать только дифференцируемые функции активации из-за того, что распространение в обратном направлении определяется произведением между производной функцией от входного значения и им, а также разностью между ответами. На следующем шаге необходимо будет высчитать градиент для всех исходящих связей и, с учетом полученных данных, требуется провести перерасчет весов при помощи специальной функции.

2. Метод упругого распространения называют еще Resilient propagation (сокращенно Rprop). Он был предложен как аналог предыдущего способа обучения, который требует слишком много времени и ресурсов, в следствии чего становится неудобным, если необходимо получить результат быстро. Для увеличения скорости обработки операций и уменьшения количества необходимых ресурсов было разработано большое количество второстепенных вспомогательных алгоритмов, в числе их и методика упругого распространения. Данный метод является наиболее популярным при обучении. Используется принцип одного полного прохода датасета через нейронную сеть (epoch). При подгонке весовых коэффициентов данным методом используются лишь знаки производных частного случая. При этом необходимо строго соблюдать правило определения значений коррекции коэффициента веса. Также «следует использовать значение коррекции с известными пределами, чтобы величина веса не оказалась чрезмерно маленькой или наоборот большой. В случае возникновения точки локального максимума, функция меняет свой знак с «+» на «–», что говорит о росте ошибки и необходимости уменьшении веса, а в противоположном случаи — его увеличения. В данной ситуации порядок операций будет таковым:

– определение значения коррекции;
– расчет частных производных;
– расчет новой величины коррекции весовых значений;
– корректировка весов» [1].

Цикл остановится только в одном единственном случаи, если условие остановки алгоритма будет выполнено. В случае не исполнения условия, происходит возврат к пункту два, подсчету производных, и цикл начинает работать заново.

Благодаря методу упругого распространения сходимость нейронной сети достигается в сроки, значительно меньшие, чем при других ранее упомянутых способах.

Для решения поставленной задачи, наиболее целесообразным будет использовать способ обучения с учителем через метод обратного распространения или метод упругого распространения. Оба этих метода хорошо подойдут в данном случаи, но первый метод лучше использовать, если есть большое количество обучающих данных, а второй будет более эффективен при их небольшом количестве.

Сравнение способов обучения нейронной сети

Для того, чтобы выбрать наиболее подходящий способ обучения была создана простая нейросеть [5], имеющая только два слоя. Архитектура данной сети описывается следующим образом:

1. Входной слой задается по формуле:

$$z_1 = W_1 x + b_1, \tag{1}$$

где $z_1 = R^{10}$.

2. Функция активации:

$$a_1 = \mathrm{Re}\,LU(z_1) = \max(0, z_1). \tag{2}$$

3. Выходной слой:

$$z_2 = W_2 a_1 + b_2, \tag{3}$$

где $z_2 = R^{10}$.

Итоговая формула выглядит следующим образом:

$$y = z_2 = W_2 \bullet \mathrm{Re}\,LU(W_1 x + b_1) + b_2. \tag{4}$$

Формула для векторных и матричных преобразований будет следующей:

$$y = \sum_{j=1}^{10} w_{2j} \bullet \mathrm{Re}\,LU(W_1 x + b_1) + b_2. \tag{5}$$

Программная реализация нейронной сети выглядит следующим образом:

```
class SimpleNN(nn.Module):
    def __init__(self):
        super(SimpleNN, self).__init__()
        self.fc1 = nn.Linear(1, 10)# Входной слой
        self.fc2 = nn.Linear(10, 1)# Выходной слой
    def forward(self, x):
        x = torch.relu(self.fc1(x))
        x = self.fc2(x)
        return x
```

В созданной сети следующий нейрон использован на обоих слоях, входном и выходном. Его архитектура описывается так:

1. Линейное преобразование:

$$z = (w, x) + b. \tag{6}$$

2. Формула выхода:

$$y = z = (w, x) + b. \tag{7}$$

3. Векторная и матричная форма будет выглядеть следующим образом:

$$y = \sum_{j=1}^{n} W_1 x + b. \quad (8)$$

Программная реализация нейрона выглядит следующим образом:

```
class Neuron:
    def __init__(self, input_size):
        self.weights = np.random.rand(input_size)
        self.bias = np.random.rand()
    def forward(self, inputs):
        return np.dot(inputs, self.weights) + self.bias
```

После обучения нейронной сети с нуля методом обратного распространения и методом упругого распространения, на основе имеющихся достоверных данных о дронах гражданского назначения, были подсчитаны результаты применения обоих алгоритмов после 100 эпох обучения. Датасет составлял из 30 объектов и их характеристики, по 50 % тестовых и обучающих данных. Проведенное исследование позволило проанализировать полученную информацию о взаимосвязи точности прогнозирования схожих и различных с обучающим материалом данных и времени, затраченного на одну эпоху, что нашло свое отражение в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение результатов обучения нейросети методами обратного распространения и упругого распространения

Название метода	Время, затраченное на одну эпоху	Точность прогнозирования на основе информации схожей с обучающим материалом	Точность прогнозирования на основе сильно отличающейся от обучающего материала
Метод упругого распространения	10–25 минут	84–90 %	53–27 %
Метод обратного распространения	10–15 минут	91–95 %	33–45 %

После сравнительного анализа можно отметить, что метод упругого распространения оказался более длительным из-за регуляризации, но именно она позволила алгоритму работать значительно более точно, когда поступающая информация не похожа на обучающий материал, а это очень важно в поставленной задаче. Именно поэтому данный метод будет наиболее подходящим для обучения распознанию БЛА в данном конкретном случаи.

Заключение

Подводя итог всему выше изложенному, важно отметить, что нейронные сети требуют глубокого понимания их архитектуры и методов обучения. Правильно выбранный способ обучения и эффективное применение алгоритмов могут привести к высокоскоростной адаптации сети, что в контексте применения подобной системы против беспилотных авиационных систем (БАС), может позволить создать системы, способные обнаружить по радио сигналу вражеский летательный аппарат и классифицировать его в независимости от того, применялся ли данный аппарат до этого или нет, а после применить верный способ противодействия.

Литература

1. Алгоритмы обучения нейронной сети: наиболее распространенные варианты // GeekBrains : [сайт]. – 2022. – URL.: https://gb.ru/blog/algoritmy-obucheniya-nejronnoj-seti (дата обращения 10.11.2024).

2. Введение в обучение с подкреплением: от многорукого бандита до полноценного RL агента// Хабр : [сайт]. – 2017. – URL.:https://habr.com/ru/companies/newprolab/articles/343834 (дата обращения 11.11.2024).

3. *Горбань А. Н.* Обучение нейронных сетей. – М. : СП «ПараГраф», 1990. – 159 с.

4. *Калан Р.* Основные концепции нейронных сетей / Р. Калан. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. – 288 с.

5. *Харрисон М.* Машинное обучение. Карманный справочник. – Диалектика, 2020. – 320 с.

УДК 004.838.5

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В МОБИЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ: НОВЫЕ ГОРИЗОНТЫ

П. А. Никольникова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье анализируются ключевые области применения ИИ, включая персонализацию пользовательского опыта, анализ больших данных и компьютерное зрение, рассматриваются преимущества и недостатки, связанные с внедрением ИИ. Статья также освещает перспективные направления развития ИИ в мобильной сфере и его потенциальное влияние на будущее взаимодействия пользователей с мобильными устройствами. В целом, статья представляет обзор современного состояния и будущих перспектив использования ИИ в мобильных приложениях.
Ключевые слова: искусственный интеллект, мобильные приложения, персонализация, обработка естественного языка, компьютерное зрение, анализ больших данных, конфиденциальность данных, доступность, будущее мобильных технологий.

Введение

Мобильные приложения прочно вошли в нашу жизнь, став неотъемлемой частью повседневности. Их функциональность постоянно расширяется, и одним из наиболее перспективных направлений развития является интеграция искусственного интеллекта (ИИ). В статье рассмотрено: как ИИ трансформирует пользовательский опыт, улучшает функциональность приложений, и какие новые возможности он предоставляет в различных сферах, от персонализированных рекомендаций до сложных аналитических задач. От анализа существующих решений до прогнозирования будущих трендов.

Искусственный интеллект — это область компьютерных наук, занимающаяся созданием систем, способных выполнять задачи, требующие умственных усилий. Эти задачи включают понимание естественного языка, распознавание образов, обучение на основе данных и принятие решений [1].

1. Области применения ИИ в мобильных приложениях

Искусственный интеллект находит широкое применение в мобильных приложениях, улучшая пользовательский опыт и повышая эффективность работы. Например, ИИ используется для разработки персонализированных рекомендаций в сферах электронной коммерции и медиаплатформ, а также для реализации интеллектуальных ассистентов, которые способны обрабатывать естественный язык и выполнять команды пользователей. Кроме того, технологии машинного обучения позволяют анализировать большие объемы данных, что способствует оптимизации бизнес-процессов и повышению качества обслуживания клиентов в реальном времени.

1.1. Персонализация

Персонализация, обеспечиваемая с помощью искусственного интеллекта, представляет собой процесс адаптации контента, интерфейсов и функциональности мобильных приложений к уникальным предпочтениям и поведению пользователей. Этот процесс включает в себя несколько ключевых этапов и технологий.

Первым шагом в персонализации является сбор и анализ данных о пользователях. ИИ использует информацию о поведении пользователя, такую как история поиска, выбор товаров, время взаимодействия с приложением и демографические данные. С помощью алгоритмов машинного обучения происходит выявление паттернов и тенденций, что позволяет создать детализированный профиль пользователя.

На основе собранного анализа искусственный интеллект может предлагать персонализированные рекомендации в режиме реального времени. Например, в мобильных приложениях для электронной коммерции ИИ может показывать товары, которые соответствуют интересам пользователя, основываясь на его предыдущих покупках и взаимодействиях. В стриминговых сервисах, таких как Spotify или Netflix, Искусственный интеллект генерирует музыкальные или видеоплейлисты, основываясь на предпочтениях пользователя и его активности.

Ключевым аспектом персонализации является динамичность: алгоритмы ИИ могут адаптироваться к изменениям в поведении и предпочтениях пользователей, обеспечивая актуальные рекомендации. Кроме того, применение методов обработки естественного языка (NLP) позволяет создавать более интуитивные интерфейсы, такие как чат-боты, которые понимают и учитывают запросы пользователей, предлагая им персонализированные решения.

Важно отметить, что успешная персонализация не только повышает уровень удовлетворенности пользователей, но и может значительно увеличить конверсию и удержание клиентов. Однако вместе с этим возникают и вызовы, связанные с соблюдением конфиденциальности данных и этическими аспектами использования искусственного интеллекта, что требует от разработчиков мобильных приложений тщательного подхода к обработке и защите пользовательской информации.

Таким образом, персонализация с использованием ИИ представляет собой мощный инструмент, который, при правильной реализации, способен значительно улучшить пользовательский опыт и повысить конкурентоспособность мобильных приложений.

1.2. Обработка естественного языка (NLP)

Обработка естественного языка (NLP) представляет собой область искусственного интеллекта, занимающуюся взаимодействием между компьютерами и человеческим (естественным) языком. Цель NLP состоит в том, чтобы позволить компьютерам понимать, интерпретировать и генерировать человеческий язык, в результате чего возникают различные приложения, от автоматического перевода до анализа эмоций.

Первые попытки обработки языка начались в 1950-х годах, когда алгоритмы машинного перевода исследовались для перевода текстов с одного языка на другой. Однако начальный успех был ограничен, и исследования замедлились.

Эволюция методов:

• правила и грамматики: первоначально NLP полагалось на использование правил и грамматик, таких как фиксированные шаблоны и контекстно-свободные грамматики;

• статистические методы: в 1990-х годах произошел переход к статистическим методам, которые стали возможны благодаря увеличению объема данных и вычислительных мощностей;

• машинное обучение: в начале 2000-х годов методы машинного обучения, такие как наивный байесовский классификатор и скрытые марковские модели, начали активно использоваться;

• глубокое обучение: совсем недавно, с приходом глубокого обучения, появились мощные модели, такие как recurrent neural networks (RNN) и transformers, что в значительной степени улучшило качество обработки языка.

Перед тем как применять модели, данные часто требуют предварительной обработки, включающей шаги:

• токенизация: разделение текста на токены (слова или фразы);
• удаление стоп-слов: исключение часто встречающихся, но неинформативных слов;
• стемминг и лемматизация: приведение слов к их базовым формам.

Несмотря на прогресс, NLP сталкивается с рядом вызовов:

• амфиболия и неоднозначность языка;
• ограничения в обработке языков с динамичными грамматиками;
• этические проблемы, включая предвзятость в данных и моделях.

Обработка естественного языка продолжает развиваться с учетом новых технологических достижений и улучшения существующих методов. Она открывает новые горизонты для научных исследований и практических приложений, и в будущем можно ожидать еще более глубокого взаимодействия между человеко-ориентированным и компьютерным языком.

1.3. Компьютерное зрение (CV)

Компьютерное зрение (Computer Vision, CV) — это область искусственного интеллекта, нацеленная на предоставление компьютерам способности «видеть» и интерпретировать изображения и видео так же, как это делает человек [2]. Это достигается путем разработки алгоритмов и моделей, которые извлекают информацию из визуальных данных и преобразуют её в понятный для компьютера формат. В основе компьютерного зрения лежат следующие этапы:

1 этап. Получение изображения: процесс захвата изображения с помощью различных устройств, таких как камеры, сканеры или другие сенсоры. Качество изображения существенно влияет на дальнейшую обработку.

2 этап. Предварительная обработка: этап подготовки изображения к дальнейшему анализу. Он включает в себя такие операции, как:

• уменьшение шума: удаление нежелательных артефактов с изображения;
• улучшение контраста: повышение различимости между яркими и тёмными областями;
• выравнивание: коррекция геометрических искажений;
• сегментация: разделение изображения на значимые области (объекты, фоны).

3 этап. Извлечение признаков: этот критически важный этап заключается в выделении характерных особенностей изображения, которые помогают классифицировать или анализировать его содержимое. Методы извлечения признаков варьируются от простых (например, гистограммы) до сложных (например, глубокие сверточные нейронные сети — CNN). CNN являются доминирующим методом в современном компьютерном зрении, извлекая иерархические признаки с различных уровней абстракции.

4 этап. Анализ и интерпретация: на этом этапе извлеченные признаки используются для решения специфических задач, таких как:

• классификация изображений: определение класса объекта (например, кот, собака, автомобиль);
• обнаружение объектов: локализация и классификация объектов на изображении;
• сегментация изображений: разделение изображения на пиксельные области, соответствующие различным объектам;
• трехмерное моделирование: восстановление трехмерной структуры объекта из двухмерных изображений;
• распознавание лиц: идентификация лиц на изображении;
• оптическое распознавание символов (OCR): извлечение текста из изображений.

5 этап. Пост-обработка: на этом этапе результаты анализа обрабатываются и представляются в удобном для пользователя формате.

В современном компьютерном зрении широко используются методы глубокого обучения, особенно CNN, которые продемонстрировали выдающиеся результаты в различных задачах.

Однако, классические методы, такие как методы обработки изображений на основе математической морфологии и алгоритмы Хафа, по-прежнему находят применение в некоторых специализированных задачах.

Мобильные приложения широко используют компьютерное зрение для различных целей: от фильтров и эффектов в приложениях для обработки фотографий до систем дополненной реальности (AR), автоматического перевода и медицинской диагностики. Однако ограничения мобильных устройств, такие как вычислительная мощность и энергопотребление, требуют оптимизации алгоритмов и моделей компьютерного зрения для обеспечения эффективной работы приложений.

2. Преимущества ИИ в мобильных приложениях

Интеграция искусственного интеллекта в мобильные приложения приводит к существенному улучшению пользовательского опыта и расширению функциональности. В следующем разделе будут рассмотрены ключевые преимущества ИИ, позволяющие создавать более интеллектуальные, персонализированные и эффективные мобильные приложения

2.1. Улучшение пользовательского опыта

Пользовательский опыт (UX) является критически важным аспектом разработки мобильных приложений. Конкуренция на рынке приложений растет с каждым днем, и потребители становятся все более требовательными к интерфейсам, функциональности и удобству использования. Искусственный интеллект (ИИ) представляет собой мощный инструмент, который может значительно улучшить UX, предлагая персонализированные решения и автоматизированные процессы. В этом разделе рассматриваются ключевые способы, с помощью которых ИИ меняет подход к пользовательскому опыту.

Один из основных способов, с помощью которых ИИ улучшает пользовательский опыт, — это персонализация. Адаптивные алгоритмы способны анализировать данные о поведении пользователей, их предпочтениях и привычках, что позволяет приложениям предлагать персонализированный контент. Например, рекомендуемые фильмы, музыка или товары могут быть автоматически подстроены под каждого пользователя, что делает взаимодействие более привлекательным и удобным.

Интеграция ИИ в виде чат-ботов и виртуальных помощников позволяет значительно улучшить взаимодействие пользователей с приложениями. Эти системы способны предоставлять мгновенные ответы на вопросы, помогать в навигации и поддерживать пользователей в процессе выполнения задач. Благодаря способности учиться на основе взаимодействий с пользователями, такие технологии становятся все более эффективными и способны предлагать актуальные и полезные решения.

ИИ также имеет значительное влияние на доступность мобильных приложений. Технологии распознавания речи, текстовых и графических интерфейсов помогают сделать приложения более доступными для людей с ограниченными возможностями. Например, голосовые команды и текстовые подсказки могут упростить использование приложения для пользователей с нарушениями зрения или двигательной активности, предоставляя более равные условия для всех.

Искусственный интеллект может анализировать большие объемы данных о пользователях, что позволяет выявлять проблемы в UX и прогнозировать потребности аудитории. С помощью аналитики на основе ИИ разработчики могут лучше понимать, как пользователи взаимодействуют с приложением, что дает возможность оперативно вносить изменения, улучшая интерфейс и функции под конкретные требования пользователей.

Интеграция искусственного интеллекта в мобильные приложения открывает новые горизонты для улучшения пользовательского опыта. Персонализация, интеллектуальные помощники, повышение доступности и анализ данных — все это является важными аспектами, которые помогают создать более интуитивно понятные и привлекательные продукты. В будущем мы можем ожидать, что ИИ станет еще более интегрированным в UX-дизайн, что приведет к новым стандартам взаимодействия пользователя с технологиями.

2.2. Анализ больших данных

Мобильные приложения генерируют огромные объемы данных, которые содержат ценную информацию о поведении пользователей, их предпочтениях и взаимодействии с приложением. Анализ этих данных с помощью искусственного интеллекта позволяет извлекать значимые инсайты, которые могут быть использованы для улучшения приложения, персонализации пользовательского опыта и принятия более информированных бизнес-решений.

• обработка и предобработка данных: перед анализом данные требуют тщательной обработки и предобработки. Этот этап включает в себя очистку данных от шума и пропущенных значений, преобразование данных в подходящий формат, а также извлечение релевантных признаков. Для эффективной обработки больших объемов данных часто используются распределенные системы и технологии Big Data, такие как Hadoop и Spark;

• машинное обучение для анализа данных: для извлечения значимых инсайтов из больших объемов данных применяются различные методы машинного обучения. Например, классификация используется для сегментации пользователей на основе их поведения, регрессия — для прогнозирования будущих действий пользователей, а кластеризация — для обнаружения скрытых паттернов в данных. Глубокое обучение, в частности, рекуррентные нейронные сети (RNN) и трансформеры, могут быть использованы для анализа последовательностей действий пользователей;

• визуализация данных: визуализация результатов анализа данных играет ключевую роль в понимании полученной информации. Интерактивные графики и диаграммы позволяют выявить тенденции, корреляции и другие важные паттерны в данных. Это помогает принимать информированные решения и эффективно коммуницировать результаты анализа заинтересованным сторонам;

• применение результатов анализа: полученные в результате анализа данных инсайты могут быть использованы для улучшения приложения различными способами. Например, результаты классификации пользователей могут быть использованы для персонализации контента, результаты прогнозирования — для проактивной помощи пользователям, а результаты обнаружения скрытых паттернов — для совершенствования функционала и дизайна приложения;

• вызовы и ограничения: анализ больших данных в мобильных приложениях сопряжен с ряд вызовов и ограничений. Это включает в себя обеспечение конфиденциальности и безопасности данных, управление вычислительными ресурсами мобильных устройств, а также необходимость разработки эффективных алгоритмов и моделей, способных работать с большими объемами данных в условиях ограниченной вычислительной мощности.

Анализ больших данных с помощью ИИ является важным инструментом для улучшения мобильных приложений. Правильный подход к обработке, анализу и визуализации данных позволяет извлекать ценную информацию, которую можно использовать для создания более эффективных, персонализированных и удобных приложений. Однако, необходимо учитывать вызовы и ограничения, связанные с анализом больших данных, и обеспечивать соответствие этических норм и законодательных требований.

3. Проблемы, связанные с применением ИИ в мобильных приложениях

Несмотря на многочисленные преимущества, внедрение ИИ в мобильные приложения сопряжено с рядом вызовов и потенциальных проблем. В следующем разделе будут рассмотрены ключевые сложности, которые необходимо учитывать при разработке и внедрении ИИ-решений в мобильные приложения.

3.1. Конфиденциальность

Применение искусственного интеллекта в мобильных приложениях открывает широкие возможности, но одновременно поднимает серьезные вопросы конфиденциальности данных пользователей. Алгоритмы машинного обучения, лежащие в основе многих ИИ-функций, требуют больших объемов данных для обучения и эффективной работы. Эти данные часто включают в себя персональную информацию, такую как местоположение, история поиска, контакты, данные о покупках и другие сведения, которые могут быть использованы для создания подробного профиля пользователя. Несанкционированный доступ к этим данным или их утечка могут привести к серьезным последствиям для пользователей, включая финансовые потери, кражу личных данных и ущерб репутации.

Особенно уязвимы приложения, использующие технологии распознавания лиц, анализа речи и обработки изображений. Эти технологии позволяют собирать и обрабатывать биометрические данные, которые являются особо чувствительной информацией. Недостаточно строгие меры защиты могут привести к злоупотреблению этими данными, например, к созданию фальшивых аккаунтов или использованию биометрических данных для несанкционированного доступа к учетным записям пользователей. Кроме того, отсутствие прозрачности в отношении того, какие данные собираются и как они используются, вызывает обеспокоенность у пользователей и может привести к недоверию к приложениям.

Для решения проблем конфиденциальности необходимо обеспечить соблюдение строгих стандартов защиты данных, включая шифрование, анонимизацию и деидентификацию данных. Важно также разработать прозрачные политики конфиденциальности, которые ясно описывают, какие данные собираются, как они используются и какие меры безопасности применяются. Кроме того, необходимо обеспечить пользователям контроль над своими данными, предоставив им возможность управлять сбором и использованием своей информации. Только при соблюдении этих условий можно минимизировать риски, связанные с использованием ИИ в мобильных приложениях и обеспечить доверие пользователей.

3.2. Доступность

Применение искусственного интеллекта в мобильных приложениях, несмотря на огромный потенциал, сталкивается с проблемой доступности для широкого круга пользователей. Во-первых, многие ИИ-модели требуют значительных вычислительных ресурсов, которые не всегда доступны на мобильных устройствах с ограниченной вычислительной мощностью и объемом памяти. Запуск сложных алгоритмов машинного обучения на смартфонах может приводить к замедлению работы приложения, повышенному потреблению энергии и быстрому разряду батареи. Это особенно актуально для пользователей с устройствами низкого и среднего класса.

Во-вторых, доступность ИИ в мобильных приложениях ограничена также из-за высокой стоимости разработки и обслуживания сложных ИИ-систем. Требуются специалисты с высокой квалификацией в области машинного обучения и глубокого обучения, а также значительные инвестиции в инфраструктуру для обучения и развертывания ИИ-моделей. Эти факторы

могут привести к тому, что ИИ-функциональность будет доступна только в премиум-приложениях или приложениях крупных корпораций, ограничивая доступ к инновациям для небольших компаний и разработчиков.

В-третьих, доступность ИИ зависит от наличия качественных наборов данных для обучения ИИ-моделей. Создание таких наборов данных — задача сложная и затратная. Кроме того, необходимо учитывать вопросы предвзятости данных и их представительности. Использование некачественных или непредставительных наборов данных может привести к неправильной работе ИИ-моделей и к дискриминации отдельных групп пользователей. Решение этих проблем требует разработки новых методов обучения ИИ-моделей с ограниченными ресурсами и более эффективного использования доступных данных.

4. Будущее ИИ в мобильных приложениях

Будущее мобильных приложений неразрывно связано с дальнейшим развитием и внедрением искусственного интеллекта. Ожидается, что ИИ станет не просто дополнительной функцией, а неотъемлемой частью пользовательского опыта, трансформируя взаимодействие с мобильными устройствами и открывая новые возможности. Ключевые направления развития включают:

• расширенная персонализация: ИИ будет использовать еще более сложные модели для предсказания потребностей и предпочтений пользователей. Персонализация выйдет за рамки простых рекомендаций, затрагивая все аспекты взаимодействия с приложением, от дизайна интерфейса до функциональности и контента. Ожидается появление приложений, которые будут адаптироваться к индивидуальным стилям и предпочтениям каждого пользователя в реальном времени;

• улучшенное взаимодействие человек-машина: ИИ будет обеспечивать более естественное и интуитивное взаимодействие с мобильными приложениями. Голосовые помощники станут более интеллектуальными и способными понимать сложные запросы, а системы распознавания образов — более точными и быстрыми. Технологии виртуальной и дополненной реальности будут интегрированы с ИИ для создания immersive пользовательских опытов;

• расширенная автоматизация: ИИ будет использоваться для автоматизации все большего количества задач в мобильных приложениях. Это может включать в себя автоматический контроль и управление системами, автоматическое обслуживание клиентов, а также автоматизированное решение проблем и оптимизацию работы приложения. Автоматизация будет ориентирована на улучшение как пользовательского опыта, так и эффективности работы приложения;

• интеграция с другими устройствами и сервисами: ИИ будет играть ключевую роль в интеграции мобильных приложений с другими устройствами и сервисами, такими как умный дом, умные часы и другие IoT-устройства. ИИ будет обеспечивать бесшовную синхронизацию данных и функциональности между различными устройствами и сервисами, создавая единую экосистему для пользователя

Для реализации полного потенциала ИИ необходимо решать возникающие вызовы и обеспечивать ответственное и этичное использование этих технологий. Только в этом случае мы сможем максимизировать пользу от внедрения ИИ в мобильных приложениях и создать более удобные, эффективные и инновационные продукты для пользователей.

Заключение

Внедрение искусственного интеллекта в мобильные приложения знаменует собой новый этап в развитии мобильных технологий, открывая перед разработчиками и пользователя-

ми безграничные возможности. Мы проанализировали ключевые аспекты применения ИИ в мобильных приложениях, от персонализации пользовательского опыта до автоматизации сложных задач и анализа больших данных. Несмотря на существующие вызовы, связанные с конфиденциальностью, доступностью и этическими аспектами, потенциал ИИ огромный. Дальнейшее развитие этой области приведет к созданию еще более интеллектуальных, персонализированных и интегрированных мобильных приложений, трансформируя способы взаимодействия пользователей с цифровым миром. Однако, критическим фактором успешного внедрения ИИ является ответственный подход, приоритезирующая этичность, безопасность и защита прав пользователей. Только в этом случае можно полностью реализовать потенциал ИИ и создать истинно инновационные и полезные мобильные приложения для всех.

Литература

1. *Russell S.* Artificial Intelligence: A Modern Approach / S. Russell, P. Norvig – 4-е изд. – United Kingdom : Pearson Education, 2021. – 1166 с.

2. *Коул А.* Искусственный интеллект и компьютерное зрение. Реальные проекты на Python, Keras и TensorFlow / А. Коул, С. Ганджу, М. Казам – Санкт-Петербург : Питер, 2023. – 624 с.

УДК 629.113.066

АНАЛИЗ СТАНДАРТНЫХ ПРОТОКОЛОВ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИИ PASS-THRU И CAN-СТАНДАРТА ПРОМЫШЛЕННОЙ СЕТИ

Н. А. Пеньков, О. А. Сидоркин, С. В. Борисов, И. Али, Д. С. Кирнос

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж

Аннотация. В статье рассматриваются два основных протокола для диагностики специальных транспортных средств. Проводится сравнительный анализ основных способов диагностики транспортного средства. Показано, что для этих целей применяются протоколы J 2534 (Pass-Thru) и ISO 15765-4, которые разработаны на базе CAN-стандарта промышленной сети, объединяющей различные исполнительные устройства и датчики в единую систему. Указаны преимущества и слабые стороны рассматриваемых протоколов. Даются рекомендации, пользуясь которыми пользователь сможет принять решение о целесообразности проведения компьютерной диагностики специального транспортного средства с использованием рассматриваемых протоколов.
Ключевые слова: протокол данных, арбитраж данных, сеть, компьютерная диагностика, транспортные средства, CAN-стандарт, бортовая электросеть, стандарт OBD-II, адаптер.

Введение

Как показывает практика эксплуатации автомобильного парка нашей страны, компьютерная диагностика может выявить до 90 % неисправностей двигателя, коробки передач и бортовой электросети техники различного назначения. Она также позволяет обнаружить проблемы с работой АБС и других электронных систем тормозной системы. В случае с подвеской, диагностируются только активные компоненты, управляемые электроникой. Компьютерная диагностика может помочь выявить скрытые проблемы, которые не проявляются на ранних стадиях. Однако важно помнить, что она не является готовым решением в любой ситуации и не может выявить все неисправности, возникающие в современном автомобиле.

Диагностика автомобилей с помощью компьютера — OBD (On-board diagnostics), представляет собой процесс проверки состояния различных систем машины, осуществляемый бортовым компьютером. Результаты этой проверки доступны водителю, например, через сигнализацию о поломке на приборной панели, а также применяются механиками и специалистами по диагностике. Данные системы начали внедряться с 1980-х годов, а начиная с 1996 года появилась версия OBD-2. В современных системах используются стандартные цифровые порты для передачи актуальных данных и выдачи стандартных кодов ошибок под названием DTC (Diagnostic Trouble Code).

Стандарт OBD-II (On-board Diagnostics) предлагает комплексный контроль за работой двигателя. Он позволяет отслеживать состояние компонентов кузова и вспомогательных устройств, а также проводит диагностику сети управления автомобилем. Различные производители используют разные протоколы связи с автомобилем в рамках этого стандарта, включая варианты, представленные на рис. 1.

Спецификация OBD-II включает стандартизированный аппаратный интерфейс, представленный в виде колодки диагностического разъема (DLC — Diagnostic Link Connector), которая соответствует стандарту SAE J1962 и имеет 16 контактов (2x8) для подключения диагностического оборудования к автомобилю. Этот разъем выполнен в форме трапеции. Отличие от разъема OBD-I, который иногда можно найти под капотом, заключается в том, что разъем OBD-II должен находиться в пределах досягаемости водителя, обычно в районе рулевого колеса.

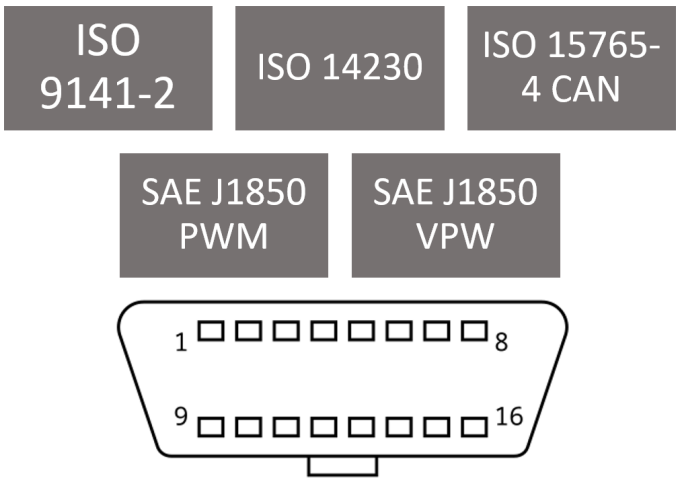


Рис. 1. Диагностический разъем OBD-II и различные протоколы

1. Протокол J 2534 (Pass-Thru)

Стандарт SAE J 2534 был введен в 2002 году для того, чтобы предоставить возможность перепрограммирования электронных блоков управления (ЭБУ) через интерфейсы разных производителей. Этот стандарт определяет общий интерфейс для обмена данными между компьютером и адаптером, позволяя разработчикам ПО использовать адаптеры, использование которых снимает необходимость знания их аппаратной реализации. Это значит, что производитель ПО может применять адаптеры других компаний для программирования блоков управления.

Большинство производителей автомобилей приняли этот стандарт, используя его для программирования и всесторонней диагностики ЭБУ. Компания «Drew Tech» была первой в разработке этого стандарта. Эксперты компании «Toyota» использовали этот интерфейс для реализации полного спектра диагностических процедур на всех моделях Lexus и Toyota. В настоящее время большинство адаптеров поддерживают этот стандарт, что значительно расширяет их функциональные возможности. Стандарт широко распространен в автомобилестроительной индустрии и считается стандартом промышленного применения, способствуя унификации и структурированию систем обмена данными. В работе с этим стандартом задействован обширный спектр специализированных программных решений, которые применяются для перепрограммирования электронных модулей, выполнения диагностических процедур и обслуживания автомобилей.

Текущий адаптер загрузчика CombiLoader не способен работать с интерфейсами типа CAN, поэтому использование адаптера с использованием рассматриваемого протокола J2534 расширяет список поддерживаемых ЭБУ.

На рынке автомобильного оборудования существует множество различных адаптеров, которые поддерживают данный стандарт при выполнении различных задач. Теоретически, любой из таких адаптеров может взаимодействовать с загрузчиком, используемом на специальной технике, но перед использованием неизвестного адаптера рекомендуется проверить его совместимость с загрузчиком на ЭБУ конкретного образца автомобиля.

Преимуществами рассматриваемых адаптеров являются:

– наличие возможности работы с грузовыми автомобилями (бортсеть 24 В);

– поддержка возможности работы на более широком спектре транспортных средств, включая грузовые и специальные автомобили;

– лучшая совместимость с требованиями стандартов J 2534 (*1);

– обеспечение большей гибкости и совместимости с различными стандартными адаптерами, что делает процесс диагностики и программирования более универсальным;

– высокая скорость передачи данных в сравнении с другими адаптерами (скорость обмена данными по протоколу ISO-11898 (CAN) достигает максимальной пропускной способности шины, что значительно превышает скорость работы популярных адаптеров, таких как OpenPort;

– в сравнении с другими адаптерами — лучшее соотношение цены, качества и возможностей.

Однако, предлагаемый адаптер обладает и рядом недостатков:

– высокая стоимость в абсолютном значении;

– для корректной работы необходимо использование дополнительных переходных устройств.

2. Протокол ISO 15765-4

CAN (Controller Area Network) — это стандарт промышленной сети, предназначенный для объединения различных исполнительных устройств и датчиков в единую систему. Этот стандарт может использовать последовательную, широковещательную и пакетную передачу данных.

Стандарт CAN был разработан компанией Robert Bosch GmbH в середине 1980-х годов и широко используется в автомобильной промышленности, промышленной автоматизации, умных домах и других областях использующих микроконтроллеры в своей элементной базе.

В 2000 году ведущие мировые производители признали необходимость единой системы управления и диагностики автомобилей, что привело к созданию нового стандарта — EOBD (EURO OBD). Основным отличием EOBD стало применение протокола управления автомобильными подсистемами CAN, разработанного компанией Bosch и реализованного на моделях автомобилей европейских и азиатских производителей. Однако, диагностический разъем OBD-II остался неизменным, так как в нем уже были предусмотрены контакты для связи по интерфейсу CAN.

Хотя EOBD иногда называют европейским стандартом, а OBD-II — американским, терминология эта некорректна, поскольку EOBD представляет собой стандарт управления, а не диагностики. В США продолжают использовать термин OBD-II, даже если сканеры поддерживают диагностику и управление по CAN.

Протоколы ISO 15765-1, ISO 15765-2, ISO 15765-3, ISO 15765-4 (или ISO 15031-1 и другие для CAN ранних версий) обеспечивают высокую скорость передачи данных (до 1 Мбит/с), что делает их самыми быстрыми среди существующих протоколов.

Преимущества использования такого протокола:

– работа в режиме жесткого реального времени заложена в базовый функционал (устройства могут обмениваться данными с предсказуемым временем реакции, что особенно важно для критических приложений, требующих мгновенного реагирования);

– простота реализации и минимальные затраты на использование (легкость внедрения и поддержки — снижает общую стоимость эксплуатации сети);

– высокая помехоустойчивость (способность эффективно работать в условиях электрических помех благодаря высокой надежности передачи данных);

– наличие арбитража доступа к сети без потерь пропускной способности (распределение доступа к каналу связи между устройствами осуществляется таким образом, чтобы исключить потери производительности из-за конфликтов в формирующихся запросах);

– надёжный контроль ошибок во время процесса приёма-передачи информации (наличие механизмов обнаружения и исправления ошибок, позволяющих повысит надежность передачи данных);

– широкий диапазон скоростей работы (возможность работы на различных скоростях передачи данных, что позволяет адаптироваться к различным приложениям и требованиям);

– широкое распространение технологии, наличие богатого ассортимента продуктов от различных поставщиков (доступность большого количества готовых решений от разных производителей, облегчающая выбор и интеграцию системы).

К недостаткам рассматриваемого протокола следует отнести:

– максимальную длину сети, обратно пропорциональной скорости передачи, что накладывает дополнительные ограничения на возможность её использования (чем выше скорость передачи данных, тем короче допустимая длина линии связи);

– значительный по объему размер служебных данных в транслируемом пакете, что приводит к увеличению нагрузки на сеть и снижению эффективности передачи.

Заключение

Таким образом, приведенный сравнительный анализ протоколов для компьютерной диагностики специальных транспортных средств показал допустимость использования рассмотренных протоколов по своему функционалу, характеристикам, достоинствам и недостаткам для различных потребителей. Однако, для диагностики специальной транспортной техники предпочтительнее использование протокола J 2534 (Pass-Thru), поскольку он подходит для диагностики сети напряжением 24 В, что широко используется в грузовых автомобилях. Кроме того, немаловажным фактором, определяющим выбор протокола J 2534, является возможность получения доступа к программному обеспечению и электронной библиотеке транспортных средств различных сборок и производителей, что позволяет работать с большой базой данных, содержащей информацию об особенностях эксплуатации схожей конструктивно автомобильной техники, что положительно сказывается на диагностике возникающих неисправностей у таких образцов.

Литература

1. *Яковлев В. Ф.* Диагностика электронных систем автомобиля / В. Ф. Яковлев. – «СОЛОН-ПРЕСС». – 200*3. – С. 144–178.*

2. Смирнов Ю. А. Автомобильная электроника и электрооборудование / Ю. А. Смирнов, В. А. Детистов. – М. : Лань. – 2023. – С. 124–150.

УДК 004.8

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПО ЦИФРОВЫМ КАНАЛАМ СВЯЗИ

А. Е. Петров

Курский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается применение нейронных сетей для повышения эффективности цифровых систем связи. Исследуются возможности использования глубокого обучения для задач модуляции, демодуляции и декодирования сигналов в условиях сложных каналов связи. Рассмотренные варианты, включая сверточные, рекуррентные нейронные сети и их модификации, демонстрируют снижение битовой ошибки и приближаются к оптимальной производительности. Уделяется внимание адаптивным методам, способным улучшить качество передачи данных в реальных условиях эксплуатации. Приводятся достоинства моделей цифровых систем с использованием нейронных сетей над традиционными методами.

Ключевые слова: нейронные сети, цифровые каналы связи, помехоустойчивое кодирование, декодирование, модуляция, демодуляция, глубокое обучения, блочные коды, сверточные коды, рекуррентные нейронные сети, сверточные нейронные сети.

Введение

Важной чертой современного мира является огромная связанность общества посредством различных систем коммуникации. Люди со всей планеты могут быстро получить информацию, не выходя из своего дома. Всё это реализуется благодаря сложным цифровым системам связи.

Вместе с развитием технологий, появляются новые методы передачи данных, которые стремятся не только повысить скорость, но и увеличить качество связи в целом. Одной из главной проблем цифровых систем связи являются шумы, которые возникают в каналах связи по различным причинам (например, белый гауссовский шум). Для борьбы с этим используются различные методы, которые позволяют избегать негативных последствий при получении информации. Основными направлениями по борьбе с шумами в каналах связи является разработка новых методов модулирования и демодулирования сигналов, а также применение различных помехоустойчивых кодов, которые позволяют проверять полученные данные на ошибки и исправлять их (например, LDPC коды, турбо-коды и д. р.).

Сегодня большое развитие получили нейронные сети, которые показывают высокие результаты в различных областях деятельности. Их применение может позволить создать новые цифровые системы связи, которые будут более эффективны, чем прежние варианты. На основе нейронных сетей создаются различные демодуляторы и декодеры, которые отлично справляются с последствиями высокой зашумленности каналов связи.

1. Цифровая система связи

Работы цифровой системы связи можно описать несколькими этапами, каждый из которых играет важную роль в эффективности и качестве передачи данных [1]. Можно выделить пять основных этапов.

1. Преобразование исходной информации и кодирование. Данный этап включает в себя обработку исходного вида информации в цифровую форму. Также на данном этапе применяются различные виды помехоустойчивых кодов, для обеспечения надежной передачи данных.

2. Модуляция. Для передачи данных по каналам связи информация из цифрового вида преобразуется в аналоговые сигналы с применением различных видов модуляции.

3. Передача сигнала. На этом этапе сигнал передается по каналу связи, который может быть проводным (например, оптоволоконным или медным) или беспроводным (например, через радиоволны, спутниковые каналы). Сигнал в процессе передачи может быть искажен различными помехами, что требует дополнительных механизмов для исправления ошибок.

4. Прием сигнала и демодуляция. После того как сигнал достигнет приемного устройства, он подвергнется процессу демодуляции, где аналоговый сигнал преобразуется обратно в цифровую форму. Демодуляция включается извлечение переданных бит из полученного сигнала с помощью алгоритмов, соответствующих типу использованной модуляции.

5. Декодирование и обработка ошибок. На данном этапе применяется декодирование с использованием различных методов коррекции ошибок, такие как коды Хэмминга, LDPC или турбо-коды, чтобы восстановить исходные передаваемые данные.

На рис. 1 представлена схема цифровой системы связи.

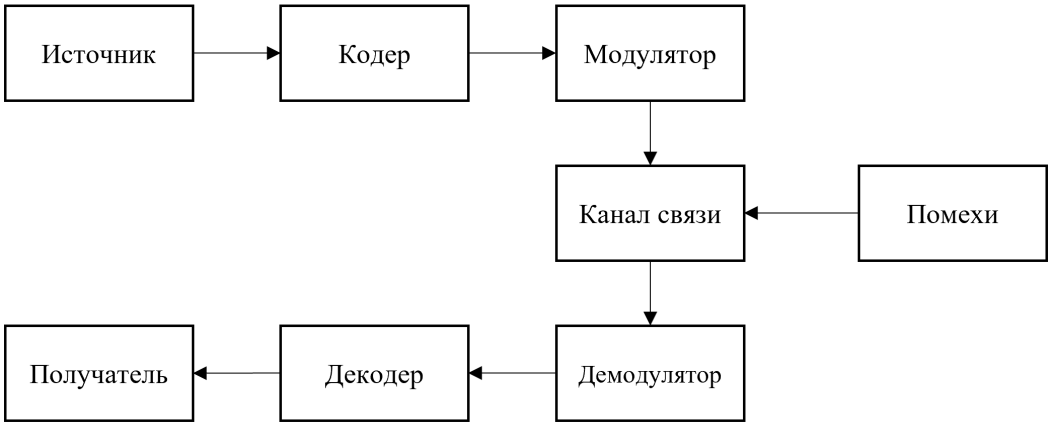


Рис. 1. Схема цифровой системы связи

Нейронные сети в основном могут быть применены для процессов модуляции и демодуляции сигналов, а также для разработки новых декодеров помехоустойчивых кодов. Именно на этих аспектах остановимся подробнее.

2. Модуляция и демодуляция сигнала с применением нейронных сетей

В последнее время нейронные сети стали активно использоваться для создание новых видов модуляторов и демодуляторов сигналов, которые позволяются повысить общую эффективность и помехоустойчивость цифровых систем связи. Новые методы позволяют оптимизировать классические методы, а также создать новые решения, которые могут адаптироваться к изменяющимся условиям передачи данных.

Одной из ветвей развития нейронных сетей в сфере модуляции и демодуляции является разработка адаптивных систем, которые настраивают свои параметры в зависимости от уровня зашумленности каналов связи [2]. Для разработки таких моделей используются различные виды архитектур. Довольно популярными являются сверточные и рекуррентные нейронные сети, а также их гибридные варианты [2, 3]. Такие решения показывают высокие результаты сравнимые с классическими схемами, а также могут их превосходить в некоторых ситуациях.

Другой актуальной проблемой в этой области является распознавание видов модуляции сигналов. Нейронные сети могут существенно облегчить данный процесс, так как уже показали свои возможности в различных задачах классификации. Сверточные модели отлично подходят для распознавания видов модуляции в виде изображений (например, спектрограммы или ди-

аграммы созвездий), где они идентифицируют паттерны соответствующие различным видам модуляции. Для этого могут использоваться известные архитектуры, к примеру, ResNet-50 или Inception-V3, которые показывают высокие результаты в исследованиях [4]. На рис. 2 представлены результаты классификации различных видов модуляции по спектрограммам.

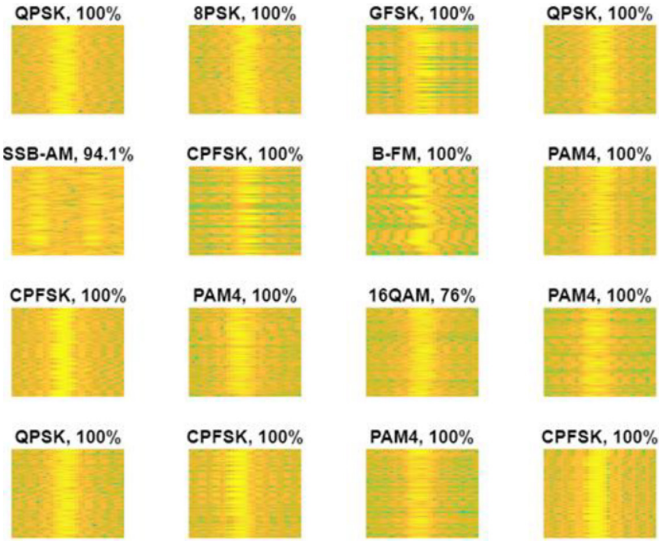


Рис. 2. Результаты работы сети Resnet-50 для классификации модуляции сигнала по спектрограмме

Другой важной стороной исследований применения нейронных сетей в процессе модуляции и демодуляции сигналов является использование автоэнкодеров. Такой тип нейронной сети используются для кодирования и модуляции сигналов. Она может быть обучена восстанавливать сигналы, что позволяет эффективно компрессировать данные перед передачей и минимизировать потерю информации из-за канала с помехами. На основе автоэнкодеров можно построить комплексную систему, в которой передатчик и приемник обучается как единая сеть [5]. Такая архитектура позволяется оптимизировать передачу данных по заданному каналу связи с учетом его характеристик. На рис. 3 представлена схема сквозной системы, основанной на автоэкнодере.

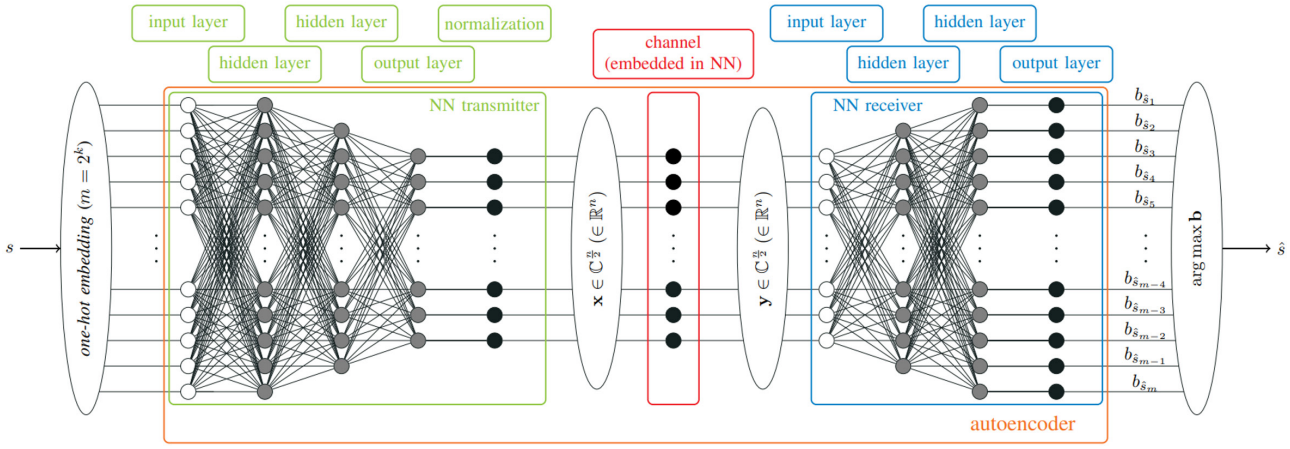


Рис. 3. Схема сквозной системы связи в виде автоэнкодера

По результатам тестирования, было выявлено, что такая система предоставляет более низкий уровень ошибок на блок (BLER) по сравнению с базовой системой QPSK с минимальной средней квадратической ошибкой (MMSE) на всем диапазоне SNR. Помимо этого, включение нелинейного усилителя показало, что автоэнкодеры эффективно справляются с искажениями без дополнительных алгоритмов компенсации [5].

Можно сделать вывод, что такие сети предлагают универсальный инструмент для адаптации к сложным и изменяющимся условиям передачи данных, а также снижается сложность проектирования систем и повышается их гибкость.

3. Применение нейронных сетей для декодирования помехоустойчивых кодов

Помехоустойчивое кодирование играет ключевую роль в обеспечении надежной цифровой передачи данных, особенно в условиях зашумленных и ненадежных каналов связи. Суть этого метода заключается в добавлении избыточной информации к передаваемым данным, что позволяет обнаруживать и исправлять ошибка, вызванные искажениями в процессе передачи. Это особенно важно в системах связи, где сигнал может быть подвержен влиянию различных видов шумов. Благодаря таким кодам, как коды Хэмминга, БЧХ-коды или турбо-коды, передача данных становится более устойчивой к ошибкам, что критически важно для обеспечения качества связи в современных телекоммуникационных системах, интернете и мобильных сетях.

Кроме того, помехоустойчивое кодирование значительно повышает общую эффективность системы, позволяя использовать каналы с низким уровнем сигнала и минимизировать необходимость в повторной передаче поврежденных данных. Основной проблемой является именно декодирование помехоустойчивых кодов при приеме сигнала по каналу связи и именно её рассматривают во многих исследованиях.

С развитием технологий появились новые алгоритмы кодирования и декодирования различных кодов. На замену классическим «жестким» методам декодирования стали приходить новые алгоритмы «мягкого» декодирования, которые предлагают более высокое качество полученных данных, даже в каналах связи с высоким уровнем шума. Для получения более качественных результатов «мягкие» декодеры проводят большее количество вычислительных операций, что сильно может сказаться на эффективности системы в целом. Для решения данной проблемы активно используются нейронные сети [6].

Нейросетевые декодеры, построенные на полносвязных сетях, имеют довольно высокий результат по сравнению с «жесткими» методами декодирования и достигают точность, сравнимую с «мягкими» алгоритмами декодирования [6]. Сейчас в исследованиях используются различные варианты архитектур, для поиска новых решений, которые бы смогли предоставить варианты с высоким качеством декодирования и низкими вычислительными затратами.

Одним из вариантов является использование рекуррентных нейронных сетей. Их преимуществом для декодирования помехоустойчивого кода является то, что они разработаны для выявления зависимостей между элементами данных, что позволяет им эффективно моделировать декодирование кодов, которые требуют учета контекста, как в сверточных или блочных кодах, где структура последовательностей играет ключевую роль. Использование таких моделей показывает в тестах высокие результаты, а именно для линейных кодов можно достичь значения битовой ошибки (BER), которые ниже, чем у традиционных методов декодирования [7]. На рис. 4 представлены результаты сравнения метода декодирования с помощью алгоритма распространения ошибки (BP) и усовершенствованного алгоритма, с использованием рекуррентных нейронных сетей (BP-RNN).

Как можно заметить выигрыш алгоритма BP-RNN варьируется от 0.9 dB до 1.0 dB на различных уровнях SNR. Таким образом, можно сделать вывод о высокой эффективности применения данной архитектуры нейронных сетей для декодирования различных помехоустойчивых кодов в цифровых системах связи.

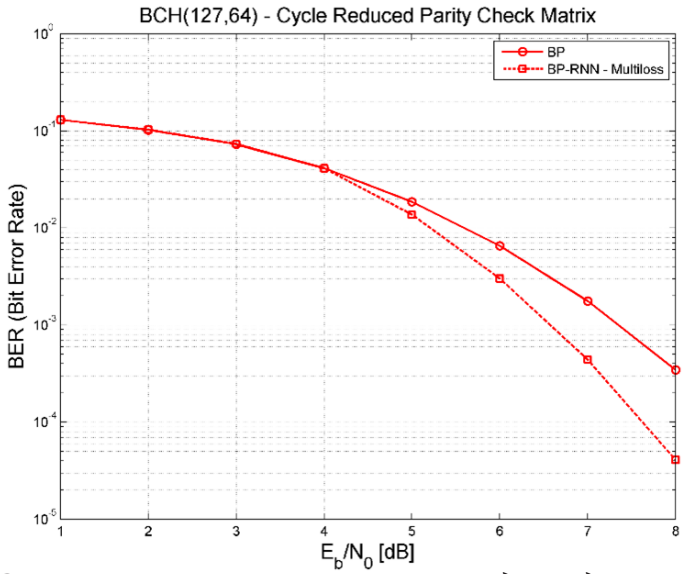


Рис. 4. Сравнение алгоритмов BP и BP-RNN для кода БЧХ (127,64)

Заключение

Современные достижения в области нейронных сетей существенно продвинули цифровые системы связи, предоставив эффективные инструменты для повышения качества передачи данных. Использования различных архитектур нейронных сетей позволяет адаптировать процессы модуляции, демодуляции и декодирования сигналов к сложным условиям каналов, включая шумы и замирания.

Эти успехи открывают перспективы для создания адаптивных и устойчивых коммуникационных систем. Обучаемые алгоритмы нейронных сетей показывают высокую гибкость и эффективность работы. В условиях стремительного роста объемов данных и ужесточения требований к производительности связи нейронные сети становятся ключевым компонентом современных цифровых систем. В дальнейшем развитие этой области будет способствовать еще большему повышению надежности и эффективности телекоммуникационных технологий.

Литература

1. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – 3-е изд. – Москва : Техносфера, 2014. — 1104 с.

2. *Kim H., Jiang Y., Rana R., Kannan S., Oh S., Viswanath P.* Communication algorithms via deep learning // 2018 IEEE International Conference on Communications (ICC). — 2018.

3. *Wu T.* CNN and RNN-based deep learning methods for digital signal demodulation // 2019 IEEE International Conference on Communications (ICC). – 2019. – С. 122–127.

4. *Waqas M., Ashraf M., Zakwan M.* Modulation classification through deep learning using resolution transformed spectrograms // 2023 IEEE International Conference on Communications (ICC). – 2023. – С. 1–6.

5. *Felix A., Cammerer S., Dorner S., Hoydis J.* OFDM-Autoencoder for end-to-end learning of communications systems // 2018 IEEE International Conference on Communications (ICC). – 2018.

6. *Петров А. Е., Кривонос А. В.* Применение нейронных сетей для декодирования блочных турбо-кодов. // Интеллектуальные информационные системы: теория и практика. – 2023. – С. 65–72.

7. Nachmani E., Be'ery Y., Burshtein D. RNN decoding of linear block codes // 2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). – 2017. – С. 1135–1139.

УДК 004.9

РАЗВИТИЕ ТЕХНОЛОГИИ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ ПОСРЕДСТВОМ ИНТЕГРАЦИИ С НЕЙРОННЫМИ СЕТЯМИ

А. И. Расторгуева

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж

Аннотация. Одно из самых популярных направлений информационных технологий дополненная реальность, активно используется для решения разного типа задач. При этом могут возникать ситуации, осложняющие работу с такими приложениями, не позволяющие функционировать им корректно. Подобные вопросы предлагается решить с применением нейронных сетей.
Ключевые слова: дополненная реальность, нейронные сети, библиотеки дополненной реальности.

Введение

Технология дополненной реальности не только развивается, но и активно внедряется в различные сферы деятельности человека. Теперь это не только развлечение, но и элемент навигации (в том числе транспортной), фактор повышения эффективности образовательного процесса, подготовки и переподготовки специалистов различных профилей, инструктаж при выполнении технического обслуживания и ремонта, сопровождение сложных работ на производстве и т. д.

До недавнего времени главными недостатками технологии дополненной реальности были:

1) ограничение по считываю сложных сцен (без однотонного фона), влекущее некорректное распознавание образов;

2) отказ выполнения при недостаточно или при чрезмерно ярком освещении;

3) невозможность различать объекты при условии, что они частично скрыты [1];

4) затруднения с выполнением распознавания, если объект перемещается в поле видения веб-камеры, вращается или меняет свои размеры (приближается/удаляется).

1. Библиотеки дополненной реальности

Приложения дополненной реальности ранее основывались на двух видах подходов: безмаркерный и маркерный. В первом случае дополнительная информация (графическая, текстовая, 3d-объекты и др.) появлялась при запуске приложений или воспроизведение основывалось на геолокации. Во втором случае либо на объект помещалась и в дальнейшем распознавалась специальная метка (маркер), либо объект сам служил меткой для распознавания. Для организации этого использовались библиотеки дополненной реальности, которые сравнивали, полученную с веб-камеры информацию, с шаблонами, внесёнными в программу. К библиотекам дополненной реальности относятся:

1) ARToolKit;

2) OpenCV;

3) NYARToolKit;

4) Vuforia.

Все эти библиотеки приемлемо работают с маркерами, но имеют ряд неостатков:

1) подходят не для всех языков программирования (объектно-ориентированных);

2) в большинстве вариантов библиотек требуется регистрация на сайте производителя;

3) нестабильность при работе с объектами, выступающими вместо маркеров, метками для распознавания;

4) большое количество программных ошибок в самих библиотеках, приводящих к нестандартному поведению приложений.

2. Нейронные сети и дополненная реальность

Развитие современных технологий таково, что появление и развитие нейронных сетей может решить вышеперечисленные проблемы дополненной реальности.

Нейронная сеть (*neural network*) — сеть примитивных обрабатывающих элементов, соединенных взвешенными связями с регулируемыми весами, в которой каждый элемент выдает значение, применяя нелинейную функцию к своим входным значениям, и передает его другим элементам или представляет его в качестве выходного значения [2].

Нейронные сети позволяют дополненной реальности более точно выполнять задачи. При этом работа с приложениями становится более интерактивной и эффективной. Происходит более корректное распознавание объектов и реагирование на их изменения и перемещения.

Становиться значительно шире и спектр возможностей данной технологии:

1) анализ происходящего позволит предлагать рекомендации по выполнению задач, обеспечивая эффективность работы и безопасность (движение на дороге, выполнение опасных работ);

2) анализ полученного изображения в режиме реального времени предоставит рекомендации по дальнейшим действиям (покупки, образовательный процесс);

3) работа с приложениями на основе дополненной реальности теперь может быть индивидуально настроена на конкретного пользователя (важными становятся скорость его реакции, характер, темперамент);

4) улучшаются характеристики навигации (пользователь может точно определить своё место положения);

5) обеспечивается бесперебойность работы дополненной реальности (при условии соответствия системного предложения).

Дополненная реальность расширяет возможности для человека, а нейронные сети расширяют возможности дополненной реальности.

При всех положительных аспектах не стоит забывать, что чем больше информации обрабатывается, тем больше требуются ресурсы, в том числе и энергетические.

Ещё одним недостатком подобного соединения технологий является вопрос сохранения личных данных и их защита от мошенников.

Решение этих проблем — вопрос дальнейших исследований

Заключение

Совместное использование технологии дополненной реальности и нейронных сетей раскрывает невероятный потенциал для работы в разных отраслях. Теперь можно не только дополнять реальный мир вспомогательными объектами, но достичь более чуткой реакции программного обеспечения на действия пользователя, на обстановку, на малейшие изменения и откликаться на возникающие потребности.

Возможности технологии дополненной реальности значительно расширяются благодаря нейронным сетям. Однако, и здесь есть ряд задач, которые ещё предстоит решить. И одна из них это ресурсоемкость, в том числе энергоёмкость.

Литература

1. Хабр: официальный сайт. URL: https://habr.com/ru/articles/709432/ (дата обращения: (19.09.2024)

2. ГОСТ Р 70462.1-2022. Информационные технологии. Искусственный интеллект. Оценка робастности нейронных сетей. Часть 1. Обзор: национальный стандарт Российской Федерации : дата введения 2023-01-01/ Федеральное агентство по техническому регулированию. – Изд. официальное. – Москва : Стандартинформ, 2022. – 32 с.

УДК 004.89

ГРАФОВЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ, ИХ ОСОБЕННОСТИ И ВОЗМОЖНЫЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

В. О. Решетов[1], А. А. Арзамасцев[1,2]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Тамбовский филиал Федерального государственного автономного учреждения «Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С. Н. Федорова»

Аннотация. Графовые нейронные сети (GNN) представляют собой мощный инструмент для обработки и анализа данных, представленных в виде графов, что делает их актуальными для широкого круга задач в различных областях науки и техники. В статье рассматриваются основные архитектуры GNN, такие как Graph Convolutional Networks (GCN) и Graph Attention Networks (GAT), их ключевые особенности и принципы работы. Освещены существующие проблемы и ограничения, включая вычислительную сложность и обработку разреженных графов. Особое внимание уделено областям применения GNN: от социальных сетей и биоинформатики до финансовых технологий.
Ключевые слова: графовые нейронные сети (GNN), архитектуры GNN, graph convolutional networks (GCN), graph attention networks (GAT), приложения GNN.

Введение

В последние годы наблюдается значительный рост интереса к графовым нейронным сетям, которые позволяют эффективно работать с данными, представленными в виде графов. Графы широко применяются в различных областях: от социальных сетей и рекомендационных систем до анализа биологических структур, таких как молекулы и белки. В отличие от традиционных нейронных сетей, которые работают с данными, представленными в виде табличных или последовательных структур (например, изображений или временных рядов), графы обладают сложной нерегулярной структурой, что требует создания специализированных методов обработки информации.

Графовые нейронные сети предоставляют инструменты для распространения и агрегации информации между вершинами графа, что позволяет моделям обучаться на основе локальных и глобальных взаимосвязей. Это открывает широкие возможности для решения задач, где важны не только свойства отдельных элементов, но и их взаимосвязи. Например, такие задачи включают предсказание взаимодействий между пользователями в социальных сетях, моделирование молекулярных взаимодействий или анализ сложных физических систем.

Цель работы — рассмотреть основные архитектуры графовых нейронных сетей, их ключевые особенности, а также существующие проблемы и ограничения. Кроме того, в статье проанализированы основные области применения GNN, в которых применение графовых нейронных сетей демонстрирует значительные результаты.

1. Особенности графовых нейронных сетей

1.1. Определение графовых нейронных сетей

Графовые нейронные сети — это обобщение традиционных нейронных сетей для работы с графовыми данными. В отличие от стандартных архитектур нейронных сетей, таких как полносвязные сети (Fully Connected Networks) или сверточные сети (Convolutional Neural

Networks), которые работают с данными фиксированной структуры, GNN способны обрабатывать информацию, представленную в виде графов с произвольной структурой.

Графы — это математические конструкции, которые используются для представления объектов и их связей, где узлы — объекты, а ребра — связи между ними. Каждый узел в графе имеет вектор опций, представляющий его атрибуты. Подобные опции могут быть разных типов. Ребра между узлами также могут иметь связанные опции, собирая более подробную информацию об отношениях между узлами. Это позволяет извлекать более глубокий смысл из данных, расширяя спектр задач в применении глубокого обучения. Графовые нейронные сети применяют прогностические возможности глубокого обучения к структурам данных, которые изображают объекты и их взаимосвязи в виде точек, соединенных линиями на графике. Например, в социальных сетях вершины могут представлять пользователей, а рёбра — связи между ними, такие как дружба или подписки. В транспортных сетях вершинами могут быть города, а рёбрами — дороги между ними. Химические соединения также можно представить в виде графов, где атомы — это вершины, а химические связи — рёбра [1].

Существует три общих типа задач прогнозирования на графах: на уровне графа, на уровне узла и на уровне ребра. В задаче уровня графа предсказывается одно общее для всего графа. Для задачи уровня узла предсказывается некоторое свойство для каждого узла в графе. Для задачи уровня ребра, соответственно, предсказание строится для свойства или наличия ребер в графе. Для трех уровней задач прогнозирования, описанных выше (уровень графа, уровень узла и уровень ребра), важно, что все следующие проблемы могут быть решены с помощью одного класса моделей, GNN.

1.2. Проблема использования графов в машинном обучении

Традиционные нейронные сети, такие как сверточные нейронные сети и рекуррентные нейронные сети, предназначены для работы с данными, имеющими строгую структуру. CNN отлично справляются с анализом изображений, где пиксели упорядочены в виде сетки, а RNN хорошо работают с последовательными данными, такими как текст или временные ряды, где информация поступает по временной оси [2].

Однако многие реальные данные, например, социальные сети, биологические структуры или транспортные системы, не могут быть представлены в виде упорядоченных сетей или последовательностей [4]. Такие данные имеют нерегулярную структуру, где связи между элементами варьируются и могут быть весьма сложными. Это и делает графы отличным способом представления таких данных, однако не очевидно, каким образом представить графы в формате, совместимом с глубоким обучением, ведь модели машинного обучения обычно принимают на вход прямоугольные или сеточные массивы данных.

Графы содержат до четырех типов информации, которые могут быть потенциально полезны для построения предсказаний: узлы, ребра, глобальный контекст и связность. Описать первые три можно достаточно просто: например, для узлов можно сформировать матрицу признаков узлов N путем присвоения каждому признаку индекса i и хранения признака $node_i$ в N. Однако, представление связанности графа немного сложнее, потому что здесь можно применять разные подходы в зависимости от конфигурации графа: матрицы или списки смежности. Применение матриц смежности удобно с точки зрения того, что они легко тензоризируются, но так как количество узлов в графе может быть порядка миллиона и более, а количество ребер между ними изменчиво, то это может приводить к построению очень разреженных матриц смежности, крайне неэффективно расходующих память, к тому же можно построить несколько матриц смежности, которые будут описывать одну и ту же структуру смежности, однако не существует гарантии, что разные матрицы смежности будут давать эквивалентные результаты в глубокой нейронной сети, то есть они не являются инвариантны-

ми к перестановкам. Эти проблемы решают списки смежности. Они описывают связность ребра e_k между вершинами n_i и n_j в виде кортежа (i, j), за счет этого достигается оптимальность хранения графа в случае, если количество вершин в графе сильно превосходит количество ребер [3].

2. Архитектуры графовых нейронных сетей

2.1. Графовые сверточные сети

Графовые сверточные сети — это одна из ключевых архитектур графовых нейронных сетей, которая адаптирует идею сверток из традиционных сверточных нейронных сетей для работы с графами. GCN были предложены для того, чтобы эффективно обрабатывать данные, представленные в виде графов, и использовать информацию о взаимосвязях между вершинами для улучшения предсказательной способности модели.

В основе GCN лежит идея свертки на графе — операция, позволяющая объединять информацию от соседних вершин и обновлять представление каждой вершины на основе этих данных. В случае графов это аналогично тому, как в CNN каждая точка изображения (пиксель) обновляется на основе соседних пикселей. Однако в графах мы имеем нерегулярную структуру, где у каждой вершины разное количество соседей, и ребра могут быть ненаправленными или взвешенными.

Свертка по графу происходит через следующие шаги:

• агрегация, где каждый узел получает представления своих соседей и объединяет их в единое представление;

• нормализация, которая делит вклады соседей на степень вершины (количество её соседей) и помогает сбалансировать вклад каждого соседа, избежать проблемы избыточного усреднения;

• линейная трансформация.

После того как агрегированная информация собрана, она преобразуется с помощью линейной трансформации. Это похоже на линейный слой в традиционной нейронной сети, где к данным применяется обучаемая матрица весов для того, чтобы «обучить» модель выявлять важные признаки. Формально это можно записать как:

$$H^{(k+1)} = \sigma(\tilde{A}H^k W^k), \tag{1}$$

где H^k — матрица признаков на слое k, где каждая строка соответствует представлению (вектору признаков) каждой вершины,

W^k — обучаемая матрица весов для слоя k,

$\tilde{A}$ — нормализованная матрица смежности графа с добавлением единичной матрицы для учёта самой вершины (self-loop),

σ — нелинейная функция активации, например ReLU.

После применения линейной трансформации и нелинейной активации (например, ReLU) каждая вершина получает обновленное представление, которое учитывает информацию не только о самой вершине, но и о её соседях. Этот процесс может повторяться на нескольких слоях сети, чтобы захватить информацию от всё более дальних соседей. GCN использует нормализованную матрицу смежности графа для обеспечения устойчивой агрегации информации. Эта нормализация обеспечивает равномерное распределение вклада каждой вершины в обновлённое представление и предотвращает «раздувание» представлений у вершин с большим количеством связей.

Одной из ключевых характеристик GCN является количество слоёв — глубина сети. Обычно в практике используют от 2 до 3 слоёв, так как более глубокие GCN сталкиваются с пробле-

мой размывания признаков (over-smoothing). Это явление возникает, когда после большого числа слоёв представления всех вершин становятся очень похожими, что снижает способность модели различать разные вершины.

2.2. Graph Attention Networks

Graph Attention Networks — это одна из продвинутых архитектур графовых нейронных сетей, которая использует механизм внимания для более эффективной работы с графовыми данными. В отличие от Graph Convolutional Networks, где информация от всех соседей усредняется с одинаковыми весами, GAT позволяет сети обучать веса, которые отражают важность каждого соседа для текущей вершины. Это делает GAT более гибкими и мощными для задач, где значение связей между вершинами может варьироваться.

Вместо того чтобы одинаково учитывать всех соседей (как это делается в GCN), GAT динамически обучает веса внимания для каждого ребра графа. Модель определяет, какие вершины (соседи) наиболее важны для данной вершины и какова их относительная значимость. Этот процесс осуществляется следующим образом:

• каждая вершина v вычисляет коэффициенты внимания a_{vu} для своих соседей $u \in N(v)$;

• эти коэффициенты показывают, насколько важен каждый сосед u для вершины v при обновлении её состояния. Значения коэффициентов зависят от представлений самой вершины v и её соседа u.

Коэффициенты внимания a_{vu} вычисляются через механизм точечного внимания (dot-product attention), который принимает на вход векторные представления двух вершин — целевой вершины v и её соседа u. Формально, коэффициенты внимания можно описать следующим образом:

$$e_{vu} = \text{LeakyReLU}(a^T [Wh_v \,||\, Wh_u]) \tag{2}$$

где h_v, h_u — это входные представления (векторы признаков) вершин v и u,

W — обучаемая матрица весов, применяемая для линейной трансформации признаков,

a — вектор, который определяет важность взаимодействия между вершинами,

|| — операция конкатенации (объединения) векторов h_v и h_u,

LeakyReLU — нелинейная функция активации для моделирования зависимости между вершинами.

Значение e_{vu} представляет собой ненормализованный коэффициент важности, который затем нормализуется с помощью softmax-функции по всем соседям вершины v. Softmax делает сумму всех коэффициентов внимания для соседей вершины v равной 1. Таким образом, каждый сосед вносит вклад в обновление представления вершины в соответствии с его важностью.

После вычисления коэффициентов внимания a_{vu}, происходит процесс агрегации. Обновлённое представление вершины v формируется как взвешенная сумма представлений её соседей u, где веса — это коэффициенты внимания:

$$h_v^i = \sigma\left(\sum_{u \in N(v)} a_{vu} W h_u \right), \tag{3}$$

где h_v^i — обновлённое представление вершины v,

a_{vu} — коэффициент внимания для соседа u,

W — обучаемая матрица весов для линейной трансформации,

σ — нелинейная функция активации, например, ReLU.

Этот процесс позволяет каждому узлу обновлять свои признаки, уделяя больше внимания важным соседям и игнорируя менее значимых.

GAT представляют собой мощную архитектуру для работы с графами, которая использует механизм внимания для более гибкой и точной обработки информации. В отличие от GCN,

где все соседи вершины вносят равный вклад, GAT позволяет обучать значимость каждого соседа, что делает эту модель более подходящей для задач, где важность связей варьируется.

3. Возможные области применения

Графовые нейронные сети, включая такие архитектуры, как Graph Convolutional Networks и Graph Attention Networks, находят применение в широком спектре задач, где данные естественно представляются в виде графов или имеют сложную структуру взаимосвязей. Рассмотрим ключевые области, где GNN играют важную роль.

3.1. Социальные сети и анализ взаимодействий

Одной из очевидных и популярных областей применения GNN являются социальные сети. В социальных сетях пользователи и их взаимодействия могут быть естественно представлены в виде графа, где вершинами являются пользователи, а рёбрами — их связи (дружба, подписки, сообщения и т. д.). GNN позволяют эффективно моделировать влияние друзей, рекомендовать контент или новых друзей, а также анализировать, как распространяется информация по сети [5].

Применения:

• Рекомендательные системы: GNN используются для персонализированных рекомендаций контента (например, фильмов, музыки или новостей) на основе предпочтений пользователя и его социальной активности.

• Предсказание взаимодействий: Модели на основе GNN могут предсказывать вероятные новые взаимодействия между пользователями (например, предложить подружиться).

• Анализ влияния и распространение информации: GNN позволяют моделировать, как распространяются новости, мемы или вирусные кампании через социальные сети.

3.2. Биоинформатика

Графовые структуры широко используются для моделирования биологических и химических данных. Молекулы можно представить как графы, где вершины — это атомы, а рёбра — химические связи. Белки, гены и их взаимодействия также могут быть представлены как графовые структуры, что делает GNN особенно полезными в биоинформатике [3].

Применения:

• Предсказание свойств молекул: GNN применяются для предсказания физических, химических и биологических свойств молекул на основе их структур. Например, можно предсказать токсичность нового соединения или его активность как лекарственного средства.

• Анализ белковых взаимодействий: Белки взаимодействуют друг с другом в сложных сетях, и GNN могут использоваться для предсказания взаимодействий между белками, что важно для разработки новых лекарств.

• Генетические сети: GNN могут помочь анализировать сети взаимодействий между генами, что может быть полезно в исследованиях генетических заболеваний.

3.3. Распознавание изображений и обработка визуальных данных

Хотя обработка изображений традиционно ассоциируется с Convolutional Neural Networks, GNN могут использоваться для анализа структурированных визуальных данных, таких как 3D-сцены или объекты, представленные в виде графов.

Применения:

• Сегментация и анализ 3D-объектов: GNN могут обрабатывать 3D-объекты и сцены, где поверхности объектов представлены как графы, для задач распознавания и сегментации.

• Обработка изображений с нерегулярной структурой: GNN могут эффективно работать с изображениями, имеющими сложные или нерегулярные структуры, например, в медицинских снимках или спутниковых изображениях.

3.4. Финансовые технологии и анализ транзакций

В финансовой сфере GNN могут помочь анализировать транзакции между людьми, компаниями или организациями, выявляя подозрительные операции или предсказывая важные тенденции в рынке.

Применения:

• Выявление мошенничества: GNN используются для выявления подозрительных транзакций и мошеннических схем, анализируя граф транзакций между пользователями и компаниями.

• Оценка кредитных рисков: В банках и кредитных организациях GNN могут использоваться для оценки финансового риска и определения кредитного рейтинга на основе анализа взаимодействий клиентов и их финансового поведения.

• Инвестиционный анализ: GNN могут помочь предсказать движение цен на рынке акций или криптовалют, анализируя графы финансовых транзакций и взаимодействия участников рынка.

Заключение

В последние годы графовые нейронные сети стали важным инструментом в анализе сложных данных, представленных в виде графов. Способность эффективно обрабатывать и интерпретировать информацию о взаимосвязях между объектами позволяет решать разнообразные задачи в различных областях, таких как социальные сети, биоинформатика, транспорт, финансовые технологии и многие другие. Архитектуры, такие как GCN и GAT, продемонстрировали свои преимущества в моделировании взаимосвязей и динамическом обучении важности соседей.

Ключевые особенности GNN, такие как механизм агрегации и внимательность, позволяют выявлять сложные зависимости и структуру данных, улучшая качество предсказаний и рекомендаций. Благодаря гибкости и способности к обобщению, GNN находят применение в решении практических задач, от анализа социальных взаимодействий до предсказания химических свойств молекул.

С учетом быстрого роста объема данных и сложности современных систем применение графовых нейронных сетей будет лишь расширяться. Однако с увеличением популярности возникают и новые вызовы, такие как необходимость обработки больших графов, обучение на неструктурированных данных и улучшение устойчивости моделей к шуму и изменениям в данных. Будущие исследования должны сосредоточиться на этих аспектах, а также на разработке новых методов и подходов, которые помогут раскрыть весь потенциал GNN.

Таким образом, графовые нейронные сети представляют собой захватывающую и быстро развивающуюся область, открывающую новые горизонты для анализа и обработки данных, предлагая эффективные решения для сложных задач в различных отраслях.

Литература

1. *Stokes J. M.* A deep learning approach to antibiotic discovery // Cell. – 2020. – № 4. – С. 688–702. e13.

2. *Prates M. et al.* Learning to solve np-complete problems: A graph neural network for decision tsp // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. – 2019. – № 01. – С. 4731–4738.

3. *Pearce A. A.* Gentle Introduction to Graph Neural Networks. – 2021. – URL: https://distill.pub/2021/gnn-intro/ (дата обращения: 15.10.2024).

4. *Cui G., Wei Z., Su H. H.* Rethinking the Expressiveness of GNNs: A Computational Model Perspective // arXiv preprint arXiv:2410.01308. – 2024.

5. *Liu H.* An Unsupervised Learning Framework Combined with Heuristics for the Maximum Minimal Cut Problem //Proceedings of the 30th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. – 2024. – С. 1921–1932.

6. *Liu Y.* Combinatorial Optimization with Automated Graph Neural Networks //arXiv preprint arXiv:2406.02872. – 2024.

7. *Gavris G. B., Sun W.* Topology optimization with graph neural network enabled regularized thresholding //Extreme Mechanics Letters. – 2024. – С. 102215.

8. *Seo M., Min S.* Graph neural networks and implicit neural representation for near-optimal topology prediction over irregular design domains //Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2023. – С. 106284.

УДК 004.855.5

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ЦЕНООБРАЗУЮЩИХ ФАКТОРОВ СТОИМОСТИ АВТОМОБИЛЯ

С. В. Решетов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе произведен анализ машинного обучения для выявления факторов, определяющих стоимость автомобилей. Рассмотрены и использованы такие модели как дерево решений, случайный лес, градиентный бустинг.
Ключевые слова: машинное обучение, дерево решений, случайный лес, градиентный бустинг, автомобили, прогнозирование цен.

Введение

В последние годы рынок автомобилей претерпел значительные трансформации, обусловленные стремительным технологическим прогрессом, изменением предпочтений потребителей и глобальными экономическими тенденциями. В условиях жесткой конкуренции производители стремятся совершенствовать свои предложения, а покупатели ищут оптимальное соотношение цены и качества. В этом контексте становится критически важным провести детальный анализ факторов, влияющих на стоимость автомобилей, чтобы не только понять текущую динамику цен, но и предсказать их будущие изменения.

Машинное обучение, как один из наиболее перспективных методов анализа данных, предоставляет уникальные возможности для выявления скрытых паттернов и взаимосвязей между различными характеристиками автомобилей и их ценами. В рамках исследования будут рассмотрены различные алгоритмы машинного обучения, проведен анализ данных и оценка эффективности моделей. Результаты данного исследования могут быть полезны как для производителей при формировании ценовой стратегии, так и для потребителей при выборе автомобиля.

1. Параметры

На цену автомобилей влияют различные факторы. В данной работе стоимость автомобилей будет оцениваться с помощью следующих параметров:

- компания, производящая автомобиль, марка;
- модель;
- год выпуска;
- пробег;
- состояние.

2. Обработка данных

Перед обучением модели исходные данные требуют предварительной обработки. Первые несколько строк загруженного набора данных представлены на рис. 1.

В наборе данных могут оказаться нулевые значения, поэтому нужно проверить, есть ли пропуски в параметрах, с помощью функции *info*(). На рис. 2 представлена информация о ненулевых параметрах и типах данных. Дополнительно проставлять значения не нужно, нулевых параметров нет.

	Unnamed: 0	Make	Model	Year	Mileage	Condition	Price
0	0	Ford	Silverado	2022	18107	Excellent	19094.75
1	1	Toyota	Silverado	2014	13578	Excellent	27321.10
2	2	Chevrolet	Civic	2016	46054	Good	23697.30
3	3	Ford	Civic	2022	34981	Excellent	18251.05
4	4	Chevrolet	Civic	2019	63565	Excellent	19821.85

Рис. 1. Первые строки загруженного набора данных

```
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 1000 entries, 0 to 999
Data columns (total 7 columns):
 #   Column      Non-Null Count  Dtype
---  ------      --------------  -----
 0   Unnamed: 0  1000 non-null   int64
 1   Make        1000 non-null   object
 2   Model       1000 non-null   object
 3   Year        1000 non-null   int64
 4   Mileage     1000 non-null   int64
 5   Condition   1000 non-null   object
 6   Price       1000 non-null   float64
dtypes: float64(1), int64(3), object(3)
memory usage: 54.8+ KB
None
```

Рис. 2. Информация о параметрах

На рис. 2 видно, что три параметра не имеют численного представления. Для кодирования данных, не имеющих численного представления, использован метод dummy-кодирования, который заключается в кодировании категориального признака с n возможными значениями с помощью n бинарных признаков. Каждый бинарный признак соответствует одному из возможных значений категориального признака и является индикатором того, что на данном объекте он принимает данное значение. После кодирования всех признаков удаляются лишние исходные столбцы и получается набор данных, представленный на рис. 3.

	Year	Mileage	Price	Make_Chevrolet	Make_Ford	Make_Honda	Make_Nissan	Make_Toyota	Model_Altima	Model_Camry	Model_Civic	Model_F-150	Model_Silverado	Condition_Excellent	Condition_Fair	Condition_Good
0	2022	18107	19094.75	False	True	False	False	False	False	False	False	False	True	True	False	False
1	2014	13578	27321.10	False	False	False	False	True	False	False	False	False	True	True	False	False
2	2016	46054	23697.30	True	False	False	False	False	False	False	True	False	False	False	False	True
3	2022	34981	18251.05	False	True	False	False	False	False	False	True	False	False	True	False	False
4	2019	63565	19821.85	True	False	False	False	False	False	False	True	False	False	True	False	False
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
995	2010	149032	24548.50	False	False	False	True	False	False	True	False	False	False	True	False	False
996	2014	20608	26969.70	True	False	False	False	False	False	False	False	True	False	True	False	False
997	2016	109851	20507.55	False	True	False	False	False	True	False	False	False	False	False	False	True
998	2010	11704	31414.90	False	False	False	False	True	False	False	False	False	True	False	False	True
999	2017	126396	18580.60	False	False	False	True	False	False	False	False	False	True	True	False	False

1000 rows × 16 columns

Рис. 3. Подготовленные для обучения данные

Используемые модели машинного обучения

Для анализа были выбраны следующие модели машинного обучения:
- модель дерева решений;
- модель случайного леса;
- модель градиентного бустинга.

3. Оценка качества регресии

Коэффициент детерминации R^2 — статистический показатель, отражающий объясняющую способность регрессии $f : X \to X$ и определяемый как доля дисперсии зависимой переменной, объяснённая регрессионной моделью с данным набором независимых переменных.

Он показывает, какую часть изменчивости наблюдаемой переменной можно объяснить с помощью построенной модели, то есть определяет долю (в процентах) изменений, обусловленных влиянием факторных признаков, в общей изменчивости результативного признака.

Дерево решений

Дерево решений — это метод, позволяющий предсказывать значения зависимой переменной в зависимости от соответствующих значений одной или нескольких независимых переменных. У данного метода точность R^2 составила 0.9988944007522117 при максимальной глубине дерева (max_depth) равной 8. На рис. 4 представлена диаграмма важности признаков для модели «Дерево решений», которая показывает, как параметры набора данных влияют на модель. Можно сделать вывод, что признаки «Год», «Пробег», влияют на модель, а значит остальные признаки можно удалить для более быстрого обучения модели.

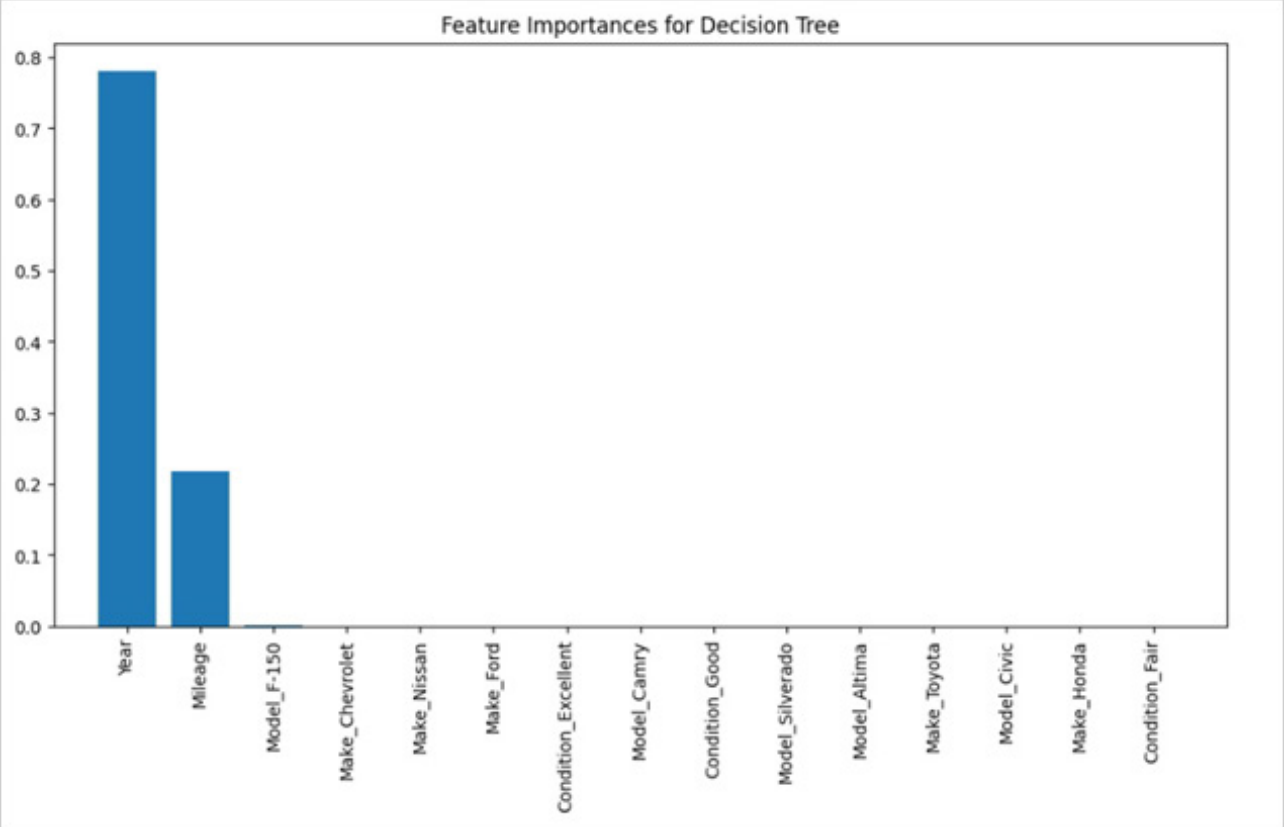


Рис. 4. Диаграмма важности признаков для модели «Дерево решений»

Случайный лес

Модель случайного леса — алгоритм машинного обучения, заключающийся в использовании ансамбля решающих деревьев. У данного метода точность R^2 составила 0.999337978715414 при оптимальном числе деревьев (n_estimators) равным 100 и максимальной глубине дерева (max_depth) равной 8.

На рис. 5 представлена диаграмма важности признаков для модели «Случайный лес», которая показывает, как параметры набора данных влияют на модель. Можно сделать вывод, что признаки «Год», «Пробег», влияют на модель, а значит остальные признаки можно удалить для более быстрого обучения модели.

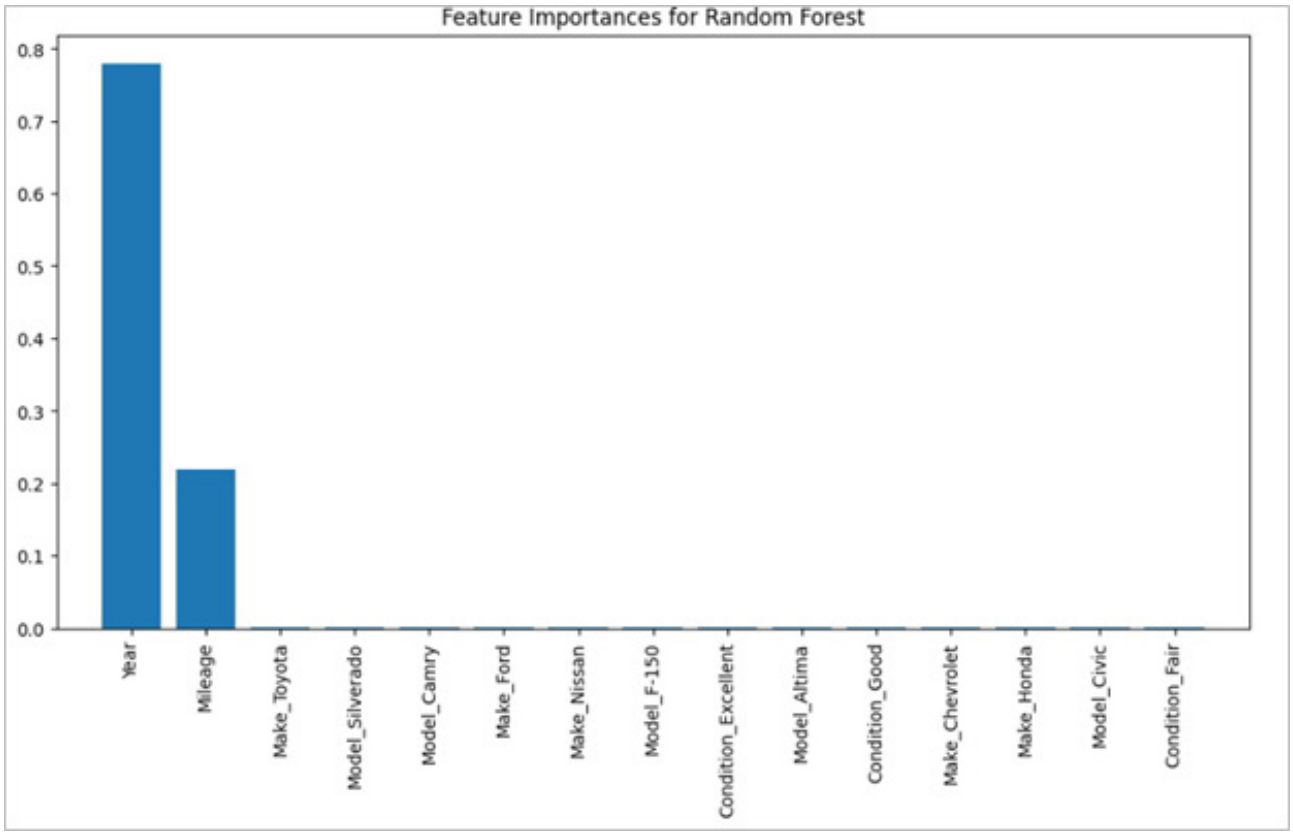


Рис. 5. Диаграмма важности признаков для модели «Случайный лес»

Градиентный бустинг

Градиентный бустинг — это техника машинного обучения для задач классификации и регрессии, которая строит модель предсказания в форме ансамбля слабых предсказывающих моделей, обычно деревьев решений. У данного метода точность R^2 составила 0.85 при оптимальном числе деревьев (n_estimators) равным 100 и максимальной глубине дерева (max_depth) равной 8.

На рис. 6 представлена диаграмма важности признаков для модели «Градиентный бустинг», которая показывает, как параметры набора данных влияют на модель. Можно сделать вывод, что признаки «Год», «Пробег», влияют на модель, а значит остальные признаки можно удалить для более быстрого обучения модели.

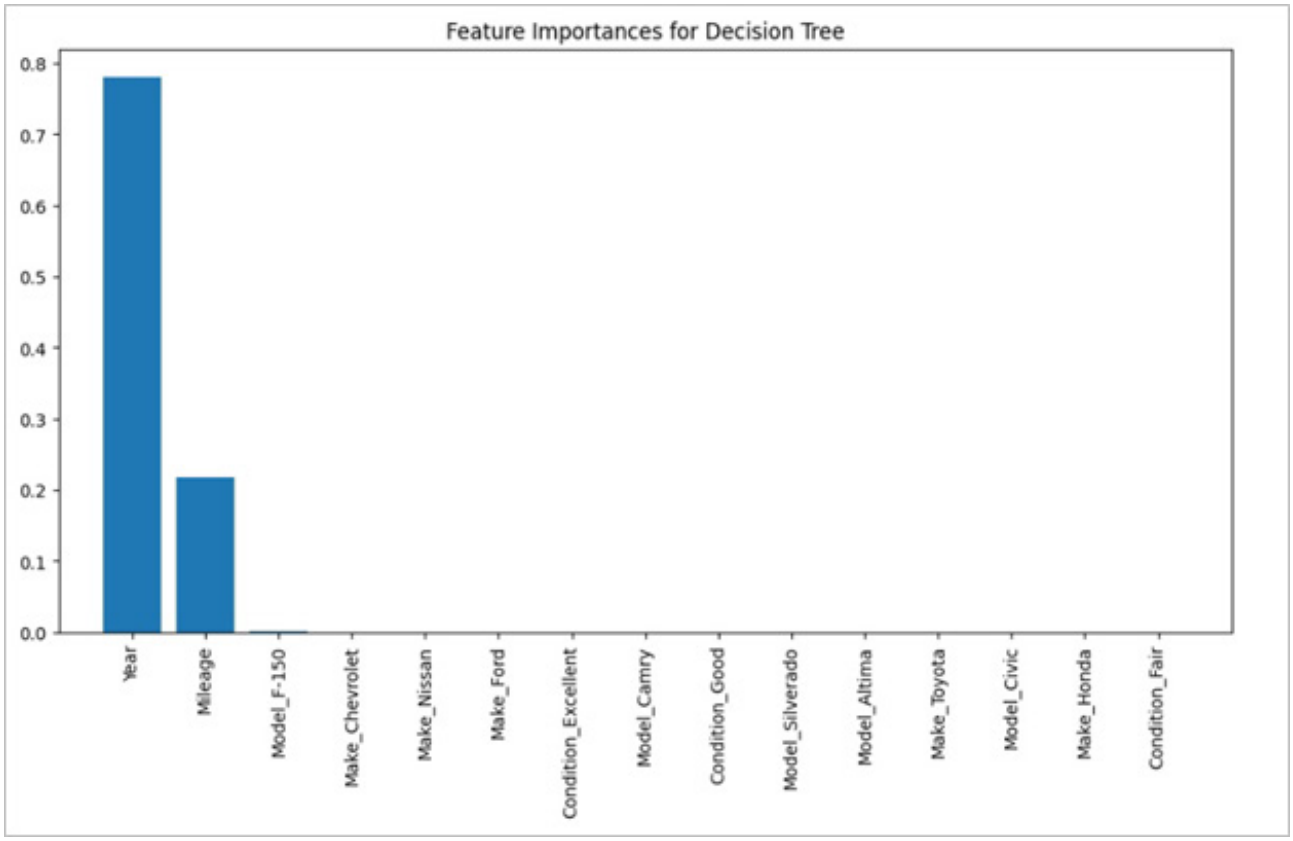


Рис. 6. Диаграмма важности признаков для модели «Градиентный бустинг»

Диаграмма рассеивания

Для оценки точности каждой из рассмотренных моделей помимо метрики R^2 была построена диаграмма рассеивания, которая показывает соотношение предсказанных и реальных значений. На рис. 7 видно, что больше совпадений в диапазоне цен от 22500 до 25000. Значительно хуже предсказываются цены на автомобили до 17500 и от 30000.

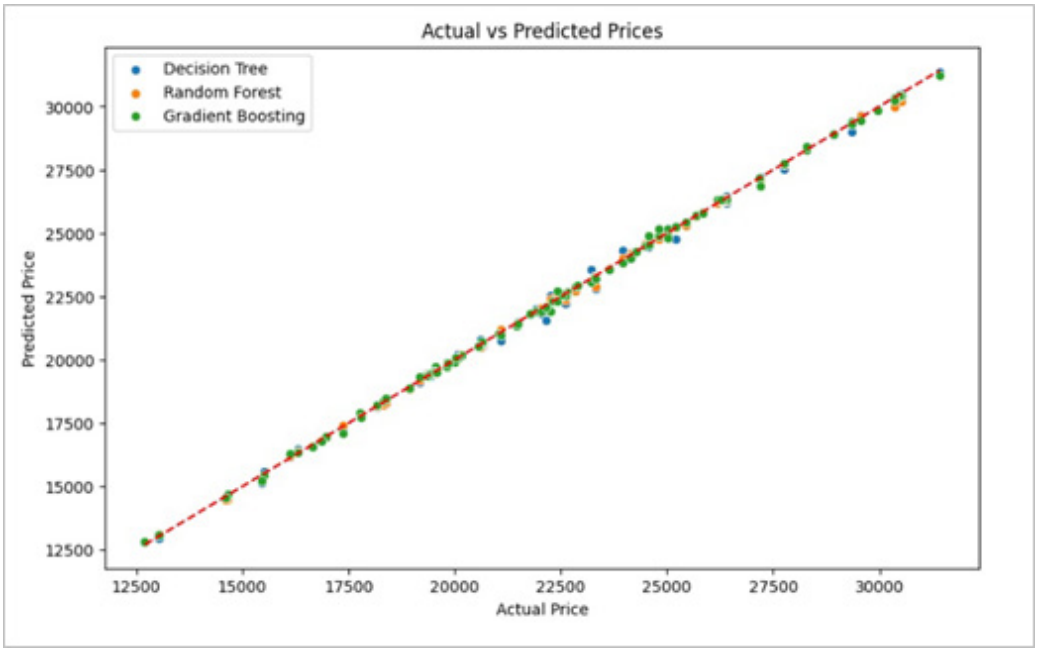


Рис. 7. Диаграмма рассеивания

Заключение

В результате сравнения наилучший коэффициент детерминации показала модель случайного леса. Среди рассмотренных моделей она лучше всего подходит для прогнозирования цен на автомобили. Главным фактором, влияющим на стоимость автомобиля, у трёх моделей является год и пробег.

Литература

1. Теория и практика машинного обучения : учеб. пособие / В. В. Воронина, А. В. Михеев, Н. Г. Ярушкина, К. В. Святов. – Ульяновск : УлГТУ, 2017. – 290 с.

2. Что влияет на стоимость автомобиля. – URL:https://avtocod.ru/chto-vliyaet-na-stoimost-avtomobilya (дата обращения 15.09.2024).

3. Метод случайного леса. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_случайного_леса (дата обращения 22.09.2024).

4. Градиентный бустинг. – URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/Бустинг (дата обращения 15.09.2024).

5. Модели классификации: дерево решений. – URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/Дерево_решений (дата обращения 17.09.2024).

УДК 004.8

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

А. А. Рябчиков

Воронежский государственный университет

Аннотация. Современные методы искусственного интеллекта (ИИ) находят всё более широкое применение в области программирования, начиная с автоматизации рутинных задач и заканчивая генерацией программного кода для сложных систем. В данной статье анализируются основные методы и подходы, используемые в автоматизации программирования, включая машинное обучение, глубокие нейронные сети и языковые модели. Исследуются текущие достижения в этой области, а также рассматриваются возможности и ограничения применения ИИ в создании кода и разработке программных систем.
Ключевые слова: автоматизация программирования, машинное обучение, глубокие нейронные сети, языковые модели, искусственный интеллект, генерация кода, оптимизация кода, обработка естественного языка, Python, программирование для ИИ, синтез программ.

Введение

В последние годы искусственный интеллект стремительно внедряется в разнообразные области науки и техники. В частности, он стал играть ключевую роль в разработке и оптимизации программного обеспечения, предлагая возможности автоматизации на уровнях, которые ранее казались невозможными. Методы ИИ позволяют создавать программы, анализировать код, оптимизировать алгоритмы и находить ошибки с минимальным участием человека. Применение ИИ в программировании не только сокращает время разработки, но и повышает качество и производительность программных продуктов.

Существует несколько подходов к автоматизации программирования с использованием ИИ, включая глубокие нейронные сети, методы машинного обучения и обработку естественного языка. Наиболее передовые языковые модели, такие как GPT и Codex, могут генерировать код на популярных языках программирования, таких как Python, JavaScript и C++, значительно сокращая объем рутинной работы программистов. В данной статье рассматриваются ключевые аспекты применения ИИ для создания и оптимизации программного обеспечения, его достижения и перспективы.

1. История автоматизации программирования с использованием ИИ

История автоматизации программирования берет свое начало в 1950-х годах, когда были разработаны первые алгоритмы, ставшие основой для машинного обучения. На этом этапе компьютерные программы выполняли лишь самые базовые операции, но уже тогда идеи автоматизации и использования ИИ привлекали большое внимание. С появлением первых языков программирования, таких как Fortran и Lisp, стало возможным писать более сложные программы, а разработка автоматизированных инструментов для программирования стала реальной перспективой.

В 1980-х годах появился важный шаг к применению ИИ в программировании: экспертные системы, которые могли решать задачи в узких областях. Эти системы были запрограммированы на выполнение определённых действий, используя заранее известные правила и базы знаний. Это сделало возможным автоматизацию некоторых задач, и экспертные системы

стали использоваться в таких областях, как медицина и инженерия. Однако их возможности были ограничены: они могли выполнять только те действия, которые были заранее запрограммированы, что ограничивало их гибкость и адаптивность.

В 2010-х годах произошел прорыв с развитием глубинного обучения и нейронных сетей. Благодаря им системы смогли анализировать и обрабатывать естественный язык, что стало важной вехой на пути к созданию моделей, способных генерировать и анализировать код. Программы, основанные на нейросетях, научились предсказывать и автоматизировать действия разработчиков, помогая им в написании и тестировании кода. Это стало возможным благодаря новым методам машинного обучения, которые позволили моделям обрабатывать большие объемы данных и лучше понимать структуру программных текстов.

С 2020-х годов крупные языковые модели, такие как GPT, начали активно использоваться для автоматизации программирования. Благодаря обучению на огромных массивах данных, эти модели могут генерировать код на различных языках и помогать разработчикам решать задачи без необходимости досконально изучать синтаксис и правила. Эти технологии делают ИИ мощным инструментом для программистов, ускоряя процессы разработки, а также обеспечивая возможности автоматического тестирования и улучшения кода. В итоге ИИ стал важным помощником, помогающим разработчикам сосредоточиться на более сложных задачах и повышающим качество программного обеспечения.

2. Архитектура и методы ИИ в автоматизации программирования

Современные технологии искусственного интеллекта, такие как глубокие нейронные сети и большие языковые модели, существенно продвинули автоматизацию программирования. Глубокие нейронные сети, обученные на огромных наборах данных, включающих как текст, так и программный код, используют многослойную архитектуру, благодаря которой они могут не только анализировать, но и генерировать код, учитывая его синтаксис и логику. Архитектура Transformer, лежащая в основе многих современных языковых моделей, позволяет этим системам эффективно анализировать структуру кода, предсказывать его дальнейшие части и автоматически исправлять ошибки. Это помогает разработчикам автоматизировать процессы дополнения, исправления и даже оптимизации программного кода.

Для создания кода с использованием ИИ применяются такие крупные модели, как GPT-3 и Codex, которые обучены на миллионах строк программного кода. Благодаря этому они способны «понимать» синтаксические и логические структуры множества языков программирования, включая как распространенные языки вроде Python или Java, так и специализированные. Такие модели позволяют автоматизировать множество типичных задач, которые раньше требовали большого объема ручной работы. Это значительно ускоряет процесс разработки, позволяет оптимизировать код, а также сократить время на выполнение рутинных операций.

3. Программные инструменты и платформы для автоматизации программирования

Существует несколько инструментов и платформ, созданных для поддержки ИИ в автоматизации программирования. Например, GitHub Copilot и Tabnine помогают программистам с автодополнением и генерацией кода, значительно сокращая время на написание типичных функций и блоков кода. Эти системы основаны на языковых моделях, которые могут предлагать контекстно-осмысленный код, соответствующий текущей задаче программиста.

Платформа TensorFlow и библиотека PyTorch также позволяют использовать ИИ для создания и тестирования моделей, которые автоматизируют части процесса разработки. Используя эти инструменты, разработчики могут обучать свои модели на примерах кода и автоматически генерировать решение для новых задач.

4. Примеры практического применения ИИ в программировании

Автоматизация программирования с использованием искусственного интеллекта охватывает всё больше сфер и находит применение в самых разных отраслях. Одним из ярких примеров использования ИИ является автоматическое тестирование, которое значительно упростилось благодаря языковым моделям, способным генерировать тестовые сценарии для проверки кода. Такие модели могут автоматически анализировать написанный код, выявлять потенциальные ошибки и создавать тесты, которые проверяют функциональность программного обеспечения на различных уровнях. Например, для веб- приложений языковые модели могут генерировать юнит-тесты для проверки отдельных функций или компонентов, а также интеграционные и системные тесты для проверки взаимодействия между ними. Это позволяет разработчикам более оперативно находить и исправлять ошибки, тем самым улучшая качество конечного продукта и сокращая временные затраты на ручное тестирование. В некоторых случаях автоматическое тестирование на базе ИИ способно предложить оптимальные тест-кейсы, которые разработчики могли бы упустить.

Другой значимой областью применения ИИ в программировании стала оптимизация кода. Сегодня ИИ помогает не только обнаруживать узкие места в производительности программного обеспечения, но и автоматически анализировать и оптимизировать существующий код для его ускорения. Например, языковые модели могут анализировать код и предлагать улучшенные версии, устраняя избыточные или избыточные вычисления, что позволяет оптимизировать выполнение программы. В крупных системах, где сложные алгоритмы требуют множества вычислительных ресурсов, такие улучшения могут быть критически важными и значительно сократить время выполнения кода и расход ресурсов. Также ИИ может помогать с оптимизацией памяти, предлагать более эффективные структуры данных и алгоритмы, что особенно актуально в разработке для мобильных устройств и встроенных систем, где вычислительные ресурсы часто ограничены.

Еще одним важным направлением использования ИИ стало создание генеративных инструментов для автоматического написания кода. Генерация кода для веб-приложений и мобильных приложений является популярной задачей, которую ИИ помогает решать, автоматически генерируя основные структуры и элементы приложения. Например, языковые модели могут сгенерировать шаблонный код для интерфейса веб-приложения на основе описания, которое предоставил разработчик. Системы на базе ИИ могут автоматически создавать компоненты HTML, CSS и JavaScript, которые являются основными блоками для построения веб-страниц. Это делает процесс разработки веб-приложений более быстрым и удобным, так как разработчики могут сосредоточиться на решении более сложных задач, доверяя ИИ генерацию базовой структуры.

Что касается мобильных приложений, ИИ также находит здесь широкое применение. С помощью языковых моделей разработчики могут генерировать код для прототипов мобильных приложений, выполняющих базовые функции. Такие прототипы, созданные с использованием ИИ, можно адаптировать для различных платформ, таких как Android и iOS, благодаря совместимости языковых моделей с популярными языками программирования и фреймворками, такими как Swift и Kotlin. Автоматическая генерация кода для интерфейса пользователя, навигации и базовой логики приложения позволяет быстро создавать работающие прототипы, которые можно тестировать и дорабатывать для использования в реальных проектах. Такой подход помогает значительно ускорить процесс создания новых продуктов, так как разработчики могут быстрее получать обратную связь о работоспособности приложения и оценивать его функциональность в действии.

5. Преимущества и ограничения использования ИИ в автоматизации программирования

Преимущества:

Сокращение времени на разработку: использование ИИ позволяет быстро генерировать код, особенно для стандартных задач.

Повышение качества кода: ИИ может анализировать код на наличие ошибок и предлагать оптимальные решения.

Автоматизация тестирования: ИИ способен создавать тесты, ускоряя процесс выявления багов.

Ограничения:

Ограниченная универсальность: несмотря на возможности ИИ, не все задачи можно эффективно автоматизировать.

Необходимость корректировки и проверки: код, сгенерированный ИИ, требует проверки человеком, особенно для сложных задач.

Трудности с обучением: создание и обучение моделей требует больших ресурсов и знаний в области ИИ.

Заключение

Использование методов искусственного интеллекта для автоматизации программирования открывает новые возможности в разработке программного обеспечения. ИИ может сократить время на разработку, повысить качество кода и автоматизировать многие рутинные процессы. Несмотря на некоторые ограничения, такие как необходимость верификации и высокие требования к ресурсам, будущее автоматизированного программирования с использованием ИИ выглядит многообещающим и перспективным.

Литература

1. *Smith A*. GPU Computing in Modern Physics // Journal of Computational Physics. – 2021.

2. NVIDIA. NVIDIA Tesla V100 Architecture // NVIDIA Whitepapers. – 2017.

3. Owens J.D. GPU Computing in Modern Research // High-Performance Computing Journal. – 2008.

4. NVIDIA. Технические характеристики архитектуры GPU Tesla V100 // NVIDIA Whitepapers. – 2017.

УДК 519.8

МОДЕЛИ ВОЗМОЖНОСТНО-ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ И ВОЗМОЖНОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЛАБЕЙШЕЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ НОРМЫ

И. С. Солдатенко

Тверской государственный университет

Аннотация. В работе исследованы модели оптимизации в контексте гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа. Для агрегирования возможностной информации используется слабейшая треугольная норма. Рассмотрены два принципа принятия решений, отличающиеся порядком снятия неопределенности: наложение ограничений по возможности/необходимости — вероятности и по вероятности — возможности/необходимости. В первом случае для нормально распределенных случайных факторов модели построен эквивалентный аналог системы. Во втором случае получена эквивалентная модель стохастической оптимизации. Показано, как с помощью индикаторных функций можно построить эквивалентный стохастический аналог, для решения которого можно использовать методы стохастического квазиградиента.
Ключевые слова: возможностно-вероятностное программирование; эквивалентный детерминированный аналог; эквивалентный стохастический аналог; неопределенность гибридного типа; возможность; необходимость; агрегирование возможностной информации; слабейшая треугольная норма.

Введение

В настоящей статье продолжены исследования задач возможностно-вероятностного программирования, начатые в [1–4]. В работе [1] был построен детерминированный эквивалент задачи при ограничениях по возможности/необходимости — вероятности, а в работе [2] — эквивалентный стохастический аналог для случая, когда неопределенность снимается в другом порядке – сначала вероятностная, потом возможностная. В [3, 4] был изучен вопрос коммутативности порядка снятия неопределенности и показано, что данное свойство не выполняется. Во всех перечисленных выше работах для агрегирования возможностной информации использовалась сильнейшая треугольная норма. В настоящей статье все указанные модели изучаются для случая слабейшей треугольной нормы. Для этого строится исчисление возможностей на основе результатов Р. Фуллера и Х. Нгуена [10, 11], позволяющих вычислять α -уровневое множество функций от нечётких параметров с помощью функций от α-уровней самих параметров. В настоящей работе указанные результаты обобщаются на случай нечетких чисел и отрезков, имеющих, в общем случае, неограниченные носители.

1. Основные определения из теории возможностей

Введем ряд требуемых нам понятий и определений из теории возможностей [5–7]. Пусть $(\Gamma, P(\Gamma), \tau)$ и (Ω, B, P) есть, соответственно, возможностное и вероятностное пространства, в которых Ω — пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, Γ — модельное пространство с элементами $\gamma \in \Gamma$, B — σ-алгебра событий, $P(\Gamma)$ — множество всех подмножеств $\Gamma, \tau \in \{\pi, \upsilon\}$, π и υ — меры возможности и необходимости, а P — мера вероятности; $\mathbb{R}$ — числовая прямая.

Определение 1. Возможностной (нечеткой) величиной $X(\gamma)$ называется вещественная функция $X : \Gamma \to \mathbb{R}^1$, характеризующаяся функцией распределения возможностей $\mu_X(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : X(\gamma) = t\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Для нечеткой величины $X(\gamma)$ и любого $\alpha \in (0,1]$ α-уровневым множеством называется четкое подмножество $X_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_X(x) \geq \alpha\}$.

Определение 3. Модальным значением нечеткой величины $X(\gamma)$ называется четкое подмножество $\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_X(x) = 1\}$.

Определение 4. Нечеткая величина называется (строго) унимодальной, если ее модальное значение есть интервал (точка).

Определение 5. Функция распределения возможностей μ_X нечеткой величины $X(\gamma)$ называется квазивогнутой, если $\mu_X(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_X(x_1), \mu_X(x_2)\}$, $\lambda \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Определение 6. Функция распределения возможностей μ_X называется полунепрерывной сверху, если $\forall \alpha \in (0,1]$ множество X_α является замкнутым.

Определение 7. Нечеткая величина $X(\gamma)$ называется нечетким числом (отрезком), если выполняются следующие условия: μ_X полунепрерывна сверху и квазивогнута, $X(\gamma)$ является строго (нестрого) унимодальной, $\forall \alpha \in (0,1]$ множество X_α ограничено.

Определение 8. Слабейшей треугольной нормой T_W называется отображение $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ следующего вида $T_W = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \textit{если } \max\{x, y\} = 1, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Неопределенность гибридного возможностно-вероятностного типа будем моделировать с помощью нечетких случайных величин.

Определение 9. Нечеткая случайная величина $Y(\omega, \gamma)$ есть вещественная функция $Y : \Omega \times \Gamma \to \mathbb{R}^1$ B-измеримая для каждого γ, а $\mu_Y(\omega, t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Y(\omega, \gamma) = t\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ называется ее функцией распределения.

Определение 10. Пусть $Y(\omega, \gamma)$ — нечеткая случайная величина. Ее ожидаемым значением $\mathbf{E}[Y]$ называется нечеткая величина, имеющая функцию распределения возможностей $\mu_{\mathbf{E}[Y]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathbf{E}[Y(\omega, \gamma)] = t\}$, $\forall t \in \mathbb{R}^1$, где $\mathbf{E}$ — оператор взятия математического ожидания $\mathbf{E}[Y(\omega, \gamma)] = \int_\Omega Y(\omega, \gamma)\mathbf{P}(d\omega)$.

На практике удобно представлять нечеткую случайную величину в сдвиг-масштабном представлении [5].

Определение 11. Нечеткая случайная величина $Y(\omega, \gamma)$ имеет сдвиг-масштабное представление, если $Y(\omega, \gamma) = a(\omega) + \sigma(\omega)X(\gamma)$, где $a(\omega)$, $\sigma(\omega)$ — случайные факторы распределения, задающие, соответственно, сдвиг и масштаб, а $X(\gamma)$ — нечеткая компонента распределения.

2. Элементы исчисления возможностей при слабейшей треугольной норме

Под исчислением возможностей понимается набор правил для идентификации возможностных распределений простейших операций и функций от нечетких и нечетких случайных величин. В данном разделе мы идентифицируем основные операции, которые потребуются в дальнейшем, для случая слабейшей t-нормы T_W.

Часто получается найти границы α-уровневых множеств результата в явном виде, но иногда удобно их вычислять с помощью границ α-уровневых множеств операндов. Приведем основные результаты, которые позволяют это сделать.

В [10, 11] сформулированы и доказаны условия, позволяющие вычислять α-уровневое множество функции от нечётких параметров с помощью функции от α-уровней самих параметров. В [5] данные результаты погружены в контекст теории возможностей.

Утверждение 1 (см. [5,10,11]). *Пусть $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$ — возможностные величины с функциями распределения возможностей μ_A и μ_B, соответственно; T — произвольная треугольная норма, а $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция от двух аргументов. Тогда необходимым и достаточным условием выполнения равенства*

$$\left[f(A,B)\right]_\alpha = \bigcup_{\xi,\eta:T(\xi,\eta)\geq\alpha} f\left(A_\xi, B_\xi\right),\ \alpha\in(0,1] \tag{1}$$

является то, что $\forall z\in\mathbb{R}\ \sup\limits_{(x,y):f(x,y)=z} T\left(\mu_A(x),\mu_B(y)\right)$ *достигается.*

Утверждение 2 (см. [5,10,11]). *Если функция* $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *— непрерывная, треугольная норма* T *— полунепрерывная сверху, то равенство (1) выполняется для любых возможностных величин* $A(\gamma)$ *и* $B(\gamma)$*, обладающих полунепрерывными сверху функциями распределения возможностей и компактными носителями.*

Как видим, в этих результатах используется условие компактности носителей возможностных операндов $A(\gamma)$ и $B(\gamma)$, что делает невозможным, в частности, их применение для нормальных нечетких чисел. Обобщим их на случай произвольных нечетких чисел или отрезков, заданных в соответствии с Определением 7, убрав условие компактности. Может быть доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция* $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *— непрерывная, треугольная норма* T *— полунепрерывная сверху, то равенство (1) выполняется для любых нечетких чисел (отрезков)* $A(\gamma)$ *и* $B(\gamma)$*, заданных в соответствии с Определением 7.*

Используем этот результат для идентификации границ α -уровневых множеств основных арифметических операций.

Следствие 1. *Если* $A(\gamma)$ *и* $B(\gamma)$ *— нечеткие числа (отрезки), а для агрегирования возможностной информации используется слабейшая треугольная норма, то* α*-уровневые множества основных арифметических операций вычисляются следующим образом:*

$$\left[X+Y\right]_\alpha = \left[\min\left\{X_1^- + Y_\alpha^-, X_\alpha^- + Y_1^-\right\}, \max\left\{X_1^+ + Y_\alpha^+, X_\alpha^+ + Y_1^+\right\}\right],$$

$$\left[X-Y\right]_\alpha = \left[\min\left\{X_1^- - Y_\alpha^+, X_\alpha^- - Y_1^+\right\}, \max\left\{X_1^+ - Y_\alpha^-, X_\alpha^+ - Y_1^-\right\}\right],$$

$$\left[X\times Y\right]_\alpha = \left[\min\left\{X_1^\pm \cdot Y_\alpha^\pm, X_\alpha^\pm \cdot Y_1^\pm\right\}, \max\left\{X_1^\pm \cdot Y_\alpha^\pm, X_\alpha^\pm \cdot Y_1^\pm\right\}\right],$$

где $X_*^\pm \cdot Y_*^\pm = \left\{X_*^- \cdot Y_*^-, X_*^- \cdot Y_*^+, X_*^+ \cdot Y_*^-, X_*^+ \cdot Y_*^+\right\}$.

Легко индукцией доказывается следующий результат.

Следствие 2. Пусть $X_1(\gamma)$, $X_2(\gamma)$, …, $X_n(\gamma)$ — нечеткие числа (отрезки), а для агрегирования возможностной информации используется слабейшая t-норма. Тогда

$$\left[\sum_{i=1}^n X_i(\gamma)\right]_\alpha^- = \min_{i=1,\ldots,n}\left\{\left[X_i(\gamma)\right]_\alpha^- + \sum_{\substack{j=1,\ldots,n\\ j\neq i}}\left[X_j(\gamma)\right]_1^-\right\}\ \left[\sum_{i=1}^n X_i(\gamma)\right]_\alpha^+ = \max_{i=1,\ldots,n}\left\{\left[X_i(\gamma)\right]_\alpha^+ + \sum_{\substack{j=1,\ldots,n\\ j\neq i}}\left[X_j(\gamma)\right]_1^+\right\}.$$

Наконец, мы можем получить еще один важный с практической точки зрения результат.

Следствие 3. *Если в условиях Теоремы 1 функция f будет монотонно неубывающей по нечетким аргументам, то для слабейшей t-нормы левую и правую границы* α*-уровневого множества* f_α *можно найти по формулам:*

$$f_\alpha^- = \min\left\{f\left(X_1^-, Y_\alpha^-\right), f\left(X_\alpha^-, Y_1^-\right)\right\},\ f_\alpha^+ = \max\left\{f\left(X_1^+, Y_\alpha^+\right), f\left(X_\alpha^+, Y_1^+\right)\right\}.$$

3. Модели возможностно-вероятностного программирования при ограничениях по возможности/необходимости — вероятности и вероятности-возможности/необходимости

В настоящей работе мы продолжим изучение следующих двух моделей возможностно-вероятностного линейного программирования. Первая — модель уровневой оптимизации при ограничениях по возможности/необходимости — вероятности:

$$k\to\min,$$

$$\tau\left\{\mathbf{P}\left\{f_0(x,\omega,\gamma)\le k\right\}\ge p_0\right\}\ge\alpha_0, \tag{2}$$

$$\begin{cases}\tau\left\{\mathbf{P}\left\{f_i(x,\omega,\gamma)\le 0\right\}\ge p_i\right\}\ge\alpha_i, i=\overline{1,m},\\ \mathbf{x}\in X.\end{cases} \tag{3}$$

а вторая — модель уровневой оптимизации при ограничениях по вероятности — возможности/необходимости:

$$k\to\min,$$

$$\mathbf{P}\left\{\tau\left\{f_0(x,\omega,\gamma)\le k\right\}\ge\alpha_0\right\}\ge p_0, \tag{4}$$

$$\begin{cases}\mathbf{P}\left\{\tau\left\{f_i(x,\omega,\gamma)\le 0\right\}\ge\alpha_i\right\}\ge p_i, i=\overline{1,m},\\ \mathbf{x}\in X.\end{cases} \tag{5}$$

В этих моделях $f_i(x,\omega,\gamma),\ i=\overline{0,m}$ — это нечеткие случайные функции, являющиеся отображениями $f_i(\cdot,\cdot,\cdot): X\times\Omega\times\Gamma\to\mathbb{R}^1,\ X\subset\mathbb{R}^n,\ \tau\in\{\pi,\nu\}$ — одна из нечетких мер (возможности или необходимости), $p_i,\alpha_i\in(0,1],\ i=\overline{0,m}$ — заданные уровни вероятности и возможности, k — дополнительная переменная.

Будем рассматривать следующие представления функций $f_i(x,\omega,\gamma)$:

$$f_i(x,\omega,\gamma)=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(\omega,\gamma)x_j-B_i(\omega,\gamma),\ i=\overline{0,m}, \tag{6}$$

где $B_0(\omega,\gamma)\equiv 0$. Нечеткие случайные коэффициенты $A_{ij}(\omega,\gamma)$ и $B_i(\omega,\gamma)$ имеют сдвиг-масштабное представление со следующими коэффициентами:

$$A_{ij}(\omega,\gamma)=a_{ij}(\omega)+\sigma_{ij}(\omega)Y_{ij}(\gamma),\qquad B_i(\omega,\gamma)=b_i(\omega)+\sigma_i(\omega)Y_i(\gamma).$$

В работах [3, 4] модели (2)–(3) и (4)–(5) рассматривались в случае, когда для агрегирования возможностной информации используется сильнейшая t-норма T_M. В следующем разделе мы рассмотрим эквивалентные четкие и стохастические аналоги указанных моделей для слабейшей треугольной нормы T_W.

4. Эквивалентные четкий и стохастический аналоги задач (2)–(3) и (4)–(5) при слабейшей треугольной норме

Начнем с эквивалентного четкого аналога задачи (2)–(3). Пусть в сдвиг-масштабном представлении нечетких случайных коэффициентов $A_{ij}(\omega,\gamma)$ и $B_i(\omega,\gamma)$ случайные параметры принадлежат классу нормальных вероятностных распределений: $a_{ij}(\omega)\in\mathrm{N}_p(a_{ij}^0,d_{ij}^a)$, $\sigma_{ij}(\omega)\in\mathrm{N}_p(\sigma_{ij}^0,d_{ij}^\sigma)$, $b_i(\omega)\in\mathrm{N}_p(b_i^0,d_i^b)$, $\sigma_i(\omega)\in\mathrm{N}_p(\sigma_i^0,d_i^\sigma)$. Для упрощения записи ковариацию случайных параметров обозначим следующим образом: $C_{\alpha\beta}=\mathrm{cov}(\alpha,\beta)$, а ковариационную матрицу как $\mathbb{C}^i=\{\mathbb{C}_{ijk}(t_{ik},t_{ij})\}_{j,k=1}^n,\ i=\overline{0,m}$ с коэффициентами $\mathbb{C}_{ijk}(t_{ik},t_{ij})=C_{a_{ij}a_{ik}}+C_{a_{ij}\sigma_{ik}}t_{ik}+C_{\sigma_{ij}a_{ik}}t_{ij}+$ $+C_{\sigma_{ij}\sigma_{ik}}t_{ij}t_{ik}$.

Формулы для расчета математического ожидания нечетких случайных функций (6), используемых для построения эквивалентных детерминированного аналога модели (2)–(3) можно найти в [5, 6].

В [1], опираясь на результаты [6, 8], доказано, что при сделанных предположениях о распределениях параметров модели, эквивалентный детерминированный аналог для i-го ограничения модели (3) содержит только неопределенность возможностного типа и имеет следующий вид:

$$\tau\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^0+\sigma_{ij}^0Y_{ij}(\gamma)\right)x_j-\beta_i\sqrt{\tilde{d}_i(x,\gamma)}\le b_i^0+\sigma_i^0Y_i^0(\gamma)\right\}\ge\alpha_i,$$

где β_i — решение уравнения $F_i(t) = 1 - p_i$, $F_i(t)$ — функция стандартного нормального распределения, а $\tilde{d}_i(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n}\left(d_{ij}^a + d_{ij}^\sigma Y_{ij}^2(\gamma)\right)x_j^2 + d_i^b + d_i^\sigma Y_i^2(\gamma)$. С помощью данного выражения можно доказать следующие теоремы, дающие эквивалентные четкие аналоги модели критерия (2) и модели ограничений (3).

Теорема 2. *Пусть в модели критерия (2) $\tau = \pi$, $p_0 > 0.5$, все нечеткие компоненты $Y_{0j}(\gamma)$ в сдвиг-масштабном представлении нечетких случайных величин $A_{0j}(\omega,\gamma)$ являются взаимно T_W-связанными нечеткими числами, все случайные параметры сдвига и масштаба являются нормально распределенными случайными величинами. Тогда эквивалентный детерминированный аналоги модели критерия (2) есть*

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_{0j}^0 + \sigma_{0j}^0 Y_{0j}(\gamma)\right)x_j - \beta_0\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{0jk}(\gamma)x_j x_k}\right]_{\alpha_0}^{-} \to \min_{x\in X}.$$

Теорема 3. *Пусть в модели ограничений (3) $\tau = \pi$, $p_i > 0.5$, $i = \overline{1,m}$, все нечеткие компоненты $Y_{ij}(\gamma)$, $Y_i(\gamma)$ в сдвиг-масштабном представлении нечетких случайных величин $A_{ij}(\omega,\gamma)$ и $B_i(\omega,\gamma)$ являются взаимно T_W-связанными нечеткими числами, а коэффициенты сдвига и масштаба являются независимыми нормально распределенными случайными величинами. Тогда система ограничений (3) эквивалентна детерминированной модели ограничений*

$$\begin{cases}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^0 + \sigma_{ij}^0 Y_{ij}(\gamma)\right)x_j - \beta_i\sqrt{d_i(x,\gamma)} - b_i^0 - \sigma_i^0 Y_i(\gamma)\right]_{\alpha_i}^{-} \le 0, i = \overline{1,m},\\ \mathbf{x}\in X.\end{cases}$$

Для расчёта левых границ уровневых множеств в Теоремах 2 и 3 можно сначала построить вычислительный граф, в узлах которого будут находиться операции, а в листьях константы и нечёткие величины, а затем с помощью постфиксного обхода выполнить все вычисления на α-уровнях с помощью формул из Следствий 1–3. Приведем простой пример.

Пример 1. Пусть нам дана возможностная функция

$$f(X,Y,Z) = \left(a_1 + b_1 X(\gamma)\right) + \left(a_2 + b_2 Y(\gamma)\right) + \beta\sqrt{c + Z(\gamma)},$$

где $a_1 = 2.15$, $a_2 = 2$, $b_1 = -1$, $\beta = 0.5$, $c = 3$, $X = [2,3,3,4]$, $Y = [1,3,4,5]$, $Z = [-2,0,0,1]$. Нечеткие величины заданы в виде $[X_\alpha^-, X_1^-, X_1^+, X_\alpha^+]$, то есть с помощью своих модальных значений и α-уровневых множеств, вычисленных для какого-то конкретного значения α. Для агрегирования возможностной информации мы используем T_W. Вычислительный граф изображен на рис. 1. Для расчёта модальных значений и границ уровневых множеств используются правила работы с функциями от возможностных величин и результаты Следствий 1–3. В итоге мы получим следующие характеристики для функции: $f_\alpha = [3,6]$, $f_1 = [4,5]$.

С помощью этого же графа можно вычислять значения обобщенного градиента, если это необходимо для численного метода решения.

Рассмотрим теперь модель (4)–(5). В ней мы не требуем, чтобы случайные факторы были распределены по нормальному закону.

Теорема 4. *Пусть в модели ограничений (5) $\tau \in \{\pi,\nu\}$, для агрегирования возможностной информации используется слабейшая t-норма T_W, возможностные составляющие в сдвиг-масштабном представлении нечетких случайных величин $A_{ij}(\omega,\gamma)$ и $B_i(\omega,\gamma)$ являются симметричными нечеткими числами, задаваемыми с помощью (L,R)-распределений: $X_{ij}(\gamma) = (m_{ij}, d_{ij})_{S_{ii}}$, $X_i(\gamma) = (m_i, d_i)_{S_i}$ и имеющими в случае $\tau = \nu$ ограниченные носители. Тогда модель построчных ограничений по вероятности и возможности/необходимости (5) имеет эквивалентный стохастический аналог для меры возможности π:*

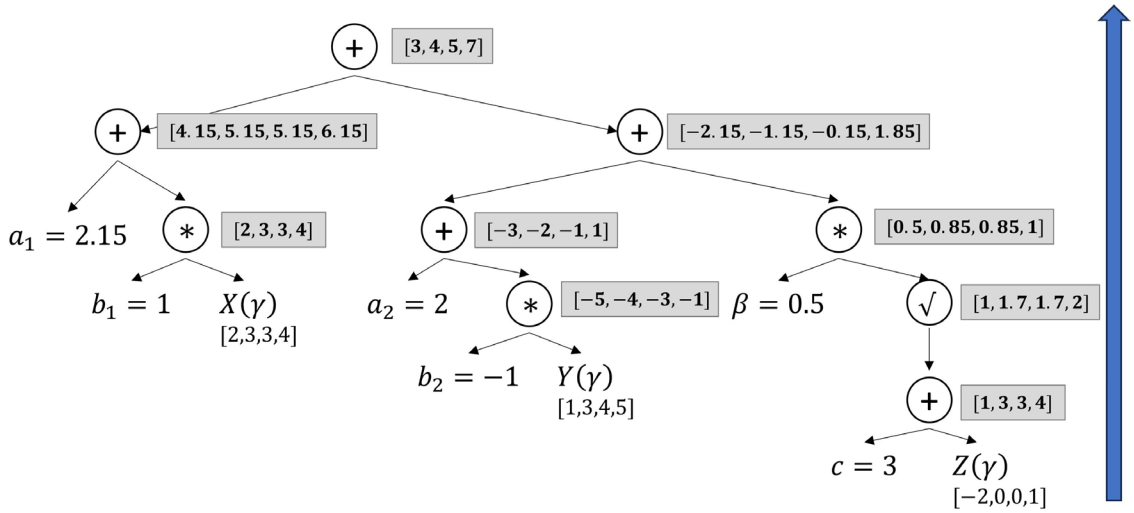


Рис. 1. Расчёт α-уровневого множества монотонной функции при слабейшей t-норме с помощью вычислительного графа

$$\begin{cases} \mathbf{P}\left\{\min\left\{A_i^-(x,\omega,\alpha_i) - B_i^+(\omega,1), A_i^-(x,\omega,1) - B_i^+(\omega,\alpha_i)\right\} \le 0\right\} \ge p_i, i = \overline{1,m}, \\ \mathbf{x} \in X, \end{cases} \tag{7}$$

и следующий для меры необходимости ν:

$$\begin{cases} \mathbf{P}\left\{\min\left\{A_i^+(x,\omega,1-\alpha_i) - B_i^-(\omega,0), A_i^+(x,\omega,0) - B_i^-(\omega,1-\alpha_i)\right\} \le 0\right\} \ge p_i, i = \overline{1,m}, \\ \mathbf{x} \in X, \end{cases} \tag{8}$$

в которых

$$A_i^{\pm}(x,\omega,\beta) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}(\omega) + \sigma_{ij}(\omega)m_{ij}\right)x_j \pm S_{ii}^{-1}(\beta)\max_{j=1,\ldots,n}\left\{d_{ij}\left|\sigma_{ij}(\omega)x_j\right|\right\},$$

$$B_i^{\pm}(\omega,\beta) = a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)m_i \pm S_i^{-1}(\beta)\left|\sigma_i(\omega)\right|d_i.$$

В (7)–(8) для $\beta = 1$ и $\beta = 0$ мы получаем, соответственно, формулы для левых/правых модальных значений и границ носителей.

Теорема 5. *Пусть в модели критерия (4) $\tau \in \{\pi, \nu\}$, для агрегирования возможностной информации используется слабейшая t-норма T_W, возможностные составляющие в сдвиг-масштабном представлении нечетких случайных величин $A_{0j}(\omega,\gamma)$ являются симметричными нечеткими числами, задаваемыми с помощью (L,R)-распределений: $X_{0j}(\gamma) = (m_{0j}, d_{0j})_{S_{00}}$. Тогда модель критерия (4) имеет следующий эквивалентный стохастический аналог для меры возможности π:*

$$k \to \min,$$
$$\mathbf{P}\left\{A_0^-(x,\omega,\alpha_0) \le k\right\} \ge p_0,$$

и следующий для меры необходимости ν:

$$k \to \min,$$
$$\mathbf{P}\left\{A_0^+(x,\omega,1-\alpha_0) \le k\right\} \ge p_0,$$

в которых

$$A_0^{\pm}(x,\omega,\beta) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_{0j}(\omega) + \sigma_{0j}(\omega)m_{0j}\right)x_j \pm S_{00}^{-1}(\beta)\max_{j=1,\ldots,n}\left\{d_{0j}\left|\sigma_{0j}(\omega)x_j\right|\right\}.$$

Следствие 4. *Пусть в модели критерия (4) $\tau \in \{\pi, \nu\}$, для агрегирования возможностной информации используется слабейшая t-норма T_W, возможностные составляющие в сдвиг-мас-*

штабном представлении нечетких случайных величин $A_{0j}(\omega,\gamma)$ *являются нечеткими числами или отрезками, задаваемыми с помощью (L,R)-распределений:* $X_{0j}(\gamma)=\left(\underline{m}_{0j},\overline{m}_{0j},\underline{d}_{0j},\overline{d}_{0j}\right)_{L_{00}R_{00}}$ *и имеющими в случае* $\tau\in\nu$ *ограниченные носители, случайные коэффициенты масштаба* $\sigma_{0j}(\omega)\in\mathbb{R}_+,\ \forall\omega\in\Omega,\forall j,$ *а компоненты вектора неизвестных принимают только положительные значения:* $x\in X\bigcap\mathbb{R}_+$. *Тогда модель критерия (4) имеет следующий эквивалентный стохастический аналог для меры возможности* π*:*

$$k\to\min,$$
$$\mathbf{P}\left\{A_0^-(x,\omega,\alpha_0)\le k\right\}\ge p_0,$$

и следующий для меры необходимости ν*:*

$$k\to\min,$$
$$\mathbf{P}\left\{A_0^+(x,\omega,1-\alpha_0)\le k\right\}\ge p_0,$$

в которых

$$A_0^-(x,\omega,\beta)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{0j}(\omega)+\sigma_{0j}(\omega)\underline{m}_{0j}\right)x_j-L_{00}^{-1}(\beta)\max_{j=1,\dots,n}\left\{\underline{d}_{0j}\sigma_{0j}(\omega)x_j\right\},$$

$$A_0^+(x,\omega,\beta)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{0j}(\omega)+\sigma_{0j}(\omega)\overline{m}_{0j}\right)x_j-R_{00}^{-1}(\beta)\max_{j=1,\dots,n}\left\{\overline{d}_{0j}\sigma_{0j}(\omega)x_j\right\}.$$

Полученные модели, которые в общем виде можно записать как

$$\begin{cases}\mathbf{P}\left\{f(x,\omega)\le 0\right\}\ge p,\\ \mathbf{x}\in X\ \textit{или}\ \mathbf{x}\in X\bigcap\mathbb{R}_+^n,\end{cases}$$

представляют собой построчные ограничения по вероятности. Построение их эквивалентного детерминированного аналога, то есть снятие неопределенности вероятностного типа, затруднено даже для класса нормальных случайных величин в связи с присутствием в соответствующих выражениях модулей случайных величин или условий на их неотрицательность. Однако с помощью индикаторных функций

$$\mathrm{I}(x,\omega)=\begin{cases}1, & f(x,\omega)\le 0,\\ 0, & f(x,\omega)>0,\end{cases}$$

и свойства $\mathbf{E}[\mathrm{I}(x,\omega)]=\mathbf{P}\{f(x,\omega)\le 0\}$ их можно свести к системе ограничений

$$\begin{cases}\mathbf{E}\left[\mathrm{I}(x,\omega)\right]\ge p,\\ \mathbf{x}\in X\ \textit{или}\ \mathbf{x}\in X\bigcap\mathbb{R}_+^n,\end{cases}$$

и применить прямые методы стохастического программирования, основанные на методе стохастических квазиградиентов [9], которые не требуют построения эквивалентных детерминированных аналогов.

Заключение

В работе рассмотрена проблема возможностно-вероятностного линейного программирования (задача уровневой оптимизации) с ограничениями по возможности/ необходимости — вероятности и вероятности — возможности/необходимости в случае использования слабейшей треугольной нормы для агрегирования возможностной информации. Построены элементы исчисления возможностей, необходимые для идентификации границ уровневых множеств простейших операций над нечеткими величинами. Для этого использованы результаты Р. Фуллера и Х. Нгуена [10, 11], позволяющие вычислять α-уровневые множества функций от нечётких параметров с помощью функций от α-уровней самих параметров. Указанные результаты обобщены на случай нечетких чисел и отрезков, имеющих, в общем случае, неограниченные носители.

В плане перспективных исследований представляется интересным спецификация методов стохастического квазиградиента для решения стохастических аналогов задач.

Литература

1. *Yazenin A.* On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability / A. Yazenin, I. Soldatenko // Lecture Notes in Computer Science, WILF 2018. Giove S., Masulli F., Fuller R. (eds.). Advances in Intelligent Systems and Computing. – Vol. 11291. – Springer, Cham, 2019. – P. 43–54.

2. *Язенин А. В.* Задача возможностно-вероятностной оптимизации с ограничениями по возможности/необходимости — вероятности и вероятности — возможности/необходимости / А. В. Язенин, И. С. Солдатенко // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте (ИММВ-2021). Сборник научных трудов X-й Международной научно-технической конференции. – Смоленск, 2021. – С. 271–283.

3. *Солдатенко И. С.* Об очередности принципов снятия неопределенности в задачах возможностно-вероятностного программирования и эволюционном методе их решения / И. С. Солдатенко, А. В. Язенин // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики (АППМ-2021). Сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж, 2022. – С. 748–754.

4. *Soldatenko I.* On the Order of Removing of Uncertainty Principles in the Problems of Possibilistic-Probabilistic Programming and the Evolutionary Method of their Solution / I. Soldatenko, A. Yazenin // 2023 Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (AMCSM). – Voronezh, 2023. – P. 1–5.

5. *Язенин А. В.* Основные понятия теории возможностей. – М. : Физматлит, 2016. – 142 с.

6. *Yazenin A.* Possibilistic Optimization / A. Yazenin, M. Wagenknecht. – Cottbus: Brandenburgische Technische Universitat, 1996.

7. *Nguyen H. T.* A First Course in Fuzzy Logic / H. T. Nguyen, E. A. Walker. – CRC Press, Boca Raton, 1997.

8. *Yazenin A. V.* On the problem of possibilistic optimization // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – Vol. 81(1). – P. 133–140.

9. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. – М. : Наука, 1976.

10. *Fuller R.* On generalization of Nguyen's theorem / R. Fuller, T. Keresztfalvi // Fuzzy Sets and Systems. – 1991. – Vol. 41. – P. 371–374.

11. *Nguen H. T.* A note on the extension principle for fuzzy sets // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1978. – Vol. 64. – P. 369–380.

УДК 004.021

ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ СЕМАНТИЧЕСКОЙ СЕГМЕНТАЦИИ НА ОСНОВЕ КАЛИБРОВКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ОЦЕНОК ГЛУБОКИХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

А. М. Субботин, И. Л. Каширина

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе представлен метод повышения точности семантической сегментации патологических структур на основе анализа вероятностных карт, созданных глубокими нейронными сетями. Предложенный подход включает уточнение области анализа, фильтрацию шумовых объектов, исключение вложенных патологий и классификацию сегментированных областей.
Ключевые слова: семантическая сегментация, глубокие нейронные сети, вероятностные карты, медицинская диагностика, патологические структуры, фильтрация шумов.

Введение

Семантическая сегментация — это одна из ключевых задач машинного обучения, направленная на присвоение меток каждому пикселю изображения. Она широко применяется в медицине, автономном вождении, анализе спутниковых данных и других областях. В медицинской диагностике, например, сегментация опухолей и патологий в трехмерных изображениях, таких как МРТ и КТ, играет критически важную роль для своевременного выявления и лечения заболеваний.

Современные глубокие нейронные сети, такие как U-Net и её модификации, достигли значительных успехов в решении задачи сегментации. Однако, несмотря на их высокую точность, вероятностные оценки, генерируемые такими моделями, часто оказываются плохо откалиброванными. Это означает, что вероятность, которую модель присваивает предсказанию, не всегда соответствует истинной вероятности того, что предсказание верно. Некачественная калибровка может привести к снижению точности при интеграции модели в реальных приложениях, где важно учитывать не только предсказания, но и их достоверность.

Целью данной работы является исследование и разработка методов повышения точности семантической сегментации через улучшение вероятностных оценок, генерируемых глубокими нейронными сетями. Для достижения этой цели в работе предлагается подход, адаптированный для задач семантической сегментации, и выполняется экспериментальная проверка подхода на реальных данных.

Работа направлена на преодоление текущих ограничений моделей сегментации и улучшение их точности за счет калибровки вероятностных оценок, что особенно важно для задач с высокой степенью ответственности, таких как медицинская диагностика.

1. Постановка задачи и этапы решения

В рамках данной работы предполагается разработка метода, который улучшает точность сегментации патологических областей медицинских изображений на основе вероятностных оценок, полученных с использованием глубокой нейронной сети. Метод должен учитывать вложенные структуры, отсеивать незначимые объекты и улучшать интерпретацию вероятностных оценок.

Процесс решения задачи по разработке метода и его внедрению состоит из следующих этапов:

1. Уточнение области анализа с использованием маски органа
2. Реализация метода выделения и фильтрации объектов на основе вероятностных карт
3. Исключение шумовых объектов, объем которых ниже заданного порога
4. Проверка корректности выделения патологий по реальным клиническим данным

2. Алгоритм постобработки выходных вероятностей

Для разработки предложенного алгоритма был выбран язык программирования Python благодаря его широким возможностям для научных расчетов и обработки данных. В качестве ключевых библиотек для реализации алгоритма использовались NumPy [1] и SciPy [2], обеспечивающие высокую производительность вычислений и удобные инструменты для работы с массивами данных и числовым анализом. Для визуализации результатов применялась библиотека Plotly [3], которая позволила наглядно отображать трехмерные вероятностные карты и результаты классификации в интерактивном формате, что облегчило анализ работы алгоритма и оценку его эффективности.

Для проведения исследования и проверки разработанного алгоритма были использованы данные из открытого набора Medical Segmentation Decathlon (MSD) [4], предоставленного для задач анализа медицинских изображений. Этот набор включает трехмерные томографические изображения различных органов и патологий в формате NIfTI, что позволяет эффективно работать с объемными данными. Набор MSD широко применяется в научных исследованиях благодаря своему качеству и разнообразию предоставляемых данных, что делает его идеальной платформой для разработки и тестирования алгоритмов сегментации.

Вероятностные карты представляют собой многоканальные массивы, где каждый канал соответствует определённым типам патологий. Эти карты являются выходом нейронной сети, обученной на задаче семантической сегментации [5, 6]. Значения в каждом вокселе таких карт указывают вероятность принадлежности данного вокселя к конкретному классу. Например, если воксель имеет значение 0,85 в канале «Киста», это означает, что модель с вероятностью 85% относит его к этому типу патологии.

Первый канал вероятностной карты традиционно соответствует фону — областям, которые модель не относит ни к одному из классов, оставшиеся каналы соответствуют различным типам патологий. Такое разбиение позволяет детализировать результаты сегментации и использовать вероятностные значения для дальнейшей классификации и анализа. Вероятностные карты являются важным инструментом для точного определения границ объектов, поскольку они предоставляют не бинарную, а вероятностную интерпретацию предсказаний, что особенно полезно при обработке сложных медицинских данных, где границы между классами могут быть нечеткими.

Входными данными алгоритма являются вероятностные карты патологий, полученные путем обработки трехмерных медицинских изображений базовой моделью сегментации. Вероятностные карты имеют размерность (C, H, W, D), где C – количество классов сегментации, H, W, D — пространственные размеры изображения.

На первом этапе работы уточняется область, в которой будет производиться анализ вероятностных карт. Это достигается с использованием предварительно подготовленной маски органа. Маска ограничивает область обработки изображений только теми участками, которые относятся к органу интереса, исключая области, не содержащие диагностически значимой информации и рассчитывается по формуле

$$A = \min\left(background_{i,j,k}, liver_{i,j,k}\right),$$

где i, j, k — координаты вокселей, $background$ — карта вокселей фона, $liver$ — маска органа.

На следующем этапе по значениям вокселей полученной фоновой карты создаётся бинарная маска B, основанная на пороговом значении вероятности ($threshold$), которая позволяет выделить области, потенциально относящиеся к патологиям. Маска рассчитывается по формуле

$$B_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & если \left(1 - A_{i,j,k}\right) > threshold \\ 0, & иначе. \end{cases}$$

Для выделения отдельных объектов применяется метод связных компонентов label, реализованный в библиотеке scipy, который идентифицирует отдельно стоящие объекты маски B и присваивает каждому вокселю значение индекса идентифицированной патологии. Для каждого выделенного объекта рассчитывается его объём в вокселях. Небольшие по объему объекты зачастую являются артефактами модели или шумом и несут мало диагностической значимости. Поэтому объем объекта сравнивается с заданным минимальным порогом min_volume. Если объём меньше порогового значения, объект удаляется из маски.

Процесс определения класса патологии базируется на анализе вероятностных карт, созданных моделью нейронной сети. Каждый выделенный объект исследуется по всем каналам вероятностных карт, чтобы определить, к какому типу патологии он принадлежит. Это делается с помощью расчёта метрик вероятности для каждого канала, таких как сумма вероятностей, средняя вероятность или медианная вероятность. В данном исследовании было принято решение использовать среднюю вероятность как основной критерий, поскольку она наиболее точно отражает общую вероятность принадлежности объекта к определённому классу, сглаживая влияние локальных аномалий и обеспечивая более стабильные результаты классификации. Средняя вероятность принадлежности патологии к выбранному типу, рассчитанная как взвешенное среднее вероятностей по всем вокселям

$$Avg_{type} = \frac{\sum_{v \in V} p\left(v, type\right)}{\left|V\right|},$$

где $type$ — вид патологии, $p(v, type)$ — вероятность конкретной патологии в вокселе v, V — множество вокселей найденной патологии.

Вложенные или пересекающиеся области, которые могут возникать из-за ошибок сегментации или особенности данных, представляют собой серьёзную проблему. Если обнаруживается вложенный объект, его средняя вероятность сравнивается с вероятностью объекта. Объект с меньшей средней вероятностью поглощается как менее значимый. После удаления вложенных объектов итоговая маска обновляется, чтобы исключить пересечения и дублирования. Эта проверка основана на принципе, что более крупные области, как правило, представляют основную патологию, тогда как вложенные области могут быть результатом шумов или недостаточной точности модели.

Основным выходным продуктом метода является многоканальная маска, где каждый канал соответствует определённому классу патологии. Эта маска содержит информацию о пространственном расположении объектов, причём:

1. Каждый воксель маски имеет значение, указывающее принадлежность к определённому классу или к фону.

2. Вложенные и шумовые объекты, которые были удалены в ходе фильтрации, не включены в итоговую маску, что улучшает её интерпретируемость.

3. Анализ полученных результатов

Результаты работы алгоритма представлены в виде объемной визуализации, которая наглядно иллюстрирует процесс выделения и анализа патологических областей в исследуемой области органа.

На рис. 1 можно видеть, как происходит определение патологий без применения алгоритма. Цветовая палитра иллюстрирует принадлежность выделенных зон к определенным классам патологий, где каждый цвет означает конкретный вид патологии. Желтая область занимает центральное место и имеет четкие границы. Внутри нее выделяются другие области. В то же время были идентифицированы патологии, имеющие малый объем.

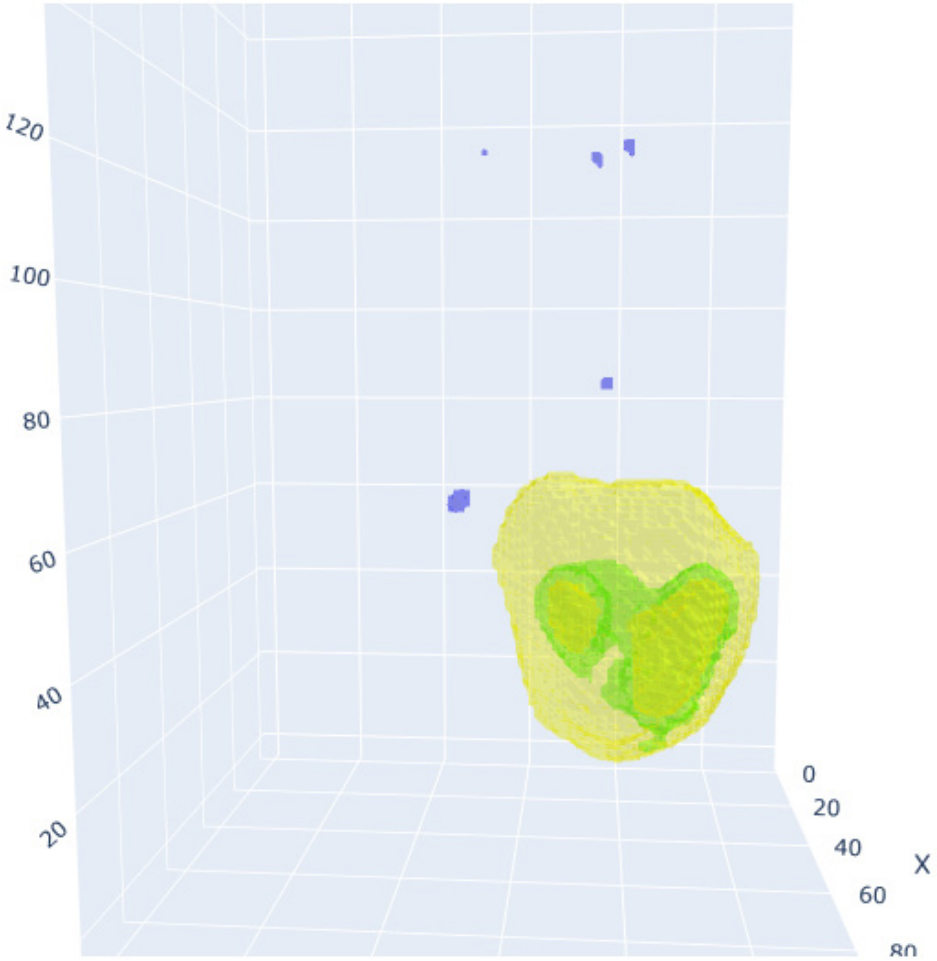


Рис. 1. Визуализация патологий до применения алгоритма

На рис. 2 представлен итоговый результат, который демонстрирует работу алгоритма. Границы желтой области остались неизменными, что говорит о сохранении базовой структуры патологии. Зеленые зоны корректно интегрированы в контекст основной области, что предотвращает их ошибочное выделение в качестве отдельных патологий. Патологии, имеющие малый объем были устранены, что подтверждает успешное исключение мелких шумовых объектов, не соответствующих заданным критериям значимости.

В табл. 1 представлены средние вероятности до (Avg) и после применения алгоритма (Avg'), а также суммарный объем в вокселях (V) для каждой из патологий при заданном пороге $threshold = 0,2$. Исходя из значений, можно увидеть, что алгоритм улучшает значения показателей средних вероятностей. В большинстве случаев значения после его применения превышают начальные. Обнуление или уменьшение значений является признаком того, что найденные патологии были незначительны по объему или были найдены вложенные патологии.

Таким образом, результаты показывают, что метод не только точно выделяет основные патологические образования, но и эффективно классифицирует их на основании вероятностных карт.

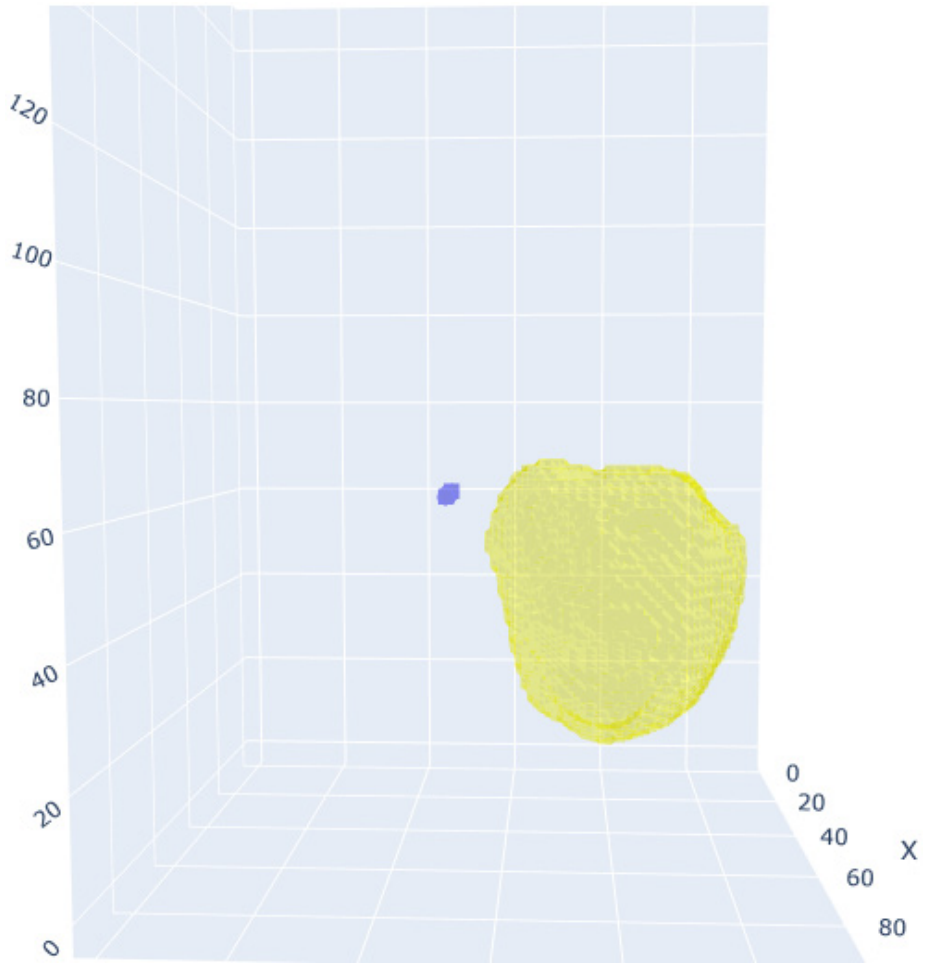


Рис. 2. Визуализация после применения алгоритма

Таблица 1

Средние вероятности патологий до и после применения алгоритма

Avg_1	Avg'_1	V_1	Avg_2	Avg'_2	V_2	Avg_3	Avg'_3	V_3	Avg_4	Avg'_4	V_4
0,66	0,79	189	0,68	0,00	0	0,00	0,00	0	0,85	0,87	303610
0,00	0,00	0	0,73	0,00	0	0,81	0,81	12346	0,84	0,86	1031
0,00	0,00	0	0,67	0,72	3383	0,27	0,38	364	0,75	0,71	181388
0,00	0,00	0	0,25	0,00	0	0,22	0,00	0	0,88	0,88	71578
0,65	0,73	226	0,82	0,80	78933	0,40	0,40	3423	0,53	0,52	827

Заключение

В ходе работы был разработан и реализован метод повышения точности семантической сегментации патологических структур с использованием вероятностных карт, сгенерированных глубокими нейронными сетями. Предложенный подход успешно решает ключевые задачи, возникающие при анализе медицинских изображений, включая исключение вложенных патологий, фильтрацию шумовых объектов с малым объемом и корректное определение классов патологий на основе вероятностных оценок.

Разработанный подход может быть интегрирован в системы автоматизированной диагностики, что сократит время анализа данных и повысит точность сегментации патологий.

Литература

1. NumPy Documentation // NumPy URL: https://numpy.org/doc/ (дата обращения: 15.10.2024).

2. SciPy API // SciPy v1.14.1 Manual URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/index.html#scipy-api (дата обращения: 22.10.2024).

3. Python API reference for plotly // Plotly documentation URL: https://plotly.com/python-api-reference/ (дата обращения: 05.11.2024).

4. *Antonelli M., Reinke A.* The Medical Segmentation Decathlon / M. Antonelli // Nature communications. – 2022 – № 13. – С. 4128

5. Лукашик Д. В. Анализ современных методов сегментации изображений [Текст] / Д. В. Лукашик // Экономика и качество систем связи. – 2022. – № 24. – С. 57–65.

6. *Al-Shayea Q. K.* Artificial Neural Networks in Medical Diagnosis / Q. K. Al Shayea // IJCSI International Journal of Computer Science Issues. – 2011 – Vol. 8, № 2. – P. 150–154.

УДК 004.048

КОНЦЕПТУАЛЬНЫЙ ПОДХОД КЛАССИФИКАЦИИ ДЕСТРУКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Н. Н. Тетерин[1], В. В. Смоленцева[2]

[1]МИРЭА – Российский технологический университет
[2]Российский государственный университет социальных технологий

Аннотация. Рассмотренный в работе концептуальный подход к классификации с применением технологий искусственного интеллекта (ИИ) является эффективным инструментом для предотвращения последствий от деструктивного поведения сотрудников. В условиях растущей роли информационных технологий в организациях и управлении персоналом, проблема выявления и предотвращения деструктивного поведения бесспорно является актуальной. Деструктивное поведение может проявляться в различных формах, нанося ущерб репутации и безопасности компании. Основные этапы подхода включают сбор данных, предварительную обработку, выбор признаков, обучение модели, тестирование, классификацию. Преимущества подхода включают автоматизацию рассматриваемого в работе процесса и своевременное и обоснованное принятие решений руководством.
Ключевые слова: концептуальный подход, искусственный интеллект, деструктивное поведение, алгоритмы машинного обучения, социальная сеть.

Введение

Деструктивное поведение сотрудника в социальных сетях — это поведение, которое наносит ущерб организации, её репутации или другим сотрудникам.

Такое поведение может включать в себя:

– Распространение негативной информации о компании или коллегах. Например: критика руководства, претензии на условия работы или ложная информация, которая вредит репутации компании.

– Дезинформация. Например: деструктивные сотрудники распространяют ложную информацию, которая вводит в заблуждение коллег или клиентов.

– Оскорбления. Например: поведение сотрудника приводит к психологическому дискомфорту коллег и создает негативную атмосферу в коллективе.

– Спам и фишинг. Например: деструктивные сотрудники используют социальные сети для распространения спама или фишинговых атак, что приводит к утечке данных или финансовым потерям.

Для классификации поведения деструктивного сотрудника в социальных сетях по большей части используют следующие методы:

Анализ содержания — метод, который используется для изучения и интерпретации текстовых данных, размещённых сотрудниками в социальных сетях. С помощью алгоритмов машинного обучения можно автоматически анализировать тексты и выявлять в них негативные высказывания или распространение ложной информации.

Анализ содержания полезен для организаций, так как он позволяет наблюдать за настроением сотрудников, выявлять проблемы и конфликты, а также предотвращать распространение негативной информации. Однако при использовании этого метода необходимо учитывать возможные ограничения и риски, такие как возможность ложных срабатываний алгоритмов или нарушение приватности сотрудников.

Важно разработать чёткие критерии и правила для анализа содержания. Также необходимо учитывать контекст и особенности каждого конкретного случая.

В целом, анализ содержания может быть полезным инструментом для компаний, но его применение должно быть обоснованным и соответствовать законодательству.

Анализ связей — метод, который предполагает изучение взаимодействий сотрудника в социальных сетях. Он позволяет определить, с кем сотрудник общается и какие темы обсуждаются, для выявления деструктивного поведения, связанного с распространением негативной информации.

Анализ взаимодействий в социальных сетях дает представление о корпоративной культуре компании, что помогает понять, какие ценности и нормы приняты в коллективе. Анализ может помочь выявить потенциальные конфликты до их эскалации, что позволяет своевременно принять меры для их предотвращения.

Сетевой анализ в социальных сетях — метод исследования, который позволяет визуализировать и анализировать связи между участниками сети. В контексте изучения взаимодействий сотрудников, сетевой анализ может помочь выявить структуру коммуникаций внутри организации.

Для проведения сетевого анализа необходимо собрать данные о взаимодействиях между сотрудниками. Это могут быть сведения о частоте общения, содержании разговоров, а также о наличии или отсутствии связей между участниками сети. Собранные данные можно представить в виде графа, где вершины обозначают сотрудников, а рёбра — связи между ними.

Мониторинг упоминаний — процесс сбора и анализа информации о том, как сотрудники обсуждают компанию, коллег и руководство.

Мониторинг позволяет обнаружить негативные высказывания о компании, коллегах или руководстве. Анализ упоминаний позволяет выявить, кто именно оставляет негативные отзывы, что помогает сосредоточиться на работе с конкретными сотрудниками или группами, чтобы изменить их отношение к компании.

Внутренние каналы связи для анализа мониторинга упоминаний: корпоративный чат, электронная почта, внутренние новостные ленты, социальные сети, форумы и другие ресурсы, где сотрудники могут высказываться о компании.

Анализ тональности текста — метод, который позволяет определить эмоциональную окраску сообщения (тональность) и выявить в нём присутствие негативных или деструктивных элементов. Такой анализ может проводиться с помощью алгоритмов и компьютерных программ.

Анализ тональности может быть как бинарным, так и многоклассовым. В первом случае тексты относят к одной из двух категорий: положительные или отрицательные. Во втором случае выделяют больше двух категорий, например: положительные, отрицательные, нейтральные, смешанные.

Существуют разные подходы к анализу тональности текста. Одни методы анализируют отдельные слова и их сочетания, другие учитывают контекст и структуру предложений. Наиболее распространёнными алгоритмами являются методы, основанные на машинном обучении, такие как SVM (метод опорных векторов), Random Forest (случайный лес) и нейронные сети [1].

Анализ тональности текста может быть полезен для бизнеса, государственных органов, научных исследователей и обычных пользователей. Он помогает принимать обоснованные решения, следить за общественным мнением и выявлять потенциально опасные тенденции.

Анализ контекста — метод, который позволяет выявить причины деструктивного поведения сотрудника через анализ контекста публикаций негативных высказываний или ложной информации. Контекст — это обстоятельства, факты и условия, которые окружают публикацию.

Анализ тональности публикации. Необходимо определить, какой тон имеет публикация — агрессивный, обидный, саркастический или нейтральный.

Для применения описанных выше методов необходимо сформировать входной набор данных, схема формирования единой базы входного набора представлена на рис. 1.

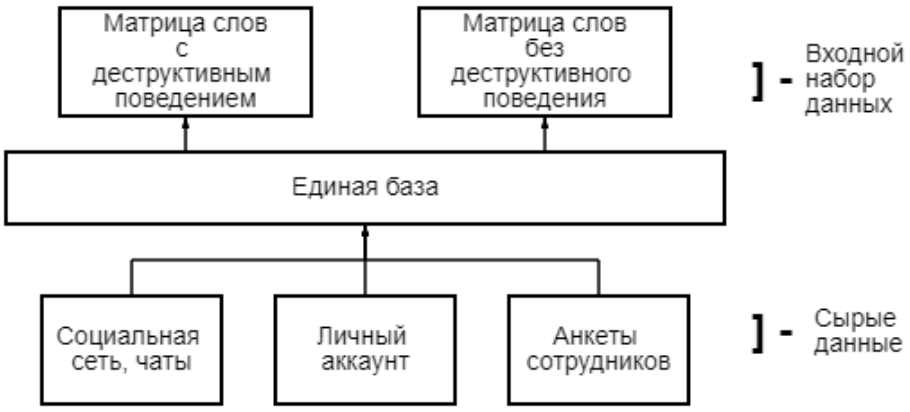


Рис. 1. Схема концептуального подхода формирования входного набора данных

Матрица слов и словосочетаний для классификации деструктивного и недеструктивного поведения, является полезным инструментом для идентификации и анализа текстовых данных.

К ключевым этапам обработки текста относятся:

1. Токенизация — процесс разделения текста на отдельные слова или токены.

2. Удаление стоп-слов — исключение часто встречающихся слов, которые не несут значимого смысла.

3. Лемматизация и стемминг — методы приведения слов к их базовым формам, что позволяет унифицировать различные морфологические варианты.

Анализ текстовых данных с помощью алгоритмов обработки естественного языка (NLP) повысит точность анализа и классификации текстов, и эффективно определит деструктивные и недеструктивные элементы в социальных сетях пользователей.

Для повышения качества анализа текстовых данных в комбинации с другими методами NLP предлагается использование TF-IDF.

TF-IDF подходит хорошо для задач, связанных с извлечением ключевых слов, кластеризацией и классификацией. Применение позволяет улучшить точность анализа и классификации текстов, а также эффективно выявлять признаки деструктивного и недеструктивного поведения в социальных сетях.

Для применения методов классификации поведения деструктивного сотрудника в социальных сетях можно использовать специальные программы и алгоритмы машинного обучения. С их помощью проанализировать тексты, связи и поведение сотрудников в социальных сетях для выявления деструктивного поведения и предоставлении информации для принятия мер [2].

На рис. 2 приведены возможные этапы процесса классификации текста деструктивного сотрудника в социальных сетях.

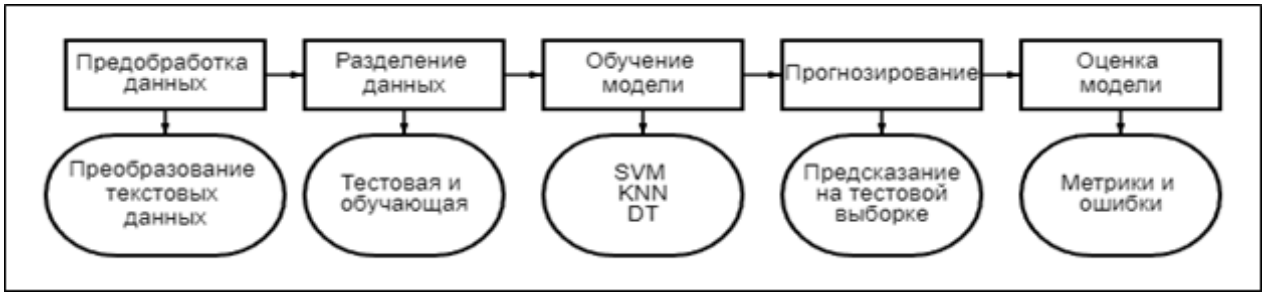


Рис. 2. Этапы процесса классификации текста деструктивного сотрудника в социальных сетях

При выявлении деструктивного поведения сотрудника в социальных сетях можно принять следующие меры: обсудить поведение сотрудника с ним лично, провести обучение и тренинги для сотрудников, что поможет повысить осведомлённость о деструктивном поведении и научить сотрудников распознавать его, создать политику использования социальных сетей в организации [3].

Заключение

Применение методов классификации в контексте формирования концептуального подхода выявления деструктивного сотрудника в социальных сетях может помочь выявить и предотвратить деструктивное поведение, которое может нанести ущерб организации. Для этого можно использовать специальные программы и алгоритмы машинного обучения, которые могут анализировать тексты, связи и поведение сотрудников в социальных сетях. При выявлении деструктивного поведения можно принять меры, такие как обсуждение поведения с сотрудником, проведение корпоративного обучения и создание политики использования социальных сетей в организации.

Литература

1. *Семериков А. В.* Классификация объектов на основе нейронной сети и методами дерева решения и ближайших соседей : учебное пособие / А. В. Семериков, М. А. Глазырин. – Ухта : УГТУ, 2022. – 68 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/267857 (дата обращения: 29.10.2024). – Режим доступа: по подписке.

2. *Благов А. В.* Анализ социальных сетей : учебное пособие / А. В. Благов, И. А. Рыцарев. – Самара : Самарский университет, 2020. – 104 с. – ISBN 978-5-7883-1556-0. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/188862 (дата обращения: 01.11.2024). – Режим доступа: по подписке.

3. *Базерман М.* Как принять правильное управленческое решение / М. Базерман, Д. Мур ; Александр Алексеев. – Москва : Альпина Паблишер, 2024. – 400 с. – ISBN 978-5-206-00336-9. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/425585 (дата обращения: 01.11.2024). – Режим доступа: по подписке.

УДК 004.42

АНАЛИТИКА РЫНКА ТРУДА И ЗАНЯТОСТИ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Ф. Г. Типикина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена обзору исследований в области применения методов искусственного интеллекта (ИИ) к аналитике рынка труда и занятости. В ней анализируются как позитивные аспекты внедрения технологий, таких как машинное обучение и обработка естественного языка, так и возникающие проблемы, включая качество данных и необходимость подготовки сотрудников к новым требованиям. В заключении подчеркивается, что использование ИИ постепенно становится ключевым фактором для организаций, стремящихся оставаться конкурентоспособными в современных условиях.
Ключевые слова: искусственный интеллект, рынок труда, машинное обучение, обработка естественного языка, качество данных, большие данные, прогнозирование спроса и предложения, анализ навыков, автоматизация подбора кадров, эффективность рекрутинга, стратегическое планирование.

Введение

Рынок труда находится в постоянном движении, реагируя на технологические изменения, глобализацию и демографические факторы. Этот динамичный процесс обусловлен множеством причин, включая быстрое развитие информационных технологий, изменение потребностей работодателей и поведение работников, а также влияние международных экономических отношений [5].

Понимание этих тенденций и прогнозирование будущих изменений становится все более сложным, особенно в условиях высоких темпов развития. В такой сложной и постоянно меняющейся среде искусственный интеллект становится мощным инструментом, способным анализировать огромные объемы данных и выявлять скрытые закономерности, которые человеку было бы трудно заметить. Он предоставляет новые возможности для глубокого анализа рынка труда, позволяя организациям не только реагировать на текущие изменения, но и предсказывать их.

1. Применение искусственного интеллекта при анализе рынка занятости

1. Обработка больших данных.

ИИ может анализировать данные из различных источников, включая онлайн- резюме, веб-сайты вакансий, социальные сети и профессиональные платформы. Используя алгоритмы обработки естественного языка, ИИ способен извлекать ключевую информацию о навыках, опыте и предпочтениях соискателей, что позволяет выявлять текущие тренды и изменения на рынке труда.

Одним из исследований, посвященных анализу больших данных в области найма и рынка труда, стало исследование, проведенное компанией LinkedIn. В 2021 году она выпустила отчет под названием «2021 Workplace Learning Report» [2], в котором рассмотрели данные о профессиональных навыках и карьерных предпочтениях пользователей платформы.

Для выявления актуальных трендов в востребованных навыках LinkedIn использовал алгоритмы обработки естественного языка (NLP), анализируя обширный массив резюме и профилей пользователей. В процессе исследования были собраны данные из различных источников на платформе, включая онлайн-резюме, вакансии и профили пользователей, что дало

возможность определить, какие навыки становятся все более актуальными, какие профессии пользуются спросом и какие изменения происходят на рынке труда.

1. Прогнозирование спроса и предложения.

Системы машинного обучения могут использовать исторические данные для выявления закономерностей и прогнозирования будущих изменений в спросе и предложении на определенные профессии. Учитывая различные факторы, такие как экономические условия, изменения в законодательстве и бурный й рост технологий, такие прогнозы могут быть полезны для стратегического планирования как для работодателей, так и для соискателей.

Одним из примеров исследований, посвящённых прогнозированию спроса и предложения на рынке труда, является работа, проведённая компанией McKinsey & Company в 2020 году под названием «The Future of Work after COVID-19» (Будущее работы после COVID-19) [3]. В ходе данного исследования McKinsey использовал модели машинного обучения и методы анализа больших данных для оценки влияния пандемии на рынок труда в различных отраслях экономики. Исследование включало анализ исторических данных по занятости, изменению экономических показателей и колебаниям потребительских предпочтений. Основное внимание уделялось тому, как будут изменяться актуальные навыки и профессии в ближайшие годы, а также тому, как работодатели могут адаптироваться к новым условиям.

2. Анализ навыков.

ИИ-системы могут анализировать требования работодателей к навыкам и умениям, что позволяет не только выявить профессии с дефицитом квалифицированных кадров, но и предлагать модули обучения и курсы. Используя кластеризацию данных, ИИ может также выявлять связанные навыки и предлагать многопрофильные карьерные пути для соискателей.

Например, HT Lab (лаборатория «Гуманитарные технологии») создала инструмент на основе искусственного интеллекта — комплексную методику «Бизнес-Профиль», которая сочетает в себе личностные, интеллектуальные и мотивационные тесты [4]. Эта методика идеально подходит для детального анализа кандидата, помогает выяснить его мотивацию, профессиональные возможности, структуру интеллекта, а также оценить его компетенции, управленческие стили и уровень конфликтности. Таким образом, можно получить больше информации о кандидате и определить, в каком направлении ему следует развиваться в компании.

3. Обработка резюме и автоматизация подбора кадров.

ИИ может существенно ускорить процесс рекрутинга, автоматизируя анализ резюме. Алгоритмы могут сопоставлять резюме с вакансиями, выделяя наиболее подходящих кандидатов и минимизируя человеческий фактор. Это повышает эффективность подбора, позволяя HR-специалистам сосредоточиться на более важных аспектах работы, таких как оценка культурной совместимости и выражение интереса к кандидатам.

Компания LinkedIn, специализированная социальная сеть для поиска и установления деловых контактов, представила своего первого ИИ-агента, который исполняет роль рекрутера. В настоящее время этот инструмент доступен лишь ограниченному числу клиентов, среди которых находятся крупные компании, такие как AMD, Canva, Siemens и Zurich Insurance. Тем не менее, в ближайшем будущем LinkedIn планирует предоставить доступ к этому инструменту большему числу пользователей [1].

Hiring Assistant — это последняя и наиболее значимая разработка компании в данной области. По словам вице-президента по продуктам LinkedIn Хари Шринивасана, этот ИИ- решение выполняет рутинные задачи, что позволяет рекрутерам сосредоточиться на более стратегических аспектах своей работы.

Инструмент предоставляет возможность загружать или создавать описания вакансий, выделять ключевые навыки и автоматически искать подходящих кандидатов, основываясь на их профессиональных компетенциях, а не только на таких факторах, как местонахождение или образование.

В будущем LinkedIn планирует расширить функциональные возможности помощника, добавив функции для обмена сообщениями, планирования интервью и взаимодействия с кандидатами на всех этапах процесса найма.

2. Преимущества использования ИИ при анализе рынка занятости

1. Ускорение процессов.

Автоматизация рутинных задач, таких как отбор резюме и анализ данных, позволяет HR-менеджерам и рекрутерам быстрее реагировать на изменения в потребностях компании.

2. Точность прогнозов

Алгоритмы ИИ способны обрабатывать данные с высокой скоростью и точностью, что значительно улучшает качество и надежность прогнозов относительно динамики рынка труда.

3. Индивидуализация подбора.

ИИ может предоставлять соискателям наиболее релевантные вакансии, учитывая их опыт и предпочтения, что улучшает их шансы на трудоустройство и повышает удовлетворенность работой.

4. Улучшение принятия решений.

С помощью аналитики и прогнозов, основанных на данных, работодатели могут более эффективно принимать стратегические решения относительно выставления вакансий, повышения квалификации сотрудников и адаптации к изменениям в экономике.

3. Проблемы, связанные с применением ИИ при анализе рынка занятости

1. Качество данных.

Эффективность анализа рынка занятости существенно зависит от качества изначально используемых данных. Неполные, устаревшие или неточные данные могут снижать точность прогнозов и рекомендаций, что повышает важность обеспечения высокого качества собираемых данных.

2. Технические проблемы.

Поскольку ИИ-системы зависят от алгоритмов и программного обеспечения, существует риск технических сбоев и ошибок. Неверные выводы, основанные на недостаточных или некорректных данных, могут негативно сказаться на процессе подбора кадров и принятии решений.

3. Сопротивление внедрению технологий.

Внедрение систем ИИ может вызывать сопротивление со стороны сотрудников и руководства. Опасения, связанные с потерей рабочих мест, недовольство по поводу непрозрачности процессов принятия решений и необходимость изменений в организационной культуре могут замедлить адаптацию новых технологий.

4. Правовые и регуляторные рамки.

Отсутствие четких правовых норм и регуляций в области использования ИИ для анализа занятости также может стать серьезным ограничением. Законодательство должно развиваться в ногу с технологическими изменениями, чтобы обеспечить защиту прав работников и предотвратить возможные злоупотребления.

5. Зависимость от технологий.

Увеличение автоматизации и применения ИИ может привести к слишком большой зависимости компаний от технологий, что ставит под угрозу устойчивость бизнеса в случае технических сбоев или кибератак. Необходима диверсификация подходов к управлению работой, чтобы минимизировать риски, связанные с нарушением работы систем ИИ.

Заключение

Рынок труда постоянно развивается под влиянием технологического прогресса, глобализации и демографических факторов [6]. Анализ рынка занятости с помощью искусственного интеллекта предоставляет организациям возможности для понимания текущих и прогнозирования будущих тенденций, позволяя им адаптироваться к изменяющимся условиям.

ИИ-системы способны обрабатывать большие объемы данных, выявлять закономерности и прогнозировать спрос и предложение на рынке труда. Они также могут анализировать навыки, автоматизировать подбор кадров и предоставлять персонализированные рекомендации. Однако существуют проблемы, связанные с применением ИИ, такие как качество данных, технические сбои и сопротивление внедрению.

По мере развития технологий и появления новых инструментов на основе ИИ организации будут все больше полагаться на анализ рынка труда с помощью ИИ, чтобы оставаться конкурентоспособными и принимать обоснованные решения относительно своего персонала. Понимание динамики рынка труда и использование ИИ-инструментов для ее прогнозирования станут ключевыми факторами успеха на современном динамичном рынке.

Литература

1. LinkedIn launches its first AI agent to take on the role of job recruiters // TechCrunch. URL: https://techcrunch.com/2024/10/29/linkedin-launches-its-first-ai-agent-to- take-on-the-role-of-job-recruiters/ (дата обращения: 14.10.2024).

2. LinkedIn Learning's 2021 Workplace Learning Report – It's all about rapid skill building at scale // Job Market Monitor. URL: https://jobmarketmonitor.com/2021/04/26/linkedin- learnings-2021-workplace-learning-report-its-all-about-rapid-skill-building-at-scale/ (дата обращения: 14.10.2024).

3. The future of work after COVID-19 // McKinsey & Company. URL: https://www.mckinsey.com/featured-insights/future-of-work/the-future-of-work-after-covid-19 (дата обращения: 14.10.2024).

4. Бизнес-Профиль Универсальный психодиагностический комплекс // HT LAB. URL: https://ht-lab.ru/testy/biznes-profil/ (дата обращения: 21.10.2024).

5. *Игнатьева Е. А., Базылев Я. С.* Оценка влияния цифровизации на рынок труда: возможности и риски // Оригинальные исследования. – 2022. – Т. 12, № 11. – С. 414–421.

6. *Романова Е. С.* Прогнозируемые последствия внедрения искусственного интеллекта на рынке труда в сфере информационных технологий // Международные коммуникации. – 2019. – №1 (10). – С. 6.

УДК 004.8

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ СЛУХОВ В ИНТЕРНЕТ-НОВОСТЯХ

А. Д. Худобин, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается подход к решению задачи классификации слухов в новостях на основе продукционных правил. Представлены сравнительные результаты применения разного рода методов машинного обучения и нейронных сетей с использованием различных способов векторизации. Непроверенная информация в новостных сайтах приобретает характер не только информационного мусора, но и способна в отдельных случаях нанести существенный вред потребителям. Решаемая задача носит нетривиальный характер, актуальна и не имеет стандартного решения.
Ключевые слова: слухи, классификация, машинное обучение, нейронные сети, TF-IDF, Bag-of-words, Word2Vec, N-граммы, LSTM, RNN, продукционные правила.

Введение

Новостные сайты в интернет-пространстве содержат достаточное количество непроверенной информации. Это становится достаточно серьезной проблемой.

Во многих современных СМИ «желтой» направленности есть рубрики с названиями: «Слухи», «Сплетни», «Версия». Формально подобные рубрики анонсируют, что в них содержится непроверенная информация, а фактически они часто используются для очернения действующих лиц [1]. Сейчас новости, которые можно отметить как слухи, встречаются в СМИ не только в отдельных, предназначенных для них разделах, но и там, где должны быть факты [2].

Слух — высказывание, имеющее особую композицию, стилистические особенности и типичное содержание, то есть хорошо узнаваемое. Это массовое распространение актуальной для людей информации, авторство и достоверность которой не установлены и ответственность за которую никто не несет [3].

Факт — событие, которое уже произошло, его достоверность установлена.

Объемы информации таковы, что актуальна задача автоматического разделения слухов и фактов. Это важно, потому что слухов в новостях становится все больше, а реализаций способных их удалить, нет. Для решения данной задачи необходимо разработать подход, позволяющий выполнить классификацию слухов и фактов.

1. Сложности решения и предлагаемый подход

Для решения задачи отделения слухов от фактов предлагается использовать методы машинного обучения. Важной частью работы является создание исходного набора данных, которого нет. Для этого необходимо выгрузить новости с различных сайтов и провести разметку данных вручную, несмотря на очевидную трудоемкость процесса. В ходе работы возникла проблема: новости, относящиеся к классу «Политика», не получалось разделить на слухи и факты [2]. Поэтому понадобилось разработать набор правил, который позволил бы выполнить эти действия. Правила должны показать, существует ли возможность корректного разбиения на классы.

Предлагается следующий подход к решению:

1. Выгрузить новости с различных сайтов, провести разметку данных вручную.
2. Сформулировать продукционные правила для каждого класса.

3. Провести предварительную обработку данных.

4. Провести векторизацию различными способами (TF-IDF, Bag-of-words, Word2Vec, Pretrained Word2Vec) с целью выбора наиболее подходящего.

5. Решить задачу классификации, используя нейронные сети и методы машинного обучения.

6. Провести сравнение методов, сделать выводы об их эффективности.

2. Набор данных

В [2] приводятся результаты создания набора данных из 6 классов: «Политика», «Политика слухи», «Спорт», «Спортивные слухи», «Наука», «Научные слухи». Новости были выгружены с сайтов sports.ru, argumenti.ru.

Новости, которые относились к политике, не удалось корректно разбить на классы. Поэтому классы, относящиеся к политике, было решено удалить.

В датасет добавлены классы «Шоу-бизнес» и «Шоу-бизнес слухи». Новости для них были выгружены с сайтов 7days.ru и argumenti.ru.

Набор данных содержит 6570 новостей.

В табл. 1 показано, сколько данных содержит каждый класс и сколько новостей есть в тестовом и тренировочном наборах данных.

Таблица 1

Данные в датасете

Наука	Наука слухи	Спорт	Спорт слухи	Шоу-бизнес	Шоу-бизнес слухи
1095	1095	1095	1095	1095	1095
Тренировочная часть			Тестовая часть		
5256			1314		

В [2] данные были несбалансированными. В новом наборе данных количество новостей в каждом классе одинаково.

3. Набор правил

Для разбиения новостей на классы были разработаны продукционные правила.

Правило1 для каждого абзаца:

Если абзац не содержит «недавно/давно появилась новость» и абзац не содержит «читайте далее новость», то абзац_смысл=да

(Правило необходимо для того, чтобы отбросить текст, в котором идет описание предыдущих новостей, так как необходимо сделать вывод по конкретной новости, а не по связке).

Правило2:

Если абзац_смысл==да и в новости человек говорит о себе и событие, о котором говорят в новости уже произошло, то шоу-бизнес факт

Правило3:

Если абзац_смысл==да и в новости говорит официальный представитель и событие, о котором говорят в новости уже произошло, то шоу-бизнес факт

Правило4:

Если абзац_смысл==да и новость содержит опровержение, то шоу-бизнес факт

Правило5:

Если абзац_смысл==да и в новости говорит не сам человек и в новости говорит не официальный представитель, то шоу-бизнес слух

Правило6:

Если абзац_смысл==да и (новость содержит «по слухам» или новость содержит «СМИ узнали» или новость содержит «по слухам»), то шоу-бизнес слух

Правило7:

Если абзац_смысл==да и человек говорит о событии, которое еще не произошло, то шоу-бизнес слух

Правило8:

Если абзац_смысл==да и (новость содержит «широкая одежда» или новость содержит «тайная свадьба»), то шоу-бизнес слух

Правило9:

Если абзац_смысл==да и в новости пишут об уфологах, то наука слух

Правило10:

Если абзац_смысл==да и (в новости говорит представитель НАСА или в новости говорит представитель Роскосмоса) и говорят о планах на что-то, то наука слух

Правило11:

Если абзац_смысл==да и (в новости говорит представитель НАСА или в новости говорит представитель Роскосмоса) и говорят о результатах какого-либо процесса, то наука факт

Правило12:

Если абзац_смысл==да и (в новости говорит представитель НАСА или в новости говорит представитель Роскосмоса) и называют точную дату начала какого-либо процесса, то наука факт

Правило13:

Если абзац_смысл==да и в новости пишут о раскопках древних сооружений, то наука факт

Правило14:

Если абзац_смысл==да и в новости пишут об уже произошедшем запуске ракеты (спутника), то наука факт

4. Предварительная обработка данных

Для решения задачи классификации необходимо провести предварительную обработку данных:

1. Очистить новости, удалить лишние символы.
2. Обрезать каждую новость, оставить только первые 1350 символов.
3. Разбить новости на токены.
4. Провести лемматизацию всех токенов.

5. Решение методами машинного обучения и нейронными сетями

Результаты оцениваются с помощью метрики точности (Accuracy), которая показывает долю правильных классификаций. Будем использовать следующие методы машинного обучения: градиентный бустинг, гребневая регрессия, случайный лес, метод опорных векторов, стохастический градиентный спуск, логистическая регрессия, метод k ближайших соседей, дерево решений.

В табл. 2 представлена точность классификации методами машинного обучения для способов векторизации TF-IDF и Bag-of-words. Указан только лучший результат для каждого способа векторизации.

На рис. 1. Изображена матрица ошибок для классификации со способом векторизации TF-IDF (1, 2) и методом машинного обучения гребневая регрессия.

Таблица 2

Точность классификации для TF-IDF и Bag-of-words

Способ векторизации	Общая точность	Наука	Шоу-бизнес	Метод машинного обучения
TF-IDF (1, 1)	0.820	0,746	0,727	Метод опорных векторов
TF-IDF (1, 2)	0,829	0,774	0,744	Гребневая регрессия
TF-IDF (1, 3)	0,820	0,771	0,717	Градиентный спуск
TF-IDF (2, 2)	0,792	0,745	0,671	Градиентный спуск
TF-IDF (1, 6)	0,807	0,759	0,703	Градиентный спуск
BOW (1, 1)	0,787	0,718	0,684	Логистическая регрессия
BOW (1, 2)	0,805	0,734	0,705	Гребневая регрессия
BOW (1, 3)	0,804	0,743	0,680	Логистическая регрессия
BOW (2, 2)	0,780	0,723	0,662	Градиентный спуск

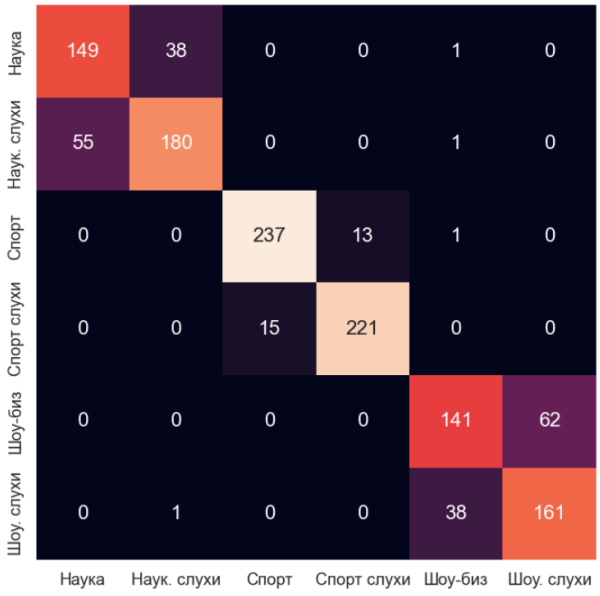


Рис. 1. Матрица ошибок для TF-IDF (1, 2)

С использованием Word2Vec было проведено сравнение предобученных моделей и собственных, созданных на основе обучающего набора данных. В собственных моделях проводилось сравнение нескольких параметров модели: количество эпох, размер окна, алгоритм обучения. Эпоха — итерация прохода текста. Размер окна — количество слов в контексте текущего слова.

В табл. 3 показана точность классификации методами машинного обучения для способа векторизации Word2Vec. Указан только лучший результат для каждого способа векторизации.

При увеличении количества итераций в собственном Word2Vec, увеличивается точность. Изменение размеров окна не оказывает большого влияния на результат.

RNN — рекуррентная нейронная сеть. LSTM — рекуррентная нейронная сеть, которая способна запоминать значения как на короткие, так и на длинные промежутки времени.

Таблица 3

Точность классификации для Word2Vec

Способ векторизации, количество эпох, окно	Общая точность	Наука	Шоу-бизнес	Метод машинного обучения
CBOW, 100, 2	0,800	0,723	0,718	Логистическая регрессия
CBOW, 100, 5	0,796	0,714	0,733	Логистическая регрессия
CBOW, 300, 2	0,800	0,716	0,728	Логистическая регрессия
CBOW, 300, 5	0,796	0,728	0,717	Гребневая регрессия
CBOW, 10, 2	0,778	0,740	0,702	Градиентный бустинг
CBOW, 10, 5	0,769	0,702	0,690	Метод опорных векторов
CC.RU pretrained, 10, 5	0,737	0,721	0,618	Градиентный бустинг
RUWIKI pretrained, 10, 5	0,791	0,738	0,707	Градиентный бустинг
WIKI-LENTA pretrained, 10, 5	0,790	0,735	0,700	Градиентный спуск
SG, 10, 2	0,772	0,706	0,694	Метод опорных векторов
SG, 10, 5	0,772	0,710	0,659	Градиентный спуск
SG, 100, 2	0,796	0,730	0,713	Метод опорных векторов
SG, 100, 5	0,802	0,735	0,738	Логистическая регрессия
SG, 300, 2	0,788	0,711	0,706	Градиентный спуск
SG, 300, 5	0,802	0,735	0,734	Логистическая регрессия

В табл. 4 показана точность классификации нейронными сетями для способов векторизации SG, 100, 5, RUWIKI pretrained, 10, 5.

Таблица 4

Точность классификации нейронными сетями LSTM и RNN

Способ векторизации, нейронная сеть	Общая точность	Наука	Шоу-бизнес
SG, 100, 5, LSTM	0,788	0,739	0,644
SG, 100, 5, RNN	0,588	0,569	0,528
RUWIKI pretrained, 10, 5, LSTM	0,770	0,725	0,621
RUWIKI pretrained, 10, 5, RNN	0,544	0,493	0,522

На рис. 2. Изображена матрица ошибок для классификации со способом векторизации SG, 100, 5 и нейронной сетью LSTM.

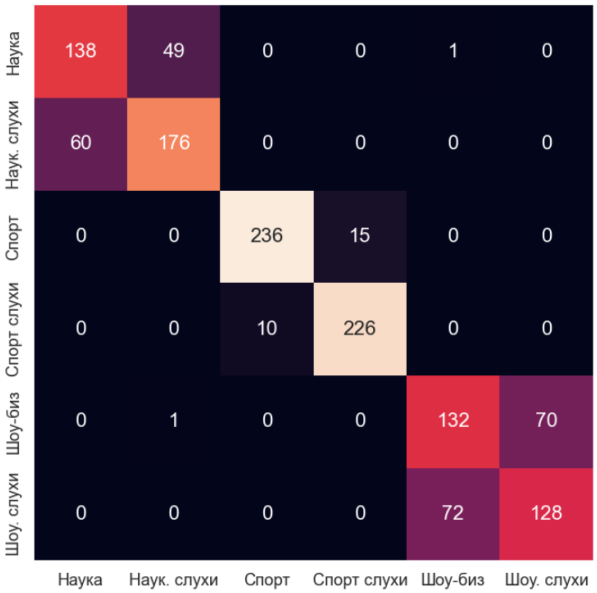


Рис. 2. Матрица ошибок для SG, 100, 5, нейронная сеть LSTM

Заключение

Представим основные выводы.

Таким образом, предлагается подход к решению задачи классификации слухов в новостях. В [2] был создан набор данных, который содержит новости науки, политики и спорта. Новости политики не удалось корректно разбить на классы, поэтому классы, относящиеся к политике, было решено удалить. Для корректного разбиения новостей на классы были созданы продукционные правила, которые позволяют выполнить эти действия. В набор данных были добавлены новые классы: «Шоу-бизнес», «Шоу-бизнес слухи».

В [2] данные были несбалансированными. В новом наборе данных количество новостей в каждом классе одинаково.

Была проведена предобработка данных и решена задача классификации различными методами машинного обучения и нейронными сетями с использованием различных способов векторизации.

Лучшая точность была получена с использованием алгоритмов машинного обучения (гребневая регрессия) и способа векторизации TF-IDF (1, 2). Решения с использованием способа векторизации TF-IDF показывали более высокую точность, чем решения с использованием Word2Vec. Решение с использованием собственных Word2Vec показали более высокую точность, чем решения с использованием предобученных Word2Vec. При увеличении количества итераций в собственном Word2Vec, увеличивается точность.

Решения с использованием методов машинного обучения показали более высокую точность, чем решения с использованием нейронных сетей. Решения с использованием RNN не справились с задачей и показали очень низкую точность.

Литература

1. Лингвистическая экспертиза в трудах Воронежской ассоциации экспертов-лингвистов : монография / Ж. В. Грачева [и др.] ; под ред. М. Е. Новичихиной, А. В. Рудаковой. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. – 357 с.

2. *Худобин А. Д.* TF-IDF, Bag-of-words, Word2Vec и N-граммы для решения задачи классификации слухов в новостях / А. Д. Худобин, И. Е. Воронина // Информатика: проблемы, методы, технологии. – 2024. – С. 1285–1294.

3. *Осетрова Е. В.* Слухи в парадигме лингвистической генристики / Е. В. Осетрова // Жанры речи 2. – 2015. – № 12. – С. 80–89.

УДК 004.932

СИСТЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ В ОБЛАСТИ ОФТАЛЬМОЛОГИИ

А. А. Худяков[1], А. А. Арзамасцев[1, 2]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Тамбовский филиал Федерального государственного автономного учреждения «Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С. Н. Федорова»

Аннотация. Данная статья представляет собой обзор возможностей применения систем искусственного интеллекта в офтальмологии для анализа изображений, полученных с различных медицинских приборов. Разбираются недостатки и ограничения классических подходов, таких как мультиклассовая классификация с использованием сверточных нейронных сетей. Рассматриваются последние исследования и достижения на стыке офтальмологии и машинного обучения, предлагающие передовые подходы с применением механизмов внимания и ансамблей моделей, а также алгоритмы преобразования изображений и удаления шумов.
Ключевые слова: искусственный интеллект, нейронные сети, сверточные нейронные сети, визуальные трансформеры, компьютерное зрение, офтальмология.

Введение

Как и во многих других областях медицины, в офтальмологии для постановки диагноза широко используется анализ изображений, полученных при помощи различных приборов, будь то оптическая когерентная томография (ОКТ), сканирующая лазерная офтальмоскопия (СЛО) и другие методы проведения исследования. Постановка диагноза в большинстве случаев может быть сведена к присвоению такому изображению соответствующей метки, обозначающей найденное заболевание или отклонение от нормы, то есть к широко распространенной и изученной в машинном обучении задаче классификации.

Помимо непосредственно задачи классификации, для работы с каждым видом офтальмологических изображений требуется индивидуальный подход, включая различия в размерах изображения, количестве цветов, подверженности появлению шумов и артефактов, смазанных снимков, поворотов. Это требует предварительной обработки снимков перед передачей их в нейронную сеть, а в некоторых случаях и перед постановкой диагноза самим врачом-диагностом.

Эти и другие задачи анализа изображений в офтальмологии, ранее казавшиеся неприступными для традиционных алгоритмов, сегодня можно решить при помощи различных методов машинного обучения, а появление и адаптация продвинутых архитектур, таких как визуальные трансформеры, делают возможными использование нейросетевых моделей в качестве полноценных ассистентов для специалистов отрасли, особенно на ранних стадиях прогрессирования заболевания.

1. Применение сверточных нейронных сетей в офтальмологии

При работе с изображениями в машинном обучении хорошо себя зарекомендовали сверточные нейронные сети (СНС). Первая часть такой сети представляет собой чередование сверточных и пулинговых слоев, отбирающих из данных существенные признаки, а вторая

состоит из нескольких полносвязных слоев. Результатом работы такой модели являются вероятности принадлежности изображения к одному из классов.

Этот подход достаточно прост и может быть довольно эффективен, но все же имеет ряд недостатков, большинство из которых заложены в его собственную архитектуру. Как и многие нейросетевые подходы, он предоставляет лишь конечный результат своей работы (вероятности классов), но не позволяет анализировать и интерпретировать промежуточные результаты и сам процесс принятия решения, который привел к итоговому ответу, что ограничивает применение таких моделей на практике. Монолитная и неделимая архитектура модели также требует полного переобучения при любом изменении своей структуры или структуры данных, например, при появлении нового класса, который представляет собой ранее не встречающееся для модели заболевание. Архитектура также не позволяет эффективно и полноценно диагностировать по изображению наличие у пациента сразу нескольких заболеваний, так как предсказанные вероятности предполагают лишь взаимоисключающие варианты.

На данный момент существует множество разновидностей архитектур СНС, отличающихся размерами сверточных ядер, количеством и порядком слоев и другими характеристиками, и многие из этих архитектур показывают достойные результаты в различных задачах офтальмологии. Найим А. и соавт. в своей работе [1] производят сравнение большого количества популярных архитектур на задаче диагностирования кератоконуса – дегенеративного невоспалительного заболевания глаза. Для сравнения были взяты такие архитектуры, как VGG16, ResNet50, EfficientNetB0, MobileNetV2, DenseNet121 и другие. Лучшие результаты показала модель MobileNetV2, успешно отличающая здоровый глаз от больного и справляясь со спорными ситуациями, показав впечатляющую точность в 98% на тестовой выборке. Модель с подобным уровнем точности уже может уверенно использоваться на практике и помогать в раннем диагностировании заболеваний.

Помимо задач классификации, модели на основе СНС могут использоваться для преобразования офтальмологических изображений. Частный случай таких моделей — генеративно-состязательные сети (GAN). Модель состоит из двух сетей, первая из которых генерирует данные, а вторая старается отличить подлинные данные от созданных. В работе Ксин Т. и соавт. [2] подобная сеть используется для преобразования изображений ОКТ в изображения конфокальной микроскопии. ОКТ является достаточно быстрым и неинвазивным методом получения трехмерных изображений, представляющих собой поперечные срезы различных структур глаза. Главным недостатком этого метода является большая зашумленность и артефакты, вызванные движением пациента или другими внешними факторами, что может сделать незаметными важные для диагноза детали. Это особенно критично на ранних стадиях заболевания, так как детали могут быть легко приняты за шум и пропущены как нейронной сетью, так и опытным врачом-диагностом. Более точные методы, такие как конфокальная микроскопия, являются инвазивными и занимают больше времени, но дают чистые изображения, хорошо подходящие для диагностики. Использование нейронных сетей для преобразования изображений в первую очередь является мощным инструментом удаления шумов из изображений ОКТ, существенно не увеличивая при этом время и сложность обследования.

В работе Слутвега И. и соавт. [3] СНС используются для классификации и расширения исходного набора данных при определении ранних стадий болезни Альцгеймера. Исходный набор данных состоит из изображений СЛО глазного дна, ОКТ и ОКТ-ангиографии сетчатки пациентов. Для обучения СНС нужна достаточно большая выборка, которую не всегда возможно получить или собрать из-за различных этических и других ограничений, присутствующих в медицине. Чтобы решить эту проблему, авторы используют особый вид генеративной модели — диффузионную вероятностную модель, идея которой была взята из неравновесной термодинамики. Она использует цепь Маркова, которая из исходного изображения, представленного в виде гауссовского шума, постепенно убирает шумы, тем самым генерируя новые

уникальные примеры для обучения мультимодального классификатора. Данное исследование является особенно важным в контексте того, что для полноценного диагностирования болезни Альцгеймера используются инвазивные и дорогостоящие методы, такие как AmyloidPET и анализ спинномозговой жидкости пациента, из-за чего их нецелесообразно и неудобно использовать на ранних стадиях болезни. Предложенное в статье неинвазивное офтальмологическое исследование значительно упрощает и удешевляет диагностику заболевания на ранних стадиях, позволяя раньше начать его купирование и замедлить развитие.

2. Использование визуальных трансформеров и механизма внимания

СНС хорошо обнаруживают локальные признаки в пределах небольших областей изображения, но данная локальность имеет недостаток — при обработке каждого пикселя ядром свертки он взаимодействует только с пикселями в небольшой области вокруг самого себя, а для сбора глобальной информации об изображении и связях между его частями, требуется большое количество слоев. Архитектура трансформера, использующая механизм внимания и хорошо зарекомендовавшая себя для обработки естественного языка, также получила свое применение в задачах компьютерного зрения. Она позволяет более эффективно обнаруживать признаки в глобальном контексте изображения и находить связи между отдаленными областями. Из недостатков таких моделей стоит выделить большой размер и требования к вычислительным ресурсам, тогда как модели с небольшим количеством параметров проигрывают СНС в точности предсказаний.

Так, работа Тухидул И. и соавт. [4] показывает возможности применения ансамбля моделей, состоящего из СНС и визуального трансформера, для обнаружения ключевых биомаркеров по изображениям ОКТ из набора данных OLIVES [5]. Использованные в исследовании модели по отдельности значительно уступают передовым решениям, в частности, из-за своего небольшого размера, но большую роль в этом играют и сами данные. Изображения с томографа могут отличаться яркостью, ориентацией и, как было упомянуто ранее, наличием большого количества шумов, которые очень непросто убрать. Использованный ансамбль моделей представляет собой параллельное вычисление результата классификации СНС и визуальным трансформером, а итоговый ответ является взвешенным средним полученных результатов, что позволяет компенсировать ошибки каждой модели по отдельности. Полученный ансамбль значительно превосходит входящие в него модели по метрике F1 и обладает небольшим общим количеством параметров по сравнению с передовыми решениями в области, что положительно сказывается на времени обучения и генерации ответов.

В совместной работе [6] ученых из СПбГЭТУ «ЛЭТИ» и Джадавпурского университета Индии показана модель классификатора для распознавания глаукомы по фотографиям глазного дна. Два последовательных блока с механизмом внимания используются поверх сверточной нейронной сети DenseNet121, которая отвечает за выделение признаков, но не за итоговый результат классификации. Полученная модель превосходит существующие передовые решения в точности прогнозов и метрике F1, используя наборы данных RIM-ONE [7] и ACRIMA для обучения и валидации.

Как и СНС, модели на основе механизма внимания помимо задач классификации могут использоваться для подготовки данных. В работе Йепенг Л. и соавт. [8] описывается использование сильно модифицированной модели на основе трансформеров для регистрации изображений глазного дна — нахождения соответствия между несколькими искаженными изображениями и приведение их к единой системе координат путем деформаций. Это позволяет привести разнородные или некорректно собранные данные к единому виду для упрощения диагностики.

Заключение

Современные архитектуры нейросетевых моделей получили широкое распространение в офтальмологии и используются как для диагностики, так и для обработки и подготовки данных с различных приборов. Результаты исследований показывают, что данные модели в некоторых случаях уже обладают достаточно высокой точностью предсказаний, чтобы использоваться в качестве ассистента врача-диагноста, и позволяют снизить нагрузку на медицинский персонал, заменяя собой некоторые дорогостоящие инвазивные методы. Помимо задач классификации, методы машинного обучения также могут использоваться для аугментации исходного набора данных, очистки изображений от шумов и других артефактов.

Благодарности

Работа выполнена в соответствии с договором о научно-техническом сотрудничестве Воронежского государственного университета и Федерального государственного автономного учреждения «Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С.Н. Федорова», Тамбовского филиала от 28.11.2022.

Литература

1. *Nayeem A.* Comparative Performance Analysis of Transformer-Based Pre-Trained Models for Detecting Keratoconus Disease / A. Nayeem, R. Maruf, I. Fatin, K. Imran, S. Sanowar, R. Sadekur. – URL: https://arxiv.org/abs/2408.09005 (дата обращения 05.10.2024).

2. *Xin T.* The Quest for Early Detection of Retinal Disease: 3D CycleGAN-based Translation of Optical Coherence Tomography into Confocal Microscopy / T. Xin, A. Nantheera, N. Lindsay, A. Alin. – URL: https://arxiv.org/abs/2408.04091 (дата обращения 03.10.2024).

3. *Slootweg I.* Generative artificial intelligence in ophthalmology: multimodal retinal images for the diagnosis of Alzheimer's disease with convolutional neural networks / I. Slootweg, M. Thach, K. Curro-Tafili [и др.]. – URL: https://arxiv.org/abs/2406.18247 (дата обращения 06.10.2024).

4. *Touhidul I.* Ophthalmic Biomarker Detection with Parallel Prediction of Transformer and Convolutional Architecture / I. Touhidul, A. Chowdhury, M. Hasan [и др.]. – URL: https://arxiv.org/abs/2409.17788 (дата обращения 10.10.2024).

5. *Prabhushankar M.* OLIVES Dataset: Ophthalmic Labels for Investigating Visual Eye Semantics / M. Prabhushankar, K. Kokilepersaud [и др.]. – URL: https://arxiv.org/abs/2209.11195 (дата обращения 10.10.2024).

6. *Chakraborty S.* A Dual Attention-aided DenseNet-121 for Classification of Glaucoma from Fundus Images / S. Chakraborty, A. Roy [и др.]. – URL: https://arxiv.org/abs/2406.15113 (дата обращения 09.10.2024).

7. *Fumero F.* RIM-ONE DL: A Unified Retinal Image Database for Assessing Glaucoma Using Deep Learning / F. Fumero, T. Diaz-Aleman [и др.]. – URL: https://www.ias-iss.org/ojs/IAS/article/view/2346 (дата обращения 09.10.2024).

8. *Liu Y.* Progressive Retinal Image Registration via Global and Local Deformable Transformations / Y. Liu, B. Yu [и др.]. – URL: https://arxiv.org/abs/2409.01068 (дата обращения 13.10.2024).

УДК 004.932.72

АЛГОРИТМ ПОСТОБРАБОТКИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ СЕГМЕНТАЦИИ МУЛЬТИФАЗНЫХ КТ-ИЗОБРАЖЕНИЙ

А. В. Черемискин, И. Л. Каширина

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной работе рассматривается алгоритм постобработки для повышения точности сегментации мультифазных КТ-изображений, полученных с помощью нейронной сети U-Net. Основной целью является улучшение точности сегментации, устранение топологических ошибок и минимизация ложноположительных результатов. Алгоритм включает три этапа: удаление шумов, объединение пересекающихся патологий и объединение фаз контрастирования.
Ключевые слова: нейронные сети, сегментация, U-Net, постобработка.

Введение

Сегментация медицинских изображений является ключевой задачей в анализе данных. Однако разнообразие исследуемых объектов создает необходимость в универсальных инструментах. Исследования показали, что модели, хорошо работающие на разных типах задач, оказываются более эффективными, чем узкоспециализированные алгориитмы [1]. В контексте автоматизированного анализа компьютерных томограмм используется сверточная нейронная сеть архитектуры U-Net для мультиклассовой сегментации патологических образований. Выходные данные сети представляют собой вероятностные карты принадлежности каждого вокселя к различным классам патологий либо к фоновому классу. Текущий алгоритм классификации вокселей основан на принципе максимума, где каждому вокселю присваивается класс с наибольшей вероятностью. Однако данный подход не учитывает анатомические и патофизиологические особенности взаимного расположения патологических образований, что приводит к появлению топологически некорректных артефактов сегментации, в частности, к ошибочной идентификации патологических структур внутри других патологических образований. Данная проблема обуславливает необходимость разработки универсального алгоритма постобработки результатов сегментации, учитывающего топологические ограничения и анатомические особенности взаимного расположения патологических структур.

1. Описание исходных данных

В качестве исходных данных в этой работе использовались результаты сегментации нейронной сети, в которых наряду с истинными патологиями присутствовали ложные классы. Нейронная сеть тестировалась на открытом наборе данных из проекта The Medical Segmentation Decathlon (MSD) [2], содержащем трехмерные медицинские изображения. Для исследования был выбран поднабор данных, который содержит изображения печени в формате NIfTI, полученные в четырех фазах контрастирования. В рамках работы рассматривались две фазы с целью проверки гипотезы о повышении диагностической точности учета результатов на разных фазах. Использование изображений с разных фаз КТ при разработке автоматизированной модели сегментации патологий важно, потому что каждая фаза предоставляет уникальную информацию о тканях и структурах организма. Нативная фаза (NA) позволяет оценить естественные характеристики тканей без контраста и четко выделяет жировую ткань, кисты, кальцинаты. Портально-венозная фаза (PV) улучшает визуализацию сосудистых структур,

помогая обнаруживать патологии, связанные с кровотоком, такие как злокачественные новообразования. Комбинирование данных из разных фаз повышает точность модели, позволяя ей более эффективно различать и сегментировать различные типы патологий. Однако различия в интенсивности сигнала и присутствие шумов и артефактов затрудняют надежную сегментацию и распознавание патологий, требуя разработки сложных алгоритмов обработки и анализа изображений, способных адаптироваться к этим вариациям и обеспечивать высокую точность диагностики.

2. Предварительные эксперименты

В предварительных экспериментах выполнялась оценка точности модели сегментации патологий в двух фазах контрастирования (NA и PV) для выявления оптимальной фазы, при которой модель наилучшим образом обнаруживает истинные патологии. Результаты показали, что точность сегментации патологий в фазе PV превышала соответствующие значения в фазе NA. В частности, в фазе PV было выявлено больше патологий с истинным классом и меньше ложноположительных результатов по сравнению с фазой NA.

3. Алгоритм постобработки

В данной работе представлен алгоритм постобработки сегментации патологий на мультифазных КТ-изображениях, состоящий из трех последовательных этапов: удаление шумов, объединение пересекающихся патологий, объединение фаз контрастирования.

3.1. Удаление шумов

На первом этапе для фильтрации избыточных данных удаляются все найденные патологии объемом меньше заданного порога. Для этого создаётся трёхмерная бинарная карта, где каждому элементу присваивается значение 1 (наличие патологического образования) или 0 (отсутствие патологического образования). Затем для каждой связной области, отмеченной на бинарной карте значением 1, рассчитывается объем вокселей. Если объем области меньше порогового значения, она классифицируется как шум и исключается из дальнейшего анализа. Данный подход позволяет уменьшить количество ложноположительных результатов, связанных с мелкими артефактами и незначительными изменениями, не имеющими клинической значимости. После удаления таких областей остаются только те образования, которые потенциально могут представлять практический интерес, что улучшает точность последующих этапов алгоритма.

3.2. Объединение пересекающихся патологий

На втором этапе алгоритма проводится анализ пространственных пересечений между патологическими областями различных классов, выявленных на этапе сегментации. Для устранения невозможных с клинической точки зрения ситуаций, где разные патологии перекрываются, предложен следующий алгоритм:

1. Идентификация всех патологий независимо от их исходной классификации.
2. Разделение всех найденных патологий в связные компоненты для последующего объединения пересекающихся патологий.
3. Слияние областей внутри каждой найденной связной компоненты и суммирование вероятностей принадлежности к каждому классу патологии, что даст интегральную оценку присутствия каждого класса в объединенной области.

4. Присвоение объединенной области класса с наибольшей суммарной вероятностью на основе найденных вероятностных оценок.

Данный алгоритм корректирует результаты модели, устраняя невозможные с клинической точки зрения ситуации, где разные патологии перекрываются, и обеспечивает более достоверную идентификацию патологий с учетом их пространственного расположения и вероятностных характеристик.

3.2. Объединение фаз контрастирования

На финальной стадии алгоритма происходит объединение результатов сегментации, полученных на двух фазах контрастирования. Цель объединения заключается в нахождении оптимального баланса между двумя противоположными задачами: сохранением всех истинных патологических образований и исключением ошибочных патологий. Эти задачи взаимно противоречат друг другу, поскольку увеличение числа выявленных истинных патологий приводит к росту количества ложных данных и наоборот. Для достижения оптимального результата было рассмотрено три метода объединения фаз:

1. Метод строгой фильтрации: сохраняются только те патологии, которые обнаружены на обеих фазах. Этот метод позволяет эффективно удалять ложные патологии, однако увеличивает риск потери значимых патологических образований, если они выявляются только на одной из фаз.

2. Метод максимизации данных: учитываются все патологии, найденные на обеих фазах. Такой подход гарантирует максимальное сохранение всех истинных патологий, однако приводит к высокому числу ложноположительных результатов.

3. Метод приоритета PV-фазы: сохраняются патологии, которые хотя бы частично обнаружены на PV-фазе. Этот подход основан на предварительных экспериментах, которые показали, что PV-фаза наиболее эффективно выявляет значимые патологические образования.

4. Результаты тестирования

Первые два этапа алгоритма были протестированы для каждого изображения, в котором нейронная сеть допустила ошибку. В результате выполнения этих этапов патологии объемом меньше порогового значения были успешно удалены, а пересекающиеся патологии объединены. В 65 % случаев в ходе применения первых двух этапов алгоритма были устранены избыточные данные. Однако в остальных случаях из-за значительных начальных ошибок модели был допущен неправильный выбор класса объединенной структуры.

Кроме того, были проведены тесты с использованием всех трех шагов алгоритма. При тестировании алгоритма для каждого из методов объединения фаз были вычислены: средний процент изменения объема патологий истинного класса относительно фазы с наибольшим объемом истинных патологий, средний процент изменения объема патологий ложного класса относительно фазы с минимальным объемом ложных патологий, а также изменение доли патологий истинного класса. Результаты тестирования представлены в табл. 1.

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы относительно влияния методов объединения фаз на точность сегментации:

1. Метод строгой фильтрации показал наибольшее улучшение доли патологий истинного класса (+60 %), что свидетельствует о значительном уменьшении числа ложных патологий. Однако увеличение объема патологий истинного класса при объединении двух фаз составило лишь +8 %, что указывает на некоторую потерю истинных патологий при значительном удалении ложных. Этот метод эффективен в задачах, где приоритет отдается исключению ложных патологий, но он может привести к потере части значимых данных.

Таблица 1

Сравнение методов

	Изменение доли патологий истинного класса	Изменение объема патологий истинного класса	Изменение объема патологий ложного класса
Метод строгой фильтрации	+60 %	+8 %	+45
Метод максимизации данных	+8 %	+21 %	+119 %
Метод приоритета PV-фазы	+35 %	+20 %	+84 %

2. Метод максимизации данных показал значительное увеличение объема патологий ложного класса (+119 %), что привело к существенному росту ложноположительных результатов. В то же время, увеличение объема патологий истинного класса составило лишь +21 %, а изменение доли патологий истинного класса оказалось минимальным (+8 %). Этот метод может быть полезен в случаях, когда важно сохранить все обнаруженные патологии, но он приводит к ухудшению качества сегментации за счет увеличения ложных данных.

3. Метод приоритета PV-фазы продемонстрировал сбалансированные результаты: увеличение объема патологий истинного класса составило +20 %, а ложных патологий — +84 %. Изменение доли патологий истинного класса составило +35 %, что свидетельствует о значительном улучшении сегментации при умеренном увеличении ложных данных. Этот метод является наиболее сбалансированным, обеспечивая хороший компромисс между сохранением истинных патологий и минимизацией ложных.

Таким образом, алгоритм постобработки с использованием метода приоритета PV-фазы является оптимальным, так как демонстрирует наилучший баланс между увеличением объема патологий истинного класса и контролем за числом ложных патологий, обеспечивая улучшение отношения между объемами истинных и ложных патологий. Этот метод обеспечивает наиболее точную сегментацию, что делает его предпочтительным для практического применения.

Заключение

В данной работе разработан алгоритм постобработки сегментации патологий на мультифазных КТ-изображениях, который включает удаление шумов, объединение пересекающихся патологий и оптимизации результатов с использованием разных фаз контрастирования. Тестирование показало, что предложенные методы эффективно повышают точность сегментации, обеспечивая баланс между сохранением истинных объектов и минимизацией ложных данных. Этот подход улучшает качество результатов и может быть полезен в клинической практике для автоматизированного анализа медицинских изображений.

Литература

1. *Antonelli M., Reinke A., Bakas S. et al.* The Medical Segmentation Decathlon // Nature Communications. 2022. Т. 13. С. 4128. URL: https://doi.org/10.1038/s41467-022-30695-9 (дата обращения: 25.11.2024).

2. *Simpson A. L., Antonelli M., Bakas S., et al.* A large annotated medical image dataset for the development and evaluation of segmentation algorithms. arXiv.org, 2019. URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.09063 (дата обращения: 25.11.2024).

3. *Cao K., Xia Y., Yao J. et al.* Large-scale pancreatic cancer detection via non-contrast CT and deep learning // Nat Med. – 2023. – T. 29. – C. 3033–3043. URL: https://doi.org/10.1038/s41591-023-02640-w (дата обращения: 25.11.2024).

4. *Ma, J., He, Y., Li, F. et al.* Segment anything in medical images. Nat. Commun. 15, 654 (2024). URL: https://doi.org/10.1038/s41467-024-44824-z (дата обращения: 25.11.2024).

УДК 004.932.72.1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОСЕТИ WHISPER ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ МЕДИЦИНСКОЙ ТЕРМИНОЛОГИИ И УЛУЧШЕНИЯ РАННЕЙ МЕДИЦИНСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Д. Е. Черняев, А. А. Ворсунов, Д. В. Лебедев

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается использование нейросетевой методики автоматического распознавания речи в медицинской диагностике рака молочной железы и для улучшения и ускорения её процессов.
Ключевые слова: автоматическое распознавание речи, медицинская терминология, медицинская диагностика, рак молочной железы.

Введение

Рак молочной железы — одно из самых распространенных и изучаемых злокачественных новообразований, однако он остается серьезной угрозой для здоровья женщин во всем мире. Раннее выявление и точная диагностика играют ключевую роль в улучшении результатов лечения и увеличении выживаемости пациентов. Современные достижения в области обработки естественного языка (NLP) и технологий распознавания голоса позволяют использовать голосовые помощники как перспективные инструменты для содействия медицинским исследованиям и принятия клинических решений [8].

Целью данного исследования является разработка голосового помощника, способного точно распознавать термины, связанные с раком молочной железы, из речевого ввода человека. Такой помощник будет использовать алгоритмы автоматического распознавания речи (ASR) и NLP для анализа произнесенных слов и выделения ключевых терминов, связанных с раком молочной железы, таких как «рак молочной железы», «опухоль груди», «карцинома груди», «HER2», «маммография», «BRCA1/2» и другие.

Голосовой помощник может быть интегрирован с научными базами данных для поиска релевантных научных исследований, используя выделенные ключевые слова. Это обеспечит доступ к актуальной научной литературе, связанной с раком молочной железы, и позволит исследователям, врачам и пациентам эффективно находить и анализировать новейшие данные.

Предоставляя информацию на основе актуальной научной литературы, голосовой помощник может поддерживать принятие клинических решений, основанных на фактических данных, способствовать новым открытиям и ускорять распространение знаний в области лечения и исследования рака молочной железы.

Предлагаемая медицинская система автоматизированной диагностики выполняет несколько этапов обработки медицинских изображений, таких как предварительная обработка, сегментация, функция извлечения признаков и классификация.

Технология автоматического распознавания речи (ASR), преобразующая устную речь в письменный текст, играет важную роль в правильном распознавании химических терминов из человеческой речи. Система Whisper ASR используется для приема ввода от пользователя и предоставления транскрипций на его основе. Транскрипции медицинских терминов из человеческой речи, созданные ASR, могут использоваться для анализа данных и поиска. Точное распознавание медицинских терминов с помощью ASR позволяет эффективно искать, индексировать и извлекать соответствующую информацию из транскрипций, что позволяет исследователям анализировать и извлекать значимые идеи из своих данных.

1. Нейросеть Whisper ASR

Whisper ASR основана на архитектуре глубокого обучения с использованием рекуррентных нейронных сетей (RNN), а точнее их варианта — сети с долговременной краткосрочной памятью (LSTM). Этот тип RNN оснащён специальными механизмами, которые позволяют эффективно учитывать долгосрочные зависимости в последовательных данных. LSTM особенно хорошо справляются с моделированием последовательностей, таких как речевые сигналы, и широко применяются в системах автоматического распознавания речи (ASR). Модель Whisper ASR обучена на обширном наборе многоязычных и многозадачных данных, собранных из Интернета. Благодаря этому она способна преобразовывать устную речь в текст на разных языках и для различных тематических областей. Whisper ASR демонстрирует высокую точность и производительность, что обусловлено использованием большого объёма данных в процессе обучения.

API предоставляет разработчикам удобный интерфейс для интеграции возможностей Whisper ASR в приложения или сервисы. Это позволяет использовать систему для распознавания речи без необходимости самостоятельного обучения или настройки модели.

Предлагаемая система использует возможности Whisper ASR для обработки неструктурированных речевых данных и выделения информации, связанной с диагностикой рака молочной железы. В рамках исследования изучаются методы предварительной обработки данных, представления признаков и конфигурации модели, чтобы оптимизировать её производительность для этой специфической задачи.

На рис. 1 и рис. 2 представлены архитектура нейронной сети и схема её обучения:

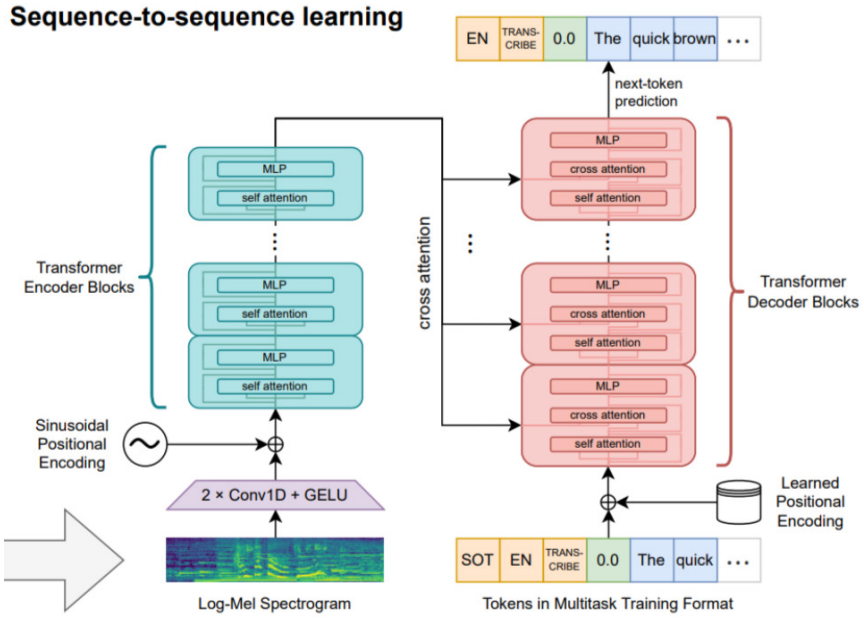


Рис. 1. Архитектура Whisper ASR

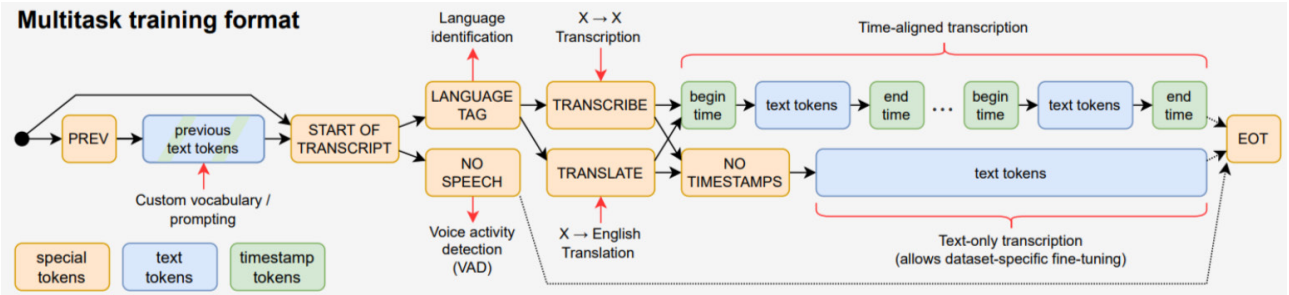


Рис. 2. Схема многозадачного обучения Whisper ASR

2. Обзор методологии и литературы

Разработка интерфейса модуля медицинской информационной системы для преобразования речи в текст обсуждает реализацию используемой оболочки Whisper. Whisper MR Wrapper — это легкий и эффективный программный модуль, который обеспечивает автоматическое распознавание речи (ASR) во встроенных системах с использованием фреймворка MediaRecorder API (MR). Он предоставляет простой интерфейс для захвата звука, распознавания речи.

Оболочка используется в различных приложениях, включая мобильную робототехнику, умные дома, системы роботизированных рук и носимые устройства [1].

В [2], автор обсуждает различные методы распознавания речи. В статье представлен всесторонний обзор традиционных и современных методов, используемых для распознавания речи, включая акустическую фонетику, динамическую временную деформацию, скрытые марковские модели, искусственные нейронные сети и методы глубокого обучения. Автор выделяет преимущества и ограничения каждого метода и приходит к выводу, что подходы, основанные на глубоком обучении, показали многообещающие результаты в повышении точности распознавания речи.

На рис. 3 описывается функционирование системы распознавания речи:

Рис. 3. Процесс работы системы автоматического распознавания речи

Внедрение слабо контролируемого метода для автоматизированного распознавания речи (ASR) вызвало прогресс в распознавании речи за счет разработки неконтролируемых методов предварительного обучения. Подход основан на крупномасштабном наборе данных слабо размеченных аудио- и текстовых данных, которые используются для обучения системы распознавания речи. Показано, что метод достигает самых современных показателей на нескольких тестах ASR, включая чистую и зашумленную речь [3].

Другой эффективный метод использует автоматическое распознавание речи (ASR) и обработку естественного языка (NLP) для транскрипции устной речи в письменный текст и создания результирующего текста.

Предлагаемый подход включает следующие этапы: сегментация аудиозаписи на предложения, преобразование речи в текст с использованием системы автоматического распознавания речи (ASR), а затем применение методов обработки естественного языка (NLP) для формирования итогового текста. Данный подход доказал свою эффективность при создании кратких резюме аудиоконтента. Он находит применение в таких задачах, как ведение заметок, обеспечение доступности информации и управление знаниями [4].

Для преобразования речи в текст также могут использоваться модели гауссовой смеси (GMM). Эти модели подходят для представления нормально распределённых субпопуляций в общей популяции. В контексте распознавания речи GMM применяются для обучения на наборах данных, содержащих речевые сигналы и соответствующие текстовые транскрипции. Процесс [5] включает в себя сегментацию речи на фонемы, оценку вероятности каждой фонемы на основе речевого сигнала и объединение последовательности фонем для формирования итоговой текстовой транскрипции [5].

Общий поток обработки и распознавания речевого сигнала показан на рис. 4.

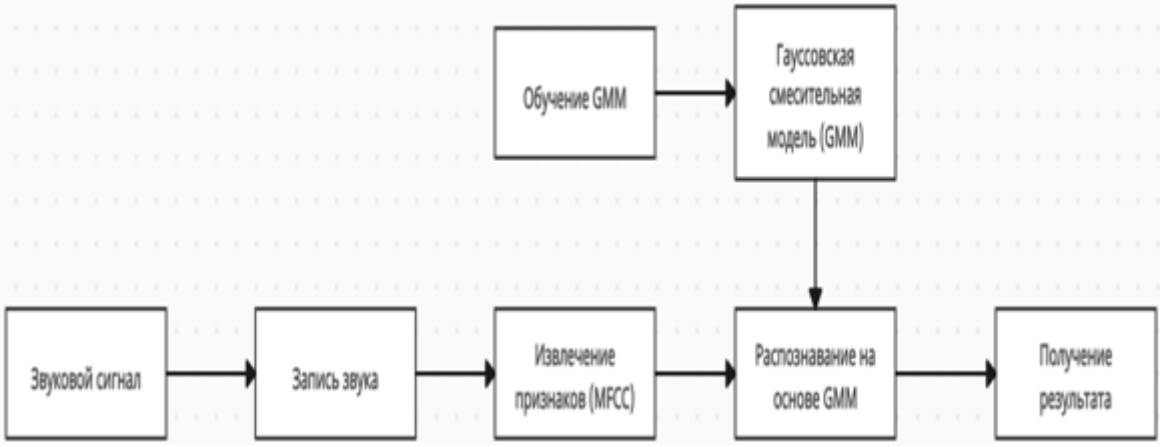


Рис. 4. Обработка и распознавание звука

Системы управления естественным языком для работы с различными акцентами используют алгоритмы распознавания речи, основанные на глубоких нейронных сетях (DNN). Эти алгоритмы повышают производительность систем автоматического распознавания речи (ASR) при обработке речи с различными акцентами. В статье представлена методология, включающая сбор разнообразных данных речевых сигналов и их текстовых транскрипций, а также обучение DNN для улучшения распознавания речи с учётом акцентов [6].

В работе [7], автор анализирует влияние изменчивости речи на системы ASR. Он рассматривает различные подходы к решению этой проблемы, включая нормализацию признаков, адаптацию под говорящего и компенсацию каналов. Обзор подчёркивает важность устранения изменчивости речи для разработки и внедрения высокоточных и надёжных систем ASR, применимых в различных реальных условиях.

3. Методология

Для обеспечения высококачественной записи речевых сигналов осуществляется выбор профессионального микрофона с улучшенными акустическими характеристиками, а его размещение и позиционирование оптимизируются в соответствии с установленными стандартами записи. В данном процессе предпочтение отдаётся направленным микрофонам, которые обладают способностью селективно улавливать звуковую волну, исходящую непосредственно изо рта говорящего, при этом эффективно подавляя фоновый шум и посторонние акустические помехи.

Размещение микрофона определяется с учётом акустических свойств и направленности устройства. Оно устанавливается на определённом расстоянии от источника звука, чтобы избежать эффекта перегрузки сигнала или излишнего затухания. Угол наклона микрофона регулируется таким образом, чтобы максимально точно фиксировать звуковые колебания, обеспечивая при этом минимизацию аэродинамических шумов, возникающих при артикуляции согласных звуков.

Для повышения качества записи могут использоваться дополнительные аксессуары, такие как поп-фильтры, которые эффективно минимизируют воздействие ударных воздушных потоков, возникающих при произношении определённых звуков, и ветрозащитные экраны, снижающие восприимчивость микрофона к шумам, вызванным движением воздуха. Для устранения механических вибраций микрофон размещается на специальных амортизирующих креплениях, которые предотвращают передачу внешних колебаний.

На этапе предварительной обработки аудиоданных применяется кодер модели Whisper — сложная нейронная сеть, способная работать с необработанными звуковыми волнами. Кодер преобразует входной сигнал через несколько слоёв, которые включают сверточные или рекуррентные нейронные сети (RNN). Первый шаг обработки состоит в преобразовании звуковой волны в спектрограмму — графическое представление частотных составляющих сигнала во времени. Этот процесс позволяет выделить ключевые спектральные характеристики аудиосигнала для последующего анализа.

Кодировочная сеть Whisper часто реализована в виде сверточной нейронной сети (CNN) или двунаправленной рекуррентной нейронной сети (BiRNN). Эти архитектуры обеспечивают эффективное извлечение как временных, так и спектральных признаков аудиосигнала. На выходе кодировочная сеть формирует сжатый вектор фиксированной длины, который аккумулирует наиболее значимые характеристики входного аудиосигнала, упрощая дальнейшую обработку и анализ.

Сжатый вектор передаётся в декодер, который отвечает за генерацию выходного речевого сигнала. В модели Whisper декодер, как правило, представлен рекуррентной нейронной сетью (RNN), которая принимает вектор узкого места на входе и преобразует его в спектрограмму. На следующем этапе спектрограмма обрабатывается вокодером — специализированным алгоритмом обработки сигналов, способным преобразовать её обратно в звуковую волну, формируя итоговый речевой сигнал.

Вектор узкого места передаётся в декодер, который отвечает за генерацию выходного речевого сигнала. В модели Whisper декодер, как правило, представлен рекуррентной нейронной сетью (RNN), которая принимает вектор узкого места на входе и преобразует его в спектрограмму. На следующем этапе спектрограмма обрабатывается вокодером — специализированным алгоритмом обработки сигналов, способным преобразовать её обратно в звуковую волну, формируя итоговый речевой сигнал.

Рис. 5. Общий процесс записи речи

Далее результаты преобразования речи в текст проходят этап нормализации, целью которого является удаление стоп-слов, знаков препинания и других нетекстовых элементов. Этот процесс включает преобразование текста в нижний регистр, удаление цифр и специальных символов, а также разбиение текста на отдельные слова с помощью токенизации.

После этого происходит извлечение ключевых слов (терминов). Это можно сделать двумя способами: вручную, посредством создания словаря химической терминологии на основе опубликованных материалов, или автоматически, с использованием программного обеспечения. После предварительной обработки текст сопоставляется с указанным словарём для выявления химических сущностей. Все слова и фразы, соответствующие терминам из словаря, извлекаются и идентифицируются как химические сущности.

После извлечения ключевых слов они используются для поиска соответствующих статей в базе данных медицинской терминологии. Это включает в себя написание скрипта, который отправляет запрос в базу данных, извлекает результаты поиска и извлекает соответствующую информацию.

4. Результаты

Была разработана система искусственного интеллекта (ИИ), интегрируемая в медицинские информационные системы (МИС), которая значительно упрощает процесс взаимодействия с пациентами и обеспечивает глубокий анализ медицинских данных. Эта система направлена на автоматизацию рутинных задач, ускорение документооборота и повышение точности диагностического процесса.

В основе системы лежит нейросетевая модель, которая преобразует голосовые данные в текст, выделяет ключевую информацию и структурирует её для последующего использования. Общий план работы данной модели отображает рис. 6.

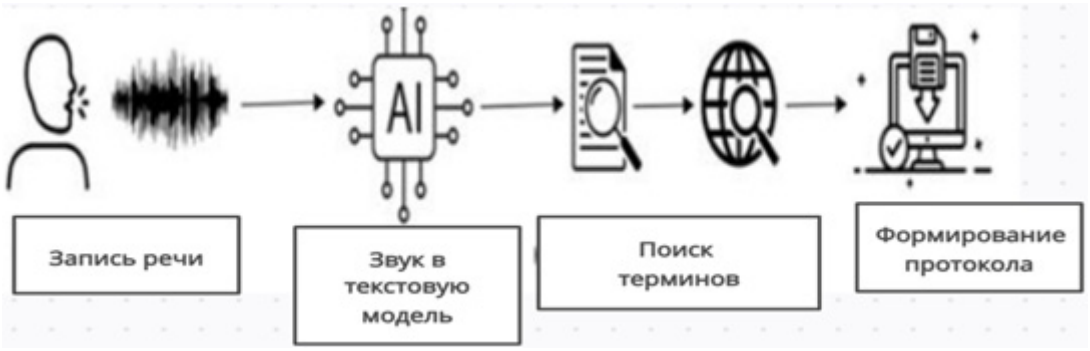


Рис. 6. Процесс работы реализованной системы

Основные этапы работы системы:

• Распознавание речи: аудиозапись, активируемая врачом, отправляется на сервер ИИ, где происходит её обработка и преобразование в текстовый формат.

• Анализ текста: нейросеть выделяет ключевые медицинские термины, такие как названия заболеваний, симптомы, лекарства и анализы, структурируя информацию в удобном для использования формате.

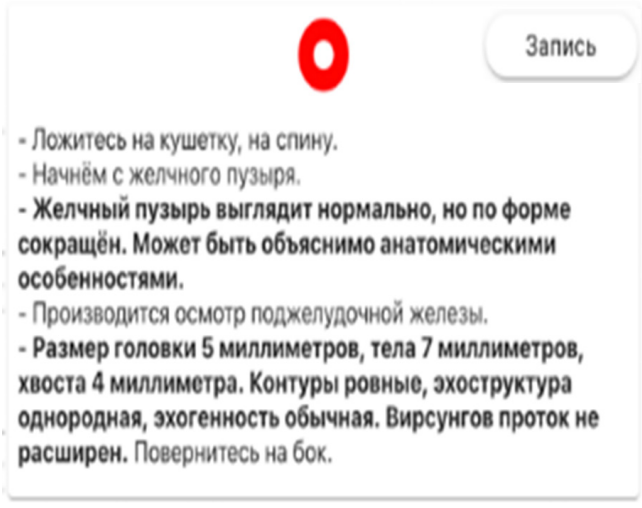


Рис. 7. Пример интерфейса записанного диалога

• После обработки текст передаётся клиентскому приложению, где реализованы следующие функции:

• Вывод текста на экран: врач видит полный текст диалога с пациентом, где ключевые слова и термины автоматически подсвечиваются, что упрощает восприятие данных (рис. 7).

• Автозаполнение медицинских протоколов: система автоматически заполняет шаблоны медицинских протоколов на основе структурированных данных, позволяя врачу при необходимости вносить коррективы (рис. 8).

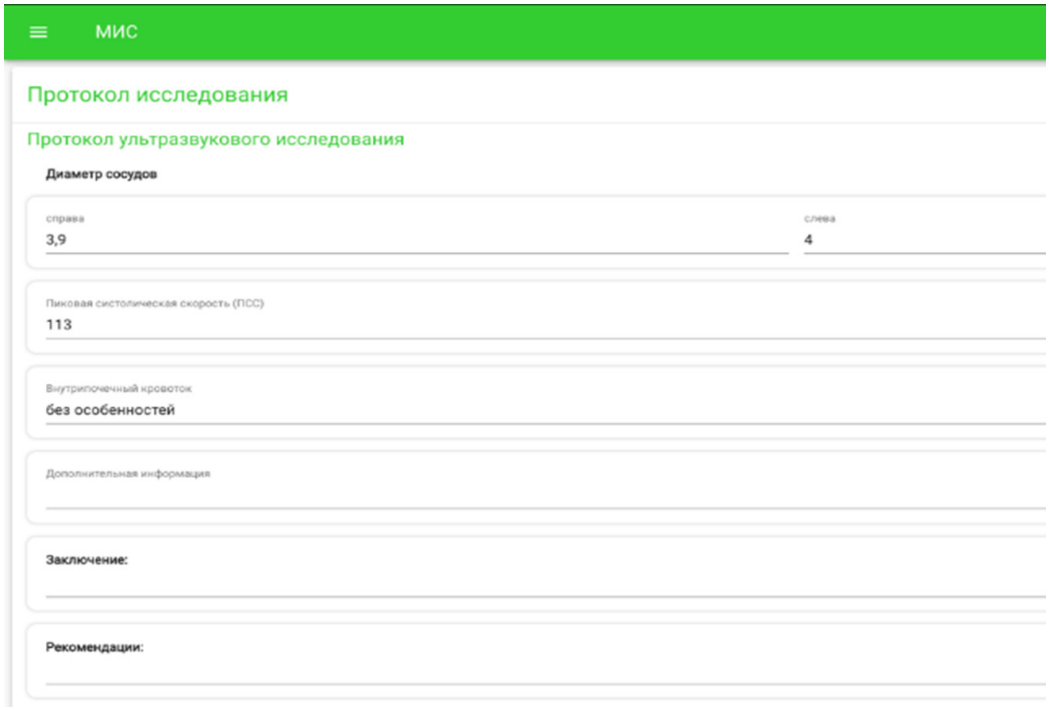


Рис. 8. Пример заполненного протокола

Основными преимуществами системы являются:

• Скорость: автоматизация позволяет сократить время на заполнение документации, освобождая больше времени для общения с пациентами.

• Качество диагностики: подсветка важных медицинских терминов помогает врачу фокусироваться на ключевых аспектах при анализе данных.

• Интеграция с МИС: система бесшовно подключается к существующим МИС без значительных изменений в инфраструктуре.

Система построена на современной модульной архитектуре, включающей:

• Основной сервер МИС: управляет пользователями, хранит и обрабатывает данные пациентов.

• Сервер ИИ: обрабатывает аудиоданные, выполняет распознавание речи и анализ текста.

• Клиентскую часть: отображает текст, обеспечивает подсветку терминов и заполняет протоколы.

Обмен данными между клиентом и сервером ИИ осуществляется через WebSocket, что обеспечивает высокую скорость обработки и минимальные задержки.

Технологический стек, используемый для создания системы:

• React: используется для создания динамичного и удобного интерфейса.

• Material-UI: обеспечивает современный дизайн и удобство работы с приложением.

• @wmik/use-media-recorder: Предназначен для записи аудиоданных.

• jszip: применяется для сжатия и передачи аудиофайлов, что оптимизирует использование сети.

На серверной части используется специализированная нейросетевая модель, обученная на медицинских данных. Она обеспечивает точное преобразование речи и выделение значимых медицинских сущностей.

Система функционирует в защищённой телекоммуникационной сети (ЗТКИ), что исключает вероятность внешних атак. Для авторизации используется стандартная схема логин/пароль (рис. 9). Такой уровень защиты является достаточным для работы внутри закрытой инфраструктуры.

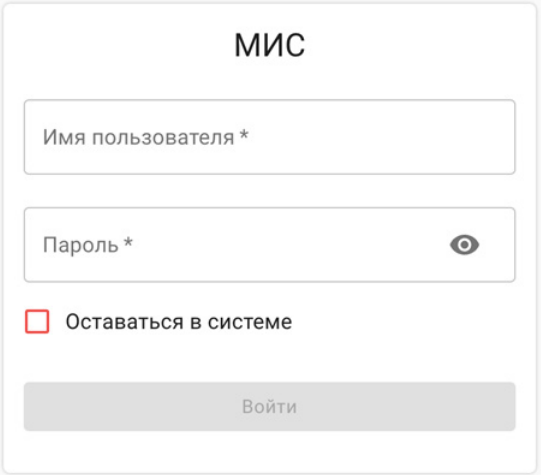


Рис. 9. Окно авторизации МИС

Заключение

В этой статье рассмотрены возможности применения современных технологий автоматического распознавания речи и обработки естественного языка (NLP) для разработки голосового помощника, способного распознавать ключевые термины, связанные с раком молочной железы. Было проанализировано использование таких инструментов для поддержки клинических решений, поиска релевантной научной литературы и повышения доступности знаний в области онкологи, а также показана реализация взаимодействия данного нейросетевого метода с МИС.

Современные достижения в области искусственного интеллекта и обработки естественного языка открыли возможность разработки сложных моделей, способных эффективно идентифицировать термины и концепции, связанные с онкологией, на основе аудиоданных. Обучение таких моделей проводится на обширных массивах данных, включающих лекции и научные статьи по онкологии, что позволяет им усваивать наиболее распространённую терминологию, ключевые идеи и фразы, характерные для этой области. После завершения обучения эти модели могут быть применены для автоматической транскрипции разговоров, извлечения ключевых понятий и терминов, связанных с раком, а также для генерации письменных резюме или научных текстов.

В перспективе использование нейросетевых технологий для выявления онкологических речевых оборотов с помощью синтеза речи моделей обещает значительный прогресс. Развитие технологий ИИ и NLP, вероятно, приведёт к созданию более сложных и точных моделей, которые смогут значительно облегчить работу исследователей и врачей в области онкологии.

Литература

1. *Ramírez-Duque A. A.* A Whisper ROS Wrapper to Enable Automatic Speech Recognition in Embedded Systems / A. A. Ramírez-Duque, M. E. Foster // HRCI 2023. – 2023.

2. *Saksamudre S. K.* A Review on Different Approaches for Speech Recognition System / S. K. Saksamudre, P. P. Shrishrima, R. R. Deshmukh // International Journal of Computer Applications. – 2015.

3. *Radford A.* Robust Speech Recognition via Large-Scale Weak Supervision / A. Radford, J. W. Kim, T. Xu, G. Brockman, C. McLeavey, I. Sutskever // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP) – 2019. – P. 5961–5965. DOI: 10.1109/ICASSP.2019.8682574.

4. *Vinnarasu A.* Speech to Text Conversion and Summarization for Effective Understanding and Documentation / A. Vinnarasu, D. V. Jose // International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE). – 2019.

5. *Chauhan V.* Speech to Text Converter Using Gaussian Mixture Model / V. Chauhan, S. Dwivedi, P. Karale, S. M. Potdar // International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET). – 2016.

6. *Gurtueva I.* Speech Recognition Algorithm for Natural Language Management Systems Under Variety of Accents / I. Gurtueva, O. Nagoeva, I. Pshenokova // E3S Web of Conferences. – 2020.

7. *Бензегиба М.* Автоматическое распознавание речи и речевая изменчивость: обзор / М. Бензегиба, Р. Де Мори, Ф. Дюфур, П. Дж. Годфри // Speech Communication – 2014. – Т. 57. – С. 109–129.

8. *Черняев Д. Е.* Диагностика рака груди при помощи системы поддержки принятия врачебных решений / Д. Е. Черняев, В. М. Павлова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж – 2024. – С. 1079–1085. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=66563100 (дата обращения: 01.01.2024).

9. *Faris W. F.* Cataract Eye Detection Using Deep Learning Based Feature Extraction with Classification // Research Journal of Computer Systems and Engineering. – 2020. – 1(2). – P. 20–25.

10. *Ajami S.* Use of speech-to-text technology for documentation by healthcare providers // Int. J. Healthc. Technol. Manag. – 2016. – 15(1). – P. 23–32.

11. *Cutajar M., Gatt E., Grech I., Casha O., Micallef J.* Comparative Study of Automatic Speech Recognition techniques // IET Signal Processing. – 2013. – 7(1).– P. 1–8.

УДК 004.912

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АРХИТЕКТУР НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ НОВОСТНЫХ СТАТЕЙ

В. И. Шиян, М. Е. Кокоровец, Ю. Д. Кривошей

Кубанский государственный университет

Аннотация. В данной работе проведено сравнительное исследование различных архитектур нейронных сетей, применяемых для задачи классификации новостных статей по тематикам. Рассмотрены одномерные свёрточные нейронные сети (1D-CNN), рекуррентные сети на основе LSTM и GRU. Представлены детальные описания структур данных моделей, а также результаты экспериментальной оценки их эффективности на наборе данных с новостными текстами. Полученные результаты демонстрируют различия в способности моделей к обобщению и выявляют преимущества рекуррентных архитектур в задачах классификации текстовых данных.
Ключевые слова: классификация новостных статей, нейронные сети, свёрточные нейронные сети, LSTM, GRU, сравнительный анализ, обобщающая способность.

Введение

С одной стороны, задача классификации новостных статей по тематикам является важной для автоматизации процессов обработки и анализа больших объёмов текстовой информации. Эффективное решение этой задачи позволяет организовывать и структурировать новостной контент, облегчая его поиск и навигацию [1]. С другой стороны, разработка моделей машинного обучения, способных точно и надёжно классифицировать новостные тексты, представляет собой сложную научно-техническую проблему, требующую тщательного изучения различных архитектур нейронных сетей и их сравнительной оценки [2, 3].

1. Применение нейронных сетей для классификации новостных статей

Для решения задачи классификации новостных статей широко применяются методы машинного обучения, в частности, различные архитектуры нейронных сетей [4, 5]. Одномерные свёрточные нейронные сети способны эффективно извлекать локальные признаки из текста, что позволяет им успешно справляться с задачей классификации [6]. Рекуррентные нейронные сети, такие как LSTM и GRU, демонстрируют высокую эффективность в моделировании последовательной структуры текста, что также делает их подходящим выбором для классификации новостных статей [7, 8].

Переходя к более детальному рассмотрению архитектур, следует отметить, что одномерные свёрточные нейронные сети (1D-CNN) представляют собой мощный инструмент для извлечения локальных признаков из текстовых последовательностей. Эти сети используют свёрточные операции для выявления локальных паттернов, которые могут быть полезными для классификации текстов. Например, 1D-CNN способны эффективно обнаруживать ключевые фразы или сочетания слов, которые имеют высокую значимость для определения тематики статьи. Благодаря своей архитектуре они могут параллельно обрабатывать данные, что обеспечивает высокую вычислительную эффективность по сравнению с рекуррентными подходами. Кроме того, использование пулинговых операций позволяет агрегировать информацию из различных частей текста, что помогает модели сосредотачиваться на наиболее значимых признаках.

Рекуррентные нейронные сети (RNN), включая их усовершенствованные варианты, такие как LSTM (Long Short-Term Memory) и GRU (Gated Recurrent Unit), демонстрируют высокую эффективность при работе с последовательными данными. Эти архитектуры разработаны для учёта контекста в последовательностях, что делает их особенно полезными для анализа текстов. LSTM и GRU способны запоминать долгосрочные зависимости в тексте благодаря механизмам управления памятью и забыванием. Например, при анализе новостного текста модель может учитывать не только локальные признаки, но и глобальный контекст, такой как общий тон статьи или её тематическая направленность. Это позволяет рекуррентным сетям более точно классифицировать тексты, особенно если они содержат сложную структуру или выраженные взаимосвязи между словами.

Для успешного применения нейронных сетей в задаче классификации новостных статей важным этапом является предварительная обработка текстовых данных. В данной работе использовалась токенизация текста, построение словаря наиболее частотных слов и преобразование текстов в числовые представления, пригодные для работы с нейронными сетями. Эти шаги обеспечивают эффективное кодирование текстовой информации, что позволяет моделям извлекать значимые признаки для обучения.

Обучение нейронных сетей проводилось на наборах данных, содержащих новостные тексты с метками классов, соответствующих различным тематикам. В процессе обучения модели оптимизировались для минимизации ошибки классификации на обучающей выборке [9]. Такой подход позволил модели научиться точно предсказывать классы новостных текстов, основываясь на их содержании. Благодаря этому нейронные сети демонстрируют высокую точность в задаче автоматической классификации новостных статей по тематикам [10].

2. Свёрточная нейронная сеть

Свёрточная нейронная сеть представляет собой архитектуру, ориентированную на обработку данных с локальными пространственными связями. На вход подаются данные в виде последовательностей, которые проходят через слой вложений (Embedding), преобразующий дискретные индексы входных данных в плотные векторы фиксированной размерности. Этот слой создаёт компактное представление входной информации, которое затем передаётся в свёрточный слой (Conv1D). Свёрточный слой выполняет фильтрацию данных с использованием набора обучаемых фильтров, которые сканируют последовательность с фиксированным размером окна. В данном случае фильтры имеют размер 5 и производят 250 выходных каналов. Результаты свёрточной операции акцентируют внимание на локальных паттернах в данных, таких как сочетания признаков, релевантные для задачи классификации.

После свёртки применяется глобальный слой максимального объединения (GlobalMaxPooling1D), который извлекает наиболее значимые признаки из каждого канала, снижая размерность данных и сохраняя наиболее информативные компоненты. Далее сеть содержит плотный слой (Dense) с 128 нейронами, который выполняет нелинейное преобразование данных и способствует выявлению сложных зависимостей между признаками. Завершающий плотный слой с 4 нейронами обеспечивает классификацию на 4 класса, соответствующие целевой задаче. Общая структура сети позволяет эффективно извлекать локальные признаки из последовательностей и использовать их для решения задач классификации.

3. Рекуррентная нейронная сеть на основе LSTM

Рекуррентная нейронная сеть на основе LSTM предназначена для обработки последовательных данных с учётом их временной структуры. Входные данные также проходят через слой вложений (Embedding), преобразующий дискретные представления в плотные векторы

размерности 32. Затем данные поступают в слой LSTM, который обладает способностью сохранять долгосрочные зависимости благодаря наличию управляющих механизмов: входного, выходного и забывающего «вентилей». Эти механизмы позволяют модели избирательно запоминать или забывать информацию, что особенно важно для работы с длинными последовательностями. В данном случае слой LSTM имеет 16 выходных нейронов, что обеспечивает компактное представление временных зависимостей в данных. На выходе LSTM-слоя информация передаётся в плотный слой (Dense) с 4 нейронами, который выполняет классификацию на основе извлечённых временных признаков.

4. Рекуррентная нейронная сеть на основе GRU

Рекуррентная нейронная сеть на основе GRU является упрощённой версией LSTM, сохраняя при этом способность учитывать временные зависимости в данных. Как и в предыдущих архитектурах, входные данные проходят через слой вложений (Embedding), преобразующий их в плотные векторы. Затем данные поступают в GRU-слой, который использует два управляющих механизма: обновляющий и сбрасывающий «вентили». Эти механизмы регулируют поток информации через сеть, позволяя модели запоминать или игнорировать определённые временные зависимости. GRU-слой имеет 16 выходных нейронов, что обеспечивает компактное представление последовательности. Завершающий плотный слой (Dense) с 4 нейронами выполняет классификацию на основе временных признаков, извлечённых GRU-слоем.

5. Результаты экспериментов

В ходе исследования были проведены эксперименты по обучению и оценке трёх архитектур нейронных сетей: свёрточной нейронной сети (CNN), сети с долговременной краткосрочной памятью (LSTM) и сети на основе механизмов обновления (GRU). Основной целью экспериментов являлось сравнение точности моделей как на обучающем, так и на проверочном наборах данных. Все модели обучались на протяжении пяти эпох, и их эффективность оценивалась на каждом этапе обучения.

На графике обучения свёрточной нейронной сети (рис. 1) наблюдается стабильное увеличение точности на обучающем наборе данных в течение всех пяти эпох. Начальная точность составила 84,02 %, а к пятой эпохе она достигла 96,93 %. Однако точность на проверочном наборе демонстрирует иную динамику: после первоначального роста (88,42 % на первой эпохе), начиная со второй эпохи, точность постепенно снижается, достигнув 87,29 % к пятой эпохе. Это может свидетельствовать о переобучении модели.

График обучения LSTM-сети (рис. 2) показывает аналогичную тенденцию роста точности на обучающем наборе данных, которая увеличилась с 82,56 % до 93,69 %. Однако точность на проверочном наборе остаётся относительно стабильной в диапазоне от 88,15 % до 88,79 %. Это свидетельствует о лучшей способности LSTM-сети к обобщению по сравнению с CNN.

На графике обучения GRU-сети (рис. 3) также виден рост точности на обучающем наборе данных: с 80,03 % до 93,22 %. Однако, как и в случае с LSTM, точность на проверочном наборе остаётся практически неизменной, колеблясь между 87,79 % и 88,21 %. Это указывает на схожее поведение GRU и LSTM в контексте обобщающей способности.

Для оценки итоговой эффективности моделей на проверочном наборе данных был построен график сравнения точности всех трёх архитектур (рис. 4). На нём видно, что свёрточная нейронная сеть достигает максимальной точности на проверочном наборе (88,42 %) уже на первой эпохе, однако её эффективность снижается в последующих эпохах. В то же время LSTM и GRU демонстрируют более стабильные результаты, достигая близких значений точности (около 88 %) без значительных отклонений.

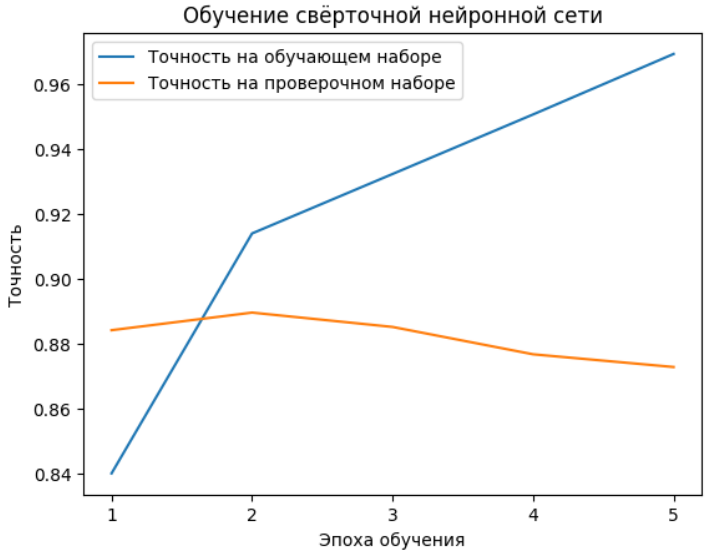


Рис. 1. График обучения свёрточной нейронной сети

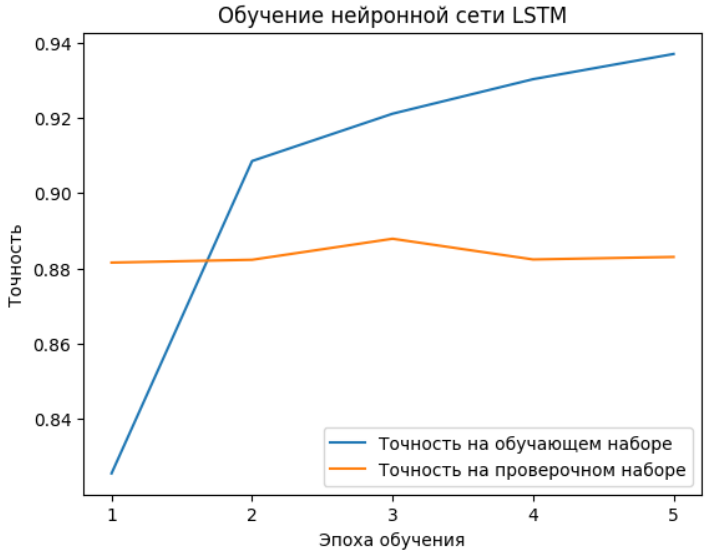


Рис. 2. График обучения нейронной сети LSTM

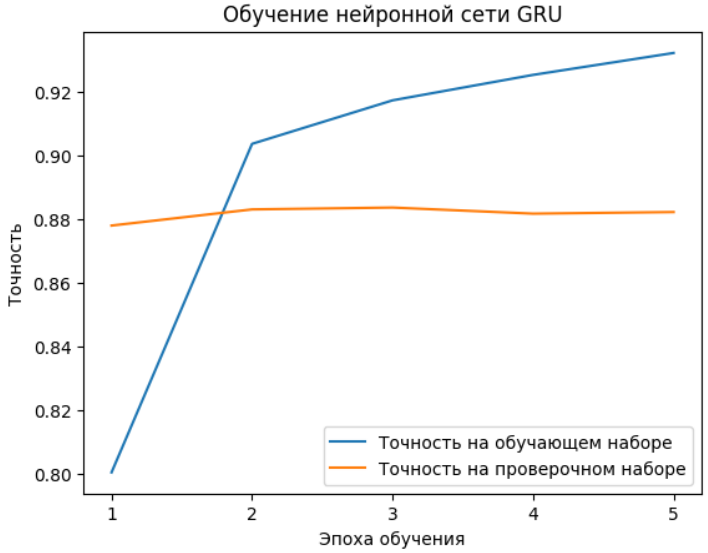


Рис. 3. График обучения нейронной сети GRU

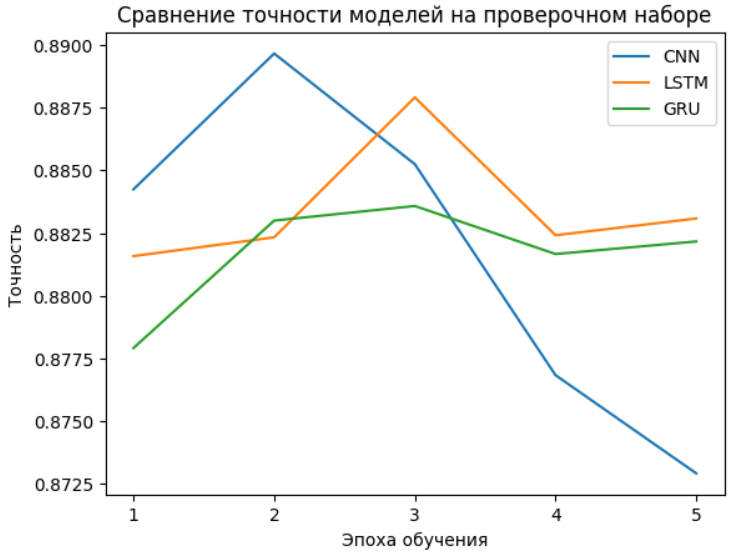


Рис. 4. Сравнение точности моделей на проверочном наборе

На финальном этапе экспериментов была рассчитана итоговая точность каждой модели после завершения всех эпох обучения (рис. 5). Наилучшая итоговая точность была достигнута LSTM-сетью (88,31 %), за которой следует GRU-сеть (88,22 %). Свёрточная нейронная сеть показала несколько худший результат (87,29 %), что подтверждает её склонность к переобучению при увеличении числа эпох.

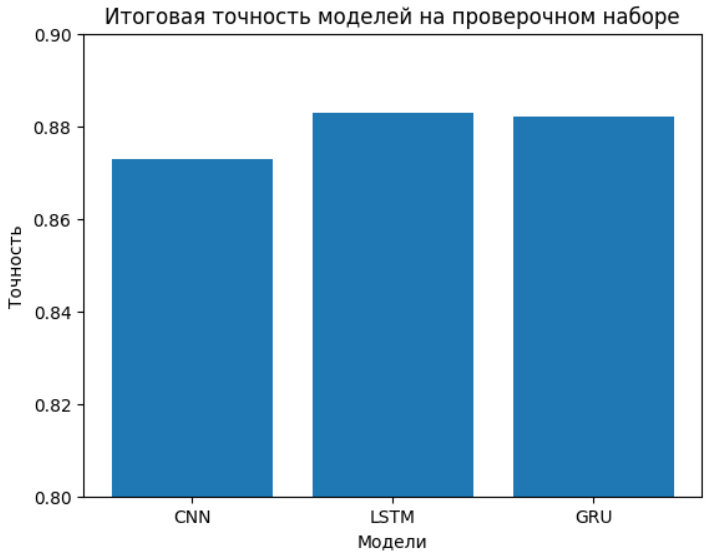


Рис. 5. Итоговая точность моделей на проверочном наборе

Результаты экспериментов демонстрируют различия в поведении изученных архитектур нейронных сетей. Свёрточная нейронная сеть показала высокую точность на обучающем наборе данных, но её способность к обобщению оказалась ниже из-за переобучения. Напротив, LSTM и GRU продемонстрировали более стабильные результаты на проверочном наборе данных, что делает их предпочтительными для задач, требующих высокой обобщающей способности.

Заключение

В заключение следует отметить, что проведённое исследование продемонстрировало различия в способности рассмотренных архитектур нейронных сетей к обобщению на задаче

классификации новостных статей. Свёрточная нейронная сеть показала высокую точность на обучающем наборе данных, но её эффективность снизилась на проверочном наборе, что указывает на склонность к переобучению. В то же время рекуррентные сети на основе LSTM и GRU продемонстрировали более стабильные результаты, сохраняя высокую точность на проверочном наборе данных. Эти результаты свидетельствуют о преимуществах рекуррентных архитектур в задачах, требующих высокой обобщающей способности, таких как классификация новостных текстов. Полученные выводы могут быть полезны при выборе наиболее подходящих моделей для решения аналогичных задач обработки и анализа текстовых данных.

Литература

1. *Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика: классификация и снижение размерности. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

2. *Вапник В. Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука, 1979. – 334 с.

3. *Журавлев Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В.* «Распознавание». Математические методы. Программная система. Практические применения. – М. : Фазис, 2006. – 416 с.

4. *Загоруйко Н. Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. – Новосибирск : ИМ СО РАН, 1999. – 272 с.

5. *Шлезингер М., Главач В.* Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. – Киев : Наукова думка, 2004. – 324 с.

6. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. – New York : Springer, 2001. – 533 p.

7. *Mitchell T.* Machine Learning. – New York : McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1997. – 414 p.

8. *Николенко С., Кадурин А., Архангельская Е.* Глубокое обучение. – СПб. : Питер, 2018. – 480 с.

9. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. – М. : Финансы и статистика, 2004. – 344 с.

10. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. 2-е изд. – М. : Вильямс, 2006. – 1104 с.

УДК 004.8

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОТЗЫВОВ НА ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ

Н. А. Экерт, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается актуальная проблема регулировки входных параметров алгоритма для разделения корпуса текста на кластеры и выдачи наименований для выявленных кластеров. В качестве предмета исследования выбраны большие языковые модели (Large Language Model), используемые для задач краткого изложения (суммаризации) и извлечения смыслов из текста. Приводятся результаты исследования по оценке применимости наиболее популярных моделей к обозначенной задаче. Предлагаются два подхода по использованию больших языковых моделей для задачи оценки отзывов на программные продукты. Новизна результата заключается в доработке существующего алгоритма оценки обратной связи пользователей.
Ключевые слова: большие языковые модели, Large Language Model, LLM, оценка отзывов, Llama, GPT, Claude, Gemini, GigaChat, Phi3, Gemma, Mistral, сравнение языковых моделей, суммаризация текстов, извлечение смыслов, кластеризация.

Введение

Современный рынок программного обеспечения характеризуется высокой конкуренцией и постоянным стремлением к повышению качества с целью удовлетворения потребностям пользователя. Одним из ключевых критериев успешности программного продукта является его способность соответствовать ожиданиям клиента. К счастью, клиенты сами способны сообщить разработчикам о своих потребностях. Они могут предоставлять обратную связь в виде отзывов, которые в дальнейшем могут быть проанализированы отделом качества.

С ростом популярности приложения, отзывов может становиться все больше, а их анализ может потребовать более детальной проработки. Количество факторов (критериев), которые необходимо учитывать при оценке отзывов, растет вместе с пользовательской базой и функциональными возможностями программного продукта. Качество оценки обратной связи напрямую влияет на наполнение дорожной карты с задачами, а значит, на вносимые изменения в конечный продукт.

Очевидна потребность в автоматизации процесса выявления отклонений в работе программного обеспечения путем оценки отзывов, предоставляемых пользователями. Задача является объемной и нетривиальной. Для оценки отзывов было разработано несколько подходов и алгоритмов. При этом, выявлена потребность в привлечении экспертов для наименования выявляемых алгоритмом кластеров и регулировки входных параметров.

Именно в решении данной задачи использование больших языковых моделей становится особенно актуальным. Большие языковые модели (Large Language Model) способны понимать контекст, выявлять ключевые идеи и генерировать сжатые, информативные отрезки текста. В исследовании планируется произвести анализ и сравнение существующих больших языковых моделей в задачах краткого изложения (суммаризации) и извлечения смыслов из текста.

1. Предварительная обработка данных

Формат обратной связи пользователей — это отзывы, представленные в электронной текстовой форме на русском языке. Допускаются вставки английских слов. Исключается исполь-

зование ненормативной лексики. Отзывы представлены в виде набора данных, который содержит оценки всех доступных версий программного продукта.

Для корректной работы с неструктурированными текстовыми данными необходимо выполнить их предварительную обработку. Текст каждого отзыва разделяется на предложения, каждое из которых проходит процедуру токенизации (разделения на токены или слова) и лемматизации (приведения словоформы к начальной форме).

Для решения проблемы нахождения опечаток и орфографических ошибок в тексте был разработан контекстно-независимый алгоритм выбора варианта при нечетком сравнении строк [1]. Суть его работы заключается в том, что для слова составляется матрица символов-заменителей и каждому из этих символов ставится в соответствие весовой коэффициент из словаря. Весовой коэффициент для каждого слова-заменителя рассчитывается с учетом редакционного расстояния (в данном случае использовалось редакционное расстояние Левенштейна). Результатом работы алгоритма является подстановка на место слова с неверным написанием слова-заменителя с наибольшим коэффициентом уверенности. Таким образом, слово, содержащее орфографическую ошибку или опечатку, заменяется на наиболее подходящее слово из словаря.

Данные были переведены в формат, пригодный для построения векторов слов: предложения разделены на массивы, содержащие отдельные слова, и объединены в один большой массив. Для каждого слова было составлено его векторное представление с помощью обучения модели Word2Vec.

Для корректной интерпретации отзывов на программный продукт был разработан алгоритм формирования критериев оценивания [2]. В основе его идеи лежит принцип разделения корпуса текста на соответствующие каждому критерию кластеры. Разделение на кластеры осуществляется с помощью создания графового представления всего корпуса. Вершинами в таком графе являются слова, ребрами — отношения между словами, весовым коэффициентом ребер — значение сходства слов в векторном представлении. Рёбра, чьё значение весового коэффициента выходило за рамки выбранных значений, удалялись из графа.

Для разделения графа на кластеры был выбран алгоритм поиска слабо связанных компонентов, так как он позволяет разделить граф на подграфы, между вершинами которых существует хотя бы одна связь.

С помощью данного способа удалось выявить неочевидные критерии оценивания программного обеспечения, характеризующие потребности пользователя.

Важно заметить, что наименование кластеров производилось с помощью привлечения экспертов, что является не эффективным способом, особенно, если таких кластеров большое количество.

Также, в процессе эксперимента, необходимо было эмпирическим методом подбирать минимальное значение сходства слов для разделения графа на тематические кластеры. При такой настройке необходимо производить множество итераций для поиска оптимальных значений. Тематики разных кластеров не должны накладываться друг на друга. В то же время, нужно найти максимальное количество кластеров для учитывания разнообразных критериев.

а) *б)* *в)*

а) группа отзывов с оценкой стабильности работы приложения; б) группа отзывов с оценкой удобства использования приложения; в) группа отзывов с оценкой читаемости текста приложения

Рис. 1. Результат разделения корпуса текста на тематические кластеры

2. Использование больших языковых моделей

Учитывая наличие нечетких критериев оценивания при формировании кластеров, а также взрывной рост использования больших языковых моделей для решения задач, связанных с распознаванием естественного языка и анализом текстовых данных, можно сделать эксперимент по использованию большой языковой модели для решения проблемы оценки отзывов на программные продукты.

Large Language Model (LLM) (рус. Большая языковая модель) — это модель искусственной нейронной сети, обученная на большом наборе данных, предназначенная для обработки естественного языка. Такие модели способны распознавать закономерности и взаимосвязи между словами, фразами и идеями в языке.

LLM используются для задач:

- автоматизированной генерации текста на основе заданной темы, стиля или формата;
- перевода текстов с одного языка на другой;
- суммаризации или краткого изложения длинного текста;
- анализа эмоциональной окраски текста;
- классификации текста.

Языковые модели обладают контекстом. Это означает, что они могут формировать ответ на основе переданных данных: базы знаний и установок оператора. Размер контекста измеряется в токенах и в разных моделях может варьироваться от тысяч до десятков тысяч токенов [3, 4].

Токен (token) — основная единица текстовой информации, используемая для представления текста в виде, пригодном для обработки моделью. Это может быть слово, символ или предложение. Процесс токенизации позволяет модели обрабатывать текстовую информацию на гранулярном уровне, что значительно повышает ее гибкость.

Был проведен анализ наиболее известных на сегодняшний день языковых моделей, данные приведены в табл. 1.

OpenAI предлагает выбор из четырех моделей, среди которых GPT4 Omni является наиболее современной [5]. Она предназначена для решения сложных задач по анализу и обработке текстов, поддерживает вставку дополнений в текст, может использоваться для перевода, сложной классификации, анализа и резюмирования текстов. Данная модель нацелена на снижение случаев «лени», когда модель не выполняет поставленную задачу в полной мере. Помимо этого, она имеет возможность получать данные из Интернета, что позволяет актуализировать ту или иную предметную область для генерации наиболее релевантных ответов.

Таблица 1

Сравнение характеристик больших языковых моделей

Семейство	Модель	Кол-во токенов	Обучающие данные	Количество параметров	Использование
GPT4	Omni	131,072	до 12.2023 + Интернет	Не указано	API + VPN
Claude 3.5	Sonnet	204,800	Не указано	Не указано	API + VPN
Llama	3.1:405b	131,072	Не указано	405b	Local
Llama	3.1:70b	131,072	Не указано	70b	Local
Llama	3.1:8b	131,072	Не указано	8b	Local
Gemini	1.5 Pro	1,024,000	Не указано	Не указано	API + VPN
GigaChat	Pro	8,192	Не указано	29b	API
GigaChat	Lite	8,192	Не указано	7b	API
Phi 3	Medium	131,072	Не указано	14b	Local
Gemma	2	8,192	Не указано	27b	Local
Mistral	Nemo	131,072	Не указано	12b	Local

Модели Claude 3.5 Sonnet от компании Anthropic и Gemini 1.5 Pro от Google являются прямым конкурентом GPT4 Omni [6, 7]. Они могут выполнять те же манипуляции с текстовыми данными: перевод, суммаризацию, дополнение, исправление ошибок, классификацию и многое другое. У этих моделей отсутствует функция поиска в Интернете, но можно передавать им необходимые для обучения данные в контекст, как и любым большим языковым моделям, представленным в статье.

Llama 3.1 от компании Facebook выделяется на фоне других т. к. ее веса можно загрузить на компьютер и использовать модель локально [8]. Такой подход открывает значительно больше возможностей для проведения экспериментов. По функциональным возможностям она не уступает своим конкурентам от OpenAI, Anthropic и Google.

Отечественный GigaChat предлагает несколько моделей [9]. Базовая версия Lite подходит для решения тривиальных задач, требующих быстрой отзывчивости при работе. GigaChat Pro лучше следует сложным инструкциям и может выполнять более комплексные задачи: суммаризацию, рерайтинг и редактирование текстов, ответы на различные вопросы.

Примечательны также языковые модели Phi 3 Medium от Microsoft, Gemma 2 от Google и Mistral Nemo. По аналогии с Llama 3.1, они разворачиваются локально, имеют очень высокую скорость ответа и следуют инструкциям из контекста.

3. Алгоритм работы

Предлагается сравнить два подхода:

1. С применением большой языковой модели для задачи наименования кластеров и определения пороговых значений при разделении графа на кластеры.

2. С применением большой языковой модели в качестве экспертной системы, способной самостоятельно провести анализ отзывов и выявить приоритетные зоны развития программного продукта.

В обоих случаях предлагается использовать RAG-подход для дообучения модели [10]. Этот подход предполагает использование контекста модели для указания правил формирования ответа и дополнительной информации, которую модель может использовать в качестве базы знаний. Правила и база знаний объединяются в одно сообщение, называемое «промпт» (англ. Prompt). Промпт передается в модель, которая, в свою очередь, формирует ответ на естественном языке. Контекст модели ограничен в размерах и измеряется в токенах. Контекст действителен в рамках одной сессии. Сессия – это временной промежуток, в рамках которого пользователь взаимодействует с моделью. В рамках одной сессии контекст может быть очищен по инициативе пользователя неограниченное количество раз.

Тестирование проводилось на моделях GPT4 Omni, Llama 3.1:70b, Llama 3.1:8b, Gemini 1.5 Pro, Claude 3.5 Sonnet, GigaChat Pro, Phi3 Medium, Gemma 2, Mistral Nemo. Модели GPT4 Omni, Gemini 1.5 Pro и Claude 3.5 Sonnet имеют региональные ограничения, однако доступен тестовый период, в рамках которого удалось произвести тестирование. Несмотря на положительные результаты, коммерческое использование вышеперечисленных моделей крайне затруднено.

Модели Llama запускаются локально на компьютере пользователя. Это дает дополнительные преимущества в гибкости развертывания и избавляет от необходимости оплачивать доступ для использования модели. Без недостатков не обошлось – Llama 3.1:405b требует значительных ресурсов для запуска, поэтому тестирование производилось на моделях того же семейства с меньшим количеством параметров. Модели Llama 3.1:70b и Llama 3.1:8b показали себя очень хорошо. Они работают быстро и следуют правилам, указанным в промпте. Эти правила легко дополнить в рамках одной сессии. Модель поддерживает размер контекста 131072 токенов, что соответствует приблизительно 30 тыс. слов на русском языке. Это дает

возможность использовать не только объемный свод правил, но и передавать достаточно большое количество данных для анализа.

Нас интересует качество решения задачи извлечения смыслов из текста, поэтому для проведения тестирования языковых моделей были сгенерированы соответствующие запросы.

Ответ модели также необходимо корректно интерпретировать и верифицировать.

Процесс интерпретации результатов включает:

- понимание смысла и значимости полученных результатов;
- оценку достоверности результатов в выбранной предметной области;
- анализ возможных альтернативных объяснений выявленных закономерностей.

Процесс верификации результатов включает:

- проверку воспроизводимости результатов при повторном запуске;
- сравнение с ранее известными фактами и зависимостями;
- валидацию на данных, не используемых при основном тестировании;
- оценку значимости результатов с помощью статистических критериев.

Первый запрос: «*Я предоставлю тебе несколько кластеров, состоящих из набора слов. Твоя задача — суммаризировать смысловое значение этих слов. Кластер 1: [пельмени, хинкали, манты]. Кластер 2: [ноутбук, телефон, сервер, домофон]. Кластер 3: [iphone 11, samsung galaxy s3, nokia 3310]. Кластер 4: [ночь, дождь, темнота, тоска]. Кластер 5: [банан, апельсин, мандарин, киви, яблоко, манго]. Кластер 6: [репозиторий, среда разработки, линтер, консоль]. Старайся придумать максимально точную ассоциацию. Сопоставь каждому кластеру одно слово или словосочетание.*». Результат тестирования первого запроса для разных языковых моделей представлен в табл. 2.

Таблица 2

Результаты тестирования больших языковых моделей в задаче краткого изложения длинного текста

№	Ответ модели								
	GPT4 Omni	Llama 3.1:70b	Llama 3.1:8b	Gemini 1.5 Pro	Claude 3.5 Sonnet	Giga-Chat Pro	Phi3 Medium	Gemma 2	Mistral Nemo
1	Кулинария	Восточная кухня	Еда	Тестовые изделия с начинкой	Блюда	Пельмени	Пельмени	Тестовые блюда	Традиционная еда
2	Устройства для связи и работы	Устройство связи	Техника	Цифровые устройства	Электронные устройства	Техника	Устройство	Электроника	Техника и коммуникация
3	Телефоны	Смартфон	Смартфоны	Мобильные телефоны	Мобильные телефоны	Смартфон	Смартфон	Мобильные телефоны	Мобильные телефоны
4	Грусть	Меланхолия	Покой	Меланхолия	Меланхолия	Погода	Одиночество	Меланхолия	Тьма
5	Фрукты	Фрукт	Фрукты	Тропические фрукты	Тропические фрукты	Фрукты	Фрукты	Фрукты	Тропические фрукты
6	Программирование	Программирование	Программирование	Программирование	Разработка ПО	Инструменты	Разработка	Разработка ПО	Разработка ПО

Стоит отметить, что модели GPT4 Omni, Llama 3.1:70b, Gemini 1.5 Pro и Claude 3.5 Sonnet справились лучше всего. Модели Llama 3.1:8b, Mistral Nemo, Phi3 Medium и GigaChat Pro выдают не конкретные формулировки, но следуют инструкции, переданной в промпте. Модель Gemma 2 правильно именует кластеры в большинстве случаев, но не следует инструкции и пытается дополнить свой ответ.

Второй запрос был связан с определением краткого содержания текста отзывов на различные программные продукты: компьютерную игру, мобильное приложение для контроля финансов, десктопное приложение для редактирования видео. Текст запроса: «*Я предоставлю тебе отзыв пользователя. Начало отзыва. {Отзыв} Конец отзыва. Расскажи в одном предложении, чем недоволен пользователь?*».

Модели GPT4 Omni, Llama 3.1:70b, Llama 3.1:8b, Gemini 1.5 Pro, Claude 3.5 Sonnet, GigaChat Pro и Gemma 2 зачастую используют краткое и емкое повествование и вмещают в одном предложении достаточно информации для понимания основной претензии пользователя. Модели Llama 3.1:70b, Llama 3.1:8b, GPT4 Omni, Gemini 1.5 Pro и Claude 3.5 Sonnet передают смысл точнее всех. GigaChat Pro периодически пытается дать слишком развернутый ответ и ошибается в логических конструкциях. Gemma 2 дает слишком развернутый ответ, даже если дополнительно попросить ее об обратном. Модели Phi3 Medium и Mistral Nemo справились хуже всех. Они выделяют не ключевые мысли из текста и совершают логические ошибки. Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты тестирования больших языковых моделей в задаче извлечения смысла из текста

Модель	Статус выполнения задания			
	Справилась с заданием	Справилась с незначительными ошибками	Справилась со значительными ошибками	Не справилась с заданием
GPT4 Omni	+			
Llama 3.1:70b	+			
Llama 3.1:8b	+			
Gemini 1.5 Pro	+			
Claude 3.5 Sonnet	+			
GigaChat Pro			+	
Gemma 2		+		
Phi3 Medium				+
Mistral Nemo			+	

Если в качестве вопроса в промпте использовать «*Расскажи коротким словосочетанием, что нужно улучшить в приложении, чтобы пользователь остался доволен?*», то для моделей GPT4 Omni, Llama 3.1:70b, Gemini 1.5 Pro и Claude 3.5 Sonnet результаты не изменяются – они все так же корректно отвечают на вопрос в запрашиваемом формате. Llama 3.1:8b и Mistral отвечают общими формулировками, не отражающими суть проблемы. GigaChat Pro предоставляет понятный ответ, но добавляет к ответу дополнительный контекст. Gemma 2 и Phi3 Medium предоставляет короткий и понятный ответ. Результаты представлены в табл. 4.

По результатам предварительного тестирования, для дальнейшего исследования была выбрана большая языковая модель Llama 3.1 на 70 миллиардов параметров. Ее результаты в задаче выделения основной мысли из текстовых данных оказались выше или наравне с другими проанализированными моделями. Ее преимуществом также является возможность локального развертывания и простой интеграции с уже имеющимися программными продуктами.

Таблица 4

Результаты тестирования больших языковых моделей в задаче извлечения смысла из текста

Модель	Статус выполнения задания		
	Справилась с заданием	Справилась с незначительными ошибками	Справилась со значительными ошибками
GPT4 Omni	+		
Llama 3.1:70b	+		
Llama 3.1:8b			+
Gemini 1.5 Pro	+		
Claude 3.5 Sonnet	+		
GigaChat Pro		+	
Gemma 2	+		
Phi3 Medium	+		
Mistral Nemo			+

Заключение

Обозначена необходимость использования экспертной системы для задач краткого изложения (суммаризации) и извлечения смыслов из текста. В качестве инструмента решения выбраны большие языковые модели (Large Language Model). Проведен анализ существующих на рынке решений. По результатам предварительного тестирования было принято решение использовать для дальнейшего исследования модель Llama 3.1 на 70 миллиардов параметров. Она лучше других доступных больших языковых моделей справляется с поставленными задачами и имеет дополнительные конкурентные преимущества.

Литература

1. *Воронина И. Е.* Выбор варианта из множества решений при нечетком сравнении строк / И. Е. Воронина, Н. А. Экерт // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2023. – No 2. – С. 181–191.

2. *Воронина И. Е.* Автоматизированное формирование критериев оценивания отзывов на программное обеспечение / И. Е. Воронина, Н. А. Экерт // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – 2023 – С. 169–174.

3. *Ингерсолл Г. С.* Обработка неструктурированных текстов / Г. С. Ингерсолл, Т. С. Мортон, Э. Л. Фэррис. – Москва : ДМК Пресс, 2015. – 414 с.

4. *Хобсон Л.* Обработка естественного языка в действии / Л. Хобсон, Х. Ханнес, Х. Коул. – СПб. : Питер, 2020. – 576 с.

5. Документация GPT4 Omni. – URL: https://platform.openai.com/docs/overview (дата обращения: 05.11.2024).

6. Документация Claude 3.5 Sonnet. – URL: https://docs.anthropic.com/en/home (дата обращения: 14.11.2024).

7. Документация Gemini 1.5 Pro. – URL: https://ai.google.dev/gemini-api/docs (дата обращения: 12.11.2024).

8. Документация Llama 3.1. – URL: https://docs.llama-api.com/quickstart (дата обращения: 07.11.2024).

9. Документация GigaChat Pro. – URL: https://developers.sber.ru/docs/ru/gigachat/api/reference/rest/gigachat-api (дата обращения: 04.11.2024).

10. Келен О. Разработка приложений на базе GPT-4 и ChatGPT / О. Келен, М. Блете. – СПб. : Питер, 2024. – 192 с.

УДК 621.865:004.896

О РЕГРЕССИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ В ЗАДАЧЕ ОБ УПРАВЛЕНИИ ПЛОСКИМ ЧЕТЫРЕХЗВЕННОМ МЕХАНИЗМОМ С ПРИВОДОМ

А. Ю. Яковлев, М. А. Релина, Р. Ю. Комнатный

Воронежский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена разработке алгоритма управления плоским четырехзвенным механизмом с приводом, основанного на методе регрессии с использованием гауссовских процессов [1]. Представлен метод построения регрессионной модели для прогнозирования угловой скорости корневого звена, а также алгоритм управления механизмом. Разработано программное обеспечение, реализующее модель и алгоритм управления, выполнены компьютерные эксперименты. Результаты демонстрируют высокую точность прогнозов при ограниченном объеме обучающих данных. Исследование ориентировано на применение в робототехническом комплексе РОИН [5], где внедрение предложенных решений позволит улучшить управление гидравлическими приводами.
Ключевые слова: регрессионное моделирование, гауссовские процессы, четырехзвенный механизм, робототехнический комплекс, байесовский вывод, программное обеспечение, управление, угловая скорость, гидравлический привод, мехатроника, машинное обучение, компьютерное моделирование.

Введение

Создание нелинейных систем управления на основе методов машинного обучения для мехатронных и робототехнических устройств является актуальной задачей современной мехатроники и робототехники. Активное внедрение машинного обучения в управлении мехатронными и робототехническими комплексами находит отражение, в частности, в научных статьях, посвященных построению регрессионных моделей в робототехнике [2, 4].

Авторами настоящей работы разработано программное обеспечение, реализующее регрессионную модель плоского четырехзвенного механизма с приводом и алгоритм управления угловой скоростью корневого звена механизма на ее основе. Для построения регрессионной модели был выбран метод, основанный на гауссовских процессах [1, 3].

Практическая значимость работы определяется возможностью внедрения ее результатов в систему управления реального робототехнического комплекса РОИН [5]. Робототехнический комплекс РОИН оснащен гидравлическими приводами и представляет собой промышленный манипулятор. Применяемая система гидравлических приводов является одноконтурной и позволяет осуществлять управление движением приводов по одному в единицу времени. Поэтому полученная система управления корневым сегментом четырехзвенного механизма может быть использована для управления остальными приводами без дополнительных изменений.

1. Задача о кинематике движения плоского четырехзвенного механизма с приводом

На рис. 1 показана конструкция четырехзвенного механизма крепления рабочего инструмента робототехнического комплекса РОИН.

Для построения системы управления корневым сегментом четырехзвенного механизма рассмотрим его математическую модель. Схематически плоский кинематический механизм, состоящий из четырех шарнирно соединенных сегментов и гидравлического привода, представлен на рис. 2.

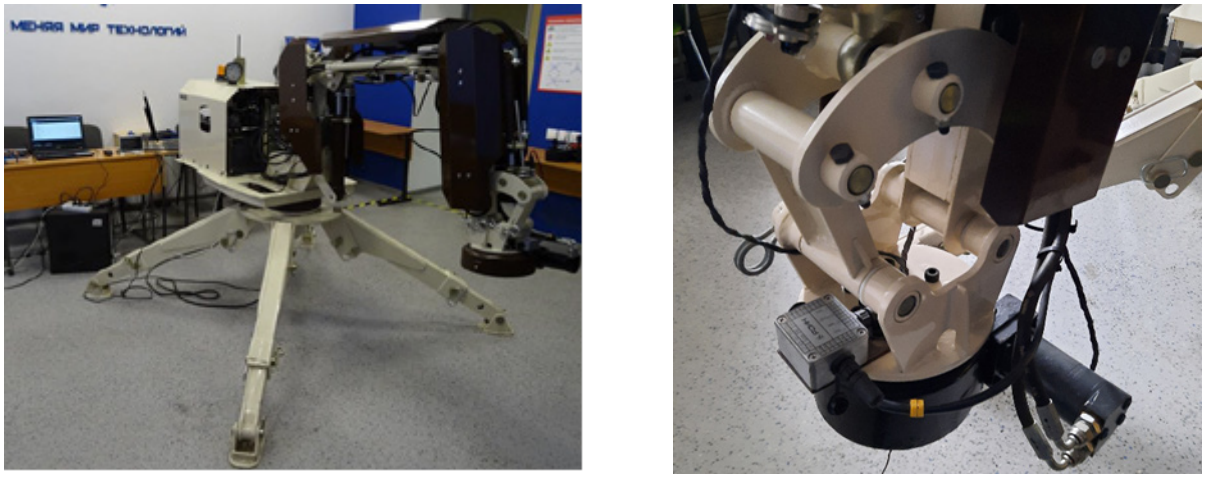


Рис. 1. Общий вид робототехнического комплекса РОИН (слева) и внешний вид четырехзвенного элемента стрелы комплекса (справа)

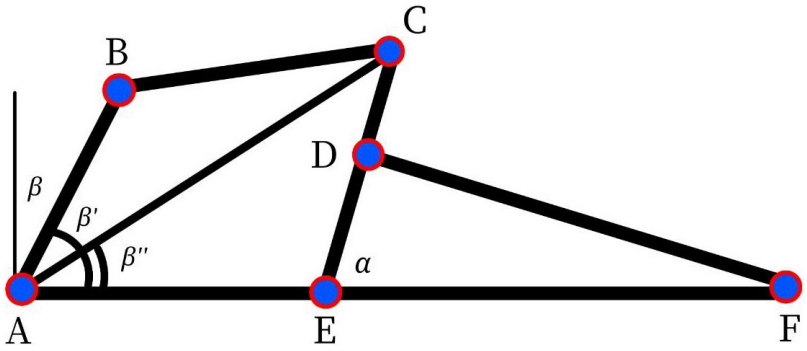


Рис. 2. Схематическое изображение плоского четырехзвенного механизма с приводом

Сочленения A, B, C, D, E, F представляют собой одноосевые шарниры. Сегмент AB будем называть корневым сегментом механизма, скорость его поворота в зависимости от скорости движения гидропривода есть параметр управления. Цель управления — удержание заданной скорости поворота звена AB. Гидропривод моделирует сегмент FD (далее — привод), его длину будем обозначать символом u. Величины длин сегментов AB = amdl, BC = d1, CD = bmdl/2, CE = bmdl, AE = cmdl и расстояние EF = fmdl заданы. Длина привода FD ограничена минимальным и максимальным значениями.

Для описания математической модели механизма запишем систему кинематических выражений, пригодную для компьютерной реализации.

Расстояние между точками A и C, определяющее длину одного из звеньев механизма, вычисляется по соотношению

$$d_1 = \sqrt{(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2}. \quad (1)$$

Угол поворота звена CE относительно шарнира E определяется согласно выражению (2)

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{(u+u) - (b_{\text{mdl}} \cdot 0.5) \cdot (b_{\text{mdl}} \cdot 0.5) - (f_{\text{mdl}} \cdot f_{\text{mdl}})}{b_{\text{mdl}} \cdot f_{\text{mdl}}} \right). \quad (2)$$

Для расчетов используются углы β_1 и β_2, описывающие взаимное расположение звеньев (3)

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{(b_{\text{mdl}}^2) - (d_1^2) - (d_{\text{mdl}}^2)}{2.0 \cdot d_1 \cdot d_{\text{mdl}}} \right), \; \beta_2 = \arccos\left(\frac{(c_{\text{mdl}}^2) - (a_{\text{mdl}}^2) - (d_1^2)}{2.0 \cdot a_{\text{mdl}} \cdot d_1} \right). \quad (3)$$

Координаты ключевых точек механизма можно определить следующим образом.

Координата точки C:

$$C_x = b_{\text{mdl}} \cdot \cos(\alpha), \quad C_y = b_{\text{mdl}} \cdot \sin(\alpha). \tag{4}$$

Координата точки D:

$$F_x = b_{\text{mdl}} \cdot 0.5 \cdot \cos(\alpha), \quad F_y = b_{\text{mdl}} \cdot 0.5 \cdot \sin(\alpha). \tag{5}$$

Координата точки B:

$$B_x = a_{\text{mdl}} \cdot \cos(\beta_1 + \beta_2) - d_{\text{mdl}}, \quad B_y = a_{\text{mdl}} \cdot \sin(\beta_1 + \beta_2). \tag{6}$$

Согласно (1)–(6), угол положения корневого сегмента относительно вертикали вычисляется по соотношению (7)

$$\beta = \left(\beta_1 + \beta_2 - \frac{\pi}{2} \right). \tag{7}$$

2. Описание метода построения регрессионной модели

Для построения регрессионной модели кинематики четырехзвенного механизма с приводом воспользуемся подходом, основанном на моделировании гауссовскими процессами [1, 2].

При таком подходе необходимо, чтобы обучающие данные $D = \{X = [\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n]^T, Y[y_1, ..., y_n]^T\}$ описывали скрытую шумами функцию кинематической связи элементов четырехзвенного механизма $y_i = h(x_i) + \varepsilon_i$, где $h : R^D \to R$, $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ — независимый гауссовский шум измерения. Функцию h будем рассматривать как случайную функцию и получим апостериорное распределение $p(h \mid D)$ по h из априорного распределения $p(h)$ и данных D, а также из предположения о гладкости функции h [2]. Полученное таким образом апостериорное распределение $p(h \mid D)$ позволит получать прогнозные значения функции $h(\mathbf{x}_*)$ для произвольных входных данных $x_* \in R^D$.

В задаче о четырехзвенном механизме вектор состояния системы может быть выбран различными способами, в данном случае $\mathbf{x} = [\theta, u]^T \in R^2$. Вектор $\mathbf{x}$ является независимым параметром.

Целью прогнозирования удобно выбрать соответствующую скорость поворота корневого сегмента, поэтому зависимый параметр является угловой скоростью $y = \dot{\theta} = \omega \in R$.

Апостериорное распределение случайной функции h найдем методом байесовского вывода в рамках гауссовских процессов (ГП) [2]. Байесовский вывод представляет собой трехэтапную процедуру:

Этап 1. Выбираем априорное распределение для неизвестной функции h.

Этап 2. Выполнение экспериментальных наблюдений с сохранением данных D.

Этап 3. Вычисление апостериорного распределения по функции h, которое уточняет априорное значение на основе данных наблюдений D.

Согласно [1, 2] априорное среднее значение принимается тождественно равным нулю, а ковариационная функция имеет следующий вид

$$k_h = k_{SE} + \delta_{pq}\sigma_\varepsilon^2, \; k_{SE}\left(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q\right) = \alpha^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q\right)^T \Lambda^{-1}\left(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q\right) \right), \; \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q \in R^D. \tag{8}$$

В соотношении (8) обозначены: α^2 — дисперсия значений функции h, $\Lambda = diag([l_1^2, ..., l_D^2])$ — диагональная матрица характерных масштабов длины l_i, δ_{pq} — символ Кронекера [2]. Величины $l_1, ..., l_D$, дисперсия α^2 значений функции h и дисперсия шума σ_ε^2 называются гиперпараметрами, которые группируются в векторе гиперпараметров $\boldsymbol{\theta}$.

Следующим действием необходимо сформировать обучающий набор данных, который должен состоять из n входных векторов $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ и соответствующих им целевых значений $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)^T$.

После определения значений функции h для входных векторов вычисляем значения гиперпараметров. Для этого решаем задачу нелинейной оптимизации для определения вектора

гиперпараметров, который доставляет максимум логарифму функции правдоподобия. Логарифм функции правдоподобия представляет выражение [2]

$$\log p\left(\mathbf{y}\middle|\mathbf{X},\boldsymbol{\theta}\right)=-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T\left(\mathbf{K}_{\grave{e}}+\sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{y}-\frac{1}{2}\log\left|\mathbf{K}_{\grave{e}}+\sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}\right|-\frac{D}{2}\log\left(2\pi\right), \tag{9}$$

где $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\theta}}=\begin{pmatrix} k_h\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1,\boldsymbol{\theta}\right) & . & . & k_h\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\theta}\right) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ k_h\left(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_1,\boldsymbol{\theta}\right) & . & . & k_h\left(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\theta}\right) \end{pmatrix}$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером $n\times n$.

Находим вектор оптимальных гиперпараметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}\in\arg\max\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X},\boldsymbol{\theta})$.

Следуя [2], можно заметить, что значения функции для тестовых и обучающих входных данных должны быть совместно гауссовыми

$$p\left(\mathbf{h},\mathbf{h}_*\middle|\mathbf{X},\mathbf{X}_*\right)=N\left(\begin{bmatrix} m_h(\mathbf{X}) \\ m_h(\mathbf{X}_*) \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{\mathbf{h}}(\mathbf{X},\mathbf{X}_*) \\ \mathbf{K}_{\mathbf{h}}(\mathbf{X},\mathbf{X}_*) & \mathbf{K}_* \end{bmatrix}\right), \tag{10}$$

где $\mathbf{h}=[h(\mathbf{x}_1),...,h(\mathbf{x}_n)]^T$, $\mathbf{h}_*=[h(\mathbf{x}_{*1}),...,h(\mathbf{x}_{*n})]^T$, n — количество обучающих векторов, m — количество тестовых векторов для прогнозирования.

В работе применен случай определения прогнозного значения функции $h(\mathbf{x}_*)$, $h:R^D\to R$, при неопределенном тестовом входе $\mathbf{x}_*\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})\in R^D$, $y_*\in R$, где h есть ГП с функцией ковариации k_h (8) плюс функция ковариации шума. При этом среднее значение μ_* прогнозируемого распределения, согласно [2], запишется в виде

$$\mu_*=\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{q}, \tag{11}$$

где

$$\boldsymbol{\beta}=\left(\mathbf{K}+\sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{y},$$

$$\mathbf{q}=\left[q_1,...,q_n\right]^T\in R^n,\ q_i=\alpha^2\left|\boldsymbol{\Sigma}\Lambda^{-1}+\mathbf{I}\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}+\Lambda\right)^{-1}\left(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu}\right)\right),$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix} k_h\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1\right) & . & . & k_h\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_n\right) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ k_h\left(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_1\right) & . & . & k_h\left(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_n\right) \end{pmatrix}.$$

3. Описание алгоритма построение регрессионной модели

Рассмотрим алгоритм построения регрессионной модели четырехзвенного механизма с приводом методом гауссовских процессов с применением трёхэтапной байесовской процедуры [2].

1. Используя математическую модель кинематики четырехзвенного механизма с приводом, фиксируем набор данных в виде кортежей, состоящих из угла положения корневого сегмента и скорости движения привода (входные данные) $(\theta,u)^T$ и соответствующих целевых значений угловой скорости корневого сегмента.

2. Априорное распределение моделируемой функции h задается выражением (8).

3. Для сформированного набора входных и выходных данных функции h рассчитываем оптимальный вектор гиперпараметров методом определения экстремума логарифма правдоподобия (9) [2].

4. Вычисляем апостериорное распределение значений моделируемой функции h, используя соотношение (11).

4. Результаты моделирования

Для компьютерной реализации рассмотренной математической модели четырехзвенного механизма с приводом и алгоритма регрессионного моделирования гауссовскими процессами была разработана программа на языке C++ в среде Processing [6].

Программа позволяет проводить все необходимые расчеты и демонстрировать визуализацию процессов (рис. 3).

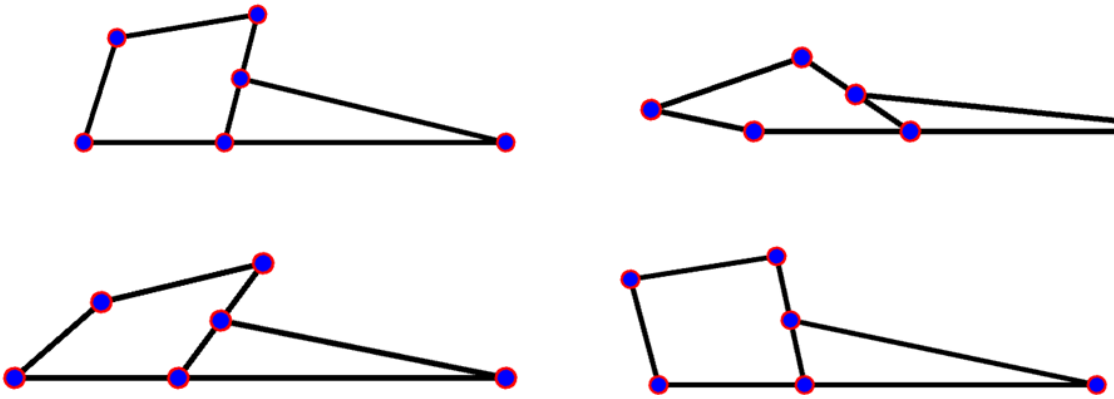


Рис. 3. Общий вид компьютерной модели четырехзвенного механизма с приводом в разных фазах движения

Отметим, что при разработке программы не использовались сторонние программные библиотеки. В состав программы входит девять модулей, и ее общий размер составляет 114 Кб.

Базовыми модулями являются:

GP.pde — реализует функцию логарифма правдоподобия (9), функцию вычисления прогнозного значения по соотношению (11);

Unit.pde — реализует функцию нелинейного поиска максимума логарифма функции правдоподобия (9) методом BFGS [1] для получения оптимального вектора гиперпараметров;

Matrix.pde — содержит необходимый для проведения матричных операций набор функций;

Model.pde — реализует математическую модель кинематики четырехзвенного механизма с приводом. Математическая модель используется для формирования обучающего набора данных и проведения компьютерного эксперимента с прогнозированием.

На рис. 4 приведен график изменения угловой скорости в процессе компьютерного моделирования движения четырехзвенного механизма с приводом в зависимости от угла положения корневого сегмента и скорости движения привода. Вертикальными линиями указаны положения механизма, при которых сохранялись данные в обучающий набор. Общее количество кортежей обучающего набора составляет 48 элементов.

Полученная регрессионная модель четырехзвенного механизма с приводом позволит создать нелинейную систему управления корневым сегментом механизма. Данный результат связан с созданием системы управления робототехническим комплексом РОИН [5]. В частности, изменение управляющего сигнала (скорости движения) для привода в зависимости от положения корневого сегмента механизма для удержания заданного значения его угловой скорости приведено на рис. 5.

На рис. 5 можно наблюдать график управляющего сигнала на привод и скорость поворота корневого сегмента, вычисляемые с использованием регрессионной модели механизма.

По итогам проведенной работы можно наблюдать высокую эффективность и точность моделирования гауссовскими процессами при небольшом объеме обучающих данных. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы при создании макета этого механизма. В качестве привода будет использован линейный актуатор, угловое положение и угловая ско-

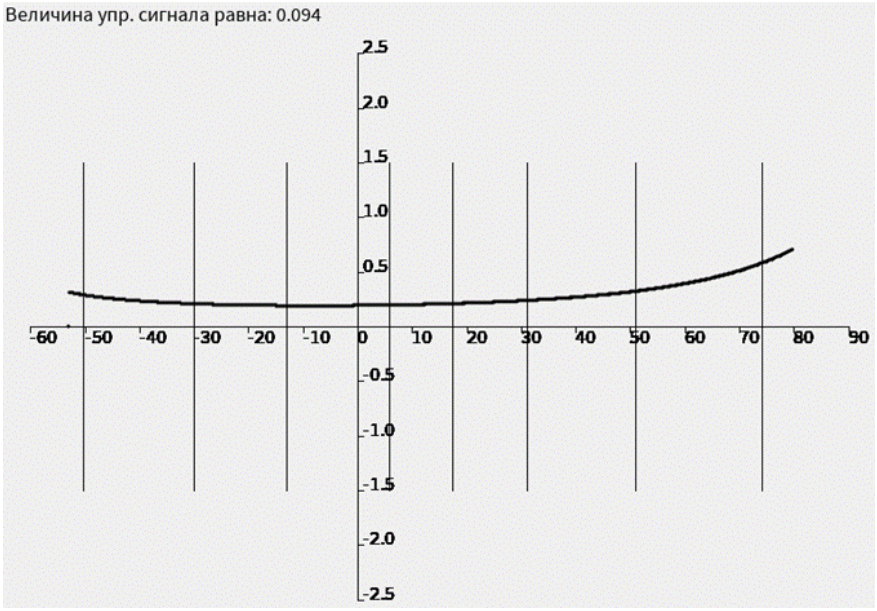


Рис. 4. График изменения скорости корневого сегмента в зависимости от его углового положения и скорости привода. По оси абсцисс откладывается угол положения, по оси ординат откладывается угловая скорость корневого сегмента. График получен при постоянной скорости привода

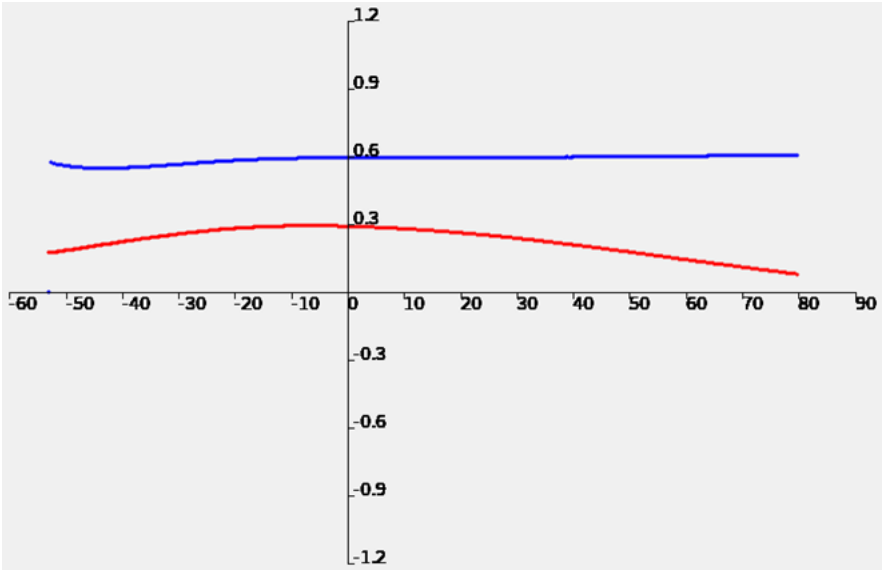


Рис. 5. Графики отражают процесс управления корневым сегментом. Целевая угловая скорость задана на уровне 0.6 с–1. Фактическая угловая скорость корневого сегмента механизма — синий (верхний) график. Красный график отображает величину управляющего сигнала (скорость движения) на привод

рость корневого сегмента будут определяться с помощью модуля инерциальных датчиков. Система управления на основе регрессионной модели с использованием гауссовских процессов позволит механизму «самостоятельно» обучаться и впоследствии выполнять повороты корневым сегментом по заданному закону движения.

Заключение

В работе представлен алгоритм управления четырехзвенным механизмом с приводом на основе регрессии гауссовскими процессами. Разработана компьютерная модель механизма и

реализована программно процедура построения нелинейной регрессионной модели на основе гауссовских процессов. Проведены компьютерные эксперименты с моделью механизма по управлению его корневым сегментом. Модуль, представляющий программную реализацию регрессионной модели, может быть применен без значительных изменений для решения широкого класса отдельных задач. Он также может быть использован в программном обеспечении микроконтроллеров мехатронных и робототехнических устройств.

Литература

1. *Бишоп Кристофер М.* Распознавание образов и машинное обучение : пер. с англ. – СПб. : ООО «Диалектика», 2020. – 960 с.

2. *Deisenroth M. P.* Efficient Reinforcement Learning using Gaussian Processes. – KIT Scinticfic Publishing, 2011.

3. *Измаилов П. А.* Алгоритмы обучения гауссовских процессов для больших объемов данных. – Москва, 2017.

4. PILCO: A Model-Based and Data-Efficient Approach to Policy Search, 2011. – 1–4 с.

5. ИНТЕХРОС : официальный сайт. — URL: http://intehros.ru (дата обращения: 20.11.2024).

6. Processing : официальный сайт. — URL: https://processing.org (дата обращения: 20.11.2024).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

УДК 004.932

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ РАСТРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАФА

А. В. Аллилуева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается преобразование Хафа — мощный метод для обнаружения геометрических объектов на растровых изображениях, который находит широкое применение в области компьютерного зрения и обработки изображений. Мы анализируем основные принципы работы алгоритма, включая процесс голосования в параметрическом пространстве и формирование накопительного пространства. Приведена программная реализация метода.
Ключевые слова: преобразование Хафа, растровые изображения, параметрическое пространство, параметры, аккумулятор, компьютерное зрение, анализ изображений, детекция границ, оператор Кэнни, полярная система координат.

Введение

В современном мире растровые изображения играют ключевую роль в различных областях, включая компьютерное зрение, медицинскую диагностику, робототехнику и многие другие. Эти изображения представляют собой сетку пикселей, где каждый пиксель содержит информацию о цвете и яркости, что делает их удобными для визуализации и анализа данных. Однако для эффективного использования растровых изображений в автоматизированных системах необходимо идентифицировать геометрические элементы, такие как линии, круги и другие фигуры.

Идентификация этих элементов позволяет не только улучшить качество обработки изображений, но и значительно расширить возможности их применения. Одним из наиболее эффективных методов для этой задачи является преобразование Хафа. Этот метод позволяет преобразовать изображение из пространственной области в параметрическую, что упрощает задачу поиска геометрических форм.

В данной статье рассматриваются основы преобразования Хафа, его применение для идентификации геометрических элементов в растровых изображениях.

1. Алгоритм обнаружения прямых линий

Метод основывается на параметрическом описании искомых форм, что позволяет эффективно выявлять их в пространстве изображения. Для прямой линии, описываемой уравнением: $y = mx + c$, используются два параметра: наклон m и пересечение с осью c. Однако в контексте преобразования Хафа предпочтительнее использовать полярную форму записи уравнения прямой: $r = x\cos(\theta) + y\cos(\theta)$.

В этой формулировке также используются два параметра: r и θ. Здесь r — расстояние от начала координат до ближайшей точки на линии, а θ — угол наклона линии относительно положительного направления оси абсцисс. В этой формулировке также используются два параметра: r и θ.

Процесс обнаружения линий начинается с вычисления значений параметров (r, θ) для каждого пикселя изображения, который соответствует границе. Для каждой точки (x_i, y_i) на изображении генерируется уникальная пара параметров. Все точки, принадлежащие одной прямой, будут иметь одинаковую пару (r, θ).

На следующем этапе осуществляется процесс голосования: каждая пара параметров, полученная из пикселей изображения, увеличивает значение в соответствующей ячейке двумерного массива голосов (аккумулятора). Это позволяет накопить информацию о количестве пикселей, поддерживающих каждую потенциальную линию.

После завершения этапа голосования необходимо определить пары параметров с наибольшим количеством голосов. Каждая из таких пар соответствует линии на исходном изображении. Если на изображении присутствует несколько линий, например, пять, то пять точек с наибольшим количеством голосов будут представлять эти линии. В заключение, линии восстанавливаются в исходном изображении с использованием найденных параметров.

2. Алгоритм обнаружения окружностей

Основной принцип данного метода также заключается в параметризации окружности, которая определяется тремя ключевыми параметрами: координатами центра окружности (a,b) и радиусом r. Уравнение окружности может быть записано в следующем виде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Процесс обнаружения окружностей начинается с создания трехмерного аккумулятора, в котором хранятся голоса для каждого возможного сочетания параметров (a,b,r). Размеры данного массива зависят от диапазонов значений, которые могут принимать параметры. В частности, координаты a и b определяются в пределах размеров изображения, тогда как радиус r варьируется от минимального до максимального значения, заданного исследователем.

На следующем этапе осуществляется процедура голосования. Для каждого пикселя (x,y) в изображении, соответствующего границе (что обычно достигается с помощью детекторов границ), выполняются вычисления параметров окружности. Для каждого значения радиуса r в заданном диапазоне рассчитываются координаты центра окружности (a,b) по формулам: $a=x-r\cos(\theta)$ и $b=y-\sin(\theta)$, где θ — угол, пробегающий значения от 0 до 2π (или от 0 до 360 градусов). После вычисления значений (a,b,r) происходит инкрементирование соответствующего элемента в аккумуляторе на единицу, что отражает голосование за наличие окружности с заданными параметрами.

По завершении процесса голосования необходимо выявить локальные максимумы в трехмерном аккумуляторе. Эти максимумы указывают на параметры окружностей, наиболее вероятно присутствующих в изображении.

Наконец, параметры найденных максимумов (a,b,r) могут быть использованы для восстановления окружностей на исходном изображении. Это достигается путем рисования окружностей с найденными центрами и радиусами.

3. Реализация метода Хафа с использованием языка программирования Python и библиотеки OpenCV

В приведенном ниже коде реализован алгоритм обнаружения линий на изображении с использованием преобразования Хафа. Процесс начинается с предобработки изображения, включает этапы детекции границ и применения преобразования Хафа, а затем визуализирует результаты на исходном изображении. Данный подход демонстрирует основные принципы работы с алгоритмами компьютерного зрения и может быть использован в различных приложениях для анализа изображений.

Изображение считывается с помощью функции cv2.imread(), после чего преобразуется в градации серого с использованием cv2.cvtColor(). Это необходимо для упрощения анализа, так как цветовая информация не требуется для обнаружения границ.

Применяется оператор Кэнни (cv2.Canny()), который выполняет детекцию границ в изображении. Этот оператор использует два порога для фильтрации шумов и выделения значительных границ, что позволяет получить бинарное изображение, где белые пиксели представляют собой обнаруженные границы.

Функция cv2.HoughLines() используется для нахождения параметров линий в бинарном изображении границ. Преобразование Хафа позволяет представлять линии в полярной системе координат (ρ,θ), где ρ — расстояние от начала координат до линии, а θ — угол между осью x и линией.

Для каждой найденной линии вычисляются координаты концов отрезка, который представляет эту линию. С помощью функции cv2.line() эти линии рисуются на оригинальном изображении, что позволяет визуализировать результат работы алгоритма.

```
import cv2
import numpy as np

def hough_transform(image_path, output_path):
    image = cv2.imread(image_path)
    gray = cv2.cvtColor(image, cv2.COLOR_BGR2GRAY)

    edges = cv2.Canny(gray, 50, 150, apertureSize=3)

    lines = cv2.HoughLines(edges, 1, np.pi / 180, 200)

    if lines is not None:
        for rho, theta in lines[:, 0]:
            a = np.cos(theta)
            b = np.sin(theta)
            x0 = a * rho
            y0 = b * rho
            x1 = int(x0 + 1000 * (-b))
            y1 = int(y0 + 1000 * (a))
            x2 = int(x0 - 1000 * (-b))
            y2 = int(y0 - 1000 * (a))
            cv2.line(image, (x1, y1), (x2, y2), (0, 255, 0), 2)
```

Метод Хафа может быть особенно полезен в системах автономного вождения для распознавания дорожной разметки, включая линии между полосами движения, границы дороги и других элементов.

Для примера возьмем изображение дороги с размеченными полосами (рис. 1).

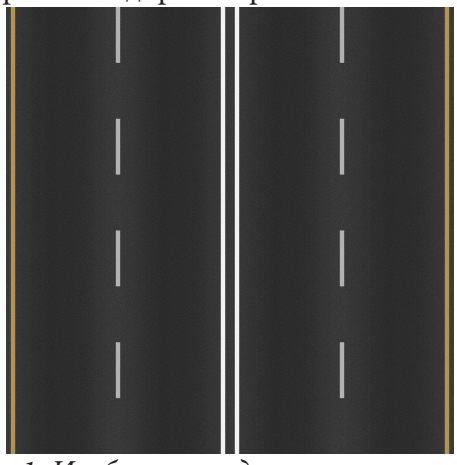


Рис. 1. Изображение дороги с разметкой

Попробуем при помощи приведенной выше программной реализации метода Хафа для поиска линий идентифицировать разметку на изображении, получим результат на рис. 2.

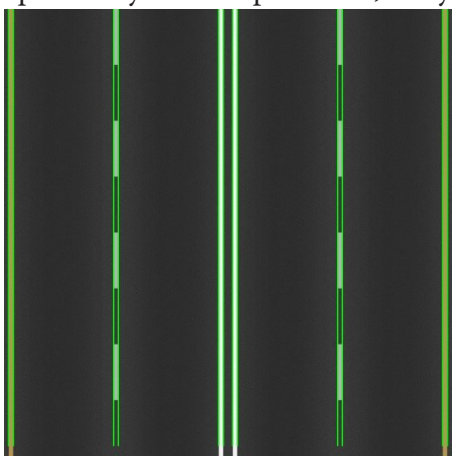


Рис. 2. Изображение с идентифицированной разметкой

В результате работы алгоритма нам удалось распознать разметку на дороге, полученная информация может быть полезна для разработки беспилотного автомобиля (автомобиль, оборудованный системой автоматического управления, который может безопасно передвигаться без участия человека).

Заключение

В данной статье был рассмотрен метод Хафа, его использование для обнаружения прямых линий и окружностей, а также реализация на Python для идентификации дорожной разметки. Метод показал высокую эффективность в задачах компьютерного зрения, что имеет значительное значение для систем безопасности на дорогах и автономных транспортных средств.

Литература

1. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс ; перевод с английского В. В. Чепыжова. – Москва : Техносфера, 2006. – 616 с.

2. *Кудрина М. А.* Использование преобразования Хафа для обнаружения прямых линий и окружностей на изображении/ М. А. Кудрина // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – № 4(2). – С. 476–478.

3. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс; перевод с английского П. А. Чочиа. – Москва : Техносфера, 2005. – 1072 с.

4. *Щекачева А. В.* Выделение линий на изображении с помощью преобразований Хафа / А. В. Щекачева, О. Л. Куляс // «Научно-практический электронный журнал Аллея Науки. – 2019. – № 1(28). – С. 1–12.

5. *Ершов Е. И.* Быстрое преобразование Хафа как инструмент анализа двумерных и трехмерных изображений в задачах поиска прямых и линейной кластеризации. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук: 05.13.17/ Николаев Дмитрий Петрович ; ИППИ РАН. – Москва, 2018. – 118 с.

6. Российская государственная библиотека : официальный сайт. – Москва, 1999. – URL: http://www.rsl.ru (дата обращения: 26.06.2019).

УДК 004.72:519.1

МОДЕЛЬ И МЕТОДИКА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ РИСКОВ

А. В. Ананьев[1], К. С. Иванников[2], В. А. Печкарев[1]

[1]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж
[2]АО НПП «Радар ммс»

Аннотация. В статье рассмотрен выбор оптимального маршрута в сетевой структуре на примере информационного обмена в воздушной сети связи, представленной в виде ориентированного графа. Приведена модель оптимального выбора маршрута между узлами графа на основе решения линейной дискретной оптимизационной задачи для достижения минимума суммарного риска на выбранном маршруте для заданных истока и стока в графе. В основу физической сущности риска положена вероятность ошибки при передаче информации между узлами, помноженная на агрегированный коэффициент негативных последствий. В моделях, отражающих действительность, риск исходит от внешних систем и может применительно к сетям связи, заключаться в утрате узлов, потере информации и т. д. Для определения весовых коэффициентов риска предложена методика имитационного моделирования радиодоступности. Для частного формального примера получена оценка риска, взаимоувязанная с вероятностями передачи информации и потерями на маршруте между узлами.
Ключевые слова: теория рисков, оптимальный маршрут, ориентированный граф, оптимизационная задача, оценка рисков, агрегирование рисков, сетевые структуры.

Введение

Представление исследуемых объектов в виде сетевых структур является широко распространённым подходом в самых разных областях деятельности. В промышленном производстве модели сетевых структур позволяют упорядочить, оценить эффективность отношений подчиненности, рыночных взаимосвязей: цепей контрактов, заказов на продукцию и логистики. В транспортных системах, представляющих собой отрасль сферы услуг по перевозке грузов и пассажиров, модели сетевых структур позволяют оптимизировать инфраструктуру автомобильных и железных дорог, каналов, трубопроводов, размещение терминалов, включающих железнодорожные и автобусные станции, аэропорты, морские и речные порты, а также оценить эффективность средств передвижения.

Особую значимость имеет моделирование сетевых структур для изучения сетей связи, позволяя исследовать практически весь спектр системных показателей, включая точность и скорость передачи информации, помехоустойчивость, степень искажения и помехозащищенность, пропускную способность, задержки в каналах связи и др. Совокупность показателей ложится в основу выбора оптимального маршрута и является задачей поиска единственного пути с наименьшим риском из всех возможных вариантов, решаемой за счет разработки математических моделей и методик на основе теории множеств, нечеткой логики, нечетких множеств, теории массового обслуживания, теории графов, теории рисков, теории потоков и т. д.

Вопросам выбора оптимального маршрута с учетом рисков посвящены работы авторов Ананьева А. В. [1, 2], Городецкого А. Е. [3], Мартынюка И. В. [4], Ермакова С. А. [5], Салухова В. И. [6], Богомолова А. П. [7], Чуднова А. М. [8], Спириной У. А. [9], Боева С. Ф., Тимошенко А. В. [10]. Представленные работы не в полной мере учитывают агрегирование рисков от внешних систем, взаимоувязанных с внутренними показателями, характеризующими качество объекта или системы.

Наиболее близким по физическому представлению неклассического риска является работа [11], в которой принято допущение о том, что все узлы связи находятся одновременно в зоне действия всех наблюдаемых источников потерь или в упрощенном варианте — дестабилизирующих факторов. Однако очевидно, как минимум с позиций радиодоступности, что это допущение необходимо снять. В связи с этим, целью работы является разработка модели выбора оптимального маршрута и методики ее оценки на примере маршрутов передачи информации в воздушной сети связи (ВСС) с учетом неоднородности рисков по отношению к различным узлам сетевой структуры.

1. Математическая модель выбора маршрута передачи информации воздушной сети связи

1.1. Исходные данные

Пусть имеется ВСС, представляющая собой ориентированный граф, ребрами которого являются маршруты передачи информации [12]. Вершины графа представляют собой некоторые узлы, в которых происходит распределение маршрутов по направлениям с вершиной откуда начинается маршрут передачи информации и стоком, где он заканчивается. Если сеть имеет N вершин, то номер стока будем считать равным N, истока — 1.

Ставится задача определить оптимальный маршрут передачи информации от источника к стоку, чтобы суммарный риск для воздушной сети связи был минимальным.

Исходными данными описанной задачи является матрица оценок рисков определяемые выражением:

$$\mathrm{R}_{i,j} = (1 - P_{i,j}) \cdot C_{\sum_{i,j}}, \tag{1}$$

где $P_{i,j}$ — вероятности передачи информации (связи) от i-го узла к j-му; $C_{\sum_{i,j}}$ — суммарный (агрегированный) коэффициент негативных последствий при передаче информации от i-го узла к j-му определяемый выражением:

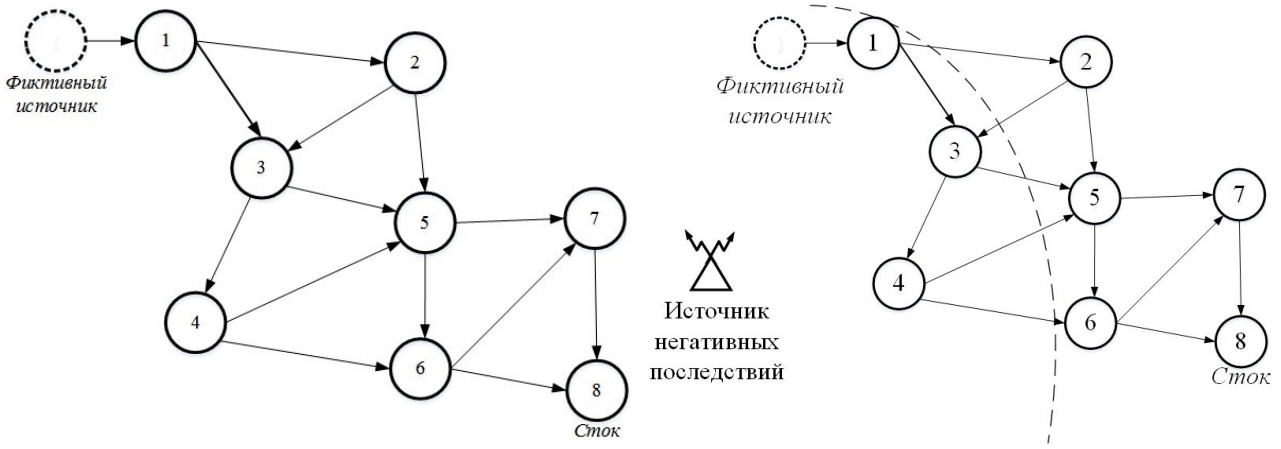
$$C_{\sum_{i,j}} = \sum_{k=1}^{K} C_{i,j}^{k}, k = 1..K, \tag{2}$$

где $C_{i,j}^{k}$ — коэффициенты потерь при передаче информации по маршрутам между узлами ВСС, K — количество типов (вариантов) негативных последствий, сопутствующих передаче информации (связи) от i-го узла к j-му.

Для ВСС существуют следующие риски при передаче информации по маршрутам между узлами ВСС [13]: вскрытие функционирования узлов ВСС с последующим их уничтожением, перехват управления воздушной платформы с последующим захватом для незаконного реверс-инжиниринга, подмена навигационных сигналов («спуфинг»), вскрытие информационного обмена с последующим нанесением вреда потребителям услуг связи и т. д.

В связи с тем, что $P_{i,j}$ — вероятность передачи информации (связи) от i-го узла к j-му также в общем случае зависит от уничтожения узлов, предлагаемый в работе риск в виде выражения (1) валиден только в случае правильного трактования его сущности. Прежде всего правильность трактования обеспечивается логичным разделением вероятности «непередачи информации» и ее последствий в виде потерь. Так, например, нелогично вносить в выражение (2) уничтожение воздушного узла, так как это повлечет за собой «непередачу информации».

Для сравнительной оценки проведем расчеты с использованием графов условных ВСС при учете только вероятностных показателей и при учете рисков, определяемых выражением (1). На рис. 1 представлена ВСС в виде ориентированного графа в нормальных условиях без искусственных дестабилизирующих воздействий (рис. 1а) и в условиях воздействия источника негативных последствий (рис. 1б).



а) *б)*

а) в нормальных условиях; б) в условиях воздействия источника негативных последствий

Рис. 1. ВСС, представленная в виде ориентированного графа

Для снятия ограничений, принятых в работе [11], на рис. 1 введено обозначение «зона влияния внешних источников негативных последствий».

1.2. Построение математической модели выбора оптимального маршрута передачи данных в ВСС на основе теории рисков

Для определения оптимальных путей передачи потоков в сетевой структуре введем некоторые переменные [14, 15]:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если маршрут проходит между вершинами } i \text{ и } j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Ввиду того, что показатели матрицы оценок рисков передачи информации в ВСС являются «негативными», то можно определить критерий, имеющий смысл минимума суммарного риска на выбранном маршруте для заданных истока и стока в графе [16]:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{R}_{ij} x_{ij} \to \min \tag{5}$$

Введем ограничения для решения поставленной задачи:

1. Если маршрут передачи информации проходит через узел (кроме источника и стока), то он должен это делать максимум один раз.

2. Если маршрут выходит из какого-то узла (кроме источника и стока), то он должен это делать также максимум один раз.

3. От источника маршрут должен обязательно выходить (один раз), а в сток обязательно единожды заходить.

4. Маршрут передачи информации должен быть связным, то есть если в любой узел (кроме источника и стока) может входить, то из этого узла он также должен выходить, а если не входит, то не должен выходить.

5. Вид переменных должен быть двоичным (бинарным).

Используя критерий (5) и введенные ограничения, получим задачу линейной дискретной оптимизации вида, позволяющую определить оптимальный маршрут передачи информации в ВСС.

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{R}_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij} \le 1; \quad j = 2,3,...,N-1, \\ \sum\limits_{j=1}^{N} x_{1j} = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} x_{iN} = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} x_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{N} x_{kj}; \quad k = 2,3,...,N-1, \\ x_{ij} - \text{двоичные}, \quad i, j = 1,2,...,N \end{cases}, \qquad (6)$$

где 1 — исток, N — сток.

Решение оптимизационной задачи (6) необходимо проводить по рассчитанной матрице оценки рисков (1).

2. Методика решения оптимизационной задачи на основе определения рисков путем имитационного моделирования радиодоступности

Для решения оптимизационной задачи необходимо определить коэффициенты негативных последствий при передаче информации по маршрутам между узлами ВСС, что возможно осуществить за счет имитационного моделирования [17, 18] радиодоступности для спуфинга. Основанием использования радиодоступности являются основные условия подмены навигационного сигнала: превышение энергетики ложного сигнала над полезным.

Рассмотрим порядок моделирования уровня напряженности электрического поля для случая радиосвязи: наземная антенна поднята на 3 метра, бортовая антенна находится на высоте 300 метров относительно уровня моря. Дальность радиосвязи — 120 километров выбрана исходя из максимального радиуса действия сети ВСС в соответствии с ее предназначением. Высота растительности, тип местности, тип климата выбраны для средней полосы России, что соответствует точке стояния. Для расчета радиовидимости используется топографическая карта формата SXF и матрица высот, включающая естественный и искусственный рельеф местности в формате MTWZ.

На рис. 2 представлены рассчитанные зоны радиовидимости для нормальных условий без искусственных радиоэлектронных помех (зона зеленого цвета); при навязывании ложных режимов работы для узлов 1, 3, 4, 5, 6 ВСС (зона желтого цвета с наименованием «УГРОЗА 2»); при подавлении узлов 1, 3, 4 за счет искусственных дестабилизирующих воздействий (зона красного цвета с наименованием «УГРОЗА 1»). Результаты имитационного моделирования для всех случаев показали, что в условиях навязывания ложных режимов работы от объекта угрозы 2 максимальная дальность радиовидимости составила 108 километров от наземной антенны, а при подавлении ВСС за счет искусственных дестабилизирующих воздействий от объекта угрозы 1 максимальная дальность радиовидимости составила 45 км.

Проведем расчеты коэффициента потерь на основе экспертных оценок методом анализа иерархий (табл. 1) [19, 20]. В качестве критериев выбраны зоны радиодоступности для $K = 1$ при отсутствии естественных дестабилизирующих воздействий, при воздействии угрозы 2, при воздействии угрозы 1.

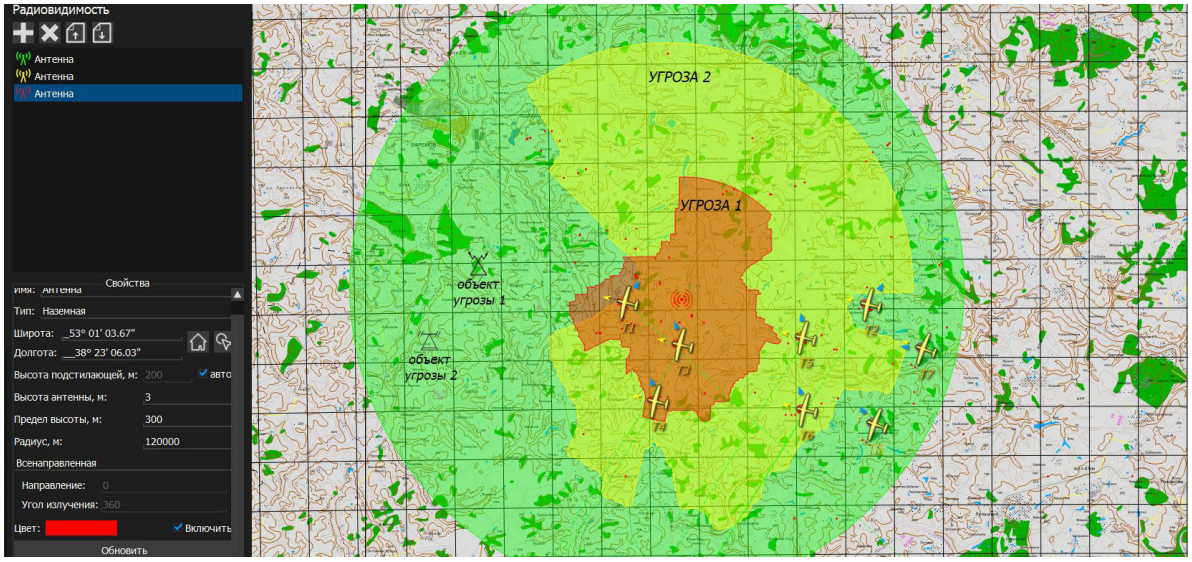


Рис. 2. Рассчитанные зоны радиовидимости ВСС с учетом подавления и навязывания ложных режимов работы узлам ВСС

Таблица 1

Матрица парных сравнений коэффициентов негативных последствий от спуфинга

Номер узла	1	2	3	4	5	6	7	8	Вектор приоритетов
1	1	3	1	1	2	2	3	3	0,206759
2	1/3	1	3	3	2	2	1	1	0,157101
3	1	1/3	1	1	2	2	3	3	0,157101
4	1	1/3	1/2	1	2	2	3	3	0,157101
5	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	2	2	0,096833
6	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	2	2	0,096833
7	1/3	1	1/2	1/3	1/2	1/2	1	1	0,064136
8	1/3	1	1/2	1/3	1/2	1/2	1	1	0,064136

Для расчета оценок рисков необходимо учесть усеченную матрицу радиовидимости для случая передачи информации по маршруту от узла к узлу, измеряемой в километрах.

Проведем расчеты оценок риска передачи информации (1), используя исходные данные вероятностей передачи информации и коэффициентов потерь от спуфинга.

В табл. 2 представлены округленные до десятых долей значения оценки рисков.

Таблица 2

Матрица оценок рисков передачи информации между узлами ВСС

Номер узла	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0,2107	0,278124	1	1	1	1	1
2	1	1	0,7108	1	0,501114	1	1	1
3	1	1	1	0,240192	0,430344	1	1	1
4	1	1	1	1	0,16848	0,2574	1	1
5	1	1	1	1	1	0,10148	0,08496	1
6	1	1	1	1	1	1	0,065808	0,12796
7	1	1	1	1	1	1	1	0,01326
8	1	1	1	1	1	1	1	1

В результате расчетов получены следующие результаты. Оптимальный маршрут передачи информации при использованиях исключительно вероятностной метрики проходит между узлами 1, 3, 4, 6, 8. При использовании рисков (1) маршрут передачи информации будет проходить по узлам 1, 2, 5, 7, 8.

Заключение

В результате проведенных расчетов можно сделать вывод, что разработанный подход к определению оптимальных маршрутов с использованием риска дает отличительные результаты и позволяет учесть негативное воздействие внешних систем.

Для определения коэффициентов негативных последствий использованы парные сравнения, основанные на имитационном моделировании радиодоступности, что имеет важное значение для практической реализации предложенного подхода.

Литература

1. *Ананьев А. В., Багдасарян А. С., Кащенко Г. А., Кащенко А. Г.* Минимизация рисков несанкционированного доступа к информации в наземных и аэромобильных радиосетях критически важных объектов методами многокритериальной многопутевой маршрутизации // Труды НИИР. – 2017. – № 2. – С. 2–6.

2. *Ананьев А. В., Ерзин И. Х., Стафеев М. А., Федюнин П. А.* Магистральные аэромобильные сети связи на стратосферных беспилотных летательных аппаратах и сценарное формирование базы данных рациональной маршрутизации // Специальная техника. – № 2. – 2017. – С. 7–10.

3. *Городецкий А. Е., Тарасова И. Л.* Алгоритмы логико-лингвистических оценок рисков при выборе оптимального маршрута движения // Математические методы в технологиях и технике. – № 9. – 2022. – С. 55–64.

4. *Мартынюк И. В.* Выбор оптимальных маршрутов перевозок опасных грузов по результатам оценки рисков возникновения нарушений безопасности движения и ущербов от них // Вестник ростовского государственного университета путей сообщения. – № 3. – 2006. – С. 103–106.

5. *Ермаков С. А.* Аппарат нечетких множеств и нечеткой логики как средство риск-анализа беспроводных систем связи // Информационная безопасность. – 2010. – № 4. – С. 607–610.

6. *Салухов В. И., Шевченко О. И.* Моделирование и управление рисками при проектировании и строительстве сетей связи // Проблемы анализа риска. – № 3. – 2014. – С. 48–67.

7. Модель исследования влияния деструктивных воздействий на элементы сетевой системы обмена информацией сложной топологии / разработчики Богомолов А. П., Подрезов С. Н. – Москва : 1С, 2017.

8. *Чуднов А. М., Положинцев Б. И., Кичко Я. В.* Анализ помехозащищенности обмена данными группы беспилотных летательных аппаратов в условиях оптимизированных помех // Радиотехника. – 2020. – № 12. – С. 33–47.

9. *Спирина У. А., Козлов С. В.* Метод маршрутизации, обеспечивающий повышение пропускной способности IP сетей в условиях внутрисистемных помех // Журнал радиоэлектроники. – 2015. – № 12. – С. 1–10.

10. *Боев С. Ф., Логовский А. С., Казанцев А. М., Ивойлова А. В., Тимошенко А. В.* Применение сетевой модели на основе многовариантных графов с динамической структурой для формирования планов графиков создания радиолокационных станций дальнего обнаружения // Радиопромышленность. – 2020. – № 3. – С. 8–20.

11. *Ananev A. V., Ivannikov K. S.* Risk-model for communication networks operation stability assessment // Journal of Physics: Conference Series. 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 1902 012028. May 2021. – DOI:10.1088/1742-6596/1902/1/012028.

12. *Омельченко А. В.* Теория графов. – 3-е изд. – Москва : МЦНМО, 2018. 416 с.

13. *Ананьев А. В., Змий Б. Ф., Кащенко А. Г.* Оценка риска влияния физических и информационных разрушающих воздействий на аэромобильную сеть связи // I Всероссийская научно-практическая конференции «Авионика». Актуальные вопросы состояния, эксплуатации, и развития комплексов бортового РЭО воздушных судов, проблемы подготовки специалистов: тезисы докладов (Воронеж, 19–21 апреля 2016). – Воронеж : ВУНЦ ВВС «ВВА», 2016. – С. 22–26.

14. *Лёгкий А. С., Аскерко А. В., Курочка В. С.* Определение значений весового коэффициента структурной значимости узла связи в графе сети // Известия тульского государственного университета. технические науки. – 2021. – № 8. – С. 93–98.

15. *Ahuja R. K.* Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications / R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin. – USA : Prentice Hall, 2017 – 864 p.

16. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника. – 2-е изд. –Москва : Мир, 2013. – 324 с.

17. *Богоявленский С. Б., Стоноженко И. В.* Оценка рисков. Учебное пособие. – СПб. : СБбГЭУ, 2021. – 109 с.

18. *Гипич Г. Н., Евдокимов В. Г., Куклев Е. А., Шакпкин В. С.* Риски и безопасность авиационных систем. – 2-е изд. – Москва : ФГУП ГосНИИ ГА, 2013. – 232 с.

19. *Саати Т. Л.* Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. – 2-е изд. – Москва : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 360 с.

20. *Пономарева А. Н.* Использование метода анализа иерархий в отборе приоритетных критериев анализа инновационной деятельности предприятий. // Актуальные вопросы экономических наук. – 2010. – № 11-1. – С. 235–240.

УДК 004.056

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗЛОУМЫШЛЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ОБЪЕКТ ЗАЩИТЫ

К. Г. Арикова

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В ходе формализации проведено моделирование деструктивных локально-субъектных воздействий в виде несанкционированного доступа к объекту защиты, в качестве которого выступает объект критической информационной инфраструктуры. Моделирование позволяет определить критические моменты в системе, когда она наиболее уязвима к атакам, что помогает частично решить проблему их возникновения и найти способы предотвращения атак. Помимо этого, формализация позволяет выявить день, в который атака на информационную систему более вероятная, с целью готовности специалистов в области информационной безопасности и компонентов защиты ей противостоять.

Ключевые слова: атака, злоумышленное воздействие, информационная безопасность, информационная система, критическая информационная инфраструктура, критический период, несанкционированный доступ, угроза информационной безопасности, формализация, D-моделирование.

Введение

Критическая информационная инфраструктура (далее — КИИ) включает в себя элементы, обеспечивающие жизненно важные функции общества, сбой или повреждение которых может привести к серьезным последствиям, угрожающим безопасности обществу. С каждым годом увеличивается количество кибератак на различные объекты инфраструктуры, при этом злоумышленники используют всё более сложные методы для компрометации систем, что требует разработки новых подходов к безопасности. Одним из таких подходов является моделирование злоумышленных воздействий для прогноза интенсивности и возникновения атак, что способствует их предотвращению.

Моделирование злоумышленных воздействий

Одной из самых часто эксплуатируемых угроз является несанкционированный доступ (далее — НСД), моделирование таких злонамеренных воздействий позволяет выявить слабые места и разработать стратегии для их усиления, что способствует минимизации негативных последствий для объекта КИИ и повышению общей устойчивости к кибератакам. В качестве способа моделирования выбрано D-моделирование, которое предоставляет возможность прогнозирования развития событий информационной безопасности при реализации различных категорий угроз.

Для D-моделирования злоумышленных воздействий на объект КИИ принимаются следующие предположения: случайность во времени совершения каждой попытки НСД, не зависимой от состояний системы; неизменность интенсивности во времени; длительность самой попытки НСД меньше интервалов между соседними попытками; каждая последующая попытка НСД не зависит от предыдущих попыток.

При моделировании локально-субъектных воздействий, выполняемых единолично злоумышленником, используется формула (1), где $p(k,t)$ — вероятность, что за время t сделано k попыток НСД, γ — интенсивность воздействия.

$$p(k,t) = \frac{(\gamma * t)^k}{k!} e^{-\gamma * t}. \quad (1)$$

Суммарная вероятность реализации некоторого числа попыток НСД в систему, выполняемых несколькими злоумышленниками, рассчитывается по следующему алгоритму:

1. Разработка логической модели;

2. Для каждого из злоумышленников определение вероятности воздействий для необходимого количества попыток;

3. Исходя из логической модели нахождение общей вероятности, на основе которой формируется функция, определяющая в свою очередь вероятность воздействия на систему двух злоумышленников;

4. Моделирование злоумышленных воздействий на основе полученной функции.

В ходе моделирования будут рассмотрены деструктивные воздействия на объект КИИ двумя независимыми субъектами. Интенсивность воздействия первого злоумышленника принята за $\gamma_1 = 0{,}18$, второго злоумышленника: $\gamma_2 = 0{,}36$. Допустимая вероятность взята за $P_{ДОП} = 0{,}3$. В условиях реальной защиты объекта КИИ данные параметры устанавливаются экспертной группой, которые однозначно определяют уровень защищенности системы, анализируют статистические данные эксплуатации угроз, степени их разрушительности и другие факторы, влияющие на безопасность объекта защиты.

Первым этапом в моделирования выступает разработка логической модели воздействий на систему, которая принимает некоторое число состояний, формирующие правило получения НСД. Разработана логическая модель, представленная в виде формулы:

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A1} \wedge \mathrm{A2}) \vee \mathrm{A1} \vee \mathrm{A2}, \tag{2}$$

где A — «В процессе одновременного воздействия на систему двух злоумышленников НСД в систему будет получен, если получен НСД хотя бы одним из злоумышленников»; $\mathrm{A1}$ — «Первый злоумышленник получил НСД в систему»; $\mathrm{A2}$ — «Второй злоумышленник получил НСД в систему». На практике логическая модель может представлять собой совокупность правил, состоящих из множества состояний, определяемых экспертной группой.

Используя формулу (1), получим модели для различных значений количества попыток совершения НСД. Например,

$$\text{для } k = 1: \; p(1,t) = \frac{(\gamma * t)^1}{1!} e^{-\gamma * t} = \gamma * t * e^{-\gamma * t}; \tag{3}$$

$$\text{для } k = 2: \; p(2,t) = \frac{(\gamma * t)^2}{2!} e^{-\gamma * t} = \frac{\gamma^2 t^2}{2} * e^{-\gamma * t}; \tag{4}$$

$$\text{для } k = 3: \; p(3,t) = \frac{(\gamma * t)^3}{3!} e^{-\gamma * t} = \frac{\gamma^3 t^3}{6} * e^{-\gamma * t} \ldots \tag{5}$$

На основе логической модели построена функция воздействия на систему двух злоумышленников для различных значений количества попыток k_1 первым злоумышленником и k_2 вторым злоумышленником.

$$F(k_1, k_2) = p_1(k_1,\ t)\ *\ p_2(k_2,\ t) + p_1(k_1,\ t) + p_2(k_2,\ t). \tag{6}$$

Таким образом, применяя формулу (6), составлены следующие функция воздействия на систему двумя субъектами:

$$\text{при } k_1 = 1,\ k_2 = 1: \; F(1,1) = p_1(1,\ t)\ *\ p_2(1,\ t) + p_1(1,\ t) + p_2(1,\ t); \tag{7}$$

$$\text{при } k_1 = 1,\ k_2 = 2: \; F(1,2) = p_1(1,\ t)\ *\ p_2(2,\ t) + p_1(1,\ t) + p_2(2,\ t); \tag{8}$$

$$\text{при } k_1 = 2,\ k_2 = 3: \; F(2,3) = p_1(2,\ t)\ *\ p_2(3,\ t) + p_1(2,\ t) + p_2(3,\ t) \ldots \tag{9}$$

Визуализация моделирования

На основе результатов моделирования деструктивных воздействий на объект КИИ при совершении НСД составлен общий график, представленный на рис. 1. Проведено три опыта:

1. При одной возможной попытке НСД первым злоумышленником и при одной возможной попытке НСД вторым злоумышленником самым критическим периодом для системы является интервал с 1-го по 12-й день. Вероятность такого рода попытки НСД принимает максимальное значение 0,8 в 4-й день.

2. При одной возможной попытке НСД первым злоумышленником и при двух возможных попытках НСД вторым злоумышленником самым критическим периодом для системы является интервал с 2-го по 14-й день. Вероятность такого рода попытки НСД принимает максимальное значение 0,74 в 6-й день.

3. При двух возможных попытках НСД первым злоумышленником и при трех возможных попытках НСД вторым злоумышленником самым критическим периодом для системы является интервал с 5-го по 18-й день. Вероятность такого рода попытки НСД принимает максимальное значение 0,53 в 10-й день.

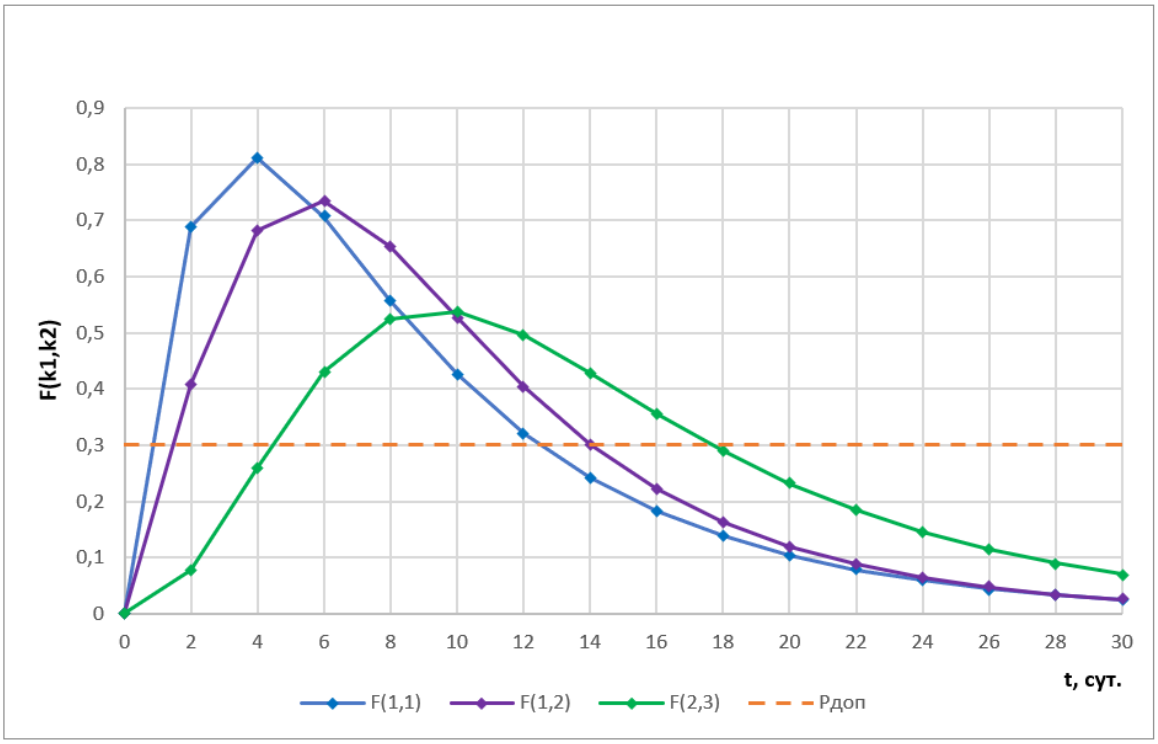


Рис. 1. Визуализация моделирования деструктивных воздействий двумя субъектами

В ходе анализа графиков визуализации результатов моделирования злоумышленных воздействий выявлено: при увеличении попыток воздействий график возрастает и убывает медленнее, тем самым уменьшается максимальное значение вероятности, однако, интервал времени, в пределах которого может произойти критическая попытка НСД увеличивается, поэтому намного сложнее предсказать день попытки совершения злоумышленником НСД в объект КИИ.

Заключение

Моделирование деструктивных воздействий на объекты критической информационной инфраструктуры является важной задачей для обеспечения их безопасности и устойчивости.

Эффективное прогнозирование включает анализ уязвимостей, мониторинг аномальной активности и использование машинного обучения для выявления паттернов поведения потенциальных злоумышленников, включая интенсивность воздействия и многие другие факторы. Также важно учитывать геополитические и социальные факторы, которые могут влиять на вероятность угроз информационной безопасности.

Литература

1. *Кленин Д. В.* Анализ видов вторжений в информационную систему / Д. В. Кленин, Е. А. Максимова // Актуальные вопросы информационной безопасности регионов в условиях перехода России к цифровой экономике: материалы VII Всероссийской научно-практической конференции, Волгоград, 26–27 апреля 2018 года / Волгоградский государственный университет. – Волгоград : Волгоградский государственный университет, 2018. – С. 17–22. – EDN VPCGIM.

2. *Максимова Е. А.* Когнитивное моделирование деструктивных злоумышленных воздействий на объектах критической информационной инфраструктуры / Е. А. Максимова // Труды учебных заведений связи. – 2020. – Т. 6, № 4. – С. 91–103. – DOI 10.31854/1813-324X-2020-6-4-91-103. – EDN LIRTXZ.

3. *Максимова Е. А.* Методы выявления и идентификации источников деструктивных воздействий инфраструктурного генеза / Е. А. Максимова // Электронный сетевой политематический журнал «Научные труды КубГТУ». – 2022. – № 2. – С. 86–99. – EDN KTYQJE.

4. *Утенкова М. А.* Проактивное моделирование утечек данных ограниченного доступа на объектах критической информационной инфраструктуры (на примере транспортной отрасли) / М. А. Утенкова, Е. А. Максимова // Научно-аналитический журнал «Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России». – 2024. – № 2. – С. 91–104. – DOI 10.61260/2218-130X-2024-2-91-104. – EDN QFUZBE.

УДК 539.374

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКА. УСЛОВИЕ ИШЛИНСКОГО

М. А. Артемов, А. С. Бухтояров, А. А. Верлин, Н. И. Кондусов, О. С. Лемина, Р. Г. Меджидов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются вопросы математического моделирования поведения быстро вращающихся тонких дисков при выборе кусочно-линейных потенциалов. Для идеального упругопластического тела задача является статически определимой. Приведены формулы для напряжений для любой кусочно-линейной функции пластичности. В рамках теории малых деформаций для условия пластичности максимального приведенного напряжения в приближении плоского напряженного состояния приведено решение задачи о быстровращающемся тонком диске постоянной толщины. Рассмотрены случаи, когда в пластической области реализуется один или несколько режимов пластичности. Определены условия перехода от одного режима пластичности к другому. Рассмотрен случай предельного состояния диска. Приведены графики для напряжений, пластических деформаций, а также графики годографа вектора напряжений, рассматриваемого как функцию радиальной координаты в пространстве напряжений.
Ключевые слова: математическое моделирование, плоское напряженное состояние, вращающиеся диски, упругопластическое тело, условие Ишлинского, ассоциированный закон пластического деформирования, годограф вектора напряжений, вычислительный эксперимент.

Введение

Задача об упругопластическом состоянии тонкого вращающегося диска является одной из простейших одномерных задач плоско напряженного состояния. Тем не менее, учитывая практическую важность оценки состояния быстро вращающихся дисков, которые являются элементами многих машин и конструкций, интерес к этой задаче сохраняется до настоящего времени. Одной из первых работ в этом направлении является работа Ф. Ласло 1925 г. [1], в которой рассматривались некоторые особенности состояния вращающихся дисков. Расчеты полей напряжений, деформаций и перемещений в рамках определенных математических моделей упругопластического состояния быстро вращающихся дисков были выполнены в последующие годы; приведем ссылки лишь на некоторые из многочисленных работ, в которых в разных постановках приводятся решения задачи о быстро вращающемся диске [2–10].

Можно выделить два вида условий пластичности: когда функция пластичности является кусочно-линейной и когда является гладкой. Выбор кусочно-линейных функций пластичности позволяет получить аналитические решения при определении напряжений и деформаций. Выбор гладких функций пластичности приводит к необходимости численного решения. При выборе некоторых гладких функций пластичности часто рассматривается параметрическое представление этих функций, что может приводить к громоздким преобразованиям [11]. Выбор кусочно-линейных функций пластичности позволяет выполнить интегрирование соотношений ассоциированного закона пластического течения для регулярных режимов и тем самым перейти к соотношениям ассоциированного закона пластического деформирования. Поскольку плоское напряженное состояние является определенным приближением общей трехмерной задачи [12], то при рассмотрении сингулярных режимов условий пластичности для идеально упругопластических тел не выполняется условие непрерывности радиальной компоненты тензора пластических деформаций, а также особенности обусловленные смещение границы для сингулярного режима в процессе нагружения.

1. Постановка задачи

В рамках теории малых деформаций, в приближении плоского напряженного состояния рассматривается задача о тонком диске постоянной толщины, вращающемся с угловой скоростью ω. Внешний контур диска $\rho = b$ свободен от усилий. Выбирается модель однородного изотропного идеального упругопластического тела, условие пластичности Ишлинского [13].

2. Математическая модель состояния диска в упругой области

Выбирается цилиндрическая система координат $\rho\theta z$, ось z которой проходит через центр диска $\rho = 0$, а плоскость $z = 0$ является средней плоскостью

Уравнение движения

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho. \tag{1}$$

Соотношения закона Гука

$$E\varepsilon_\rho = \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \quad E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \quad E\varepsilon_z = -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta). \tag{2}$$

Условие совместности деформаций

$$\rho\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0. \tag{3}$$

Соотношения Коши, определяющие деформации через перемещения

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}. \tag{4}$$

Из уравнений (1)–(4) методом исключения переменных можно получить систему дифференциальных уравнения для определения напряжений

$$\begin{cases} \rho\dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0, \\ \rho\dfrac{d\sigma_\theta}{d\rho} + \sigma_\theta - \sigma_\rho + \nu m\rho^2 = 0, \end{cases}$$

или дифференциальное уравнение второго порядка относительно радиальной компоненты тензора напряжений

$$\rho\frac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2} + 3\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + (3+\nu)m\rho^2 = 0,$$

или дифференциальное уравнение второго порядка для определения перемещений

$$\rho\frac{d^2Eu}{d\rho^2} + \frac{dEu}{d\rho} - \frac{Eu}{\rho} + (1-\nu^2)m\rho^2 = 0.$$

Компонент тензора напряжений и перемещений в упругой области диска определяются по формулам [10]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{3+\nu}{8}m\rho^2, \\ \sigma_\theta &= A + \frac{B}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{8}m\rho^2, \\ Eu &= (1-\nu)A\rho + \frac{1+\nu}{\rho}B - \frac{1-\nu^2}{8}m\rho^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Если весь диск находится в упругом состоянии, то, учитывая граничные условия,

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=0}=\sigma_\theta\,|_{\rho=0},\quad \sigma_\rho\,|_{\rho=b}=0,$$

на основании формул (5) получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\rho^2\right),\\
\sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\rho^2\right),\\
Eu &= (1-\nu)\left(\frac{3+\nu}{8}b^2-\frac{1+\nu^2}{8}\rho^2\right)m\rho.
\end{aligned} \tag{6}$$

Если для всех условий пластичности идеального пластического тела предел пластичности k на одноосное растяжение одинаков, то пластическая область зарождается в центре диска, когда

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=0}=\sigma_\theta\,|_{\rho=0}=k. \tag{7}$$

Из (6), (7) находим условие зарождения пластической области в центре диска

$$m=m_1=\frac{8}{3+\nu}\frac{k}{b^2}. \tag{8}$$

3. Кусочно-линейные функции пластичности

При выборе кусочно-линейной функции пластичности рассматриваем регулярные режимы и сингулярные режимы. Для регулярного режима имеем статически определимую задачу

$$\begin{cases}
\dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\dfrac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=-m\rho,\\
F_i=\alpha_i\sigma_\theta+\beta_i\sigma_\rho=k.
\end{cases} \tag{9}$$

Решение (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{k}{\alpha_i+\beta_i}-\frac{\alpha_i}{3\alpha_i+\beta_i}m\rho^2+C\rho^{-1-\beta_i/\alpha_i},\\
\sigma_\theta &= \frac{k}{\alpha_i+\beta_i}+\frac{\beta_i}{3\alpha_i+\beta_i}m\rho^2-\frac{\beta_i}{\alpha_i}C\rho^{-1-\beta_i/\alpha_i}.
\end{aligned}$$

Для сингулярного режима

$$\begin{cases}
F_i=\alpha_i\sigma_\theta+\beta_i\sigma_\rho=k,\\
F_{i+1}=\alpha_{i+1}\sigma_\theta+\beta_{i+1}\sigma_\rho=k.
\end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta=\sigma_\theta^{(i)} &= \frac{\beta_i-\beta_{i+1}}{\beta_i\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}\alpha_i}k,\\
\sigma_\rho=\sigma_\rho^{(i)} &= \frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{\beta_i\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}\alpha_i}k.
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение равновесия, получаем

$$\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i+\beta_{i+1}-\beta_i}{\beta_i\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}\alpha_i}k+m\rho^2=0. \tag{11}$$

Из (11) следует, что граница $\rho=\rho_c$ между регулярным и сингулярным режимами

$$\rho_c = \sqrt{\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i + \beta_{i+1} - \beta_i}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} \frac{k}{m}}. \tag{12}$$

4. Условие пластичности Шмидта — Ишлинского

Рассмотрим случай, когда для условия пластичности Шмидта — Ишлинского. Для режима

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2k. \tag{13}$$

Решая систему уравнений (1), (13), учитывая, что в центре диска

$$\sigma_\rho \,|_{\rho=0} = \sigma_\theta \,|_{\rho=0} = k, \tag{14}$$

находим

$$\sigma_\rho = k - \frac{m\rho^2}{4}, \quad \sigma_\theta = k + \frac{m\rho^2}{4}. \tag{15}$$

Для сингулярного режима

$$\begin{cases} \sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k, \\ 2\sigma_\theta - \sigma_\rho = 2k. \end{cases} \tag{16}$$

напряжения

$$\sigma_\rho = \frac{2}{3}k, \quad \sigma_\theta = \frac{4}{3}k. \tag{17}$$

Для режима (13) напряжения будут вычисляться по формулам (15) до границы $\rho = c_1$ (радиус границы между областями с разными режимами), которая определяется из (14) и (17)

$$c_1 = \sqrt{\frac{4k}{3m}}. \tag{18}$$

Для режима (17) по формуле (12) находим, что

$$\rho_c = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}. \tag{19}$$

Сравнивая (18) и (19) приходим к выводу, что режиму (17) не соответствует какая-либо кольцевая область $c_1 \le \rho \le c_2$. Поэтому при переходе от одного регулярного режима к другому в пластической области радиальная компонента тензора пластических деформаций будет претерпевать разрыв.

5. Один режим в пластической области

Рассмотрим случай, когда в пластической области выполняется только режим (13). Для всех регулярных режимов для плоского напряженного состояния идеального упругопластического тела задача статически определимая. В пластической области $0 \le \rho \le c$ напряжения вычисляются по формулам (15). Упругие деформации определяются согласно соотношениям закона Гука (2)

$$E\varepsilon_\rho^e = (1-\nu)k - \frac{1+\nu}{4}m\rho^2, \quad E\varepsilon_\theta^e = (1-\nu)k + \frac{1+\nu}{4}m\rho^2.$$

Пластические деформации

$$\varepsilon_\rho^p = \varepsilon_\rho - \varepsilon_\rho^e, \quad \varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^e, \quad \varepsilon_z^p = -\varepsilon_\rho^p - \varepsilon_\theta^p. \tag{20}$$

Учитывая соотношения ассоциированного закона пластического деформирования и формулы Коши, получаем уравнение для перемещений в пластической области

$$\frac{dEu}{d\rho}-\frac{Eu}{\rho}+\frac{1+\nu}{2}m\rho^2=0.$$

Решая это уравнение находим

$$Eu=\left(C-\frac{1+\nu}{4}m\rho^2\right)\rho. \tag{21}$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе находим

$$C=\frac{1+\nu}{4}mc^2+(1+\nu)k.$$

Так что

$$\begin{gathered}Eu=\left(\frac{1+\nu}{2}m\left(2c^2-\rho^2\right)+\left(1-\nu\right)k\right)\rho,\\ E\varepsilon_\rho^p=E\varepsilon_\theta^p=\frac{1+\nu}{2}m(c^2-\rho^2),\quad \varepsilon_z^p=-2\varepsilon_\theta^p.\end{gathered} \tag{22}$$

Учитывая условия непрерывности напряжений на упругопластической границе

$$[\sigma_\rho]|_{\rho=c}=0,\quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c}=0$$

в формулах (5) определяем

$$A=k+\frac{1+\nu}{4}mc^2,\quad B=\frac{1+\nu}{8}mc^4.$$

поэтому напряжения и перемещения в упругой области $c\le\rho\le b$

$$\sigma_\rho=k+\frac{1+\nu}{4}mc^2\left(1-\frac{c^2}{2\rho^2}\right)-\frac{3+\nu}{8}m\rho^2,$$

$$\sigma_\theta=k+\frac{1+\nu}{4}mc^2\left(1+\frac{c^2}{2\rho^2}\right)-\frac{1+3\nu}{8}m\rho^2,$$

$$Eu=\left((1-\nu)k+\frac{1+\nu}{4}mc^2\left(1-\nu+\frac{1+\nu}{2}\frac{c^2}{\rho^2}\right)-\frac{1-\nu^2}{8}m\rho^2\right)\rho.$$

На границе $\rho=b$

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=b}=k+\frac{1+\nu}{4}mc^2\left(1-\frac{c^2}{2b^2}\right)-\frac{3+\nu}{8}mb^2.$$

Из условия $\sigma_\rho\,|_{\rho=b}=0$ находим радиус упругопластической границы

$$c=\sqrt{b\left(b-\sqrt{\frac{2}{1+\nu}\left(\frac{4k}{m}-b^2\right)}\right)}. \tag{23}$$

Если на упругопластической границе выполняются равенства (17), то из (18) и (23) находим максимальное значение параметра $m=m_2$

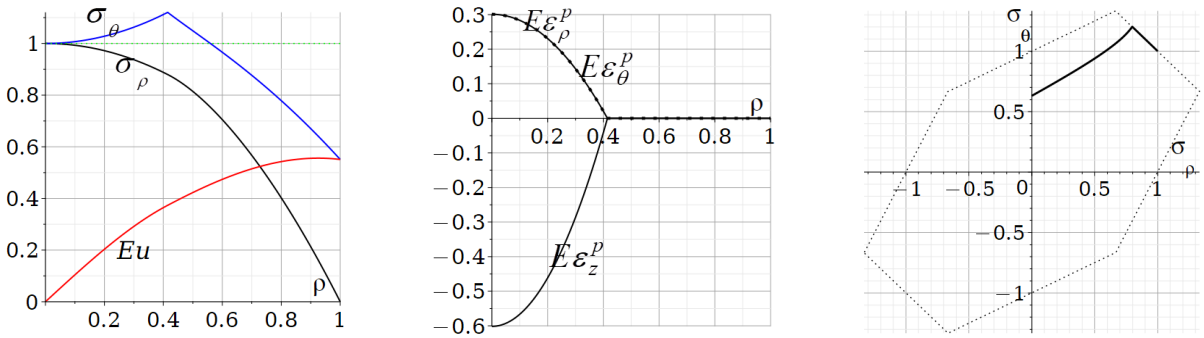
$$m_2=\frac{4k}{3b^2}\frac{4+\nu+\sqrt{13+4\nu}}{3+\nu},$$

для которого в пластической области будет выполнятся только один режим (13). Соответственно, в этом случае наибольшее значение радиуса упругопластической границы будет

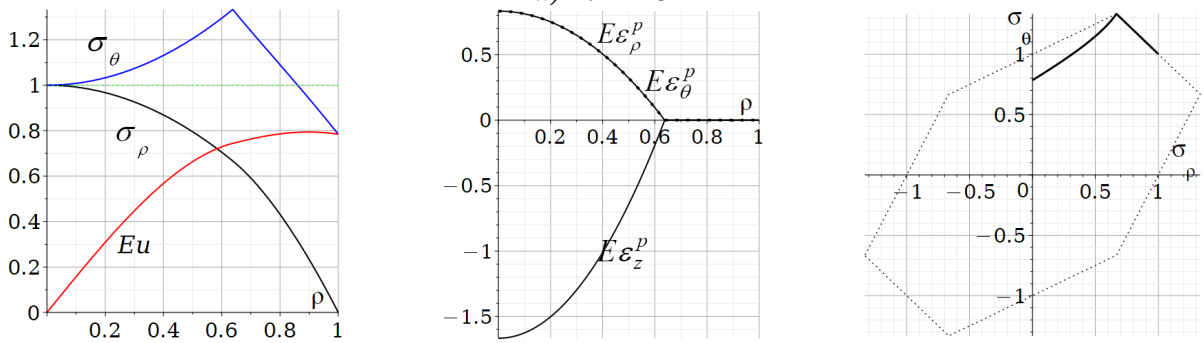
$$c=c_2=\sqrt{\frac{(3+\nu)b^2}{4+\nu+\sqrt{13+4\nu}}}.$$

Таким образом, при изменении параметра m в диапазоне $m_1\le m\le m_2$ в пластической области $0\le\rho\le c$ реализуется только один режим (13). Радиус упругопластической границы будет определяться по формуле (23).

На рис. 1 показаны графики напряжений, перемещений, пластических деформаций и годографа вектора напряжений, когда параметры $k=1,\ b=1,\ \nu=0.25$.



a) $m=2.8$



b) $m=3.2786$

Рис. 1

6. Разгрузка

Рассмотрим процесс, когда значение параметра m уменьшается от m_2 до нуля.

При уменьшении значение параметра m весь диск переходит в упругое состояние, в области $0\le\rho\le c_1$ остаются необратимые деформации $\varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_z^p$, вычисляемые по формулам (22), в которых надо полагать

$$m=m_2,\quad c=c_1.$$

В указанной области полные деформации

$$\varepsilon_\rho=\varepsilon_\rho^e+\varepsilon_\rho^p,\ \ \varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta^e+\varepsilon_\theta^p \tag{24}$$

должны удовлетворять условиям совместности (3). Из уравнения равновесия (1) следует, что

$$\sigma_\theta=\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\sigma_\rho+m\rho^2. \tag{25}$$

Учитывая соотношения закона Гука (2), равенство (25), подставляя (24) в (3), приходим к уравнению

$$\rho^2\frac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2}+3\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+(3+\nu)m\rho^2+\rho\frac{dE\varepsilon_\theta^p}{d\rho}+E\varepsilon_\theta^p-E\varepsilon_\rho^p=0. \tag{26}$$

Решая уравнение (26) и учитывая (25), находим

$$\begin{aligned}\sigma_\rho&=C_1-\frac{C_2}{\rho^2}+\frac{1+\nu}{8}m_1\rho^2-\frac{3+\nu}{8}m\rho^2,\\ \sigma_\theta&=C_1+\frac{C_2}{\rho^2}+3\frac{1+\nu}{8}m_1\rho^2-\frac{1-3\nu}{8}m\rho^2.\end{aligned} \tag{27}$$

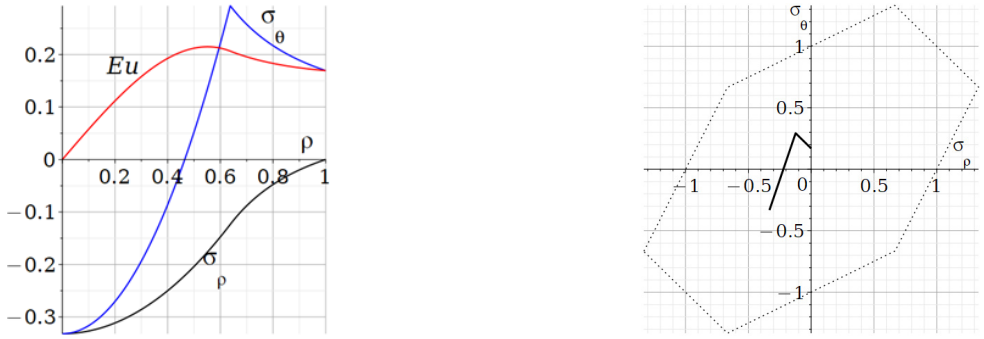
Неизвестная величина $C_2 = 0$.

В области $c_1 \le \rho \le b$ напряжения и перемещения определяются по формулам (5). Из условия $\sigma_\rho\,|_{\rho=b} = 0$ получаем, что

$$A = \frac{3+\nu}{8} mb^2 + \frac{B}{b^2}.$$

Величины A, C_1 определяются из условия непрерывности напряжений на границе $\rho = c_1$.

На рис. 2 приведены графики напряжений, перемещений и годографа вектора напряжений, когда параметры $k = 1,\ b = 1,\ \nu = 0.25,\ m_1 = 3.2786,\ m = 0,\ c_1 = 0.6377$.



a) *b)*

Рис. 2. a) напряжения и перемещения, b) годограф вектора напряжений

Литература

1. *László F.* Geschleuderte Umdrehungskorper im Gebiet bleibender Deformation / F. László. – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Ingenieurwssenschaftliche Forschungsarbeiten. – 1925. – Band 5.– Hefi 4. – P. 281–293.

2. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел : пер. с англ. / А. Надаи. – Москва : Издательство иностранной литературы. – 1954. – 644 с.

3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.

4. *Артемов М. А.* Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска / М. А. Артемов, А. П. Якубенко. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 30–38.

5. *Lomakin E.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs / E. Lomakin, S. Alexandrov, Y. R. Jeng. // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 86, Iss. 1–2. – P. 235–244. – DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9.

6. *Лямина Е. А.* Дизайн равнопрочного вращающегося диска / Е. А. Лямина, О. В. Новожилова. // Инновационные транспортные системы и технологии. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 122–134.

7. *Paul SK.* Stress Analysis of Functionally Graded Disk with Exponentially Varying Thickness Using Iterative Method / SK Paul, M. Sahni. // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. – 2021.16. – P. 232–244. – DOI: 10.37394/232011.2021.16.26.

8. О появлении пластических областей во вращающемся диске / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Р. Г. Меджидов [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – № 1 (59). – С. 21–39.

9. Mathematical modeling of rotating disk states / E. V. Semka, M. A. Artemov, Y. N. Babkina [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122.

10. *Aleksandrova N.* Application of Mises yield criterion to rotating solid disk problem / N. Aleksandrova. – International Journal of Engineering Science. – 2012. – V. 51. – P. 333–337. – DOI: 10.1007/978-3-319-14580-8.

11. *Новацкий В.* Теория упругости. / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

12. *Ишлинский А. Ю.* Математическая теория пластичности. / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. 704 с.

13. *Timoshenko S. P.* Goodier J N Theory of Elasticity / S. P. Timoshenko. – New York : McGraw-Hill, 3rd ed., 1970. – 591 p.

УДК 519.6

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ ФИТОПЛАНКТОНА В МОРСКИХ ЭКОСИСТЕМАХ С УЧЁТОМ КИСЛОРОДНОГО РЕЖИМА

А. М. Атаян, Ю. В. Белова, А. Е. Чистяков

Донской государственный технический университет

Аннотация. Целью работы является построение программного комплекса для решения задачи динамики фитопланктонных популяций на системе с распределённой памятью. Рассматривается математическая модель динамики фитопланктонных популяций и превращения основных биогенных веществ, скомплексированная с моделью гидродинамики, позволяет рассмотреть различные сценарии развития гидробионтов в условиях различных кислородных режимов, которые устанавливаются при различных погодных условиях. Вегетационный период развития фитопланктонных популяций длится приблизительно с мая по сентябрь, что составляет более 13 миллионов секунд. Для решения трехмерных уравнений конвекции-диффузии-реакции использован модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ), шаг по времени берется равным 100 секундам. Необходимо будет сделать 130464 шагов на временной сетке для каждого уравнения. На каждом временном слое необходимо решить 10 уравнений, входящих в математическую модель динамики популяций фитопланктона, включая уравнение для кислорода. Такая задача представляется вычислительно трудоемкой даже для многопроцессорной вычислительной системы (МВС). Поэтому, разработка эффективных параллельных алгоритмов для реализации математической модели динамики фитопланктонных популяций является важной и актуальной задачей.

Ключевые слова: математическое моделирование, фитопланктонные популяции, разностная схема, параллельные алгоритмы, MPI, многопроцессорные вычислительные системы.

Введение

Вегетационный период развития фитопланктонных популяций длится приблизительно с мая по сентябрь, что составляет более 13 миллионов секунд. Для решения трехмерных уравнений конвекции-диффузии-реакции использован модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) [1], шаг по времени берется равным 100 секундам. Необходимо будет сделать 130464 шагов на временной сетке для каждого уравнения. На каждом временном слое необходимо решить 12 уравнений, входящих в математическую модель динамики популяций фитопланктона, включая уравнения для кислорода и углекислого газа [2]. Такая задача представляется вычислительно трудоемкой даже для многопроцессорной вычислительной системы (МВС). Поэтому, разработка эффективных параллельных алгоритмов для реализации математической модели динамики популяций фитопланктона является важной и актуальной задачей. Рассматриваемая задача, используемая для изучения газового режима Азовского моря, численно реализована с использованием технологии MPI, что позволило значительно сократить время работы программного модуля. Расчёты проводились на МВС с распределенной памятью, объемом 85 вычислительных узлов, имеющих по 2 процессора Intel Xeon E5-2690 v4 на каждом. Было задействовано 24 вычислительных узла, максимальное ускорение параллельного алгоритма – 24 раза (в сравнении с последовательной реализацией). Исследование модели параллельных расчетов при разном количестве вычислителей позволило разработать оптимальный режим работы алгоритмов при разном объеме передаваемых данных.

1. Постановка задачи

Математическая модель динамики популяций фитопланктона основана на системе уравнений конвекции-диффузии, записанных в симметричной форме, с нелинейными коэффициентами и функциями источников R_{q_i} [3, 4]:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\nabla\cdot\left(\mathbf{V}q_i\right)+\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)q_i\right)=\operatorname{div}\left(k\cdot\nabla q_i\right)+R_{q_i}, \tag{1}$$

где q_i — концентрация i-й компоненты, [мг/л]; $i=\overline{1,8}$, 1 — фитопланктон — основа пищевой цепи в водоеме; 2 — фосфаты, минеральная форма фосфора, доступная для потребления фитопланктонным популяциям; 3 — растворенный органический фосфор, образуется в процессе экскреции фитопланктонных популяций, в процессе фосфатофикации переходит в фосфаты; 4 — взвешенный органический фосфор, образуется в процессе отмирания фитопланктонных популяций, в процессе автолиза переходит в растворенную форму и в процессе фосфатофикации — в фосфаты; 5 — нитраты; 6 — нитриты, окисляются до нитратов в присутствии кислорода; 7 — аммиак, окисляется до нитритов в присутствии кислорода, фитопланктонные популяции потребляют все три формы азота; 8 — растворенный кислород (гидратированные молекулы O_2); $\mathbf{V}=\{u,v,w\}$ — вектор скорости водного потока, [м/с]; k — коэффициент турбулентного обмена, [м^2/с]; R_{q_i} — функция-источник биогенных веществ [5], [мг/(л·с)]; ∇ — градиент.

Расчетная область G представляет собой замкнутый бассейн, ограниченный цилиндрической боковой поверхностью σ [6], невозмущенной поверхностью водоема Σ_0, дном $\Sigma_H=\Sigma_H(x,y)$. Здесь Σ — кусочно-гладкая граница области G, $\Sigma=\Sigma_0\cup\Sigma_H\cup\sigma$.

Пусть $U_{\mathbf{n}}$ — нормальная составляющая поля скорости водного потока, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к Σ.

Начальные условия:

$$c_i\Big|_{t=0}=c_{io}\left(x,y,z\right),\ i=\overline{1,8}. \tag{2}$$

Граничные условия:

$$c_i=0 \text{ на } \sigma, \text{ если } U_{\mathbf{n}}<0;\ \frac{\partial c_i}{\partial\mathbf{n}}=0, \text{ если } U_{\mathbf{n}}\geq 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial z}=-\xi_i c \text{ на } \Sigma_H;\ \frac{\partial c_i}{\partial z}=\varphi\left(c_i\right) \text{ на } \Sigma_0,\ \varphi\left(c_i\right)=\begin{cases}\gamma_i c_i,\ i\in\{3,4,6,7\},\\ \dfrac{\alpha_0}{v_i}\left(K_i-c_i\right),\ i=8,\\ 0,\ i\in\{1,2,5\}\end{cases} \tag{4}$$

где α_0 — коэффициент аэрации; K_{10} — концентрация растворенного в воде кислорода при насыщении; ξ_i — коэффициент поглощения i-й субстанции донными отложениями.

2. Аппроксимация уравнений гидродинамики

Аппроксимация задачи динамики фитопланктонных популяций осуществляется на основе уравнения диффузии-конвекции-реакции, после её линеаризации [7, 8]:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}+\left(w+w_s\right)\frac{\partial c}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(cu\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(cv\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(cz\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial c}{\partial z}\right)+f\left(x,y,z\right), \tag{5}$$

$$\left(x,y,z\right)\in G,\ \overline{G}=G\cup\Gamma,\ \Gamma=\sum_{side}\cup\sum_{top}\cup\sum_{bot},$$

где c — концентрация субстанции [мг/л]; $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — вектор скорости водного потока [м/с]; w_s — гидравлическая крупность или скорость осаждения субстанции в вертикальном направлении [м/с]; H — глубина [м]; μ, ν — горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии [м^2/с]; x, y — координаты в горизонтальном направлении [м]; z — координата в вертикальном направлении [м]; t — временная переменная [с]; F — функция, описывающая интенсивность распределения источника [мг/л·с].

Начальные условия:

$$0 < t < T; \quad c(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \overline{G}. \tag{6}$$

Граничные условия:

– в вертикальном направлении $\dfrac{\partial c}{\partial z} = 0$;

– вблизи поверхности дна: $\mu \dfrac{\partial c}{\partial z} = -w_S c$; (7)

– на боковой поверхности $\dfrac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0, \ (\mathbf{V}, \mathbf{n}) > 0; \ \nu \dfrac{\partial c}{\partial x} = \mathbf{V}_\mathbf{n} c, \ (\mathbf{V}, \mathbf{n}) < 0,$

где $\mathbf{V}_\mathbf{n}$ — нормальная составляющая вектора скорости, $\mathbf{n}$ — вектор нормали, направленный внутрь расчетной области.

Запишем начальные условия для боковой поверхности, на которой находятся граничные узлы сетки $\overline{\omega}^* \setminus \overline{\omega}$:

– на тех участках боковой границы, где поток втекает в область ($u_\mathbf{n} < 0$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль) задается значение концентрации взвеси, то есть формируются граничные условия первого рода (Дирихле);

– на тех участках боковой границы, где поток движется «наружу» ($u_\mathbf{n} > 0$) задается условие свободного движения частиц взвеси, то есть $\partial c / \partial \mathbf{n} = 0$ (граничные условия Неймана).

Поток движения субстанции отсутствует на границе расчётной области, где нормальная составляющая скорости движения водной среды направлена внутрь. Если нормальная составляющая скорости водной среды направлена наружу, то осуществляется свободный выход субстанции за границы расчетной области.

3. Параллельные алгоритмы модифицированного попеременно-треугольного метода для решения задачи динамики фитопланктонных популяций

В рамках данной работы построен параллельный алгоритм модифицированного попеременно-треугольного метода [9], реализующий поставленную задачу динамики фитопланктонных популяций (субстанций) на многопроцессорной вычислительной системе с использованием гибридной технологии MPI + OpenMP [10] (рис. 1).

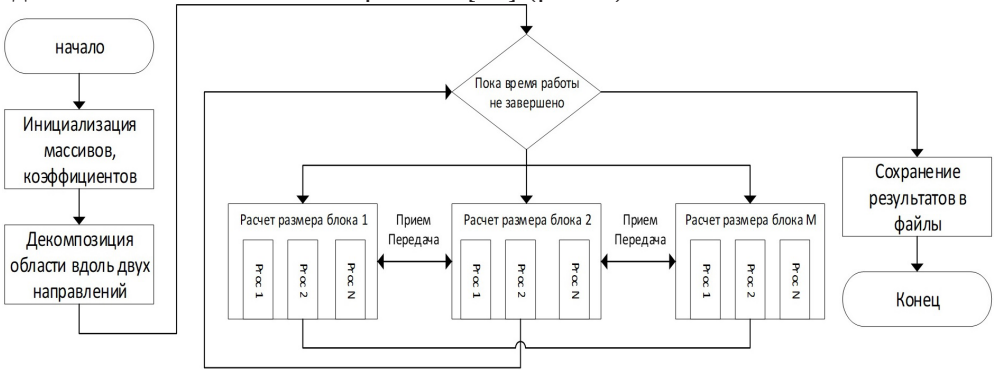
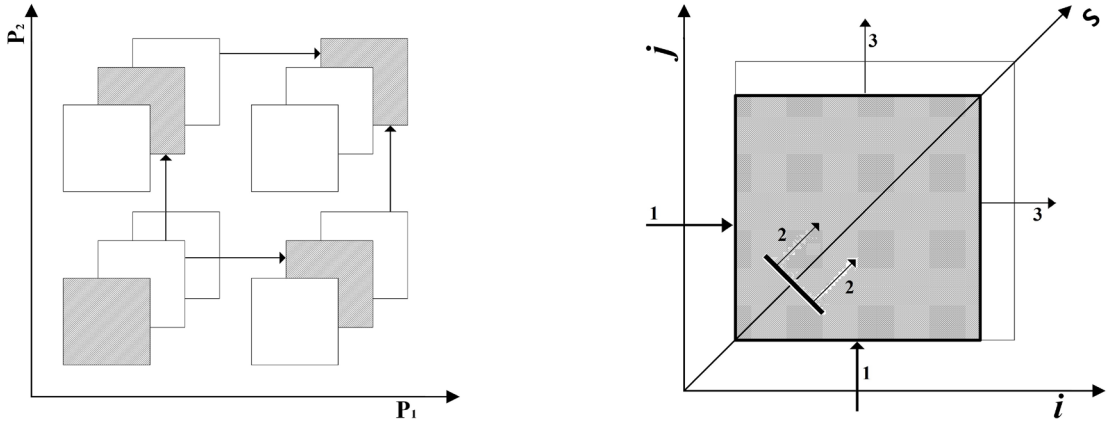


Рис. 1. Алгоритм работы программы с использованием гибридной технологии параллельных вычислений MPI + OpenMP

Для повышения эффективности параллельных расчетов выполнена декомпозиция расчетной области по двум пространственным направлениям [11, 12]. Как было сказано ранее использован способ разбиения по p_1 прямоугольников вдоль одного направления и p_2 — вдоль другого. Данный способ декомпозиции позволяет уменьшить объем передаваемых данных. При использовании декомпозиции по одному направлению объем пересылок равен $2 \times p \times Ny \times Nz$, где p — задействованное число процессоров. В случае декомпозиции по двум направлениям объем пересылок равен $2 \times (p_1 \times Ny + p_2 \times Nx) \times Nz$, где Nx, Ny, Nz — количество расчетных узлов вдоль направлений осей Ox, Oy и Oz соответственно (рис. 2.).



а) *б)*

Рис. 2. а) схема расчетов на основе технологии MPI; б) схема параллельных расчетов при использовании технологии OpenMP

Получена Зависимость ускорения параллельных алгоритмов на основе технологий MPI и MPI + OpenMP от числа вычислителей (рис. 3).

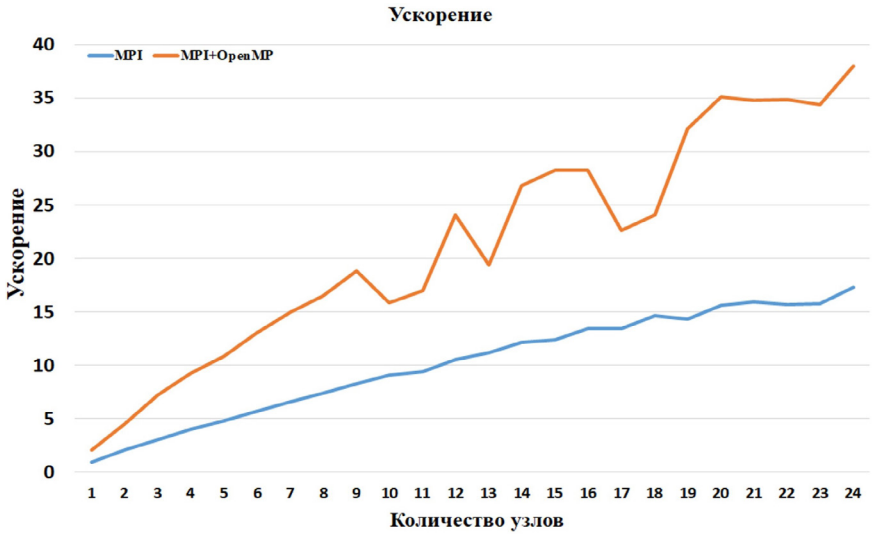


Рис. 3. Зависимость ускорения параллельных алгоритмов на основе технологий MPI и MPI + OpenMP от числа вычислителей (сетка $1000 \times 1000 \times 60$)

4. Результаты численного эксперимента

На рис. 4а представлено трехмерное распределение концентрации синезеленых водорослей, преобладающих в Таганрогском заливе, и диатомовых водорослей, распространенных в основной акватории, которые вносят основной вклад в образование детрита (рис. 4б) вследствие экскреции и отмирания, а также минерального питания (нитратов, рис. 4в).

а) *б)* *с)*

Рис. 4. Результаты численного эксперимента, концентрации: а) фитопланктона c_1; б) детрита c_4; в) биогенного вещества c_5 (нитратов)

Временной интервал моделирования — 50 дней, что соответствует временному периоду от начала вегетации до бурного цветения водорослей в летнее время. Численный эксперимент показал, что наибольшая концентрация детрита наблюдается в Таганрогском заливе, так как в нем продуцируется основная часть биомассы фитопланктона. Взвешенные частицы детрита выносятся течением в основную часть моря, где оседая на дно могут вызывать явление аноксии при определенных ветровых и температурных режимах. Считается, что фотосинтез пропорционален скорости роста первичных продуцентов с постоянным для каждой группы коэффициентом ассимиляции. В описании химико-биологического источника кислорода учтены другие процессы, приводящие к потере кислорода при окислении биогенных веществ. В балансовом соотношении для кислорода учитывался его поток через границу с атмосферой. В свою очередь этот поток сильно зависит от температуры воды.

Заключение

Разработанная математическая модель и программный модуль открывают новые перспективы для экологического мониторинга и управления водными экосистемами, особенно в условиях изменяющегося климата и антропогенного воздействия. Возможность моделирования динамики популяций фитопланктона с учетом изменения концентрации кислорода позволяет более точно прогнозировать последствия различных экологических сценариев, таких как эвтрофикация или гипоксия. Это, в свою очередь, помогает при разработке стратегий по предотвращению и смягчению последствий экологических катастроф.

Кроме того, использование гибридной технологии MPI+OpenMP для параллельных вычислений значительно ускоряет процесс моделирования, что делает возможным проведение более сложных и детализированных расчетов в реальном времени. Это особенно важно для оперативного принятия решений в кризисных ситуациях.

Программное обеспечение, созданное в рамках данного исследования, может быть адаптировано для использования в других мелководных водоемах, что расширяет его применимость и значимость. В дальнейшем планируется интеграция модели с системами дистанционного зондирования и геоинформационными системами для улучшения точности и оперативности экологического мониторинга. Таким образом, данная работа представляет собой важный шаг вперед в области математического моделирования экосистем и может стать основой для дальнейших исследований и разработок в области экологии и охраны окружающей среды.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10102, https://rscf.ru/project/22-71-10102/

Литература

1. *Сухинов А. И.* Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором / А. И. Сухинов, А.Е. Чистяков // Матем. моделирование. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 3–20.

2. Computational aspects of mathematical modeling of the shallow water hydrobiological processes / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, V. N. Litvinov [et. all] // Num. Meth. Prog. – 2020. – Vol. 21, № 4. – P. 452–469.

3. *Yakushev E. V.* Analysis of the water column oxic/anoxic interface in the Black and Baltic seas with a numerical model / E. V. Yakushev [et. al] // Marine Chemistry. – 2007. – Vol. 107, № 3. – P. 388–410.

4. *Сухинов А. И.* Математическая модель транспорта трехкомпонентной взвеси / А. И. Сухинов, И. Ю. Кузнецова // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2023. – 7(3). – С. 39–48. – DOI: 10.23947/2587-8999-2023-7-3-39-48.

5. *Лященко Т. В.* Моделирование процесса распространения загрязнения водной экосистемы фосфатами / Т. В. Лященко, А. Е. Чистяков, А. В. Никитина // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2023. – 7(4). – С. 47–53. – DOI: 10.23947/2587-8999-2023-7-4-47-53.

6. *Sukhinov A.* Mathematical modeling of the phytoplankton populations geographic dynamics for possible scenarios of changes in the Azov Sea hydrological regime / A. Sukhinov, Y. Belova, A. Chistyakov [et. all] // Mathematics. – 2021. – Т. 9, № 23. – С. 3025. – DOI: 10.3390/math9233025.

7. *Белова Ю. В.* Изучение качественных закономерностей процесса эвтрофирования мелководного водоема на основе математической модели биологической кинетики / Ю. В. Белова [и др.] // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2023. – Т. 16, № 2. – С. 14–27. ‑ DOI: 10.14529/mmp230202.

8. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина [и др.] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 2. – С. 298–315.

9. The difference scheme for the two-dimensional convection-diffusion problem for large Peclet numbers / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, Y. V. Belova // MATEC Web of Conferences. – 2018. – С. 04030. DOI: 10.1051/matecconf/201822604030

10. *Сухинов А. И.* Вычислительные аспекты математического моделирования гидробиологических процессов в мелководном водоеме / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. Н. Литвинов [и др.] // Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21, № 4. – С. 452–469. DOI: 10.26089/NumMet.v21r436.

11. *Милюкова О. Ю.* Способы MPI+OpenMP реализации метода сопряженных градиентов с предобусловливанием блочного неполного обратного треугольного разложения IC1 / О. Ю. Милюкова // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2022. – № 002. – 30 с.

12. *Ильин В. П.* Параллельные методы декомпозиции в пространствах следов / В. П. Ильин, Д. В. Кныш // Вычислительные методы и программирование. – 2011. – Т. 12. – С. 110–119.

13. *Беликов Д. А.* Распараллеливание пространственной модели переноса примеси на системах с распределенной памятью с помощью одно- и двумерной декомпозиции области / Д. А. Беликов, А. В. Старченко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование. – 2009. – Т. 150, № 17. – С.12–23.

УДК 621.396

ЛИНЗА ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДВУХ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ МНОГОЛУЧЕВЫХ АНТЕНН

И. А. Баранников, Е. А. Ищенко, Ю. Г. Пастернак, Д. К. Проскурин, Р. Е. Рогозин, С. М. Фёдоров

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В статье рассматривается многолучевая апертурная антенна, способная работать с ортогональными типами поляризации. Особенностью антенны является полусферическая линза Люнеберга, составленная из метаматериальных структур. Диапазон рабочих частот расположен от 1 до 3 ГГц. Коэффициент направленного действия антенны составляет 18.8 дБи, а уровень боковых лепестков –10 дБ.
Ключевые слова: многолучевые антенны, линза Люнеберга, метаматериал, КПД, ДН.

Введение

Многолучевые антенные системы находят применение во многих радиосистемах благодаря возможности осуществлять прием и передачу сигналов на нескольких направлениях одновременно, что оказывается полезным в задачах радиопеленгации, радиолокации, а также при обеспечении связи в системах с пространственным разделением каналов [1]. Для формирования таких систем используются диаграммообразующие устройства (ДОУ), которые отвечают за создание требуемого фазового-амплитудного распределения. В зависимости от принципа построения ДОУ многолучевые антенные системы можно разделить на: апертурные многолучевые антенны и многолучевые антенные решетки.

Апертурные антенны в качестве ДОУ используют зеркало или объемную линзу, что негативно сказывается на их габаритах и массе. При этом они, в отличие от многолучевых антенных решеток, использующих различные схемы микрополосковые схемы на печатных платах, обладают лучшими характеристиками излучения.

Рассматриваемая в данной работе антенна относится к апертурным и использует линзу Люнеберга в качестве ДОУ. Особенностью такой линзы является изменяющийся коэффициент преломления, который должен уменьшаться от центра линзы к ее краям по следующей формуле:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}. \qquad (1)$$

При этом каждая точка поверхности линзы будет являться фокусом для излучения с противолежащей стороны. Сферические или полусферические линзы Люнеберга являются наиболее распространенными, но их конструкции сложны в производстве и обладают большими габаритами.

Одно из решений недостатков использования линзы Люнеберга было предложено авторами работы [2]. Предлагаемая многолучевая антенна использует четверть сферы линзы Люнеберга, размещенную внутри раскрыва уголкового отражателя. Такая конструкция антенны позволила снизить габариты, а также упростить процесс изготовления антенны, но при этом снижается возможный угол сканирования.

Также можно снизить габариты многолучевых антенн с линзами Люнеберга, если сократить ее плоского варианта. Такая конструкция рассматривалась в работе [3]. Она состоит из нескольких пластин, изготовленных из диэлектрика. В отличие от обычных линз, она имеет меньшие размеры и вес, помимо этого возросла простота изготовления. Недостатком этой антенны является ограничение степени свободы направлений излучения.

Двумерные линзы также рассматривались в работах [4–6]. При этом конструкции использовали метаматериалы для формирования линзы, что позволило увеличить диапазон рабочих частот, а также снизить стоимость изготовления, избежав применения дорогостоящих диэлектриков.

Рассматриваемая в данной статье многолучевая антенна использует полусферу линзы Люнеберга в качестве ДОУ. При этом линза состоит из метаматериальных ячеек, что позволило упростить процесс производства и снизить его стоимость.

Конструкция линзы

Линза представляет собой полусферу высотой 230 мм и имеющую диаметр основания 480 мм (рис. 1), состоящую из нескольких слоев метаматериала, нанесенного на печатные платы, имеющих форму окружности, с меняющимся от слоя к слою радиусом.

Рис. 1. Внешний вид линзы

Метаматериальные ячейки представляют собой печатные структуры в виде иерусалимских крестов, нанесенных на плату с подложкой из FR-4. Толщина платы составляет 0.2 мм. Кресты имеют длину 5.5 мм, а их наконечники — 3.5 мм. Эта конструкция крепится к соседним платам с помощью металлических штырей, которые концами припаиваются к специальным круглым площадкам. Длина штырей составляет 3.1 мм, а их диаметр — 0.2 мм. Площадки для крепления имеют диаметр 0.5 мм. Такая конструкция позволяет увеличить механическую жесткость всей линзы, а также снижает анизотропию метаматериала. Внешний вид одной ячейки метаматериала представлен на рис. 2.

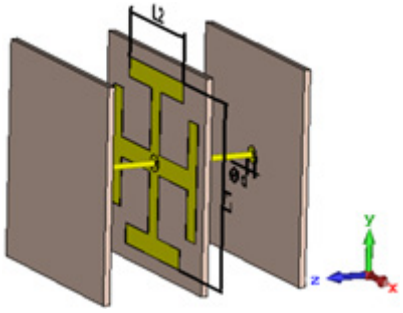


Рис. 2. Внешний вид метаматериальных ячеек линзы

Предложенная конструкция метаматериала на основе иерусалимского креста также позволяет использовать для работы с линзой два типа ортогональной поляризации.

Характеристики антенны

Рассматриваемая антенна предполагает возможность использования двух типов поляризации. Для этого в качестве излучателя предполагается использование антенной системы,

которая была описана в [7]. Она может работать с двумя ортогональными линейно поляризованными электромагнитными волнами и состоит из 2 сверхширокополосных вибраторов, позади которых размещен рефлектор. Рассматриваемые далее характеристики антенны были получены с помощью электродинамического моделирования.

При рассмотрении характеристик антенны будет оцениваться ее работа с обоими типами поляризации. Для простоты их различения они будут обозначены как вертикальная поляризация и горизонтальная поляризация. Линейно поляризованное электромагнитное излучение, векторы напряженности электрического поля которого направленны перпендикулярно платам, из которых состоит линза, будет принято за вертикальную поляризацию. В случае же, когда векторы электрической напряженности излучения направленны параллельно печатным платам линзы, излучение будет принято за горизонтальную поляризацию.

Характеристики излучения антенны будут оцениваться по ее диаграммам направленности (ДН). Направление основного луча ДН не играет роли при рассмотрении направленных характеристик антенны, т. к. ее конструкция, в силу полусферической формы линзы, способна обеспечивать полноазимутальное сканирование. Диаграммы направленности антенны будут приведены на частотах от 1 до 6 ГГц с шагом 1 ГГц для оценки возможных изменений характеристик направленности антенны. На рис. 3 приведены ДН антенны при ее работе с электромагнитным излучением вертикальной поляризации.

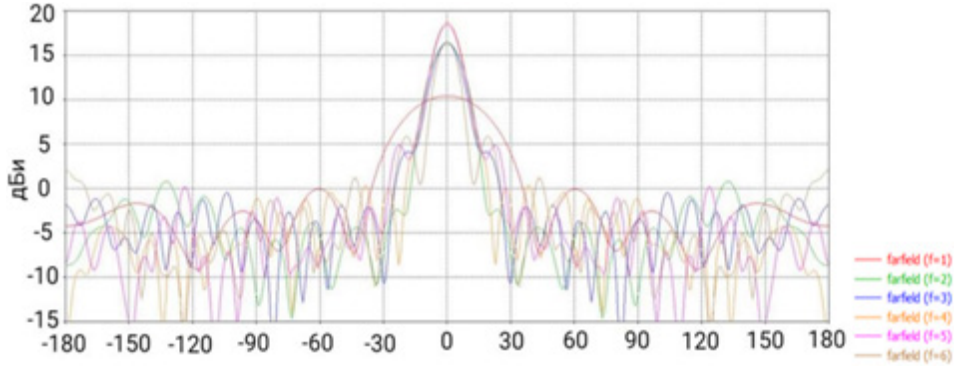


Рис. 3. Диаграммы направленности антенны в азимутальной плоскости при ее работе с электромагнитными волнами вертикальной поляризации

Из данных рис. 3 видно, что в случае использования вертикальной поляризации антенна обладает увеличивающимся вместе с частотой коэффициентом направленного действия, который меняется от 12.3 дБи до 18.8 дБи. При дальнейшем увеличении частоты излучения КНД антенны уменьшался. Ширина основного лепестка ДН по уровню –3 дБ закономерно снижается от 26° до 10° на рассматриваемом диапазоне частот. Уровень боковых лепестков диаграммы направленности при этом оставался ниже –10 дБ на всем диапазоне частот. Далее будут рассмотрены ДН антенны при ее работе с электромагнитным излучением горизонтальной поляризации. Они приведены на рис. 4.

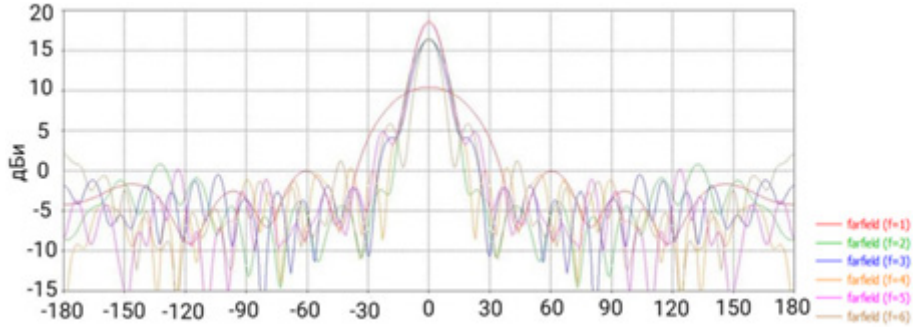


Рис. 4. ДН антенны на частотах от 1 до 6 ГГц с шагом 1 ГГц для произвольного положения луча в азимутальной плоскости при работе с горизонтальной поляризацией

Из рис. 4 видно, что коэффициент направленного действия антенны увеличивается от 11.3 дБи до 19 дБи при росте частоты, что аналогично его поведению при работе антенны с другой поляризацией. Также уменьшается ширина основного лепестка ДН по уровню –3 дБ при увеличении частоты до 6 ГГц от 27° до 8°. Уровень боковых лепестков ДН не превышает –10 дБ на всем рассматриваемом диапазоне частот.

На рис. 5 для лучшей визуализации направления излучения антенны относительно линзы приведена ее ДН на частоте 4 ГГц в трехмерном виде.

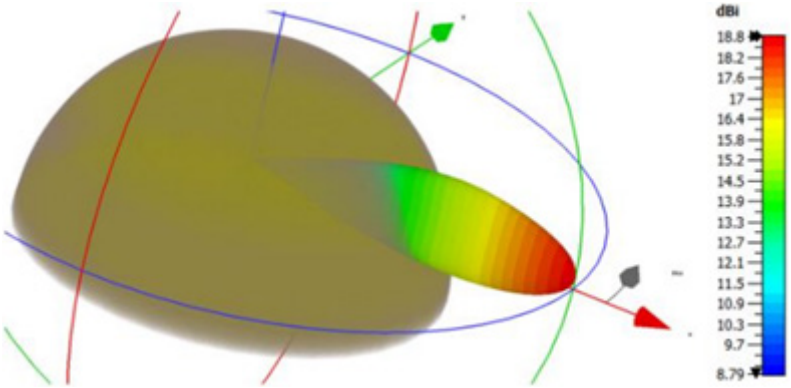


Рис. 5. Диаграмма направленности на частоте 4 ГГц

Исходя из характеристик излучения антенны можно считать, что ее рабочий диапазон частот расположен от 1 до 6 ГГц, при условии одновременной работы с обоими типами поляризации. Помимо этого, важными являются энергетические характеристики антенны при определении ее диапазона рабочих частот. Их оценка будет производиться по графикам частотной зависимости коэффициента полезного действия антенны при ее работе с обоими поляризациями, которые представлены на рис. 6.

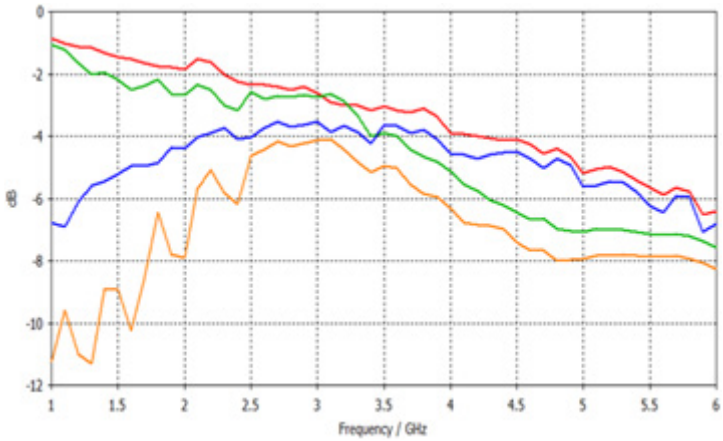


Рис. 6. Зависимости КПД антенны от частоты на промежутке от 1 до 6 ГГц

Представленные графики имеют следующие обозначения: красным и синим цветом обозначены КПД антенны при работе с вертикальной поляризацией (последним обозначен КПД, учитывающий потери при согласовании); КПД при работе с горизонтальной поляризацией обозначены зеленым и желтым (последний также учитывает потери на согласование). Полученные графики показывают, что рост частоты приводит к уменьшению КПД антенны. На частотах выше 3 ГГц он не превышает уровень –3 дБ. КПД вертикальной поляризации на всем промежутке частот, кроме 3.1 ГГц, оказался выше, чем при горизонтальной. При рассмотрении полного КПД антенны, учитывающего потри при согласовании, можно увидеть, что его наиболее приемлемые значения лежат на частотах на частотах от 2 до 3.9 ГГц для излучения

вертикальной поляризации, а для горизонтальной — на частотах от 2.5 до 3.1 ГГц. Улучшить полученные результаты возможно посредством использования более совершенных согласующих устройств для излучателя. Исходя из этого, в качестве рабочего диапазона частот следует выбрать частоты от 1 до 3 ГГц. Для удобства представления все полученные характеристики антенны при работе с волнами разной поляризации сводятся в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики антенны

Характеристика	Вертикальная поляризация	Горизонтальная поляризация
Коэффициент направленного действия	От 12.3 до 18.8 дБи (в зависимости от частоты)	От 11.3 до 20.1 дБи (в зависимости от частоты)
Ширина основного лепестка ДН по уровню –3 дБ	От 26° до 10°	От 27° до 8°
Уровень боковых лепестков ДН	Не более –10 дБ	Не более –10 дБ
Диапазон рабочих частот	От 1до 3 ГГц	От 1 до 3 ГГц
Минимальное значение КПД (без учета потерь на согласование)	–2.5 дБ	–3 дБ

Заключение

Рассмотренная антенна обеспечивает полноазимутальное сканирование, обладая при этом высокой направленностью и хорошим КПД на всем рабочем диапазоне от 1 до 3 ГГц. Применение метаматериальных структур позволило упростить процесс производства антенны и снизить ее стоимость в сравнении с традиционными конструкциями антенн на основе полусферических линз Люнеберга. Учитывая все особенности предложенной конструкции, можно найти для нее применение в задачах радиолокации и радионавигации, а также в системах связи с пространственным разделением каналов.

Литература

1. *Fujimoto K.* Mobile Antenna Systems Handbook / K. Fujimoto, J. R. James. – Third Edition. – Artech, 2008. – 769 p.

2. *Nikolic N., James G. L., Hellicar A., Greene K.* Quarter-sphere Luneburg lens scanning antenna // 2012 15 International Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics, Toulouse, France, 2012. – P. 1–4. – doi: 10.1109/ANTEM.2012.6262330.

3. *Chou H.-T., Yan Z. -D.* Parallel-Plate Luneburg Lens Antenna for Broadband Multibeam Radiation at Millimeter-Wave Frequencies With Design Optimization // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Nov. 2018. – V. 66, No 11. – P. 5794–5804. – doi: 10.1109/TAP.2018.2867060.

4. *Pfeiffer C., Grbic A.* A Printed, Broadband Luneburg Lens Antenna. Antennas and Propagation // IEEE Transactions on. – 2010. – 58. P. 3055–3059. – 10.1109/TAP.2010.2052582.

5. *Yu H., Ding X., Wu Q., Wu Y.* Broadband two-dimensional planar luneburg lens composed of gradient index metamaterials // 2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), Memphis, TN, USA. – 2014. – P. 773–774. – doi: 10.1109/APS.2014.6904716.

6. *Zetterstrom O., Fonseca N. J. G., Quevedo-Teruel O.* Compact Half-Luneburg Lens Antenna Based on a Glide-Symmetric Dielectric Structure // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – Nov. 2022. – V. 21, No 11. – P. 2283–2287. – doi: 10.1109/LAWP.2022.3179639.

7. *Быков К. А.* Сферическая линза Люнеберга на основе печатных плат с электрически малыми рассеивателями / К. А. Быков, Л. Н. Коротков, Пастернак Ю. Г., Р. Е. Рогозин, С. М. Федоров // Вестник ВГТУ. – 2019. – Т. 15, № 1. – С. 78–83.

УДК 621.396

МЕТАМАТЕРИАЛЬНАЯ ЛИНЗА ЛЮНЕБЕРГА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ДЛЯ СОЗДАНИЯ МНОГОЛУЧЕВЫХ АНТЕНН

И. А. Баранников, Е. А. Ищенко, Ю. Г. Пастернак, Д. К. Проскурин, Р. Е. Рогозин, С. М. Фёдоров

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В статье рассматривается перспективная конструкция многолучевой апертурной антенны. Особенностью антенны является использование метаматериалов для построения линзы, осуществляющей фокусировку основного луча диаграммы направленности. Метаматериальные структуры являются Н-образными и нанесены на печатные платы, из которых составлена линза. Рабочий диапазон частот антенны от 10 до 17 ГГц, коэффициент направленного действия –15.8 дБи.

Ключевые слова: метаматериальная линза, линза Люнеберга, апертурная антенна, ДН, ДОУ.

Введение

Радиолокационные и различные современные системы связи требуют от антенных систем возможности осуществлять изменения положения главного луча диаграммы направленности (ДН). Для этого применяются различные конструкции, среди которых можно выделить многолучевые антенны, т.к. они не используют сложных механических и электрических устройств, а также позволяют формировать несколько лучей одновременно, что может быть полезно при реализации систем связи с пространственным разделением каналов [1].

По конструктивным особенностям многолучевые антенны можно разделить на два подкласса: апертурные многолучевые антенны и многолучевые антенные решетки. Их различие заключается в том, какое диаграммообразующее устройство (ДОУ) они используют: различные конструкции линз или микрополосковые схемы. При этом апертурные многолучевые антенны формируют ДН с лучшей направленностью и меньшим уровнем боковых лепестков, но дороже и сложнее в производстве.

Одним из примеров конструкции апертурной многолучевой антенны является, рассмотренная в работе [2], антенна на основе линзы Люнеберга. Ее особенностью является изменяющийся коэффициент преломления, который будет уменьшаться от центра к краям линзы по формуле:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}. \quad (1)$$

Но использование таких линз затруднено их дороговизной и сложностью в изготовлении.

Одно из решений этих проблем предлагалось авторами работы [3]. Предложенная линза была выполненная из нескольких слоев полимерного материала с помощью технологии аддитивной печати. Это позволило значительно упростить процесс производства и снизить стоимость линзы. При этом полученная антенна не претерпела значительных искажений характеристик.

Другим подходом к устранению недостатков многолучевых антенн, использующих линзы является использование части линзы, вместо целой. Такая конструкция была предложена в статье [4]. Авторы предлагают использовать четверть линзы, размещенную в раскрыве уголкового отражателя. Полученная конструкция обладает значительно меньшими габаритами по сравнению со сферической линзой, но имеет ограничения по направлению луча диаграммы направленности.

Также снизить габариты линзы и, соответственно, уменьшить ее стоимость, можно за счет использования ее двухмерного варианта, такого как конструкция в работе [5]. Предлагаемая там линза составлена из нескольких диэлектрических пластин. Полученная конструкция имеет сниженные габариты и более простой процесс изготовления, но ограничена в степенях свободы вращения лучей ДН.

Помимо этого, двумерные линзы были рассмотрены в работах [6 – 8]. Особенностью их конструкции стало использование метаматериалов, которые дешевле диэлектриков. Также преимуществом конструкций стало увеличение рабочего диапазона частот антенн.

В данной статье будет рассматриваться конструкция многолучевой апертурной антенны на основе двумерной цилиндрической линзы Люнеберга, особенностью которой является использование печатных плат с нанесенными на них метаматериальными структурами.

Конструкция антенны

Конструкция антенны состоит из цилиндрической линзы Люнеберга и излучателей. Линза сформирована из расставленных последовательно друг за другом печатных плат, на которые нанесены метаматериальные структуры. Всего в линзе 30 печатных плат. Они расставлены с шагом 3.24 мм и составляют цилиндр с диаметром 100 мм. При этом платы расположены перпендикулярно основанию цилиндра. Высота полученной таким образом линзы составляет 33.3 мм. Внешний вид всей антенны приведен на рис. 1.

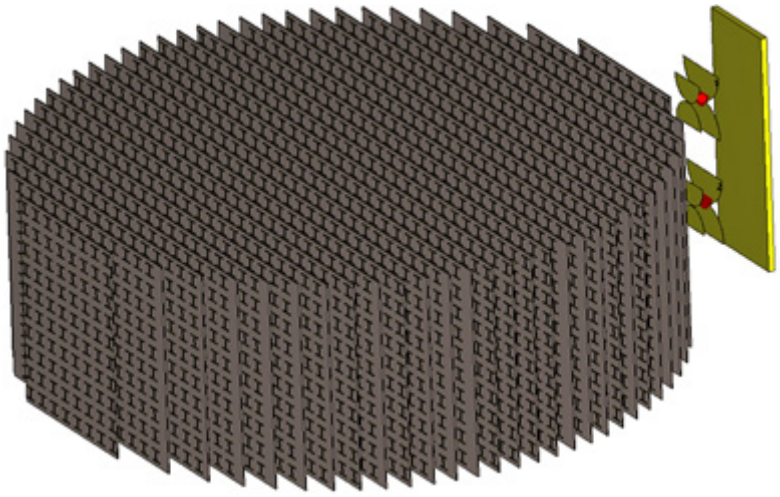


Рис. 1. Внешний вид конструкции антенны

Метаматериальные ячейки, которыми покрыты платы линзы имеют H-образную форму. Они составлены из проводящих полосок длиной 3.33 мм и толщиной 0.035 мм. Толщина подложки платы составляет 0.2 мм, а в качестве материала выбран FR-4. Конструкция отдельной ячейки метаматериала приведена на рис. 2.

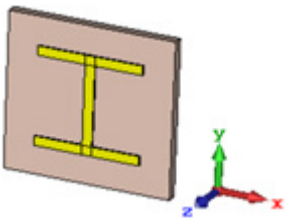
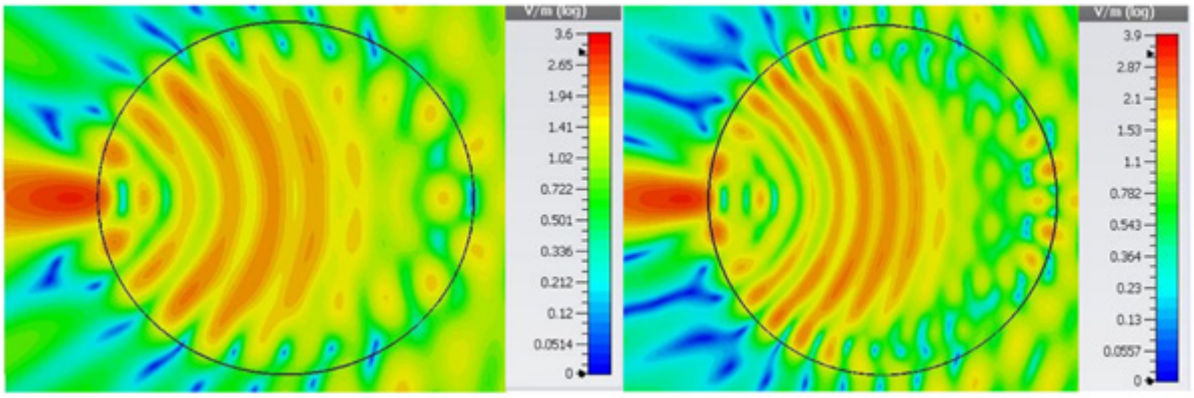


Рис. 2. Конструкция метаматериала

Излучателем в антенне выступает антенная решетка из двух диполей с рефлектором. Поворот основного луча диаграммы направленности осуществляется за счет изменения положения этой решетки.

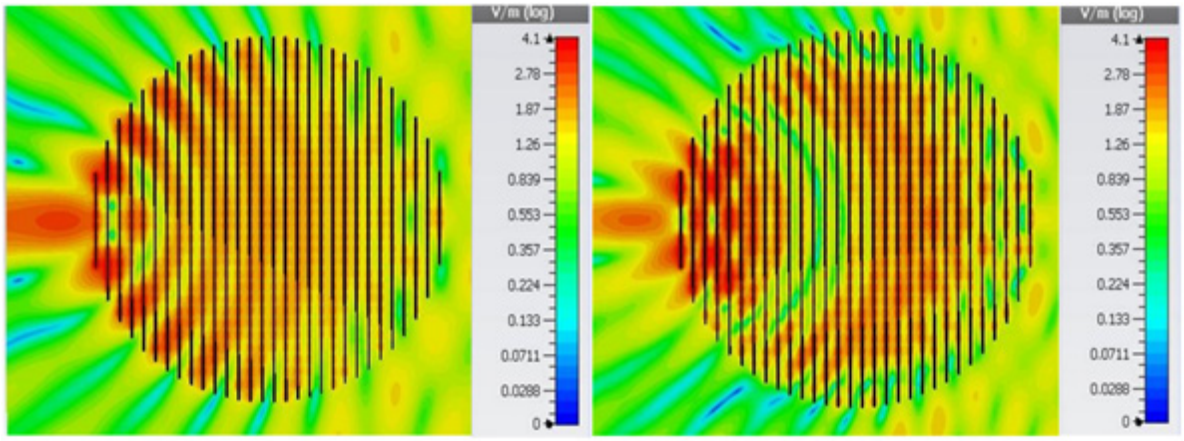
Характеристики антенны

Так как данная конструкция антенны предполагает использование вместо аналогичной, но с линзой из однородного диэлектрика, то сначала будет произведено сравнение распределения поля аналогичной однородной линзы и используемой линзы из печатных плат. Для этого на рис. 3 будет приведено распределение поля в однородной цилиндрической линзе в горизонтальной плоскости на частотах 10 ГГц и 15 ГГц, а на рис. 4 распределение поля для разработанной конструкции линзы.



а) 10 ГГЦ *б) 15ГГц*

Рис. 3. Распределение поля в горизонтальной плоскости однородной линзы



а) 10ГГц *б) 15ГГц*

Рис. 4. Распределение поля в горизонтальной плоскости линзы из печатных плат

Данные рис. 3 и 4 указывают, что полученная линза имеет схожее фокусное расстояние, которое не изменяется с ростом частоты. То есть линза имеет характеристики, аналогичные однородной и может ее заменить.

Характеристики излучения антенны будут оцениваться по ее диаграммам направленности. На рис. 5 приводятся ДН в азимутальной плоскости на частоте 10 ГГц при разных углах поворота излучателей. На рис. 6 представлена трёхмерная диаграмма направленности центрального положения луча для наибольшей наглядности.

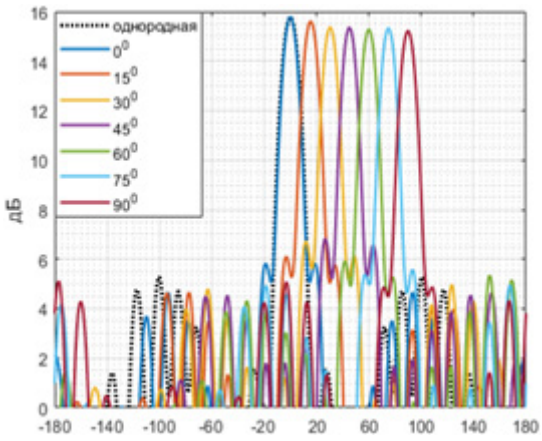


Рис. 5. ДН антенны для разных положений луча на частоте 10 ГГц

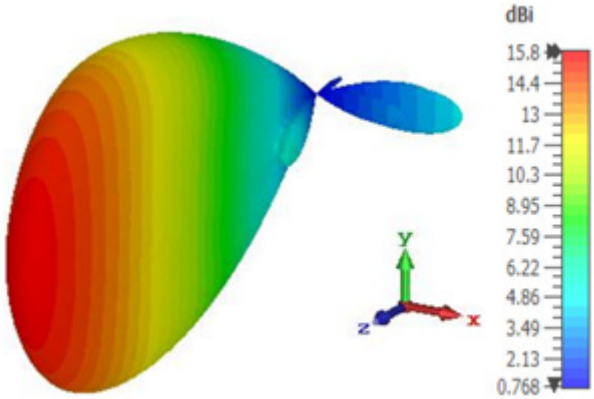


Рис. 6. Трехмерная диаграмма направленности антенны на частоте 10 ГГц

По данным рис. 5 и 6 видно, что коэффициент направленного действия (КНД) антенны составляет 15.8 дБи и не претерпевает значительных изменений, как и форма ДН, на всех возможных углах поворота излучателей. Для дальнейшей оценки характеристик излучения антенны приводятся графики частотной зависимости ширины главного луча ДН по уровню –3 дБ на рис. 7 и уровня боковых лепестков на рис. 8.

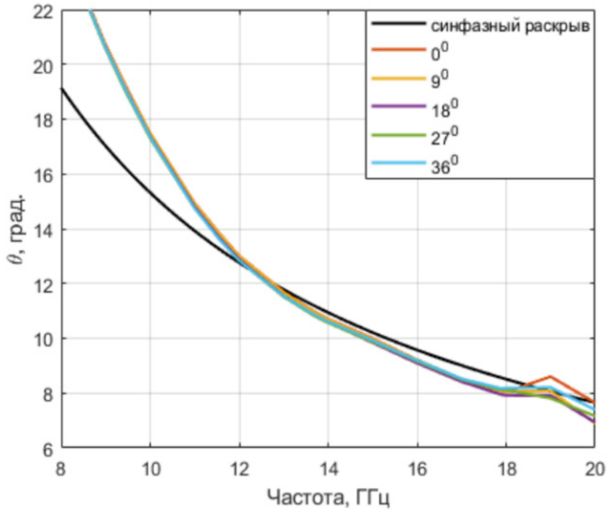


Рис. 7. Частотная зависимость ширины главного луча ДН антенны при разных направлениях луча

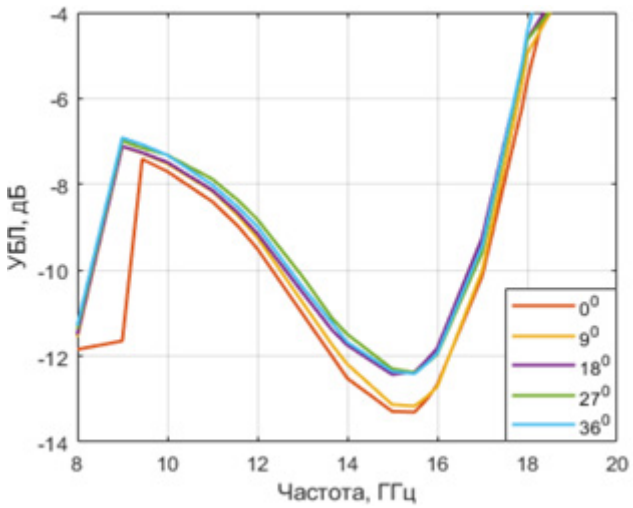


Рис. 8. Частотная зависимость уровня боковых лепестков при разных направлениях луча

Полученный график ширины основного луча ДН антенны по уровню –3 дБ показывает, что с ростом частоты излучения ширина главного лепестка уменьшается с 17° до 8°. График уровня боковых лепестков диаграммы направленности демонстрирует, что приемлемые значения находятся на частотах от 13 ГГц до 17 ГГц. Эти частоты можно выбрать в качестве рабочего диапазона частот антенны, т.к. на них она имеет наилучшие характеристики излучения. Помимо характеристик излучения, рабочий диапазон частот также будет определять энергетическая эффективность работы антенны, а именно ее коэффициенты отражения по входу и коэффициент полезного действия. Частотная зависимость коэффициента отражения антенны при разных углах поворота излучателей приведена на рис. 9.

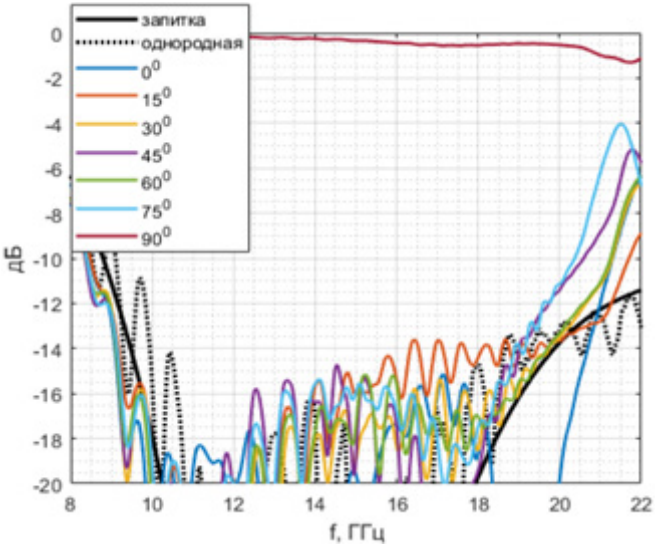


Рис. 9. Частотная зависимость коэффициента отражения антенны при различных углах поворота излучателей

По данным рис. 9 видно, что полученный ранее промежуток частот от 13 до 17 ГГц хорошо согласуется с уровнем возвратных потерь в антенне. Но стоит отметить, что угол поворота излучателя 90° приводит к слишком большим потерям, т.е. целесообразно использовать углы поворота излучателей до 75°, что соответствует сектору сканирования 150°. Далее на рис. 10 приводится частотная зависимость коэффициента полезного действия антенны.

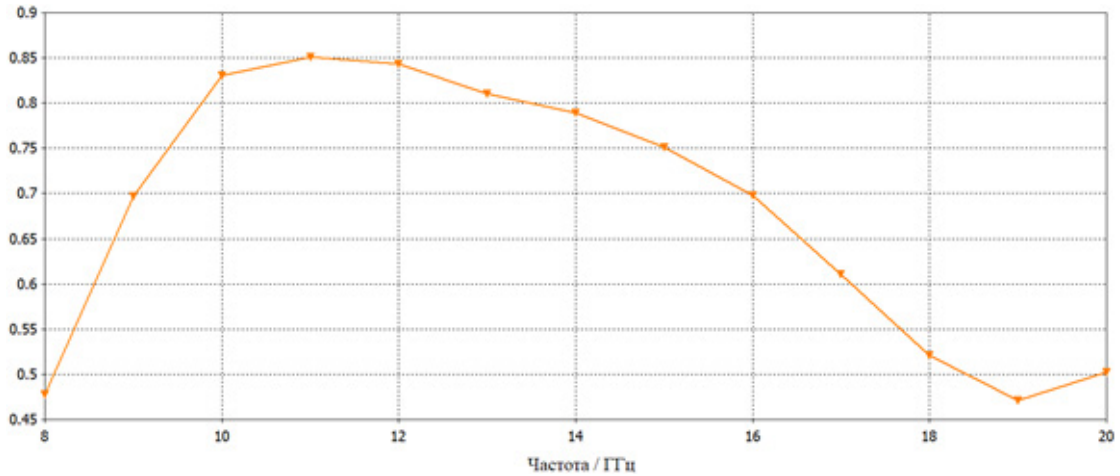


Рис. 10. Частотная зависимость КПД антенны

По данным рис. 10 видно, что на выбранном рабочем диапазоне частот КПД антенны не опускается ниже 60 %, что показывает ее достаточную энергетическую эффективность.

Заключение

Рассмотренная конструкция многолучевой антенны обладает хорошей направленностью и широким диапазоном рабочих частот, при этом является более простой в изготовлении и более дешевой в производстве, чем традиционные конструкции многолучевых антенн с линзами Люнеберга. Наибольшее применение полученная конструкция может найти в системах радиопеленгации и радиолокации для обнаружения малогабаритных целей и системах связи с пространственным и частотным разделением каналов.

Литература

1. *Fujimoto K.* Mobile Antenna Systems Handbook / K. Fujimoto, J. R. James. – Third Edition. – Artech, 2008. – 769 p.

2. *Panda A. K.* Modeling of Luneburg Lens for Broadband Communication // 2018 International Conference on Applied Electromagnetics, Signal Processing and Communication (AESPC), Bhubaneswar, India. – 2018. – P. 1–3. – doi: 10.1109/AESPC44649.2018.9033255.

3. *Liang M., Ng W. -R., Chang K., Gehm M. E., Xin H.* An X-band Luneburg Lens antenna fabricated by rapid prototyping technology // 2011 IEEE MTT-S International Microwave Symposium, Baltimore, MD, USA. – 2011. – P. 1–4. – doi: 10.1109/MWSYM.2011.5972738.

4. *Nikolic N., James G. L., Hellicar A., Greene K.* Quarter-sphere Luneburg lens scanning antenna // 2012 15 International Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics, Toulouse, France, 2012. – P. 1–4. – doi: 10.1109/ANTEM.2012.6262330.

5. *Chou H.-T., Yan Z. -D.* Parallel-Plate Luneburg Lens Antenna for Broadband Multibeam Radiation at Millimeter-Wave Frequencies With Design Optimization // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Nov. 2018. – V. 66, No 11. – P. 5794–5804. – doi: 10.1109/TAP.2018.2867060.

6. *Pfeiffer C., Grbic A.* A Printed, Broadband Luneburg Lens Antenna. Antennas and Propagation // IEEE Transactions on. – 2010. – 58. P. 3055–3059. – 10.1109/TAP.2010.2052582.

7. *Yu H., Ding X., Wu Q., Wu Y.* Broadband two-dimensional planar luneburg lens composed of gradient index metamaterials // 2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), Memphis, TN, USA. – 2014. – P. 773–774. – doi: 10.1109/APS.2014.6904716.

8. *Zetterstrom O., Fonseca N. J. G., Quevedo-Teruel O.* Compact Half-Luneburg Lens Antenna Based on a Glide-Symmetric Dielectric Structure // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – Nov. 2022. – V. 21, No 11. – P. 2283–2287. – doi: 10.1109/LAWP.2022.3179639.

УДК 621.396

МНОГОСЛОЙНАЯ ЛИНЗА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОЛУЧЕВЫХ АНТЕНН С ВОЗМОЖНОСТЬЮ СКАНИРОВАНИЯ ПО ДВУМ КООРДИНАТАМ

И. А. Баранников, Е. А. Ищенко, Ю. Г. Пастернак, Д. К. Проскурин, Р. Е. Рогозин, С. М. Фёдоров

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В статье рассматривается многолучевая апертурная антенна, использующая многослойную печатную линзу, построенную из метаматериальных структур. Антенна предназначена для использования в системах связи 5G. Ее центральная частота 28 ГГц. Коэффициент направленного действия антенны составляет 22 дБи, а ширина луча по уровню –3 дБ — 8°. При этом антенная система обеспечивает вращение главного луча диаграммы направленности в азимутальной плоскости с максимальным отклонением 10°.
Ключевые слова: антенна, линза, 28 ГГц, 5G, линза Люнеберга.

Введение

Важной частью современных систем радиолокации, радиопеленгации и связи являются устройства, обеспечивающие прием и передачу сигналов в различных направлениях. Для этого обычно применяются сложные в производстве антенные решетки. Их более дешевой альтернативой являются многолучевые антенны, которые позволяют формировать несколько лучей диаграммы направленности (ДН) без использования сложных механических или электрических устройств [1].

За формирование требуемого фазово-амплитудного распределения в таких антеннах отвечают диаграммообразующие устройства (ДОУ). Один из способов формирования многолучевых антенн заключается в использовании объемных линзовых устройств или зеркал (антенны построенные таким образом называются апертурными), что позволяет добиться хороших характеристик излучения. Однако недостатком таких многолучевых антенн являются большие габариты.

Снизить габариты апертурных многолучевых антенн можно ограничив размеры линзы. Одно из таких решений было рассмотрено в работе [2]. Предлагаемая линза выполнена в виде полусферы. Изменение направления излучения предполагается за счет изменения положения излучателя, также сама линза была изготовлена из ударопрочного полистирола, что позволило значительно снизить затраты на производство.

Работа [3] рассматривает конструкцию линзы Люнеберга, использующую только четверть сферы, которая размещена в раскрыве уголкового отражателя. Данная антенна имеет еще меньшие габариты, но при этом снижается возможный угол сканирования.

Авторы работы [4] предлагают конструкцию двумерной линзы Люнеберга, что позволило значительно уменьшить ее размеры, сохранив при этом характеристики линзы. Сама линза также имеет сниженную стоимость производства, за счет использования метаматериала вместо диэлектрика. К недостаткам конструкции можно отнести отсутствие возможности менять направление излучения.

Конструкции многолучевых апертурных антенн на основе двумерных линз Люнеберга также предлагались в работах [5–7]. Их особенностью является использование метаматериалов вместо диэлектрика, что дало увеличение полосы рабочих частот и снижение стоимости изготовления. Помимо этого, предлагаемые конструкции обладают возможностью формирования нескольких лучей диаграммы направленности одновременно.

В данной статье рассматривается конструкция многолучевой апертурной антенной системы, использующей планарную печатную линзу, состоящую из метаматериальных структур, в качестве ДОУ.

Конструкция антенны

Антенна представляет собой линзу в форме круга и антенную решетку излучателей. Линза выполнена из многослойной печатной платы, на которой находятся метаматериальные ячейки, обеспечивающие фокусировку луча. Внешний вид всей антенны представлен на рис. 1.

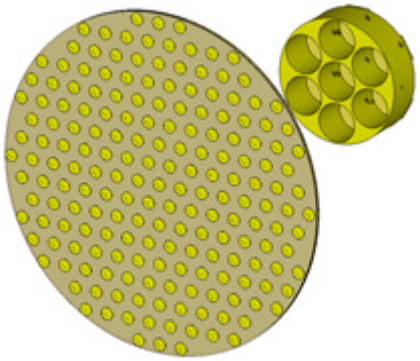


Рис. 1. Внешний вид антенны

Поверхность линзы покрыта с двух сторон решетками круговых патч-антенн, размеры которых получены в соответствии с [8]. Шаг между ними составляет 6.22 мм, каждая патч-антенна имеет два входа. Радиус печатной платы линзы равен 91 мм, а толщина — 1,29 мм. В качестве материала подложки используется диэлектрик Rogers3003, имеющий диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_r = 3$ и тангенс угла диэлектрических потерь $\mathrm{tg}(\delta) = 0.001$. Между слоями патч антенн располагается структура метаматериала, которая также обеспечивает поляризационную развязку между стороной линзы, направленной к излучателям и той, что должна принимать и передавать сигналы.

Метаматериальная структура состоит из слоя, на котором расположен квадратурный делитель мощности, слоев, содержащих полосковые линии задержки, слоев заземления и металлических штырей, которые служат для соединения контактов. Взаимное расположение слоев структуры приведено на рис. 2, диэлектрик и линии задержки не показаны для лушей видимости.

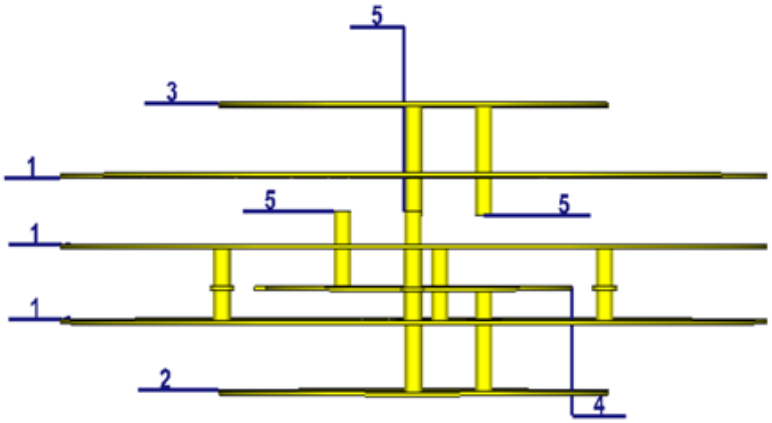


Рис. 2. Взаимное расположение слоев метаматериальной структуры линзы:
1 — слои заземления; 2 — слои патч-антенн на стороне линзы, направленной на излучатели;
3 — слои патч-антенн на стороне линзы, служащей для приема и передачи излучения;
4 — слой, на котором расположен квадратурный делитель мощности;
5 — места подключения линий задержек

Структура метаматериала обеспечивает развязку между сторонами линзы по поляризациям. Для этого полосковый делитель мощности подключается выходами к патч-антенне на стороне линзы, обращенной к излучателям. А патч-антенна на другой стороне линзы подключены ко входам делителя мощности через линии задержки, которые имеют форму полукруга. Такая связь между антеннами дает разность фаз 90° между их входами, что требуется для реализации круговой поляризации патч-антенны на стороне линзы, направленной на излучатели [8]. При этом другая сторона линзы предназначена для работы с линейно поляризованным электромагнитным полем. Внешний вид части линзы без диэлектрика и слоев заземления представлен на рис. 3.

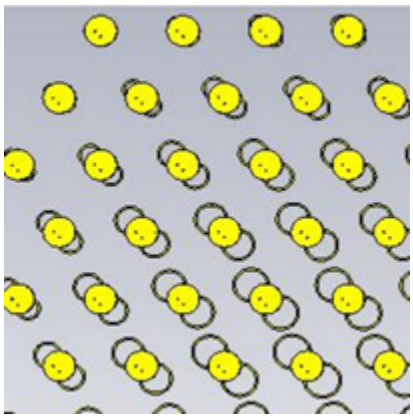
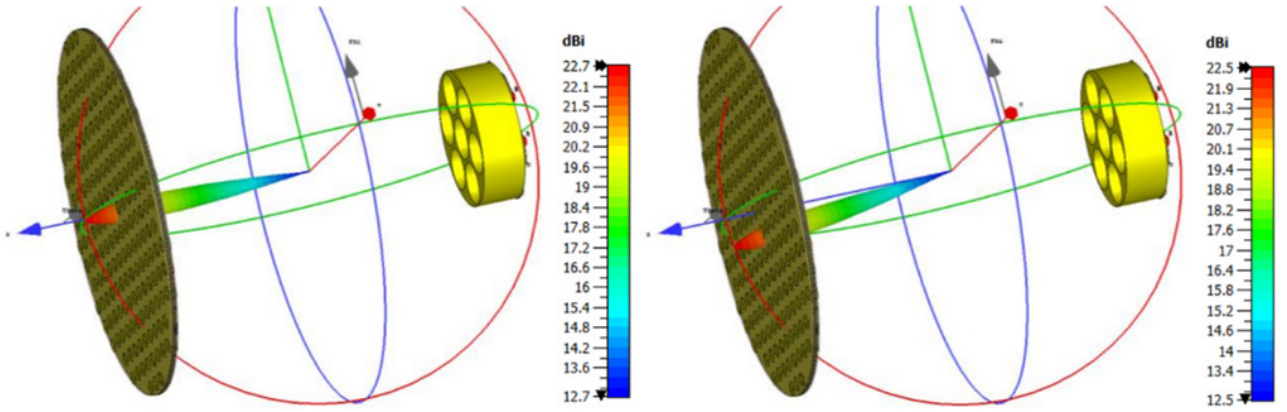


Рис. 3. Фрагмент линзы без диэлектрика и слоев заземления

Решетка излучателей антенны составлена из патч-антенн, аналогичных используемым при формировании линзы. Они накрыты металлической пластиной с отверстиями. Всего излучателей 7. Пластина обеспечивает лучшую изоляцию между отдельными элементами решетки. Для формирования лучей антенны используется каждый отдельный элемент этой решетки.

Характеристики антенны

Центральной частотой антенны является 28 ГГц. Оценка ее характеристик излучения будет проведена с помощью диаграмм направленности на центральной частоте. Они представлены на рис. 4 в трехмерном виде и на рис. 5 в горизонтальной плоскости для центрального и крайнего положений луча.



а) *б)*

Рис. 4. Трехмерные ДН антенны на центральной частоте: а — центральное положение луча; б — максимальное отклонение луча

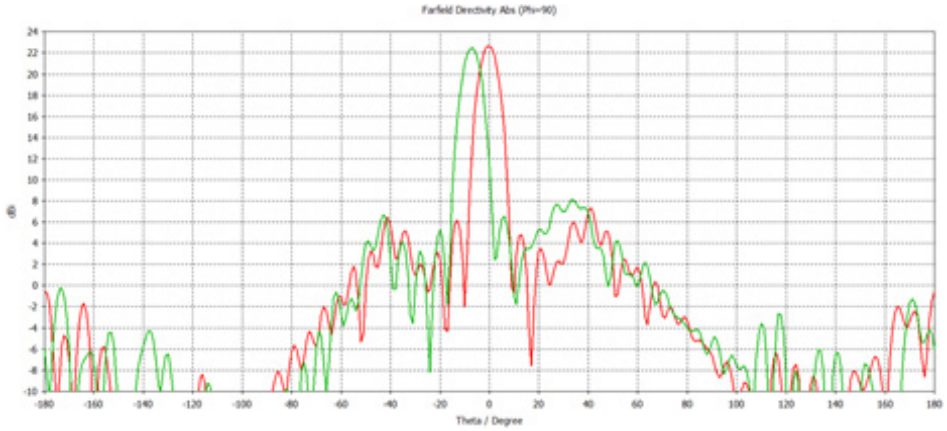


Рис. 5. ДН антенны в азимутальной плоскости на частоте 28 ГГц

По данным рис. 4 и 5 видно, что коэффициент направленного действия (КНД) антенны не опускается меньше 22 дБи, а ширина луча по уровню –3 дБ составляет 8°, что указывает на хорошую направленность полученной системы. При этом максимальное отклонение луча, обеспечиваемое системой, составляет 10°.

Далее для оценки эффективности работы антенны и диапазона рабочих частот приводятся графики зависимости возвратных потерь (рис. 6) и коэффициента полезного действия (КПД) (рис. 7) от частоты излучения. На рис. 7 принято: красная и синяя линии обозначают КПД для центрального положения луча антенны (последняя с учетом потерь на согласование); зеленая и желтая — КПД для крайнего положения луча (желтая линия показывает КПД с учетом потерь на согласование).

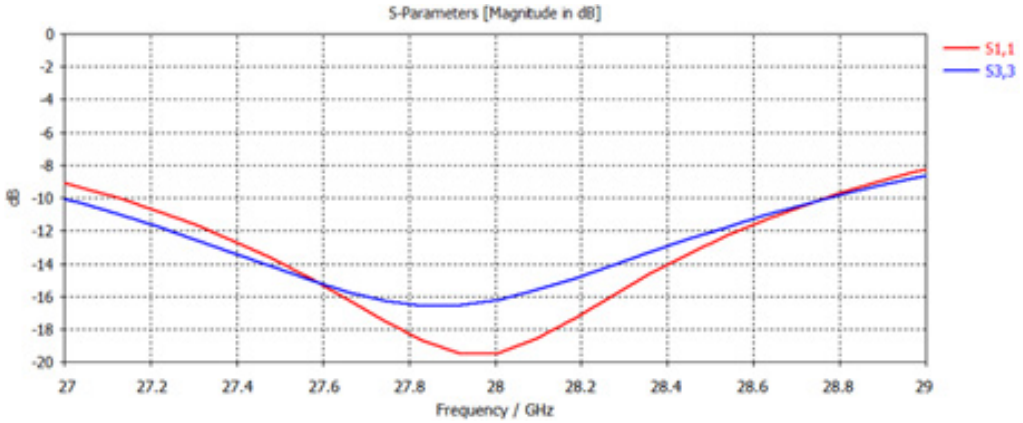


Рис. 6. Зависимость возвратных потерь антенны от частоты: красным обозначен график для центрального направления луча; синим — для крайнего

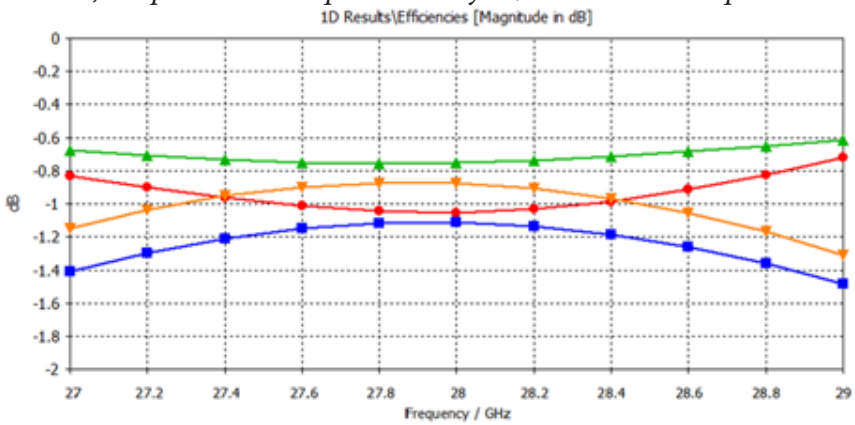


Рис. 7. Зависимость антенны КПД от частоты

Данные рис. 6 и 7 указывают на то, что рабочий диапазон частот антенны расположен от 27.1 до 28.68 ГГц. Суммарные потери в системе при этом не превышают 1.35 дБ на всем рабочем диапазоне, что говорит о высокой эффективности антенны. Все характеристики сведем в табл. 1 для удобства анализа.

Таблица 1

Характеристики антенны

Характеристика	Центральное положение луча	Крайнее положение луча
Коэффициент направленного действия	22.5 дБи	22.25 дБи
Ширина главного луча ДН по уровню –3 дБ	10°	10°
Минимальный уровень возвратных потерь	–16.5 дБ	–19.5 дБ
Минимальное значение КПД антенны (без учета потерь при согласовании)	–1.05 дБ	–0.75 дБ

Заключение

Рассмотренная конструкция многолучевой антенной системы обладает высокой направленностью и эффективностью, несмотря на сложную многослойную конструкцию из 4 слоев печатной платы. Рабочая частота антенны (28 ГГц) предполагает ее использование в системах сотовой связи диапазона 5G, но, учитывая хорошую направленность и ширину луча ДН, возможно также применение в задачах радиопеленгации.

Литература

1. *Fujimoto K.* Mobile Antenna Systems Handbook / K. Fujimoto, J. R. James. – Third Edition. – Artech, 2008. – 769 p.

2. *Santos R. A., Fre G. L., Mejia F. B., Spadoti D. H.* Reconfigurable Hemispherical Dielectric Lens Antennas in MM-Waves // 2018 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), Cartagena, Colombia. – 2018. – P. 456–459. – doi: 10.1109/ICEAA.2018.8520435.

3. *Nikolic N., James G. L., Hellicar A., Greene K.* Quarter-sphere Luneburg lens scanning antenna // 2012 15 International Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics, Toulouse, France, 2012. – P. 1–4. – doi: 10.1109/ANTEM.2012.6262330.

4. *Dhouibi A., Burokur S. N., de Lustrac A., Priou A.* Compact Metamaterial-Based Substrate-Integrated Luneburg Lens Antenna // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2012. – V. 11. – P. 1504–1507. – doi: 10.1109/LAWP.2012.2233191.

5. *Pfeiffer C., Grbic A.* A Printed, Broadband Luneburg Lens Antenna. Antennas and Propagation // IEEE Transactions on. – 2010. – 58. P. 3055–3059. – 10.1109/TAP.2010.2052582.

6. *Yu H., Ding X., Wu Q., Wu Y.* Broadband two-dimensional planar luneburg lens composed of gradient index metamaterials // 2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), Memphis, TN, USA. – 2014. – P. 773–774. – doi: 10.1109/APS.2014.6904716.

7. *Zetterstrom O., Fonseca N. J. G., Quevedo-Teruel O.* Compact Half-Luneburg Lens Antenna Based on a Glide-Symmetric Dielectric Structure // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – Nov. 2022. – V. 21, No 11. – P. 2283–2287. – doi: 10.1109/LAWP.2022.3179639.

8. *James J. R.* Handbook of Microstrip Antennas / J. R. James. – London : Peter Peregrinus Ltd., 1989. – 1312 p.

УДК 519.6

АНАЛИЗ ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СТРУКТУРЫ 2D-ГОЛОГРАММ ИСТОЧНИКА ЗВУКА В ГИДРОАКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

В. А. Башкарев[1], С. А. Переселков[1], В. М. Кузькин[2], А. С. Переселков[1]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук

Аннотация. В работе представлен анализ частотной зависимости структуры 2D-голограммы источника в океаническом волноводе. В рамках численного эксперимента на основе модового описания звукового поля рассмотрен однородный по глубине океанический волновод. Рассмотрен широкий диапазон частот от 100 Гц до 1000 Гц. Проанализированы параметры углового распределения 2D-голограммы: положение и ширины максимума. Представлены результаты численного эксперимента для зависимости параметров углового распределения 2D-голограммы от расстояния источник-приемник и скорости движения источника.
Ключевые слова: гидроакустический волновод, источник звука, звуковое поле, голографическая обработка, интерферограмма, голограмма.

Введение

Опираясь на интерферометрическую модель шумового сигнала, в работах [1, 2] впервые предложена и обоснована голографическая обработка широкополосных гидроакустических сигналов с использованием векторно-скалярных приемников (ВСП). Обзор нынешнего состояния голографической обработки отражен в книге [3], где приведен подробный список литературы по рассматриваемому вопросу. Обработка основана на применении к интерферограмме двумерного частотно-временного преобразования Фурье. Это дает возможность с высокой помехоустойчивостью и малой чувствительностью к вариациям параметров среды распространения решать комплексную задачу локализации источника: обнаружения [4–7], разрешения [8, 9], пеленгования [10, 11], определения радиальной скорости (проекция скорости в направлении приемника) и удаления [1, 2, 12–16], восстановления глубины [17, 18]. Восстановление пеленга осуществляется с применением ВСП. Ключевой фактор голографической обработки – решение задач обнаружения, разрешения, определение пеленга и глубины осуществляется в отсутствие знания о характеристиках сигнала и среды распространения. Для оценивания удаления и радиальной скорости требуются знания о передаточной функции акватории. В отличие от методов пространственной обработки сигналов, согласованных со средой распространения, обработка позволяет установить простые и универсальные соотношения между восстанавливаемыми параметрами источника и измеряемыми величинами. Важно, что процедура обнаружения, разрешения и оценивания параметров источника возможна при использовании одиночных приемников. Чрезвычайно существенным шагом для развития голографической обработки явилось установление адаптивных алгоритмов, которые позволяют восстанавливать удаление и радиальную скорость источника без знания априорной информации о характеристиках среды распространения [19, 20]. Это позволяет расширить область применения голографической обработки и решать проблему идентификации малошумных источников в акваториях с неизвестными передаточными функциями.

В данной работе в рамках численного эксперимента анализируется частотная зависимость структуры 2D-голограммы источника в мелководном океаническом волноводе.

1. Математическая модель

Рассмотрим звуковое поле в следующей модели мелководного волновода [21]. Волновод в координатах (X, Y, Z) представляет собой водный слой воды со скоростью звука $c(\vec{r}, z)$. Здесь $\vec{r} = (x, y)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости. Водный слой ограничен на глубине свободной поверхностью $(z = 0)$ и дном $(z = H)$. ВСП находится в точке $Q(\vec{r_r}(x_r, y_r, z_r)$. Источник звука — $S(\vec{r_s}(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$. Здесь, $\vec{r_s}(t) = \vec{r_0} + \vec{v}t$, где $\vec{v}$ — скорость источника. Спектр сигнала обозначен $s(f)$, где f — частота звука.

Звуковое давление в точке приема в рамках модового подхода можно представить в виде:

$$P(f,t) = s(f)\sum_{m=1}^{M} \frac{\varphi_m(z_s, f)\varphi_m(z_r, f)\exp[ir(t)h_m(f)]}{\sqrt{r(t)h_m(f)}}, \quad (1)$$

где $r(t) = \left|\vec{r_s}(t) - \vec{r_r}\right|$ — расстояние между источником и приемником, $\varphi_m(z, f)$, $h_m(f)$ — мода волновода и ее горизонтальное волновое число. На основе временной зависимости давления $P(f,t)$ формируется интерферограмма источника:

$$I_P(f,t) = P(f,t)P^*(f,t), \quad (2)$$

где верхний индекс «*» обозначает комплексно-сопряженную величину. Для повышения контрастности на сформированной интерферограмме устраняется среднее значение $\bar{I}_P(f,t)$, $I(f,t) = I_P(f,t) - \bar{I}_P(f,t)$.

2D-голограмма источника $F(\tau, v)$ формируется применением к интерферограмме $I(f,t)$ двумерного преобразования Фурье:

$$F(\tau, v) = \int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} I(f,t)\exp[i2\pi(vt - f\tau)]dtdf. \quad (3)$$

Здесь v и τ — частота и время голограммы; $f_{1,2} = f_0 \mp (\Delta f / 2)$, f_0 — средняя частота спектра. Спектральная плотность $F(\tau, v)$ сигнала движущегося источника локализована в 2-х узких полосах, зеркально перевернутых относительно начало координат, в виде отдельных фокальных пятен, вызванных интерференцией мод разных номеров [1, 2]. Они расположены в первом и третьем квадрантах голограммы, если радиальная скорость источника $v < 0$ (источник приближается к приемнику), и во втором и четвертом квадрантах, когда он удаляются от приемника $(v > 0)$. В случае неподвижного или движущегося источника с нулевой радиальной скоростью координаты пиков фокальных пятен расположены на оси времени τ. Область локализации содержит $(M-1)$ пиков с координатами (τ_μ, v_μ), которые расположены на прямой $v = \varepsilon\tau$ с угловым коэффициентом $\varepsilon = v_\mu / \tau_\mu$. Здесь M — число мод, формирующих поле, $\mu = \overline{1,(M-1)}$ — номер фокального пятна. Ближайший к началу координат пик первого фокального пятна, обусловленный интерференцией соседних мод, приходится на значения (τ_1, v_1). Координаты соседнего пика, вызванного интерференцией мод номеров $(m, m+2)$, расположены в точке (τ_2, v_2) и т. д. И, наконец, координаты самого удаленного пика, продиктованного интерференцией первой и последней моды — (τ_{M-1}, v_{M-1}). Спектральная плотность шумоизлучения источника сосредоточена в полосе, ограниченной прямыми

$$v_I = \varepsilon\tau + \delta v, \; v_{II} = \varepsilon\tau - \delta v, \quad (6)$$

где $\delta v = 1/\Delta t$ — полуширина фокальных пятен в направлении оси v. В направлении оси τ полуширина фокальных пятен $\delta\tau = 1/\Delta f$. Вне этой полосы спектральная плотность практически подавлена. Угловые коэффициенты ε и интерференционных полос $\delta f / \delta t$ связаны соотношением

$$\varepsilon = -\frac{\delta f}{\delta t}, \quad (7)$$

где δf — частотный сдвиг интерференционных максимума (ЧСИМ) поля за время δt.

Радиальная скорость v и удаление источника от приемника r_0 в начальный момент времени $t=0$, если $r_0 \gg |v|\Delta t$, связаны с координатами пиков фокальных пятен зависимостями

$$\dot{v} = -2\pi k_{w\mu} \nu_\mu, \quad \dot{r}_0 = k_{r\mu} \tau_\mu. \tag{8}$$

где

$$k_{w\mu} = [\overline{h_{m(m+\mu)}(f_0)}]^{-1}, \quad k_{r\mu} = 2\pi[\overline{dh_{m(m+\mu)}(f_0)/df}]^{-1}. \tag{9}$$

— коэффициенты, определяющие пространственные и частотные масштабы изменчивости передаточной функции волновода [21]. Здесь $h_{mn}(f_0) = h_m(f_0) - h_n(f_0)$, $h_m(f_0)$ — действительная составляющая горизонтального волнового числа (постоянная распространения) m-й моды. Восстановленные параметры источников, в отличие от их истинных значений, отмечены точкой сверху. Черта сверху означает усреднение по номерам мод. В соотношения (8) входят непосредственно измеряемые по голограмме координаты максимумов фокальных пятен (τ_μ, ν_μ), и неизвестные величины (9). Они могут быть определены по данным акустической калибровки района исследований или по результатам моделирования на основе априорной информации о характеристиках волновода.

Функция углового распределения спектральной плотности сигнала на голограмме (функция обнаружения) определяется выражением

$$G(\chi) = \int_0^{\Delta\tau} |F(\tau, \chi\tau)| d\tau. \tag{10}$$

Здесь $\Delta\tau$ — линейный размер области локализации по оси времени τ; χ — варьируемое значение углового коэффициента при интегрировании вдоль прямых $v = \chi\tau$. Максимум $G(\chi)$ приходится на значение $\chi = \tau$.

2. Численный эксперимент

Горизонтально-однородный волновод глубиной $H = 50$ *м*, равномерный профиль скорости звука $c = 1500$ *м/с*. Диапазон частот $f = 100 - 1000$ *Гц*. Параметры поглощающего жидкого однородного дна: отношение плотности грунта и воды $\rho = 1.8$, комплексный показатель преломления $n = 0.84(1 + i0.03)$. Скорость источника $v = 2$ *м/с*. Глубина приемника $z_Q = 48$ *м*, глубина источника $z_s = 10$ *м*. Приемник $Q_0(0,0)$ расположен в начале неподвижной системы координат (X, Y, Z). Начальное горизонтальное расстояние r_0. Время наблюдения $\Delta t = 300$ *с*, длительность шумовой реализации $t_1 = 5$ *с*, временной интервал между ними $t_2 = 10$ с, число шумовых реализаций $J = 20$.

3. Результаты численного эксперимента

Результаты численного эксперимента приведены на рис. 1–3. На рис. 1 представлены нормированные интерферограммы $I(f,t)$ (а), голограммы $F(\tau,v)$ (б), угловые распределения голограммы $G(\chi)$ (в). Предполагается, что источник в начале находится на расстоянии $r_0 = 10$ *км* и движется со скоростью $v = 2$ *м/с*. Результаты на рис. 1 соответствуют трем частотным диапазонам: $100 - 150$ *Гц* (1), $500 - 550$ *Гц* (2), $900 - 950$ *Гц* (3). Как видно из представленных на рис. 1 результатов, при увеличении частоты излучения увеличивается модовый спектр звукового поля.

В частотном диапазоне $100 - 150$ *Гц* модовый спектр звукового поля содержит только пару мод. В результате в пространстве голограммы формируется одно фокальное пятно. В частотном диапазоне $500 - 550$ *Гц* количество мод увеличивается до 16. В пространстве голограммы наблюдается множественные фокальные пятна. Число фокальных пятен еще более увеличивается при переходе от частотного диапазона $500 - 550$ *Гц* к частотному диапазону $900 - 950$ *Гц*. Следует отметить, что для всех трех диапазонов фокальные пятна располагаются на прямой $v = \varepsilon\tau$, проходящей через начало координат.

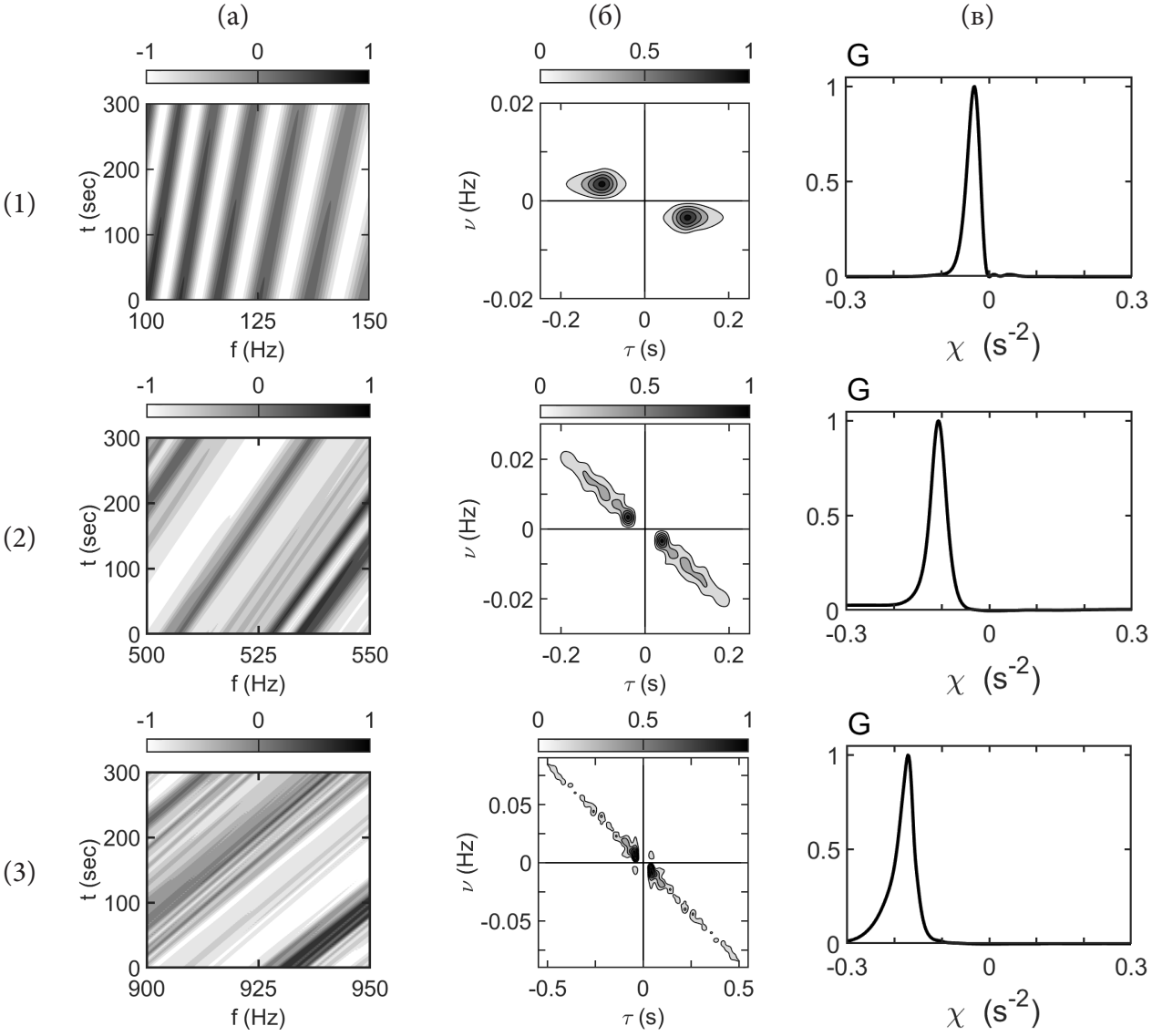
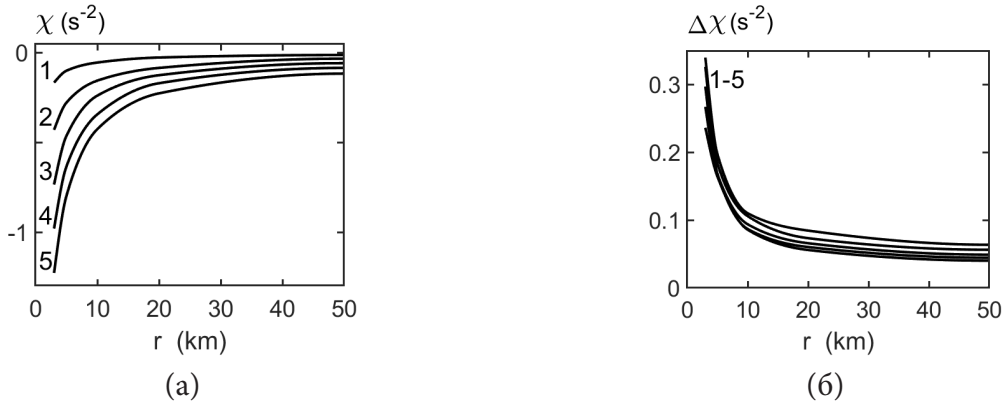
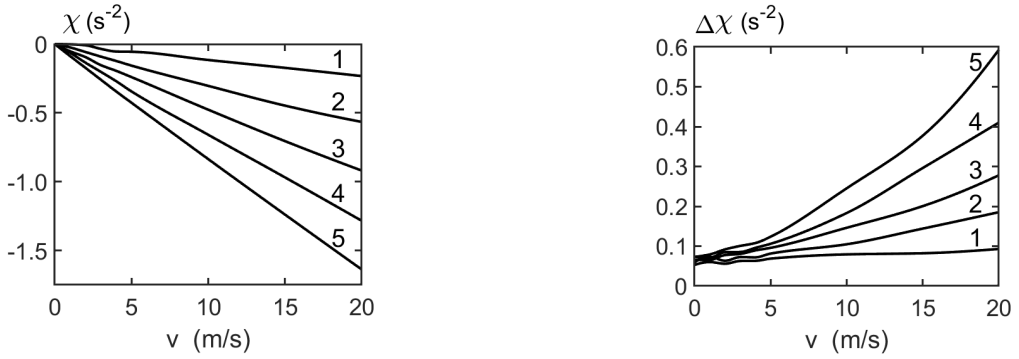


Рис. 1. Нормированные интерферограмма (а), модуль голограммы (б), угловое распределение голограммы (в). Источник на расстоянии $r_0 = 10$ *км движется со скоростью* $v = 2$ *м/с. Частотные диапазоны:* $100 - 150$ *Гц (1),* $500 - 550$ *Гц (2),* $900 - 950$ *Гц (3)*



(а) (б)

Рис. 2. Зависимость от расстояния до источника экстремума углового распределения голограммы χ *(а), ширины углового распределения голограммы* $\Delta\chi$ *(б). Источник движется со скоростью* $v = 2$ *м/с. Кривая 1:* $100 - 150$ *Гц, кривая 2:* $300 - 350$ *Гц, кривая 3:* $500 - 550$ *Гц, кривая 4:* $700 - 750$ *Гц, кривая 5:* $900 - 950$ *Гц*



(а) (б)

Рис. 3. Зависимость от скорости источника экстремума углового распределения голограммы χ (а), ширины углового распределения голограммы $\Delta\chi$ (б). Источник на расстоянии $r_0 = 10$ км движется со скоростью v. Кривая 1: $100-150$ *Гц, кривая 2:* $300-350$ *Гц, кривая 3:* $500-550$ *Гц, кривая 4:* $700-750$ *Гц, кривая 5:* $900-950$ *Гц*

На рис. 2. представлена зависимость от расстояния до источника экстремума углового распределения голограммы χ (а), ширины углового распределения голограммы $\Delta\chi$ (б). Предполагается, что источник движется со скоростью $v = 2$ *м/с*. На рис. 2 кривая 1: $100-150$ *Гц*, кривая 2: $300-350$ *Гц*, кривая 3: $500-550$ *Гц*, кривая 4: $700-750$ *Гц*, кривая 5: $900-950$ *Гц*. Как следует из представленных на рис. 2 результатов, при увеличении расстояния до приемника положение экстремума углового распределения голограммы χ приближается к началу координат, а ширина углового распределения голограммы $\Delta\chi$ существенно уменьшается. Также следует отметить, что с ростом частоты излучения координата экстремума углового распределения голограммы χ увеличивается по величине, ширина углового распределения $\Delta\chi$ практически не изменяется.

На рис. 3. представлена зависимость от скорости источника экстремума углового распределения голограммы χ (а), ширины углового распределения голограммы $\Delta\chi$ (б). Предполагается, что источник на расстоянии $r_0 = 10$ *км* движется со скоростью v. Кривая 1: $100-150$ *Гц*, кривая 2: $300-350$ *Гц*, кривая 3: $500-550$ *Гц*, кривая 4: $700-750$ *Гц*, кривая 5: $900-950$ *Гц*. Как следует из представленных на рис. 3 результатов, при увеличении скорости источника положение экстремума углового распределения голограммы χ удаляется от начала координат, а ширина углового распределения голограммы $\Delta\chi$ существенно увеличивается. Также следует отметить, что с ростом частоты излучения координата экстремума углового распределения голограммы χ увеличивается по величине. Также ширина углового распределения $\Delta\chi$ увеличивается с ростом частоты.

Заключение

В работе представлен анализ частотной зависимости структуры 2D-голограммы источника в океаническом волноводе. В рамках численного эксперимента на основе модового описания звукового поля рассмотрен однородный по глубине океанический волновод. Рассмотрен широкий диапазон частот от 100 Гц до 1000 Гц. Проанализированы параметры углового распределения 2D-голограммы: положение и ширины максимума. Представлены результаты численного эксперимента для зависимости параметров углового распределения 2D-голограммы от расстояния источник-приемник и скорости движения источника.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/

Литература

1. *Кузнецов Г. Н.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

2. *Казначеев И. В.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником / И. В. Казначеев, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 33–45.

3. *Переселков С. А.* Голографическая обработка широкополосных гидроакустических сигналов / С. А. Переселков, В. М. Кузькин. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. – 183 с.

4. *Казначеева Е. С.* Оценка дальности обнаружения малогабаритного подводного аппарата по его шумовому полю / Е. С. Казначеева, В. М. Кузькин, Ю. В. Матвиенко, С. А. Пересёлков, Ю. А. Хворостов // Подводные исследования и роботехника. – 2021. – № 4 (38). – С. 80–85.

5. *Кузькин В. М.* Предельная дальность обнаружения подводного шумового источника с применением голографической обработки / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, П. В. Рыбянец, С. А. Ткаченко // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 1. – С. 129–136. – DOI: 10.17725/rensit.2024.16.129.

6. *Кузькин В. М.* Обнаружение источника в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко // РЭНСИТ. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344. – DOI: 10.17725/rensit.2019.11.337.

7. *Kuz'kin V. M.* Noise-source detection in an oceanic waveguide using interferometric processing / V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, Yu. V. Matvienko, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2020. – V. 28, No 1. – P. 68–74.

8. *Kuz'kin V. M.* Resolving power of the interferometric method of source localization / V. M. Kuz'kin, G. N. Kuznetsov, S. A. Pereselkov, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, No 2. – P. 150–159.

9. *Кузькин В. М.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, В. И. Грачев, П. В. Рыбянец, С. А. Ткаченко // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

10. *Kuz'kin V. M.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, I. A. Kaznacheev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, No 1. – P. 63–73.

11. *Kuznetsov G. N.* Direction finding of a noise sound source / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, No 3. – P. 237–241.

12. *Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization / S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

13. *Кузькин В. М.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // РЭНСИТ. – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 197–204. DOI: 10.17725/rensit.2022.14.197.

14. *Ehrhardt M.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water / M. Ehrhardt, S. Pereselkov, V. Kuz'kin, I. Kaznacheev, P. Rybyanets // Sound and Vibration. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

15. *Кузькин В. М.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, Н. В. Ладыкин, М. В. Куцов // РЭНСИТ. – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 317–326.

16. *Pereselkov S.* The formation of 2D holograms of a noise source and bearing estimation by a vector scalar receiver in the high-frequency band / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, M. Ehrhardt, Yu. Matvienko, S. Tkachenko, P. Rybyanets // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – Vol. 12. – P. 704.

17. *Беседина Т. Н.* Определение глубины источника звука в мелком море на фоне интенсивного шума / Т. Н. Беседина, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2015. – Т. 61, № 6. – С. 718-728.

18. *Kuznetsov G. N.* Wave method for estimating the sound source depth in a oceanic waveguide / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy // J. Phys. Wave Phenom. – 2016. – Vol. 24, No 4. – P. 310–316.

19. *Kaznacheeva E. S.* Measurement capability of the interferometric method of sound source localization in the absence of data on the waveguide transfer function / E. S. Kaznacheeva, G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, No 1. – P. 73–78.

20. *Kaznacheeva E. S.* Adaptive algorithms for interferometric processing / E. S. Kaznacheeva, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, No 3. – P. 267–273.

21. *Бреховских Л. М.* Теоретические основы акустики океана / Л. М. Бреховских, Ю. П. Лысанов. – М. : Наука, 2007. – 370 с.

УДК 004.942

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОЙ ОСНОВЕ

И. А. Бексаев

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В статье построены математические модели перевернутого маятника на подвижной основе. Исследованы свойства модели, такие как полная управляемость, полная наблюдаемость, устойчивость. Разработана компьютерная модель на языке Scilab. Построенные модели могут быть использованы для изучения устойчивости и динамики перевернутого маятника, а также для оптимизации поведения при различных значениях параметров модели. Модели могут быть полезны как для теоретических исследований, так и для практического приложения в области автоматического управления и робототехники.
Ключевые слова: математическая модель, линейная динамическая система, перевернутый маятник на подвижной основе.

Введение

Возникшая изначально в механике проблема стабилизации объектов типа «перевернутый маятник» получила свое развитие в теории автоматического управления. Соответствующие физические объекты можно рассматривать как успешные лабораторные представления неустойчивых механических систем. В последние десятилетия задача прошла несколько этапов развития, начиная с теоретических исследований, заканчивая аппаратным внедрением систем. Появилось большое число отечественных и иностранных публикаций, посвященных разработке алгоритмов стабилизации перевернутого маятника. Это можно объяснить тем, что в сегодняшних реалиях существенно расширился класс объектов управления, имеющих схожую природу. В качестве одного из примеров можно назвать космическую отрасль, где с точки зрения перевернутого маятника можно рассматривать модель ракеты при взлете или солнечные батареи искусственных спутников. В энергетике примером перевернутого маятника может служить модель управления скоростью реакции в ядерном реакторе. В кибернетике к подобной модели можно отнести шагающих роботов, которые в иностранной литературе получили название “biped walking machines” [1].

1. Математическая модель

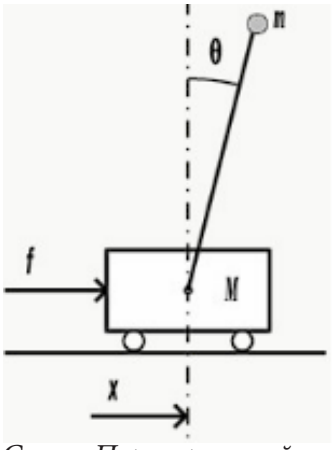


Рис. 1. Схема Перевернутый маятник на подвижной основе

На рис. 1 m — масса маятника, кг; M — масса каретки, кг; l — длина маятника, м, а также переменные: $\theta(t)$ — угол отклонения маятника, рад; $x(t)$ — положение каретки, м.

Уравнения динамики системы перевернутого маятника на подвижной основе имеют следующий вид:

$$m \cdot l^2 \cdot \theta'' - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta + m \cdot l^2 \cdot \cos\theta \cdot x'' = 0,$$

$$(M+m) \cdot x'' + m \cdot l \cdot \cos\theta \cdot \theta'' - m \cdot l \cdot \sin\theta \cdot \theta^2 = f,$$

Разрешим уравнение относительно старших производных:

$$\begin{pmatrix} l & \cos\theta \\ m\cdot l\cdot\cos\theta & M+m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta'' \\ x'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g\cdot\sin\theta \\ m\cdot l\cdot\theta^2\cdot\sin\theta+f \end{pmatrix},$$

Теперь получим уравнения объекта в форме задачи Коши:

$$\frac{d\theta}{dt}=\theta',$$
$$\frac{d\theta}{dt}=d\cdot\theta''=((M+m)\cdot g\cdot\sin\theta-ml\theta'^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta-f\cdot\cos\theta)/D,$$
$$\frac{dx}{dt}=x',$$
$$\frac{dx}{dt}=x''=(m\cdot l^2\cdot\sin\theta+l\cdot f-m\cdot g\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta)/D,$$

Запишем линейную систему в матричной форме с использованием вектора состояний $V=(\theta,\theta',x,x')$

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m+M)\cdot g}{l\cdot m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m\cdot g}{M} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \\ x \\ x' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{l\cdot m} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

1.1. Модель в форме передаточной функции

Применяя общую формулу для вычисления передаточной функции линейной динамической системы [2], найдем передаточную функцию модели «перевернутого маятника на подвижной основе», которая имеет следующий вид:

$$G(s)=\frac{l^2\cdot m^2\cdot M\cdot s^2-l\cdot m\cdot M^2\cdot g}{l^2\cdot m^2\cdot M^2\cdot s^4-l\cdot m\cdot M^3\cdot g\cdot s^2-l\cdot m^2\cdot M^2\cdot g\cdot s^2}.$$

1.2. Непрерывная модель в форме системы ДУ первого порядка (СУМ, СНМ, КМ, ФМ)

Физическая модель (ФМ) — это математическая модель, которая основана на законах физики и предназначена для описания физических процессов [3].

ФМ перевернутого маятника:

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m+M)\cdot g}{l\cdot m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m\cdot g}{M} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \\ x \\ x' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{l\cdot m} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

Стандартная наблюдаемая модель (СНМ) — это модель, которая предназначена для наблюдения за состоянием системы и оценки ее параметров на основе измерений [3].

Построим СНМ перевернутого маятника:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{(m+M)\cdot g}{l\cdot m} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{M}\\ 0\\ \frac{g}{M\cdot l}\end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

Стандартная управляемая модель (СУМ) — это модель, которая описывает систему с точки зрения ее управляемости [3].

СУМ перевернутого маятника будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{(m+M)\cdot g}{l\cdot m} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}\frac{-g}{l\cdot m} & 0 & \frac{1}{M} & 0\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

Каноническая модель (КМ) — это модель, которая имеет особую форму или структуру, которая является наиболее удобной или эффективной для проведения анализа свойств модели [3].

Построим КМ перевернутого маятника:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{l\cdot m\cdot(m+M)\cdot g}}{l\cdot m} & 1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{l\cdot m\cdot(m+M)\cdot g}}{l\cdot m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{m+M} & 0 & \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{M\cdot g\cdot l\cdot m+g\cdot l\cdot m^2\cdot m}}{(m+M)^2\cdot g\cdot M} & -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{M\cdot g\cdot l\cdot m+g\cdot l\cdot m^2\cdot m}}{(m+M)^2\cdot g\cdot M}\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

1.3. Анализ свойств полной управляемости и полной наблюдаемости построенных моделей

Проведем анализ свойств полной управляемости и полной наблюдаемости построенных моделей. Управляемость модели означает, что можно перевести систему из любого начального состояния в любое конечное состояние за конечный промежуток времени с помощью подходящего управляющего воздействия [4]. Матрица управляемости для ФМ имеет вид:

$$W_{CTI} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{m \cdot M} & 0 & \frac{(m+M) \cdot g}{l^2 \cdot m^2} \\ \frac{-1}{m \cdot M} & 0 & \frac{(m+M) \cdot g}{l^2 \cdot m^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{g}{M \cdot l} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{g}{M \cdot l} & 0 \end{pmatrix}$$

$rankW_{CTI} = 4$. Отсюда следует, что физическая модель является полностью управляемой.

Матрица управляемости для СНМ имеет вид:

$$W_{CTI} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{g}{M \cdot l} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{g}{M \cdot l} & 0 \\ 0 & \frac{g}{M \cdot l} & 0 & \frac{(m+M) \cdot g^2}{l^2 \cdot m \cdot M} \\ \frac{g}{M \cdot l} & 0 & \frac{(m+M) \cdot g^2}{l^2 \cdot m \cdot M} & 0 \end{pmatrix}$$

$rankW_{CTI} = 4$. Отсюда следует, что стандартная наблюдаемая модель также является полностью управляемой.

Матрица управляемости для СУМ имеет вид:

$$W_{CTI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(m+M) \cdot g}{l \cdot m} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(m+M) \cdot g}{l \cdot m} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rankW_{CTI} = 4$. Отсюда следует, что стандартная управляемая модель является полностью управляемой. Матрица управляемости для КМ:

$$W_{CTI} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{l \cdot m} & \frac{(m+M) \cdot g}{l \cdot m} & \frac{(m+M) \cdot g \cdot \sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{l^2 \cdot m^2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{l \cdot m} & \frac{(m+M) \cdot g}{l \cdot m} & \frac{-(m+M) \cdot g \cdot \sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{l^2 \cdot m^2} \end{pmatrix}$$

$$\det(W_{CTI}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (m+M)^2 \cdot g^2 \cdot \sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g} \cdot m}{l^3 \cdot m^3}.$$

При любых параметрах m, l, M, не равных нулю, определитель матрицы не равен 0. Следовательно, КМ является полностью управляемой при ненулевых значениях параметров l, m, M.

Теперь проверим, обладают ли модели свойством полной наблюдаемости. Вычислим матрицу наблюдаемости для ФМ:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-m \cdot g}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-m \cdot g}{M} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank\ M = 4$. Отсюда следует, что ФМ является полностью наблюдаемой. Матрица наблюдаемости для СНМ имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $rank\ M = 4$. Матрица наблюдаемости для СУМ имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{-g}{M \cdot l} & 0 & \dfrac{1}{M} & 0 \\ 0 & \dfrac{-g}{M \cdot l} & 0 & \dfrac{1}{M} \\ 0 & 0 & \dfrac{g}{M \cdot l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{g}{M \cdot l} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $rank\ M = 4$. Отсюда следует, что СУМ является полностью наблюдаемой. Матрица наблюдаемости для КМ:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m+M} & 0 & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g} \cdot m}{(m+M)^2 \cdot g \cdot M} & -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g} \cdot m}{(m+M)^2 \cdot g \cdot M} \\ 0 & \dfrac{1}{m+M} & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m}{(m+M) \cdot M} & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m}{(m+M) \cdot M} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{(m+M) \cdot l \cdot M} & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{(m+M) \cdot l \cdot M} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g}{M \cdot l} & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g}{M \cdot l} \end{pmatrix}$$

$\det(M) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g} \cdot g}{(m+M)^3 \cdot M^2 \cdot l^2}$, $\det(M) \neq 0$ при $\forall\ m,\ l$ кроме $M = 0$ или $l = 0$.

Следовательно, КМ является полностью управляемой при ненулевых значениях параметров $l,\ m,\ M$.

Таким образом, проанализировав свойства полной управляемости и полной наблюдаемости построенных моделей, можно сделать вывод о том, что все модели обладают свойствами полной управляемости и полной наблюдаемости и могут быть использованы для решения задачи моделирования перевернутого маятника на подвижной основе.

1.4. Устойчивость моделей

Данное свойство показывает, насколько модель сохраняет свои характеристики и эффективность в различных условиях и при воздействии внешних факторов. Устойчивая модель будет продолжать работать, несмотря на возможные изменения входных данных или другие внешние воздействия [5].

Матрица устойчивости по критерию Рауса — Гурвица имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ l^2 \cdot m^2 \cdot M^2 & l \cdot m \cdot M^3 - l \cdot m^2 \cdot M \cdot g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l \cdot m \cdot M^3 - l \cdot m^2 \cdot M \cdot g & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что все главные миноры равны нулю. Таким образом, система является неустойчивой и при увеличении временного интервала значения элементов вектора состояния будут стремиться к бесконечности.

2. Компьютерная модель

Разработка компьютерной модели перевернутого маятника на подвижной основе выполнена на языке Scilab. Приведем общее описание этого процесса компьютерного моделирования. Входные данные: M — масса тележки, m — масса маятника, l — длина маятника, g — ускорение свободного падения, F — сила, действующая на тележку.

Модель перевернутого маятника на тележке: тележка может перемещаться горизонтально, а маятник прикреплен к ней и может качаться в вертикальной плоскости.

Цель — изучить движение перевернутого маятника на каретке при различных входных данных.

Условия моделирования: 1) начальные условия: указать значения (m, M, l) на начальный момент времени и входные воздействия, применяемые к модели; 2) продолжительность моделирования: заданный период времени, в течение которого будет выполняться моделирование.

Выходные данные: 1) график зависимости положения тележки от времени; 2) график зависимости угла отклонения маятника от времени; 3) график зависимости скорости тележки от времени; 4) график зависимости угловой скорости маятника от времени.

Шаги для реализации модели: 1) задание начальных значений для параметров M, m, l, g, F; 2) определение уравнений движения тележки и маятника в форме пространства состояний; 3) решение дифференциальных уравнений движения; 4) отображение результатов моделирования. Используется функция plot() для отображения графиков положения, угла, скорости и угловой скорости.

Вычислительный эксперимент. Параметры Модели: $l = 1$; $m = 1$; $M = 1$; $t0 = 0$; $t\max = 50$; $x0 = [0;0;0;0]$; $t = t0 : 0.1 : t\max$. Рис. 2–5.

Заключение

Практическое применение компьютерной модели перевернутого маятника на подвижной основе заключается в возможности оптимизации работы в зависимости от различных условий и параметров. Разработанные математические модели перевернутого маятника на подвижной основе позволяют описать и проанализировать сложное движение системы с высокой точностью и эффективностью. Исследования показали, что изменение параметров системы существенно влияет на ее движение и характеристики. Таким образом, анализ различных вариантов параметров позволяет оптимизировать работу системы и предсказывать ее поведение в различных условиях.

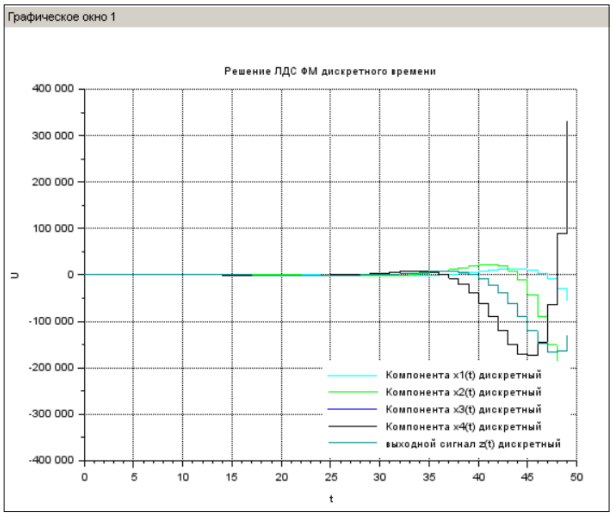


Рис. 2. График элементов вектора состояния и выходного сигнала моделей ФМ в дискретном времени, эксперимент 2

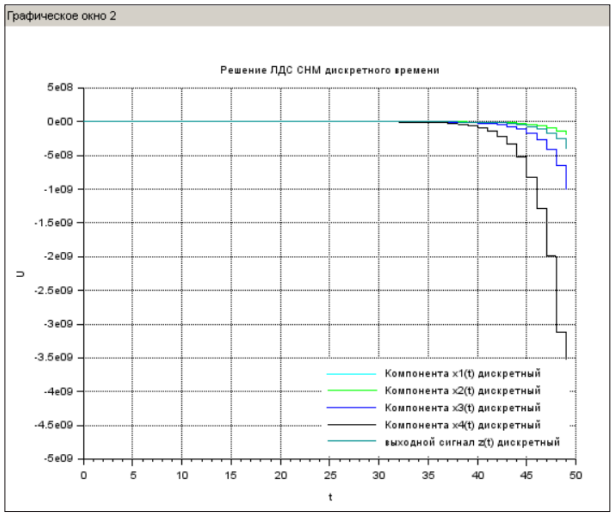


Рис. 3. График элементов вектора состояния и выходного сигнала моделей СНМ, в дискретном времени, эксперимент 2

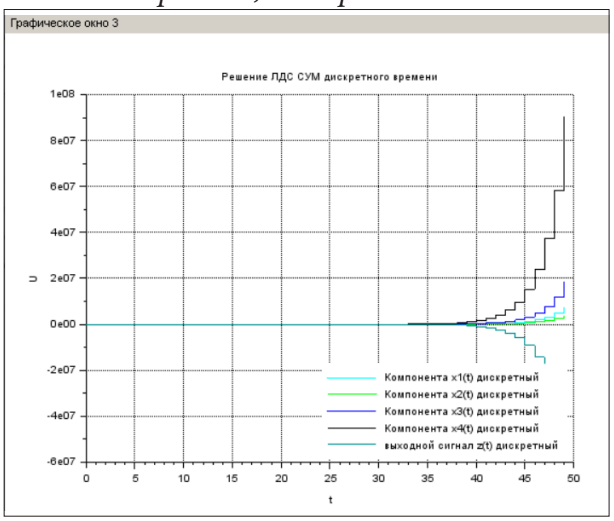


Рис. 4. График элементов вектора состояния и выходного сигнала моделей СУМ в дискретном времени, эксперимент 2

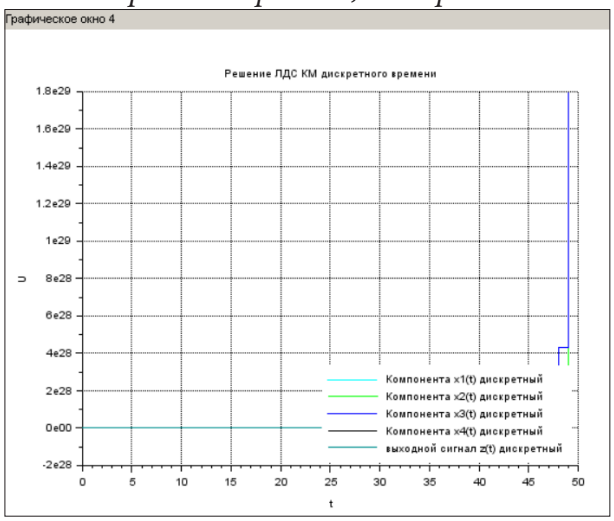


Рис. 5. График элементов вектора состояния и выходного сигнала моделей КМ в дискретном времени, эксперимент 2

Литература

1. *Raibert M. H.* Legged Robots That Balance / M. H. Raibert. – Cambridge, MA : MIT Press, 1986. – 224 p.

2. *Филиповский В. М.* Дискретные системы в пространстве состояний. Учебное пособие / В. М. Филипинский. – СПб., 2020. – 35 с.

3. *Звонарев С. В.* Основы математического моделирования: учебное пособие / С. В. Звонарев. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2019. – 112 с.

4. *Семушин И. В.* Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения / под ред. проф. И. В. Семушина. – Ульяновск : УлГУ, 2011. – 298 с.

5. *Колесов Ю. Б., Сениченков Ю. Б.* Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. Учебное пособие. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 224 с.

УДК 539.214, 539.374, 539.383

АНАЛИЗ РАБОТЫ ОПОРНОЙ ЧАСТИ С ШАРОВЫМ СЕГМЕНТОМ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ

А. П. Богданова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Аннотация. Вопрос о выборе модели поведения материалов стоит весьма актуальный при моделировании работы конструкции. Полимерные материалы применяются в разных сферах промышленности, в частности, работающим как слой скольжения. Одной из таких конструкцией является опорная часть с шаровым сегментом (ОЧШС), где полимерный материал служит антифрикционной прослойкой между двумя балансирами. Ранее задача рассматривалась в упруго-пластической постановке, однако для рассмотрения работы конструкции на всем рабочем диапазоне необходимо учитывать вязкоупругое/вязкоупругопластическое поведение материалов. В работе рассматривается первый этап перехода к рассмотрению вязкоупругого слоя скольжения. Выявлено, что при втором варианте рассмотрения задачи, максимальные значения контактных параметров ниже, а также существенно не зависят от толщины слоя скольжения.

Ключевые слова: опорная часть, полимерные материалы, модифицированный фторопласт, упруго-пластичное тело, вязкоупругое тело, механика контактного взаимодействия, идеальный контакт, адгезионный контакт, фрикционный контакт, осесимметричная задача.

Введение

Мостовые сооружения [1–3] и их элементы, воспринимающие нагрузки от пролетного строения, такие как опоры мостов [4], являются одними из важнейших узлов транспортных систем, требующих постоянного мониторинга и отслеживания их технического состояния. Опоры являются «сердцем» мостовых конструкций и воспринимают широкий спектр нагрузок: от пролетного строения моста, от различных транспортных средств, ветровых, сейсмических, температурных и т. д. Таким образом, опорные части работают в сложных температурных и силовых режимах, к ним предъявляются повышенные требования, связанные с несущей способностью, работоспособностью в течение длительных периодов времени, надежностью и устойчивостью. Широко распространенной в мостостроении является сферическая или шаровая сегментная опора [5, 6]. Она состоит из двух стальных балансиров, взаимодействующих между собой через антифрикционный слой или слой скольжения.

В качестве материала антифрикционного слоя используются полимеры и композиты на их основе. Одним из наиболее распространенных материалов антифрикционного слоя является политетрафторэтилен (ПТФЭ) или тефлон, также используются его модификации. Однако сегодня производители стараются заменить PTFE на полимерный/композитный материал с улучшенными характеристиками. При выборе материала антифрикционного слоя необходимо, чтобы он обладал определенными параметрами прочности, надежности, реологии, физико-механических и антифрикционных свойств. Актуальным направлением является разработка новых полимерных материалов и композитов на их основе. Благодаря этому появляются комплексы материалов с расширенной областью применения, в частности в качестве антифрикционного слоя [8–10]. Такими материалами могут быть: полиэфирэфиркетон (ПЭЭК), полиметилметакрилат (ПММА), полиуретан (ПУ), полиамид (ПА), сверхвысокомолекулярные полиэтилены UHMWPE, композиты на основе фторопласта-4 с различными нанонаполнителями, ПТФЭ [11]. Проектный учет с моделированием таких свойств, как: термомеханические,

фрикционные, физико-механические — позволит лучше оценить и оптимизировать работу антифрикционного слоя в конкретных условиях эксплуатации конструкции [6, 7].

Особый интерес представляют эксплуатационные и деформационные характеристики, качественные и количественные закономерности изменения параметров контактной зоны, особенности эксплуатации в экстремальных эксплуатационных и температурных режимах и т.д. Особый интерес представляет оптимизация выбора антифрикционных материалов. Оптимизация выбора материалов антифрикционного слоя деталей подшипников позволит увеличить срок службы конструкции.

1. Материалы и методы

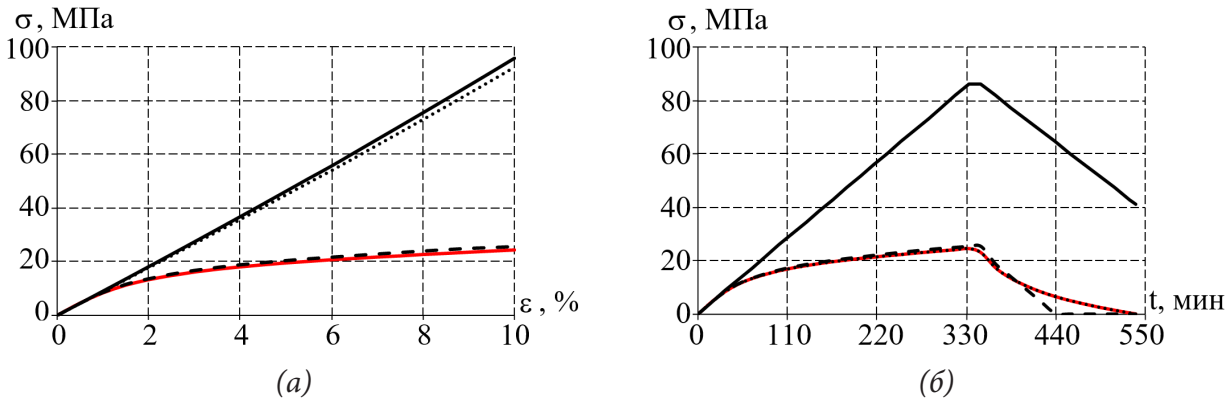
Ранее задача рассматривалась в рамках упруго-пластичной постановки. Однако для решения задачи в динамической постановке, что позволит провести более качественный анализ работоспособности полимерных/композиционных материалов в опорной части с шаровым сегментом (ОЧШС), мы перешли к рассмотрению слоя скольжения, как вязкоупругого тела. Параметризированная модель реализована в инженерном пакете Ansys Mechanical с использованием языка APDL, решается с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Одними из простых и подходящих моделей вязкоупругости в данном комплексе являются модели Ананд и Прони. Однако в данной работе мы рассматриваем конструкцию с описанием слоя скольжения моделью Прони.

Первый этап моделирования вязкоупругого поведения

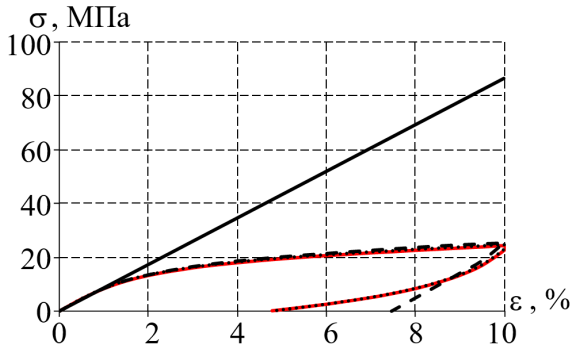
Д.ф.-м.н. А. А. Адамовым на базе филиала ПФИЦ УрО РАН (ИМСС УрО РАН) ранее были проведены исследования физико-механических и эксплуатационных свойств перспективных полимерных материалов разного производства. Исследование проводилось с помощью натурных экспериментов при сложном нагружении в рамках одноосного напряженного и одноосно-деформированного состояний при комнатной температуре. Одним из материалов в группе перспективных был γ-модифицированный фторопласт (ПТФЭ).

С помощью программно-аппаратного комплекса, были получены коэффициенты для описания вязкоупругого поведения материала. И реализовано численное напряженно-деформированное состояние цилиндрического образца, которое повторяет состояние натурного эксперимента (деформирование до 10 %).

На рис. 1(а) показана диаграмма напряжения-деформации при статическом расчете задачи. На рис. 1(б, в) показаны зависимости, полученные при численном моделировании эксперимента в зависимости от времени воздействия нагрузки на образец.



(а) *(б)*



(в)

Рис. 1. Диаграмма напряжение-деформация (а); зависимость напряжения от времени (б); зависимость напряжения от деформации (в): красная линия — экспериментальные данные; черная: сплошная линия — упругое тело, пунктир — упругопластическое тело, точки — вязкоупругое тело

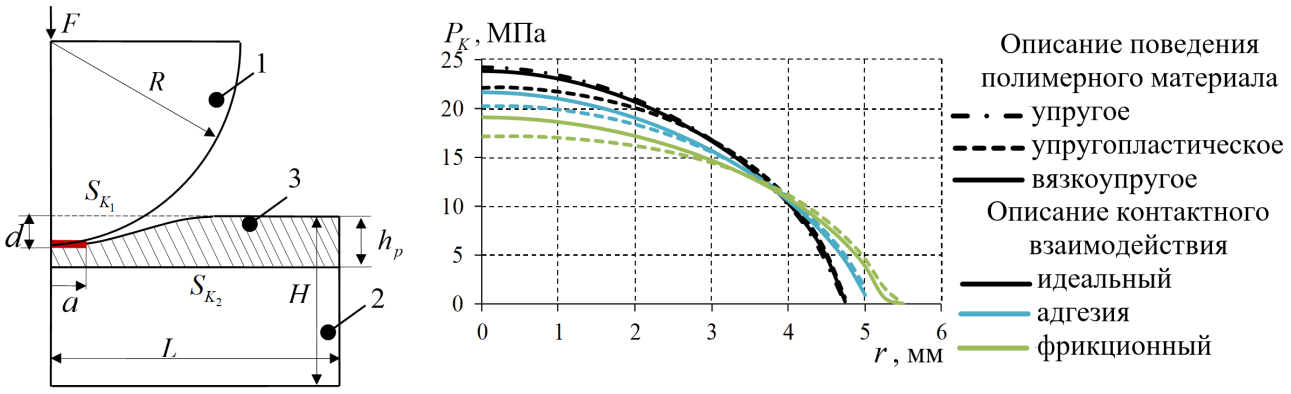
В рамках численного анализа установлено, что моделирование полимерного материала как упругопластического тела следует реализовывать непосредственно при первичных статических расчетов, которые позволят оценить прочностные характеристики конструкции. Однако для проведения анализа работы конструкции на всех этапах жизненного цикла, следует моделировать полимерный слой скольжения, как вязкоупругое тело.

2. Анализ полученных результатов

Для моделирования взякоупругого слоя скольжения получены коэффициенты уравнений. Далее на простейшей модели проводим верификацию численной модели.

2.1. Верификация численной модели

При моделировании контактной задачи, в зависимости от работы конструкции есть возможность задавать разный вид контактного взаимодействия. В данной задаче рассмотрено три вида контакта: идеальный — сетка моделируется «узел в узел», происходят совместные напряжения и деформации; адгезия — перемещения узлов равны между сопрягаемыми поверхностями, напряжения различны; фрикционный контакт — между поверхностями реализуется Кулоновское трение (коэффициент трения = 0,04 в настоящей работе). Для первого этапа решения задачи была выбрана модифицированная задача Герца (рис. 2(а)). Данная модель состоит из: 1 — сферический стальной индентор; 2 — стальное полупространство; 3 — полимерный слой скольжения (из ПТФЭ).



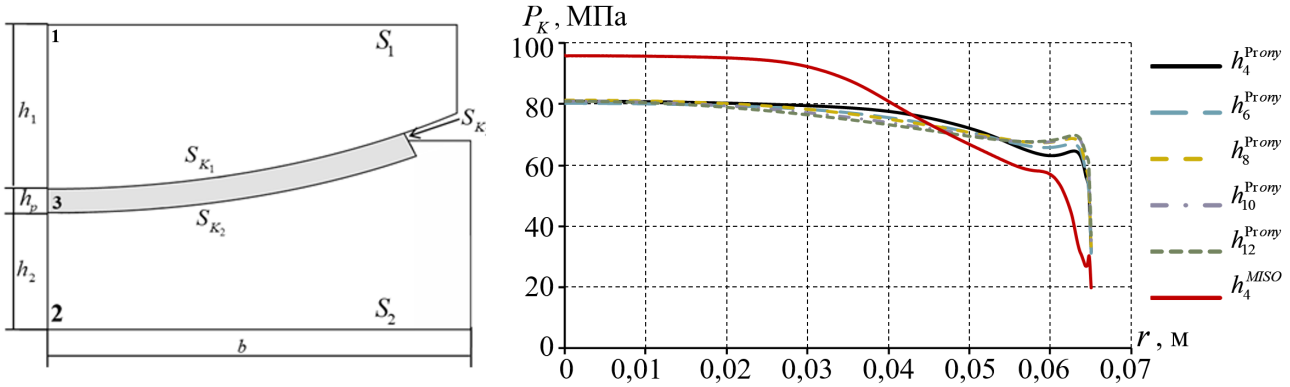
(а) *(б)*

Рис. 2. Расчетная схема (а); распределение контактного давления по контактной поверхности (б)

На рис. 2(б) представлено распределение контактного давления для трех вариантов моделирования поведения полимерного слоя скольжения при разном контактном взаимодействии. Стоит отметить, что в данном случае упругое и вязкоупругое поведение материала даёт схожие результаты, так как задача решается в статической постановке с пошаговым нагружением. И вязкости материала ещё не наблюдается. Однако при сравнении вида контактного взаимодействия стоит отметить, что за счет наибольшей области контакта значения контактного давления более равномерно распределены, в связи, с чем и максимальный уровень значений значительно ниже, относительно идеального контакта.

2.2. Расчет вязкоупругой модели

На следующем этапе проведем анализ работы конструкции при разной толщине слоя скольжения и двумя вариантами моделирования его поведения. Рассмотрим ОЧСШ в осесимметричной постановке (рис. 3(а)), где: 1, 2 — стальная плита со сферическим сегментом и вырезом соответственно, 3 — антифрикционный полимерный материал. Стандартная толщина слоя скольжения на производстве $h_p = 4$ мм. Однако производители рассматривают возможность увеличения толщины слоя скольжения, что может послужить увеличению безремонтному срока службы конструкции. Что может сократить временные и экономические траты производителей.



(а) *(б)*

Рис. 3. Распределение контактного давления для: упругопластической прослойки $h_p = 4$ мм; вязкоупругой прослойки $h_p = 4 \div 12$ мм

На рис 3(б) представлено распределение контактного давления на поверхности S_{K_1} для всех рассматриваемых состояний слоя скольжения. Стоит отметить, что при моделировании слоя скольжения как вязкоупругого тела, контактное давление не только значительно ниже, чем при упруго-пластичском рассмотрении, но и влияние толщины слоя скольжения не существенно.

Следующая поверхность S_{K_3} важная для рассмотрения, так как на ней имеет бесконтактная область, где материал имеет возможность перемещаться. Так, при больших перемещениях материала, может возникать срез края слоя скольжения, что в дальнейшем может стать последствием некорректной работы ОЧСШ и сокращения её безремонтной эксплуатации. На рис. 4 представлено распределения контактного давления.

Стоит отметить, что максимальные значения возникают в концентраторе напряжений. Однако при увеличении толщины слоя скольжения основной характер распределения не меняется, а максимальные значения контактного давления меньше всего возникают на слое скольжения толщиной 6 и 8 мм.

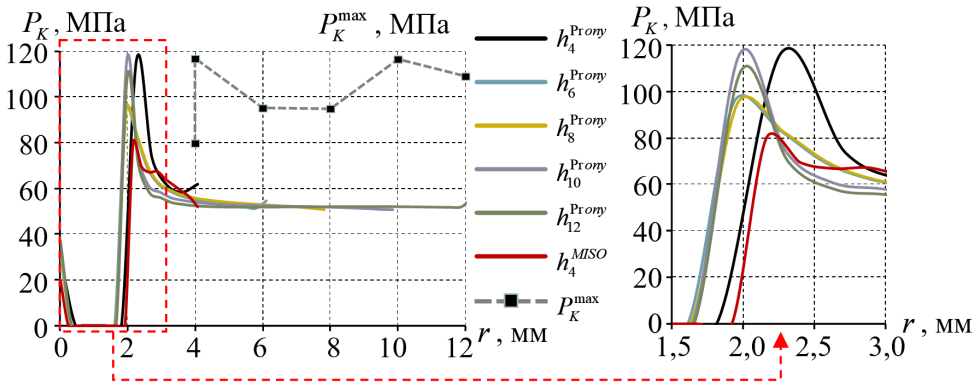


Рис. 4. Распределение контактного давления на торце прослойки для: упругопластической прослойки $h_p = 4$ мм; вязкоупругой прослойки $h_p = 4 \div 12$ мм

При моделировании слоя скольжения, как вязкоупругого тела перемещения, возникающие на торце почти в 4 раза ниже, чем при моделировании его как упругопластического тела (рис. 5).

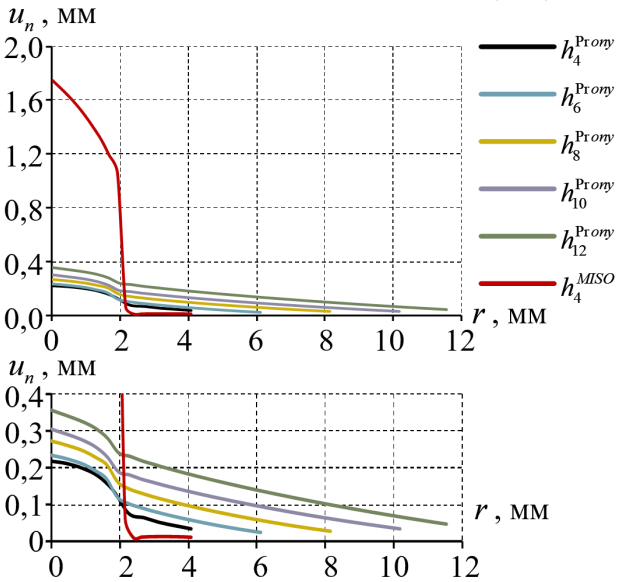


Рис. 5. Распределение перемещений по нормали торца антифрикционной прослойки для упругопластической прослойки $h_p = 4$ мм; вязкоупругой прослойки $h_p = 4 \div 12$ мм

При анализе влияния толщины слоя скольжения на возникающие перемещения, стоит отметить, что оно незначительно и зависимость толщины от величины перемещений прямо пропорциональная в данной задаче.

Заключение

В ходе работы с помощью программно-аппаратного комплекса подобраны коэффициенты для описания вязкоупругого поведения материала. Получено, что для расчета прочностных характеристик конструкции достаточно использовать упруго-пластическую постановку. Однако для описания работы конструкции на всем рабочем диапазоне конструкции необходимо моделировать материал как вязкоупругое/вязкоупругопластическое тело.

Рассмотрена работа ПТФЭ в качестве слоя скольжения при разном моделировании его поведения. Получено, что при сравнении трех вариантов контактных взаимодействий (идеальное, адгезия, фрикционное) меньшее значение контактных параметров наблюдается у модели с фрикционным контактом, за счет увеличения площади контакта.

Влияние толщины слоя скольжения на контактные и деформационные параметры не значительны. При моделировании слоя скольжения как вязкоупругого тела наблюдается значительное снижение уровня как контактных параметров, так и перемещений, возникающих на торце прослойки.

Дальнейшей реализацией будет рассмотреть работу конструкции при динамическом нагружении.

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю Каменских Анне Александровне за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению статьи.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0007).

Литература

1. On Determination of the Linear Viscoelastic Compliance and Relaxation Functions for Polymers in One Tensile Test / R. T. S. Freire, S. G. Nunes, S. C. Amico et al. // Mechanics of Composite Materials. – 2023. – Vol. 58. – P. 765–786. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10067-0

2. *Erdélyi J.* Spatial Data Analysis for Deformation Monitoring of Bridge Structures / J. Erdélyi, A. Kopáčik, P. Kyrinovič // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10. – Art. 8731. https://doi.org/10.3390/app10238731

3. *Noori Hoshyar A.* Proposed Machine Learning Techniques for Bridge Structural Health Monitoring: A Laboratory Study / A. Noori Hoshyar, M. Rashidi, Y. Yu, B. Samali // Remote Sens. – 2023. – Vol. 15. – Art. 1984. https://doi.org/10.3390/rs15081984

4. *Locke R.* Techniques for simulating frozen bearing damage in bridge structures for the purpose of drive-by health monitoring / R. Locke, L. Redmond, S. Atamturktur // Dynamics of Civil Structures. – 2021. – Vol. 2. – P. 39–52. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47634-2_6

5. *Nosov Y. O.* Influence Analysis of Lubricant Recesses on the Working Capacity of the Bridge Span Spherical Bearing / Y. O. Nosov, A. A. Kamenskikh // Lubricants. – 2022. – Vol. 10. – Art. 283. https://doi.org/10.3390/lubricants10110283

6. *Yi X.* Composite materials engineering, volume 1: fundamentals of composite materials / X. Yi, S. Du, L. Zhang; Springer. – Singapore, 2018. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5696-3

7. *Shelestova V. A.* New antifriction materials of the Fluvis group based on modified carbon fibers / V. A. Shelestova, P. N. Grakovich, S. G. Danchenko, V. A. Smirnov // Chemical and Petroleum Engineering. – 2006. – Vol. 42. – P. 663–666. https://doi.org/10.1007/s10556-006-0160-8

8. *Wang Q. J., Chung Y. W.* Antifriction materials and composites / Q. J. Wang, Y. W. Chung; Springer. – Boston, USA, 2013. https://doi.org/10.1007/978-0-387-92897-5_100044

9. *Lin Z.* The effects of filler type on the friction and wear performance of PEEK and PTFE composites under hybrid wear conditions / Z. Lin, K. Zhang, J. Ye [et al] // Wear. – 2022. – Vol. 490–491. – Art. 204178. https://doi.org/10.1016/j.wear.2021.204178

10. *Abdul Samad M.* Recent Advances in UHMWPE/UHMWPE Nanocomposite/UHMWPE Hybrid Nanocomposite Polymer Coatings for Tribological Applications: A Comprehensive Review / M. Abdul Samad // Polymers. – 2021. – Vol. 13. – Art. 608. https://doi.org/10.3390/polym13040608

11. *Bakbak O.* Modeling wide range of viscoelastic–viscoplastic behaviorof Araldite LY 564 epoxy using cooperative viscoplasticitytheory based on overstress model / O. Bakbak, O. Colak // J. Appl. Polym. Sci. – 2023. – Vol. 140, № 9. – Art. e53557. https://doi.org/10.1002/app.53557

УДК 004.94

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОМЫСЛОВОЙ РЫБЫ-ДЕТРИТОФАГА В АКВАТОРИИ АЗОВСКОГО МОРЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМНОЙ РЕГУЛЯЦИИ

Д. В. Бондаренко, А. В. Никитина, Ю. В. Белова

Донской государственный технический университет

Аннотация. Разработана и исследована математическая модель биологической кинетики, включающая систему уравнений в частных производных с реактивными членами, учитывающая пищевой таксис (движение промысловой рыбы пиленгас в сторону пищи — детрита и личинок комара-звонца Chironomidae — мотыля), каждое уравнение которой может быть сведено к задаче типа диффузии-конвекции. Основная идея численного решения данной задачи заключается в построении схем с весами специального вида. Описана программная реализация математической модели ихтиологического процесса мелководного водоема в виде программного комплекса, проведен ряд вычислительных экспериментов на основе сценарного подхода.
Ключевые слова: промысловые рыбы, хирономиды, мелководный водоем, математическая модель, гидробиология, алгоритм, программный модуль.

Введение

На сегодняшний момент очень важной является проблема сохранения и реабилитации акваторий мелководных водоемов, таких как Азовское море, наиболее подверженных антропогенным воздействиям и природно-климатическим изменениям. Промысловые виды рыб, такие как судак, тарань, пиленгас, имеют тенденцию к сокращению и полному вымиранию [1]. Антропогенные изменения окружающей среды, рыболовный промысел, изменения биохимического состава водной среды могут привести к значительному ухудшению процессов воспроизводства ценных и промысловых рыб, а также могут нарушить механизм самоочищения водоема. Для улучшения ситуации необходимо обеспечить мальков данных видов постоянным источником пищи, которым могут выступать комары вида *Chironomidae*. Комары-звонцы *Chironomidae* имеют широкое распространение в акватории Азово-Черноморского бассейна [2]. Способом размножения этих комаров являются личинки, которые они откладывают в места водоема со слабым течением. Обычно, такие места расположены в поймах рек или на стыке с мелководными солёными водоемами. Имея представление о пространственном распространении личинок комаров в водной среде, можно прогнозировать динамику развития рыбных популяций. На основе полученных данных разрабатывать стратегии устойчивого развития прибрежных регионов, а также вырабатывать рекомендации по рекреации акватории.

Постановка задачи

Комары-звонцы Хирономиды в стадии личинки проводят от нескольких недель до двух лет. Высокая степень экологической пластичности дает им широкие возможности для освоения новых, создаваемых человеком местообитаний. В благоприятных условиях обитания личинки хирономид доминируют над другими донными беспозвоночными рек и озёр. Они часто играют важную роль в сообществах: перерабатывают органическое вещество в минеральное, питаясь детритом, участвуют в процессе самоочищения водной среды. Пиленгас (*Planiliza haematocheilus*) — вид морских рыб-детритофагов из семейства кефалевых, который обитает в Азовском море, питаясь преимущественно детритом и мотылём. Для моделирования рас-

пространения личинок комара вида *Chironomidae* предложена модель, базирующаяся на известной модели Лотки — Вольтерры, а именно «хищник-жертва» [3]. Модель описывает диффузионное перемещение и динамику изменения концентрации жертв (личинки комаров вида Chironomidae (мотыль)) и описывающее диффузионное и динамику изменения концентрации за счет роста и смертности хищников (пиленгас):

$$\begin{cases} N'_t = \left(\mu_N N'_x\right)'_x + \left(\mu_N N'_y\right)'_y + C_1\left(N_0 - N\right)N - C_2 P, \\ P'_t + uP'_x + vP'_y = \left(\mu_P P'_x\right)'_x + \left(\mu_P P'_y\right)'_y - C_3 P + C_4 NP, \end{cases}$$

где N — концентрация мотыля; P — концентрация пиленгаса; N_0 — предельная концентрация мотыля; u, v — компоненты вектора скорости конвективного движения пиленгаса; C_1, C_2 — коэффициенты роста и смертности мотыля, C_3, C_4 — коэффициенты роста и смертности пиленгаса; C_5 — коэффициент пищевого таксиса (движение рыбы в сторону личинок комара); μ_N, μ_P — коэффициенты диффузионного перемещения мотыля и рыбы.

Уравнения для вычисления компонентов вектора скорости движения рыбы в направлении градиента пищи (мотыля) описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha u + \beta\left(u'_t + uu'_x + vu'_y\right) = \left(\mu_u u'_x\right)'_x + \left(\mu_u u'_y\right)'_y + C_5 N'_x, \\ \alpha u + \beta\left(v'_t + uv'_x + uv'_y\right) = \left(\mu_v u'_x\right)'_x + \left(\mu_v u'_y\right)'_y + C_5 N'_y, \end{cases}$$

где α и β — весовые коэффициенты.

Преобразуем дискретный аналог уравнения движения жертв к канонической форме с выделением коэффициентов сеточного уравнения, которые располагаются вблизи центра шаблона. Эти коэффициенты могут быть выражены как:

$$B\left(Q_0, Q_m\right) = \sigma\frac{\mu_N\left(Q_m\right) + \mu_N\left(Q_0\right)}{2h_x^2} q_m\left(Q_0\right),\ m = \overline{1,2},$$

$$B\left(Q_0, Q_m\right) = \sigma\frac{\mu_N\left(Q_m\right) + \mu_N\left(Q_0\right)}{2h_y^2} q_m\left(Q_0\right),\ m = \overline{3,4}.$$

Коэффициент для центра шаблона будет иметь вид:

$$A\left(Q_0\right) = \frac{q_0\left(Q_0\right)}{\tau} + \sum_{m=1}^{4} B\left(Q_0, Q_m\right) - C_1 q_0\left(Q_0\right)\left(N_0 - N\left(Q_0\right)\right)\sigma.$$

Для формулировки правой части сеточного уравнения вводятся вспомогательные коэффициенты:

$$B\left(Q_0, Q_{m+5}\right) = \left(1-\sigma\right)\frac{\left(\mu_N\left(Q_m\right) + \mu_N\left(Q_0\right)\right)}{2h_x^2} q_m\left(Q_0\right),\ m = \overline{1,2},$$

$$B\left(Q_0, Q_{m+5}\right) = \left(1-\sigma\right)\frac{\left(\mu_N\left(Q_m\right) + \mu_N\left(Q_0\right)\right)}{2h_y^2} q_m\left(Q_0\right),\ m = \overline{3,4},$$

$$B\left(Q_0, Q_5\right) = \frac{q_0\left(Q_0\right)}{\tau} - \sum_{m=6}^{9} B\left(Q_0, Q_m\right) + C_1 q_0\left(Q_0\right)\left(N_0 - N\left(Q_0\right)\right)\left(1-\sigma\right),$$

в результате чего правые части сеточных уравнений принимают вид:

$$F\left(Q_0\right) = \sum_{m=0}^{4} B\left(Q_0, Q_{m+5}\right)N\left(Q_m\right) - C_2 q_0\left(Q_0\right)P\left(Q_0\right).$$

Запишем дискретный аналог уравнения движения промысловой рыбы в канонической форме. Коэффициенты сеточного уравнения, стоящие в окрестности центра шаблона, имеют вид:

$$B(Q_0,Q_1)=\sigma\left(-\frac{u(Q_1)+u(Q_0)}{4h_x}+\frac{\mu_P(Q_1)+\mu_P(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_1(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_2)=\sigma\left(-\frac{u(Q_2)+u(Q_0)}{4h_x}+\frac{\mu_P(Q_2)+\mu_P(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_2(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_3)=\sigma\left(-\frac{v(Q_3)+v(Q_0)}{4h_y}+\frac{\mu_P(Q_3)+\mu_P(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_3(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_4)=\sigma\left(-\frac{v(Q_4)+v(Q_0)}{4h_y}+\frac{\mu_P(Q_4)+\mu_P(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_4(Q_0).$$

Коэффициент для центра шаблона имеет вид:

$$A(Q_0)=\frac{q_0(Q_0)}{\tau}+\sum_{m=1}^{4}B(Q_0,Q_m)+\left(C_3-C_4N(Q_0)\right)\sigma.$$

Коэффициенты сеточного уравнения, стоящие в окрестности центра шаблона, будут следующего вида:

$$B(Q_0,Q_6)=(1-\sigma)\left(-\frac{u(Q_1)+u(Q_0)}{4h_x}+\frac{\mu_P(Q_1)+\mu_P(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_1(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_7)=(1-\sigma)\left(-\frac{u(Q_2)+u(Q_0)}{4h_x}+\frac{\mu_P(Q_2)+\mu_P(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_2(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_8)=(1-\sigma)\left(-\frac{v(Q_3)+v(Q_0)}{4h_y}+\frac{\mu_P(Q_3)+\mu_P(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_3(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_9)=(1-\sigma)\left(-\frac{v(Q_4)+v(Q_0)}{4h_y}+\frac{\mu_P(Q_4)+\mu_P(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_4(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_5)=\frac{q_0(Q_0)}{\tau}-\sum_{m=6}^{9}B(Q_0,Q_m)+\left(C_3-C_4N(Q_0)\right)(1-\sigma).$$

Тогда правые части сеточных уравнений имеют вид:

$$F(Q_0)=\sum_{m=0}^{4}B(Q_0,Q_{m+5})P(Q_m).$$

Запишем дискретный аналог уравнений таксиса в канонической форме взаимодействия. Коэффициенты сеточного уравнения, стоящие в окрестности центра шаблона, имеют вид:

$$B(Q_0,Q_1)=\sigma\left(-\frac{u(Q_1)+u(Q_0)}{4h_x}\beta+\frac{\mu_u(Q_1)+\mu_u(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_1(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_2)=\sigma\left(-\frac{u(Q_2)+u(Q_0)}{4h_x}\beta\frac{\mu_u(Q_2)+\mu_u(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_2(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_3)=\sigma\left(-\frac{v(Q_3)+v(Q_0)}{4h_y}\beta+\frac{\mu_v(Q_3)+\mu_v(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_3(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_4)=\sigma\left(-\frac{v(Q_4)+v(Q_0)}{4h_y}\beta+\frac{\mu_v(Q_4)+\mu_v(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_4(Q_0).$$

Коэффициент для центра шаблона примет значение:

$$A(Q_0)=\frac{q_0(Q_0)}{\tau}\beta+\sum_{m=1}^{4}B(Q_0,Q_m)+\sigma\alpha.$$

После записи правой части сеточного уравнения с введением вспомогательных коэффициентов, получим следующее:

$$B(Q_0,Q_6)=(1-\sigma)\left(-\frac{u(Q_1)+u(Q_0)}{4h_x}\beta+\frac{\mu_u(Q_1)+\mu_u(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_1(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_7)=(1-\sigma)\left(-\frac{u(Q_2)+u(Q_0)}{4h_x}\beta+\frac{\mu_u(Q_2)+\mu_u(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_2(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_8)=(1-\sigma)\left(-\frac{v(Q_3)+v(Q_0)}{4h_y}\beta+\frac{\mu_v(Q_3)+\mu_v(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_3(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_9)=(1-\sigma)\left(-\frac{v(Q_4)+v(Q_0)}{4h_y}\beta+\frac{\mu_v(Q_4)+\mu_v(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_4(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_5)=\frac{q_0(Q_0)}{\tau}\beta-\sum_{m=6}^{9}B(Q_0,Q_m)-(1-\sigma)\alpha.$$

Правые части сеточных уравнений будут иметь следующий вид:

$$F(Q_0)=\sum_{m=0}^{4}B(Q_0,Q_{m+5})u(Q_m)+C_5\frac{N(Q_1)-N(Q_2)}{2h_x}.$$

Уравнения различаются лишь правыми частями, поэтому запишем только правую часть канонической формы:

$$F(Q_0)=\sum_{m=0}^{4}B(Q_0,Q_{m+5})v(Q_m)+C_5\frac{N(Q_3)-N(Q_4)}{2h_y}.$$

На основе данных методов было разработано программное обеспечение на языке C# и проведен численный эксперимент в области правильной формы, представленный на рис. 1. На основе сценарного подхода исследовано изменение концентраций промысловой рыбы пиленгас и мотыля — личинок комара, обитающих в детрите.

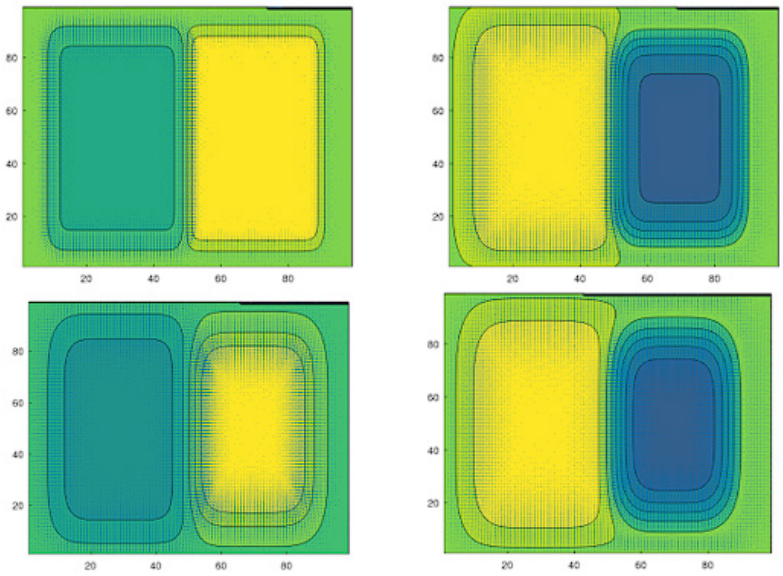


Рис. 1. Результаты численного эксперимента
(временные промежутки сверху вниз: $t=20, t=60, t=90, t=130$)

В дальнейшем планируется осуществить математическое моделирование рассматриваемого ихтиологического процесса динамки рыбы – донного мелиоратора с помощью программного комплекса, реализующего алгоритм решения задачи в расчетной области сложной формы — Ейском лимане, на основе экспедиционных данных и баз геоинформационных систем. Исходя из представленных данных об условиях для репродукции комаров вида *Chironomidae*, идеально подходящие условия можно обнаружить в акватории Ейского лимана на стыке с поймой реки Ея [4].

География Ейского лимана представлена на рис. 2 [5].

Рис. 2. Спутниковый снимок Ейского лимана

Слабые течения и небольшая глубина создают идеальные условия для размножения этого вида, более того, подобные же факторы благоприятны для рыб, которые испытывают негативную тенденцию в динамике количественных показателей и которые используют личинки комаров на ранних этапах роста в качестве пищи.

Заключение

Исследование вопросов сохранения и реабилитации акватории Азовского моря связано с важностью изучения взаимодействия между популяциями рыб-детритофагов и личинок комаров вида Chironomidae. Использование предложенной математической модели ихтиологического процесса мелководного водоема позволяет не только описать динамику изменения численности промысловой рыбы, но и прогнозировать дальнейшие изменения в экосистеме региона. Полученные результаты численных экспериментов подтверждают теоретические предположения о наличии благоприятных условий для размножения комаров в Ейском лимане, что, в свою очередь, создает перспективы для устойчивого роста популяций ценных и промысловых рыб, использующих личинки комара в качестве пищи.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10102, https://rscf.ru/project/22-71-10102/

Литература

1. Электронный ресурс. Показатели промысла в азовском море подтверждают прогнозы ученых ГНЦ РФ ФГБНУ ВНИРО. URL: https://azniirkh.vniro.ru/content/read/azniirkh-news/surveys/25892226-19-09-2024

2. *Беляков В. П.* Влияние солёности на личинок хирономид (diptera, chironomidae) в гиперсолёных водоёмах Крыма / В. П. Беляков, Е. В. Ануфриева, А. И. Бажора, Н. В. Шадрин // Поволжский экологический журнал. – 2017. – (3). – P. 240–250. https://doi.org/10.18500/1684-7318-2017-3-240-250

3. *Сухинов А. И.* Математическое моделирование процессов эвтрофикации в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе / А. И. Сухинов, А. В. Никитина, А. Е. Чистяков, И. С. Семенов, А. А. Семенякина, Д. С. Хачунц // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2016. – Т. 5, № 3. – С. 36–53.

4. *Sukhinov A. I.* The use of supercomputer technologies for predictive modeling of pollutant transport in boundary layers of the atmosphere and water bodies / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, T. V. Lyashchenko, A. A. Filina, V. N. Litvinov // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Т. 1063. – С. 225–241.

5. Электронный ресурс. Карта Ейского лимана. Google Maps. URL: https://www.google.com/maps/@46.7116005,38.471369,22875m/data=!3m1!1e3?entry=ttu&g_ep=EgoyMDI0MTAxNC4wIKXMDSoASAFQAw%3D%3D

УДК 538.91; 519.216

ФАЗОВЫЕ СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМАХ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР

А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская, Е. А. Семин

Воронежский государственный аграрный университет имени Императора Петра I

Аннотация. Структуры, моделируемые посредством рандомизированных систем итерированных функций, могут быть представлены в виде фрактальных множеств. Алгоритмы, генерирующие такие структуры, воспроизводят винеровские процессы. После преобразований вычислительной схемы можно перейти к модификации алгоритма, которая соответствует марковским процессам. Структуры, генерируемые этими процессами, рассматриваются как отдельные фазовые состояния. Для различения типов процессов, а, следовательно, и фазовых состояний, предлагается использовать преобразование Лежандра.
Ключевые слова: рандомизированные системы итерированных функций, аттрактор системы, фазовые состояния, винеровский процесс, марковский процесс.

Введение

Равновесное состояние вещества, которое отличается по своим *физическим* свойствам (и условиям формирования) от других состояний этого же вещества, принято называть фазой. Фазовые состояния, соответствующие одному агрегатному состоянию, различаются структурой и физическими свойствами. Так, например, твердому агрегатному состоянию могут соответствовать два фазовых состояния: кристаллическое и аморфное (стеклообразное) [13]. Для моделирования различных фазовых состояний мы предлагаем использовать линейные алгоритмы рандомизированных систем итерированных функций (РСИФ) [1, 4, 10]. В самом общем случае РСИФ представляет собой набор функций $\mathbf{Z}$ с заданным на них вероятностным распределением $\{p_j : j = 1,2,\ldots,K\}$ и сводится к выполнению преобразования

$$X_{n+1} = \xi X_n + (1-\xi)Z_j^{(n)}, \tag{1}$$

где $\mathbf{Z} = \{Z_j, j = 1,2,\ldots,K; n = 1,2,\ldots,N \vdots p_j = P(Z_j \in \mathbf{Z})\}$, $0 < \xi < 1$ — параметр системы. Такой вариант реализации РСИФ, приводящий к построению фрактального множества, будем обозначать F1.

1. Рандомизированные системы как модели случайных процессов

1.1. Винеровские процессы

Уравнение Ланжевена, описывающее винеровский процесс, представляющее математическую модель броуновского движения [3, 8, 11], предлагается рассматривать как предельное представление траектории некоторой частицы, которая движется под действием большого числа столкновений

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{m}v(t) + \frac{dF(t)}{dt}. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно представить в виде разностной схемы [12]:

$$\frac{(X_{n+1} - X_n) - (X_n - X_{n-1})}{\Delta t^2} = -\frac{\lambda}{m}\frac{(X_n - X_{n-1})}{\Delta t} + \frac{F_n - F_{n-1}}{\Delta t},$$

где Δt — шаг схемы. После очевидных преобразований получим:

$$X_{n+1} = \left(2 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right)X_n + \left(\frac{\lambda}{m}\Delta t - 1\right)X_{n-1} + \left(F_n - F_{n-1}\right)\Delta t. \tag{3}$$

Учитывая, что в этом соотношении сумма коэффициентов при X_n и X_{n-1} равняется единице, т. е. правая часть является выпуклой комбинацией предыдущих значений, а $(F_n - F_{n-1})\Delta t$ представляет «действие» случайной величины за время Δt, удобно считать в дальнейшем это время равным единице. Полученное уравнение представим в следующем виде:

$$X_{n+1} = (1+\theta)X_n + (-\theta)X_{n-1} + (1-\theta)\frac{m}{\lambda}\Delta F_n,$$

где $\theta = \left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right) \Rightarrow \Delta t = \frac{m}{\lambda}(1-\theta)$, или

$$X_{n+1} = \xi X_n + (1-\xi)X_{n-1} + \Delta F_n, \qquad (4)$$

где введено обозначение $\xi = \left(1 + 1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right)$.

Выражение $\frac{\lambda}{m} = 1$ соответствует состоянию равновесия, при котором численные значения параметров λ и m совпадают. В этом случае уравнение (4) принимает вид стандартной схемы РСИФ:

$$X_{n+1} = \xi X_n + (1-\xi)Z_j^{(n)}, \qquad (5)$$

где через $Z_j^{(n)}$ обозначено влияние, или лучше, взаимодействие с внешней средой, которое при данном характере взаимодействия рассматривается как дискретная случайная величина $\mathbf{Z} = \{Z_j, j = 1,2,\ldots,K \vdots p_j = P(Z_j \in \mathbf{Z})\}$. Таким образом, РСИФ может представлять модель броуновского движения [7, 14] при определенных соотношениях определяющих параметров.

1.2. Марковские процессы

Как было показано в [1, 5], существует другой способ построения фрактального множества, который является следствием преобразований схемы F1. Для этого берется ряд $\mu\sum_{i=1}^{\infty}\xi^i = 1$, элементы которого поочерёдно относятся к одному из K классов. Это размещение элементов ряда осуществляется в соответствие с тем же распределением вероятностей $\{Z_i / p_i\}_{i=1}^{K}$ $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$, где μ — нормировочная константа, связанная со значением параметра ξ следующим образом: $\mu = \xi^{-1}(1-\xi)$. Значения, отнесенные в один класс, затем суммируются и записываются в виде кортежа (строки) $A_l = \{a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{lK}\}$. Очевидно, что получаемые в ходе выполнения процедуры элементы кортежа удовлетворяют условиям: $a_{lj} \geq 0$; $\sum_{j=s}^{K} a_{lj} = 1$. Полученные в результате такой процедуры совокупности строк $\mathbf{A} = \{A_i : i = 1,2,\ldots N\}$ записываются в виде матрицы $\mathbf{A}$ размером $N \times K$. Окончательный результат выполнения процедуры будет представлен в виде матричного произведения $\mathbf{X} = \mathbf{AZ}$, где $\mathbf{X}$ — множество координат точек, $\mathbf{Z}$ — множество точек, представленных матрицей размера $K \times P$; $\mathbf{A}$ — матрица (кортежей) размера $N \times P$. Такой способ построения фрактала будем обозначать F2.

Введём в рассмотрение следующую функцию: $\tau(A_j) = \arg\max_j a_{ij}$. Функция $\tau(A_j)$ численно равняется номеру позиции доминирующего элемента, т. е. элемента удовлетворяющего условию: $a_{im} > \sum_{j \neq m} a_{ij}$. Очевидно, что $1 \leq \tau(A_j) \leq K$. Для пар (A_i, A_j) введём отношение: $A_i \sim A_j$, если $\tau(A_i) = \tau(A_j)$. Такое отношение, будет отношением эквивалентности. Действительно, нетрудно проверить, что выполняются следующие свойства отношения: рефлективность, симметричность и транзитивность [9].

Очевидно, что способ построения фрактального множества F2 хорошо соответствует определению марковского процесса [6].

Заключение

Таким образом, выполнение процедур F1 и F2 приводит к построению фрактальных множеств, топологические свойства которых одинаковы. При этом использование РСИФ позволяет моделировать фрактальные структуры, соответствующие различным случайным процессам: в первом случае винеровскому, а во втором – марковскому. Однако, если в первом случае F1 структура множества **X** представляет собой некоторый путь на древовидной структуре графа, что позволяет соотнести эту структуру с некоторым хорошо организованным (упорядоченным) множеством (типа кристалла), то в случае F2 получается некоторое аморфное множество, соответствующее стекловидным структурам.

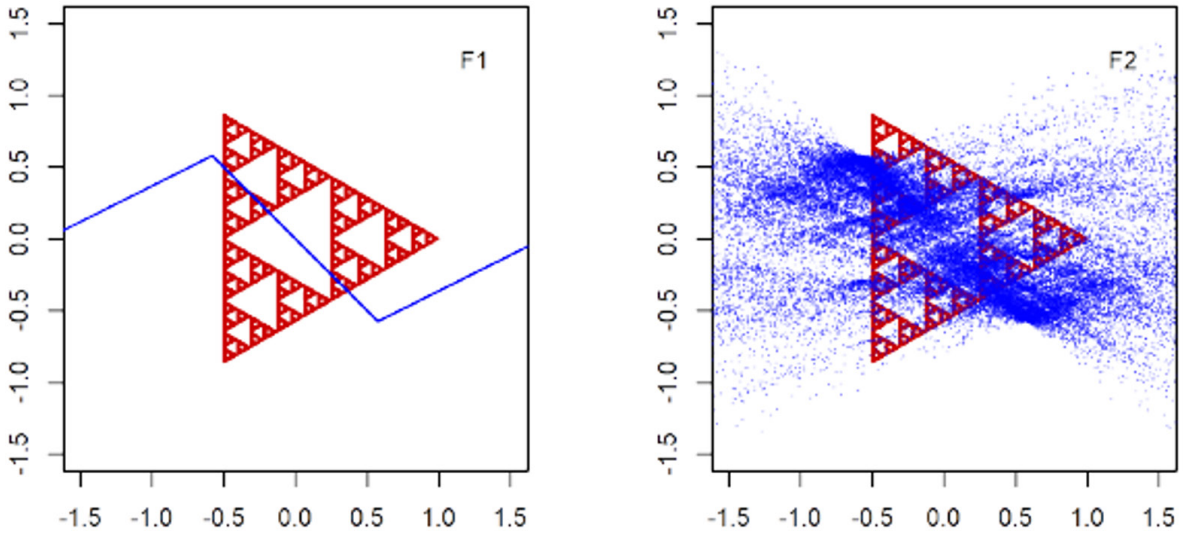


Рис. Результаты применения преобразования Лежандра к фрактальным множества, построенным F1и F2 [2]

Следовательно, можно считать, что эти модели соответствуют различным фазовым состояниям. Эти различия в формировании внутренних структур хорошо видны при построении двойственного фрактала с помощью преобразования Лежандра [2].

Литература

1. *Bukhovets A. G.* Modeling of fractal data structures // A. G. Bukhovets, E. A. Bukhovets // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73, No 2. – P. 381–385.

2. *Bukhovets A.* Construction of a dual attractor for linear randomized systems of iterated functions / A. Bukhovets, P. Moskalev, T. Biryuchinskaya // Journal of Physics: Conference Series : Current Problems, Voronezh, 07–09 декабря 2020 года. – Voronezh, 2021. – P. 012056. – DOI 10.1088/1742-6596/1902/1/012056

3. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход: пер. с анг. / М. Арато. – М. : Наука, 1989. – 304 с.

4. *Буховец А. Г.* Моделирование фрактальных свойств системных объектов // А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Вестник ВГУ, Системный анализ и информационные технологии. – 2011. – № 2. – С. 22–26.

5. *Буховец А. Г.* Структура аттрактора рандомизированных систем итерированных линейных функций / А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 2. – С. 5–10.

6. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Высшая школа, 2006. –575 с.

7. *Игнатов А. М.* Броуновское движение плазменного кристалла / А. М. Игнатов // Физика плазмы. – 2017. – Т. 43, № 6. – С. 560–568. – DOI 10.7868/S0367292117060099.

8. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика / Ю. Л. Климонтович. – Москва : Наука, 1982. – 608 с.

9. *Колмогоров А. Н.* Элементы функционального анализа / А. Н Колмогоров, С. В. Фомин. – Москва : Наука, 1972 – 496 с.

10. *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы / Б. Мандельброт. – М. – Ижевск, 2004. – 256 с.

11. *Пугачев В. С.* Теория стохастических систем / В. С. Пугачев., И. Н. Синицын. – М. : Логос, 2004, – 643 с.

12. *Самарский А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1977. – 656 с.

13. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. II. – М. : Физматлит, 2017. – 565 с.

14. Фрактальное броуновское движение коллоидных частиц в плазме / К. Г. Косс, И. И. Лисина, М. М. Васильев [и др.] // Физика плазмы. – 2023. – Т. 49, № 1. – С. 33–41. – DOI 10.31857/S0367292122600972.

УДК 004.942

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

А. С. Верховский

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрены методы построения математических моделей электрической RCRCL цепи, представленных в пространстве состояний. Изучены свойства полной управляемости, полной наблюдаемости и устойчивости математических моделей. Построены соответствующие компьютерные модели на языке Scilab. Полученные результаты работы могут быть использованы для анализа работы электрических устройств, включая прогнозирование и расчет электрических параметров при различных условиях эксплуатации.

Ключевые слова: электрическая цепь, математическая модель, компьютерная модель, физическая модель, стандартная наблюдаемая модель, стандартная управляемая модель, каноническая модель, полная управляемость, полная наблюдаемость.

Введение

В современном мире электроника присутствует во всех сферах жизни, в быту и производстве, медицине и военном деле, транспорте и связи и т. д., во многом определяя уровень и перспективы их развития. Электрические цепи являются основой для функционирования многих приборов, от освещения в домах до мобильных устройств. В большинстве случаев цепи состоят из резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности, которые создают основу для генераторных схем (настройки выбора узкого частотного диапазона), фильтров (полосового фильтра, полосового ограничителя, фильтра нижних частот или фильтра верхних частот), настройки аналоговых радиостанций, цепей синусоидального тока и систем автоматического управления [1]. Математическое моделирование представляет собой замену исследуемого объекта его математической моделью и последующее ее исследование с помощью различных численных методов. Таким образом, моделирование служит наиболее важным средством познания, проектирования, конструирования и прогнозирования. Математическое моделирование электрических цепей позволяет в ряде случаев избежать трудоемких и дорогостоящих экспериментов.

В данной статье рассмотрены методы построения математических моделей электрической цепи, представленных в пространстве состояний. Основная цель заключается в построении и исследовании математических моделей электрической RCRCL цепи с учетом протекающего тока, а также анализ свойств полученных моделей. В статье будем использовать следующие обозначения: ФМ — физическая модель, СУМ — стандартная управляемая модель, СНМ — стандартная наблюдаемая модель, КМ – каноническая модель.

1. Построение математических моделей

Электрическая цепь — это замкнутые контуры или пути, по которым протекает электрический ток. Цепь состоит из резисторов (R), катушки индуктивности (L) и конденсаторов (C), соединенных параллельно или последовательно. Электрические цепи применяются для фильтрации сигналов, накопления энергии, управления в системах автоматики, в колебательных контурах, а также для сглаживания напряжения [2, 3].

Рассмотрим RCRCL цепь, изображенную на рис. 1.

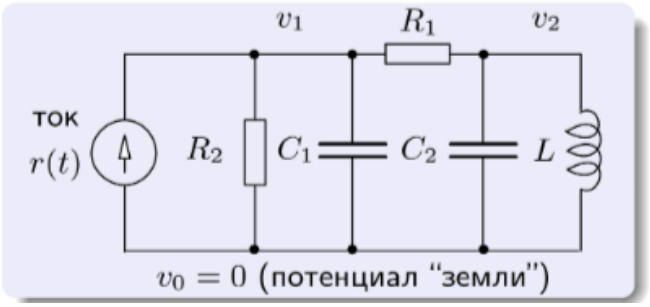


Рис. 1. Электрическая RCRCL цепь [4]

Запишем определяющие уравнения для элементов:

$$R: iR(t) = \frac{1}{R}v(t),\ L: v(t) = L\frac{diL(t)}{dt},\ C: iC(t) = C\frac{dv(t)}{dt}.$$

Начальные условия будем считать нулевыми, потенциал $v_1(t) \triangleq \frac{d\lambda_1(t)}{dt}$, $\lambda_1(t) \triangleq$ потоковая связь 1, потенциал $v_2(t) \triangleq \frac{d\lambda_2(t)}{dt}$, $\lambda_2(t) \triangleq$ потоковая связь 2, вектор состояния $x(t) \triangleq \left[\lambda_1(t), v_1(t), \lambda_2(t), v_2(t)\right]^T$, наблюдается $z(t) \triangleq v_2(t)$. Для построения модели используем второй закон Кирхгофа [5, 6]:

$$\sum_{k=1}^{m} \bigcup_k = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k,$$

где $\bigcup_k$ — падение напряжения на k-м элементе контура, ε_k — ЭДС k-го источника напряжения, а m — общее количество элементов и источников в контуре. Получается следующая система уравнений [7]:

$$\begin{cases} \frac{v_1(t)}{R_2} + C_1\frac{dv_1(t)}{dt} = r(t) \\ \frac{v_2(t)}{R_1} + C_2\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t v_2(t)dt = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Для построения «физической модели» запишем по уравнениям (1) систему дифференциальных уравнений первого порядка, применяется метод преобразования Лапласа. Матричное представление модели (2) состоит из уравнения состояния и уравнения наблюдения, которые включают матрицу системы (F), матрицу передачи входного воздействия (B) и матрицу наблюдения (H) [8].

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{LC_2} & -\frac{1}{R_1C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (2)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Представление системы в пространстве состояний не является единственным. При переходе в другой базис можно получить альтернативное представление системы в пространстве состояний, то есть другие модели системы.

Построим стандартную наблюдаемую модель. Результат будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{LC_2C_1R_2} & -\dfrac{C_1R_1R_2+L}{LC_2R_1C_1R_2} & -\dfrac{C_1R_2+C_2R_1}{C_2R_1R_2C_1}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{C_1}\\ -\dfrac{1}{R_2C_1^2}\\ \dfrac{1}{R_2^2C_1^3}\end{bmatrix}r(t) \qquad (3)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x(t).$$

Для стандартной управляемой модели получим следующее представление:

$$z(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{LC_2C_1} & \dfrac{1}{R_1C_2C_1} & \dfrac{1}{C_1} & 0\end{bmatrix}x(t). \qquad (4)$$

Для канонической модели:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-L-\sqrt{-4C_2LR_1^2+L^2}}{2LC_2R_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{-L+\sqrt{-4C_2LR_1^2+L^2}}{2LC_2R_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{R_2C_1}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}r(t) \qquad (5)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}R_2 & 0 & 0 & -R_2\end{bmatrix}x(t).$$

Для визуализации представления построим блок-схему физической модели, результат изображен на рис. 2:

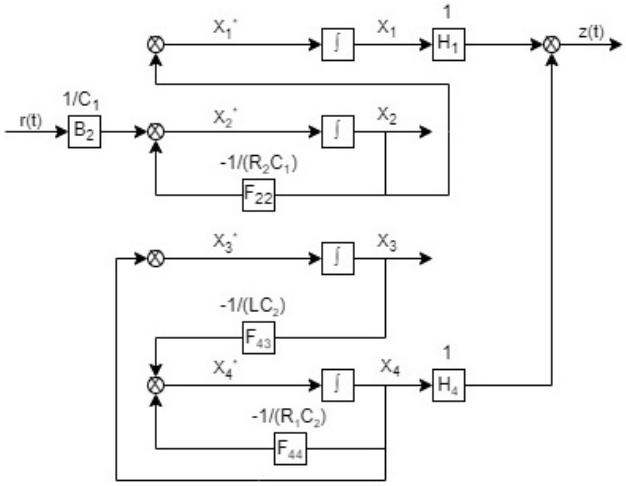


Рис. 2. Блок-схема ФМ

Проведем анализ свойств построенных математических моделей, включая свойства полной управляемости, наблюдаемости и устойчивости.

Матрица управляемости линейной инвариантной и непрерывной во времени динамической системы вычисляется по формуле $W_{CTI}=[B\,|\,FB\,|\,F^2B\,|\,\ldots\,|\,F^{n-1}B]$. Для того, чтобы система была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы $rank\ W_{CTI}=n$.

Вычислим матрицу управляемости для физической модели:

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для стандартной наблюдаемой модели:

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^4} \\ -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^4} & \frac{1}{C_1^5 R_2^4} \\ \frac{1}{R_2^2 C_1^3} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^4} & \frac{1}{C_1^5 R_2^4} & -\frac{1}{C_1^6 R_2^5} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для стандартной управляемой модели:

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{C_1 R_2 + C_2 R_1}{C_2 R_1 R_2 C_1} \\ 0 & 1 & -\frac{C_1 R_2 + C_2 R_1}{C_2 R_1 R_2 C_1} & -\frac{C_1^2 C_2 R_1^2 R_2^2 - C_1^2 L R_2^2 - C_1 C_2 L R_1 R_2 - C_2^2 L R_1^2}{C_2^2 R_1^2 R_2^2 C_1^2 L} \\ 1 & -\frac{C_1 R_2 + C_2 R_1}{C_2 R_1 R_2 C_1} & -\frac{C_1^2 C_2 R_1^2 R_2^2 - C_1^2 L R_2^2 - C_1 C_2 L R_1 R_2 - C_2^2 L R_1^2}{C_2^2 R_1^2 R_2^2 C_1^2 L} & \frac{2C_1^3 C_2 R_1^2 R_2^3 + C_1^2 C_2^2 R_1^3 R_2^2 - C_1^3 L R_2^3 - C_1^2 C_2 L R_1 R_2^2 - C_1 C_2^2 L R_1^2 R_2 - C_2^3 L R_1^3}{C_2^3 R_1^3 R_2^3 C_1^3 L} \end{bmatrix}$$

Для канонической модели:

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-L - \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)}}{2LC_2R_1} & \frac{(L - \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)})^2}{4L^2C_2^2R_1^2} & \frac{-(L - \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)})^3}{8L^3C_2^3R_1^3} \\ 1 & \frac{-L + \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)}}{2LC_2R_1} & \frac{(L + \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)})^2}{4L^2C_2^2R_1^2} & \frac{-(L + \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)})^3}{8L^3C_2^3R_1^3} \\ 1 & -\frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2^2 C_1^2} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^3} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

В результате проведенного анализа матрицы управляемости ФМ и СНМ имеют ранг 2, а матрицы управляемости СУМ и КМ имеют ранг 4. Из этого следует, что СУМ и КМ являются полностью управляемыми.

Матрица наблюдаемости линейной инвариантной и непрерывной во времени динамической системы может быть вычислена как $M_{CTI} = [H^T \mid F^T H^T \mid (F^2)^T H^T \mid \ldots \mid (F^{n-1})^T H^T]^T$.

Для построенной физической модели:

$$M_{CTI}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{LC_2} & -\frac{1}{R_1C_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_2^2L} & -\frac{C_2R_1^2-L}{LC_2^2R_1^2} \\ 0 & \frac{1}{R_2^2C_1^2} & \frac{C_2R_1^2-L}{L^2C_2^3R_1^2} & \frac{2C_2R_1^2-L}{LC_2^3R_1^3} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Для стандартной наблюдаемой модели будет единичная матрица размером 4 на 4.

Для стандартной управляемой модели:

$$M_{CTI}=\begin{bmatrix} \frac{1}{LC_2C_1} & \frac{1}{R_1C_2C_1} & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{LC_2C_1} & \frac{1}{R_1C_2C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{C_1^2LC_2R_2} & -\frac{1}{C_1^2C_2R_1R_2} & -\frac{1}{R_2C_1^2} \\ 0 & \frac{1}{C_2C_1^3R_2^2L} & \frac{1}{C_2R_1C_1^3R_2^2} & \frac{1}{R_2^2C_1^3} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для канонической модели:

$$M_{CTI}=\begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 & -R_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_2C_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2^2C_1^3} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

В результате проведенного анализа матрицы наблюдаемости КМ и СУМ имеют ранг 2, а матрицы наблюдаемости СНМ и ФМ имеют ранг 4. Из этого следует, что модели СНМ и ФМ полностью наблюдаемые.

Для проверки устойчивости необходимо проанализировать корни характеристического уравнения. Если коэффициенты C, R и L положительные, то корни этого уравнения будут иметь отрицательную вещественную часть, и система будет устойчивой. Характеристическое уравнение исследуемой системы имеет вид:

$$C_1C_2LR_1s\left(s+\frac{1}{R_2C_1}\right)(C_2LR_1s^2+Ls+R_1)=0. \quad (12)$$

Необходимо проверить, что $R_2C_1>0$ и, $L<2\sqrt{C_2R_1^2}$. Если оба условия выполняются, то система устойчива. Коэффициент затухания α можно определить как величину, обратную времени, за которое амплитуда уменьшается в n раз: $\alpha=R_1/2L$. Резонансная частота ω_0 — это частота собственных колебаний контура, при которой амплитуда колебаний максимальна [9]: $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC_2}}$.

2. Построение компьютерных моделей

Для построения компьютерных моделей будем использовать математические модели, построенные в первом разделе. Все компьютерные модели реализованы на языке Scilab [10]. На рис. 3–5 представлены результаты вычислительных экспериментов в зависимости от параметров ω_0 и α. Если $\omega_0 > \alpha$, происходит колебательный процесс. Значения параметров электрической цепи: $R_1 = 4$ Ом и $R_2 = 1$ Ом, индуктивность $L = 0.1$ Гн и емкость $C_1 = 1$ Ф, $C_2 = 4$ Ф.

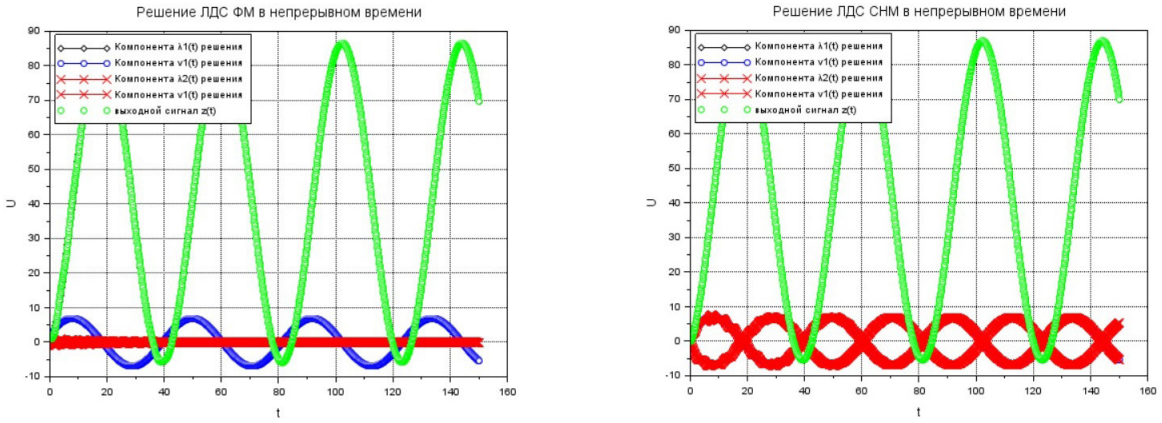


Рис. 3. График ФМ и СНМ для колебательного процесса

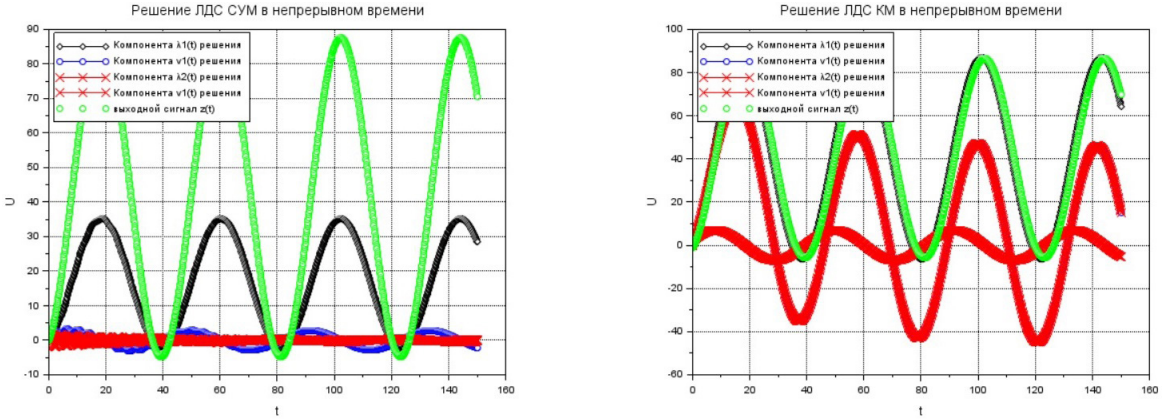


Рис. 4. График СУМ и КМ для колебательного процесса

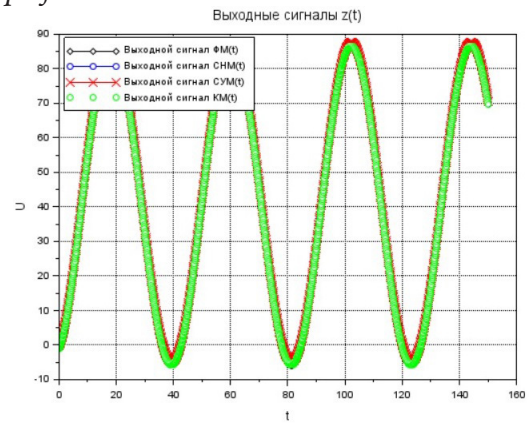


Рис. 5. График выходных сигналов колебательного процесса

При $\omega_0 < \alpha$ происходит апериодический процесс. Результаты вычислительных экспериментов изображены на рис. 6–8: Значения параметров электрической цепи: $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 3$ Ом, индуктивность $L = 1$ Гн и емкость $C_1 = 7$ Ф, $C_2 = 4$ Ф.

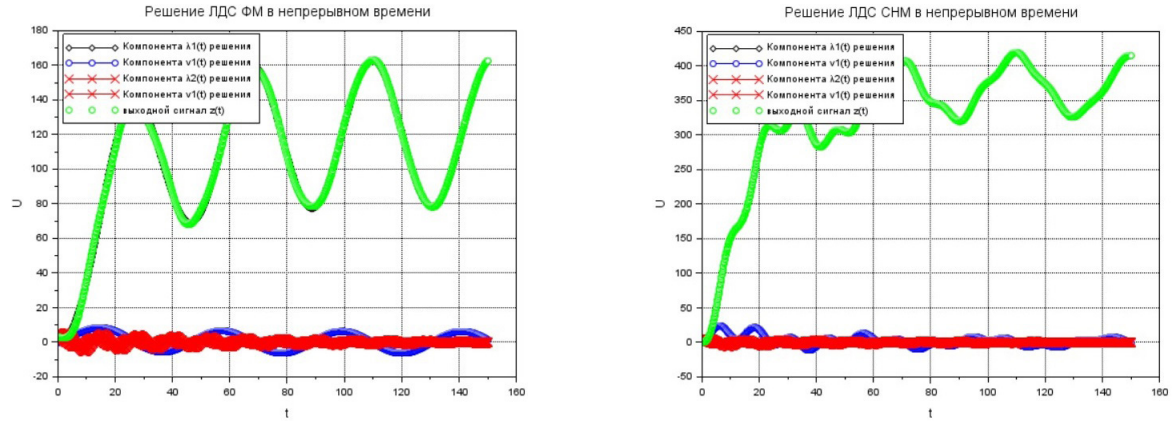


Рис. 6. График ФМ и СНМ для апериодического процесса

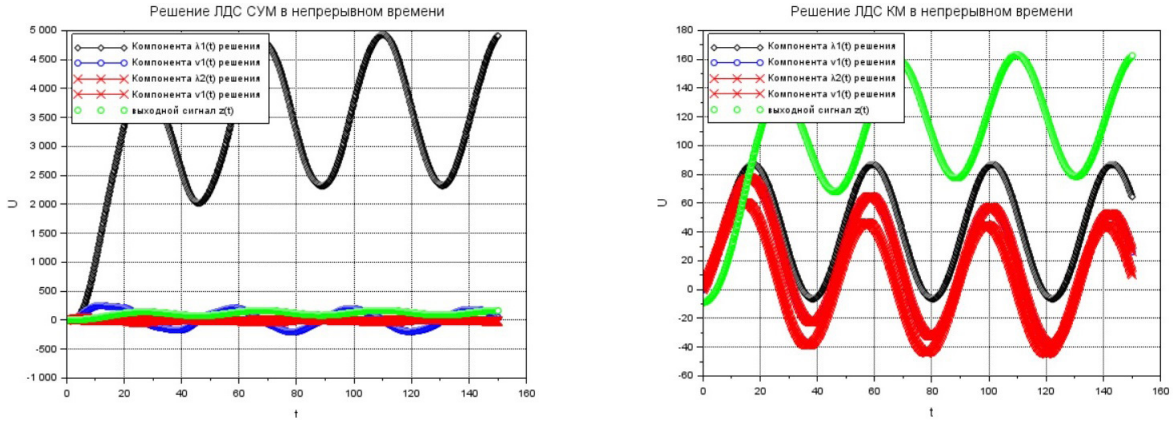


Рис. 7. График СУМ и КМ для апериодического процесса

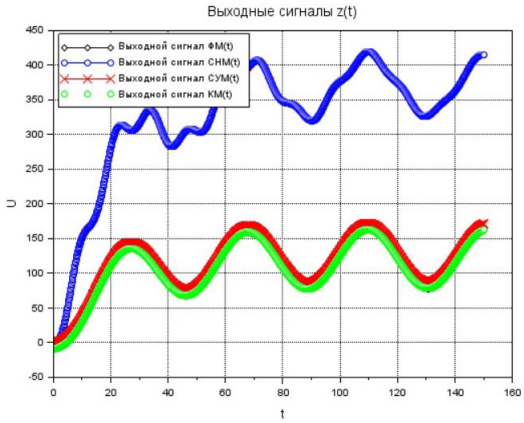


Рис. 8. График выходных сигналов апериодического процесса

По рис. 8 видно, что в данном случае выходной сигнал стандартной наблюдаемой модели отличается от остальных, следовательно, ее нельзя рассматривать как аналог физической модели.

В случае $\omega_0 = \alpha$, происходит критический режим. Критический режим — это состояние системы, которое возникает вблизи критической точки, на фазовой диаграмме, где две или более фаз системы становятся неотличимыми и происходит фазовый переход. В данном случае параметры элементов цепи, следующие: сопротивление $R_1 = 1$ Ом и $R_2 = 1$ Ом, индуктивность $L = 1$ Гн и емкость $C_1 = 1$ Ф, $C_2 = 4$ Ф. Результаты экспериментов представлены на рис. 9–11.

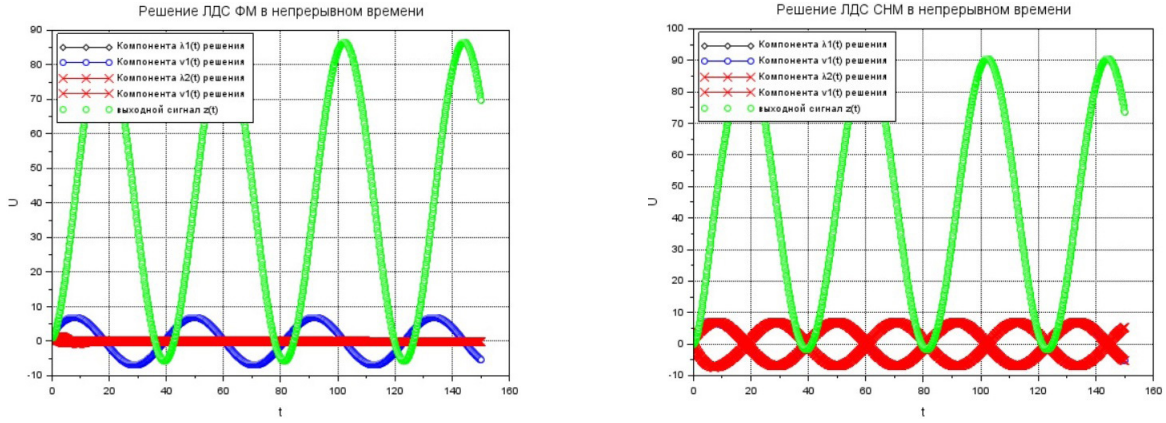


Рис. 9. График ФМ и СНМ при критическом режиме

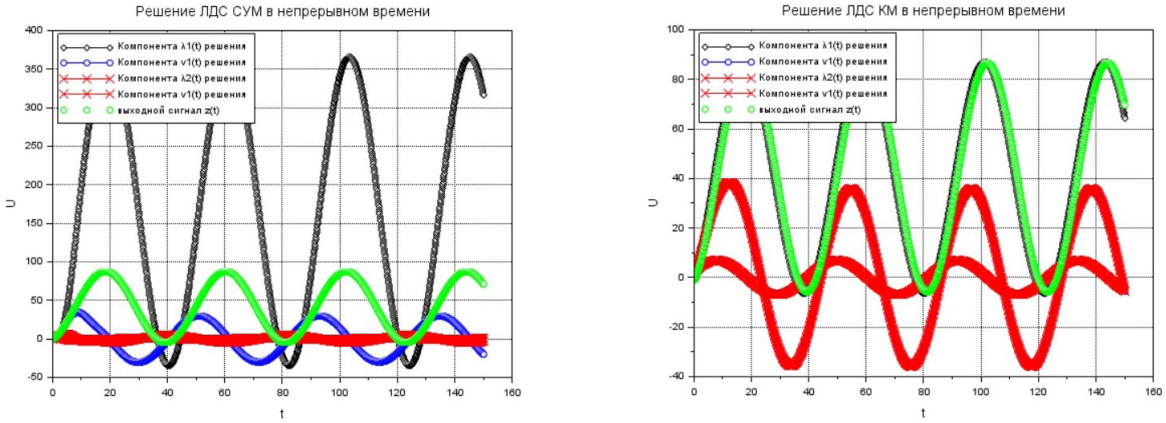


Рис. 10. График СУМ и КМ при критическом режиме

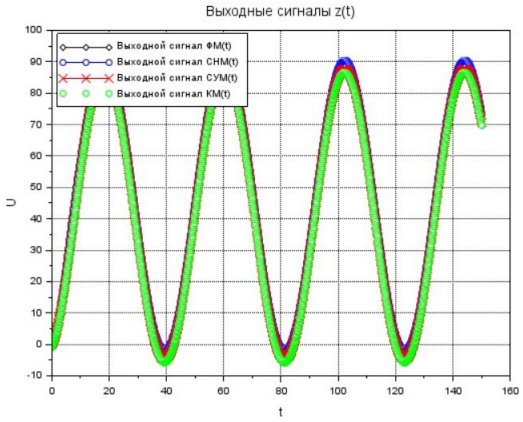


Рис. 11. График выходных сигналов при критическом режиме

Заключение

В рамках данной статьи были рассмотрены методы построения математических моделей электрической RCRCL цепи в пространстве состояний. Построенные математические модели позволяют анализировать и прогнозировать поведение тока в цепи при различных параметрах и условиях. Каждая модель имеет свои преимущества и недостатки, которые можно оценить как при теоретическом исследовании свойств математической модели, так и при практическом исследовании соответствующей компьютерной модели по результатам вычислительных экспериментов. Разработанные компьютерные модели позволяют изучить переходные процессы, затухание, резонанс и другие особенности контура цепи.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на усовершенствование модели с учетом нелинейных элементов, а также на разработку алгоритмов оптимизации параметров цепи.

Литература

1. *Дорф Р.* Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – Москва : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

2. *Батура М. П.* Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулёв ; Минск : Вышэйшая школа, 2015. – 607 с.

3. *Семушин И. В.* Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения: монография / И. В. Семушин – Ульяновск : УлГУ, 2011. – 298 с.

4. *Семушин И. В.* Математическое моделирование систем и процессов. Часть 1: Детерминистские модели динамических систем: электронное учебное пособие / И. В. Семушин – Ульяновск : УлГУ, 2020. – 273 с.

5. Электросхемотехника для студентов, радиолюбителей, инженеров. Теория: Законы Кирхгофа. – URL: https://www.sxemotehnika.ru/zhurnal/zakony-kirkhgofa.html (дата обращения: 23.05.2023).

6. *Осадченко В. Х.* Резонансные свойства RLC-цепей: учебно-методическое пособие / В. Х. Осадченко, Я. Ю. Волкова, Ю. А. Кандрин ; Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2013. – 64 с.

7. *Коробейноков А. Г.* Применение Maple для моделирования динамического состояния RLC-цепи при импульсном воздействии на термистор / А. Г. Коробейноков // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2020. – № 3-1, – С. 227–232.

8. *Санкин Н. Ю.* Математическое моделирование электрической цепи / Н. Ю. Санкин // Ученые записки УлГУ. Серия Математика и информационные технологии. – 2018. – № 1. – С. 83–89.

9. Открытый Колледж. Физика. Электромагнитные колебания и волны. – URL: https://physics.ru/courses/op25part2/content/chapter2/section/paragraph2/theory.html (дата обращения: 25.05.2023).

10. Scilab Help. – URL: https://help.scilab.org/index (дата обращения: 27.03.2024).

УДК 519.852.35

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Ю. Е. Гагарин[1], У. В. Никитенко[1], С. Н. Гагарина[2]

[1]Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана
[2]Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

Аннотация. Рассмотрена необходимость учета погрешности исходной информации при использовании алгоритмов оптимизации транспортных сетей. В задаче о максимальном потоке необходимо учитывать погрешности величины потока и пропускной способности сети. Для оценивания параметров математической модели предлагается использовать методы конфлюэнтного анализа. Кроме точечных оценок параметров функциональных зависимостей необходимо учитывать интервальные оценки параметров.
Ключевые слова: оптимизация, транспортная сеть, измерения с ошибками, интервальные оценки.

Введение

Для описания различных территориально распределённых систем — транспортных, информационных, энергетических, как правило используется взвешенный граф. Рёбра и вершины графа соответствуют пропускным способностям и потребностям таких структур. В задачах на взвешенных графах оцениваются значения функционалов при фиксированных весах вершин, и находится решение между истоками и стоками графа при достижении экстремума функционала [1]. Подобные задачи формулируются в терминах линейного программирования, которые являются наиболее эффективными и известными методами решения моделей исследования операций и широко применяются в различных областях. Кроме того, использование методов линейного программирования подкрепляется высокоэффективными компьютерными алгоритмами.

Условия, в которых определяется оптимальное решение задачи линейного программирования, находят отражение в момент формирования модели, но в действительности такие условия не остаются неизменными. Поэтому представляется важным оценивание изменений в оптимальном решении, вызванные изменениями в параметрах исходной модели: коэффициентах целевой функции, элементах матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, и правой части условий-ограничений.

1. Учет погрешности исходной информации в алгоритмах оптимизации транспортных сетей

Рассмотрим транспортную модель, в которой неопределённость параметров задачи связана с количеством транспорта, перемещающимся из одного пункта в другой пункт, или пропускной способностью между узлами транспортной сети [2].

В задаче о максимальном потоке [3] каждая дуга сети характеризуется некоторой пропускной способностью. Пусть узел s — источник, узел t — сток, v — внешний поток, входящий в сеть в узле s и выходящий из сети в узле t. Задачу о максимальном потоке можно записать как задачу линейного программирования: найти максимум v при ограничениях

$$\sum_{k\in M_{Oi}} f_k - \sum_{k\in M_{Ti}} f_k = 0,\ i \in N - (s,t);$$

$$\sum_{k\in M_{Oi}} f_k - \sum_{k\in M_{Ti}} f_k - v = 0;$$

$$\sum_{k\in M_{Oi}} f_k - \sum_{k\in M_{Ti}} f_k + v = 0;$$

$$0 \le v \le v_r;$$

$$0 \le f_k \le c_k,\ k \in M,$$

где N — множество узлов; M — список дуг; O_i и T_i — набор начальных и конечных узлов; f_k — поток по дуге k; c_k — пропускная способность дуги k, определяет верхнюю границу потока по дуге.

В стандартной постановке задачи о максимальном потоке поток сохраняет свою величину при прохождении по дугам сети. Если f_k является потоком в начале дуги k, а f_k' — поток в её конце, то $f_k' = f_k$.

В алгоритмах оптимизации транспортных сетей неопределённость исходной информации может быть отражена:

1) в неопределённости или погрешности величины потока f_k;

2) в неопределённости или погрешности пропускной способности c_k дуги.

Величина потока и пропускная способность не будут определяться однозначно, а будут иметь некоторую погрешность: $f_k \pm \Delta f_k$ и $c_k \pm \Delta c_k$, Учёт погрешности Δf_k может привести к тому, что величина потока по дуге сети уменьшится практически до нуля или даже станет отрицательной величиной, т.е. поток поменяет своё направление. При учёте погрешности Δc_k пропускная способность может также снизиться до нуля. Таким образом, учёт неопределённости исходной информации приводит к изменению условий ограничений и в результате изменится оптимальное решение задачи.

Для оценивания погрешностей Δf_k и Δc_k существует ряд статистических подходов, которые основаны на разных моделях «измерения с ошибками».

Методы конфлюэнтного анализа [4] дают возможность оценить параметры функций любого вида с учётом погрешностей исходных данных.

Модель оценивания параметров с учетом погрешностей исходных данных имеет вид:

$$\begin{cases} y_i = \eta_i\left(x_i, \overline{\theta}\right) + \varepsilon_i \\ x_i = \xi_i + \delta_i \end{cases} \qquad i = \overline{1, n},$$

где (x_i, y_i) — наблюдаемые значения, $(\xi_i,\ \eta_i)$ — точные значения, $(\delta_i,\ \varepsilon_i)$ — ошибки измеренных значений.

Оценки параметров $\overline{\theta}$ находятся из условия минимума функционала:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(y_i - \eta_i\right)^2}{\sigma^2\left(y_i\right)} + \frac{\left(x_i - \xi_i\right)^2}{\sigma^2\left(x_i\right)}\right].$$

Сложность определения оценок параметров заключается в том, что неизвестны истинные значения ξ_i, а известны лишь их доверительные интервалы. Поэтому перед тем, как определять оценки параметров $\overline{\theta}$, необходимо оценить значения ξ_i.

Истинные значения ξ_i будут определяться из условия:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_i = \widehat{\xi}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для линейных функциональных зависимостей $\eta_i(x_i, \overline{\theta})$ учёт погрешностей исходных данных, при моделировании транспортных сетей, сложностей не вызывает. Для нелинейных функциональных зависимостей возникает проблема вычислительного характера, поскольку для получения оценок параметров в этом случае необходимо применять итерационные процедуры.

Заключение

Учет погрешности исходной информации в задачах анализа транспортных сетей позволяет получить корректную математическую модель и найти оптимальное решение задачи. Кроме того, в задачах оптимизации транспортных сетей с учётом неопределённости исходной информации необходимо определять интервальные оценки параметров функциональных зависимостей [5] и интервальные оценки функциональных зависимостей, что повышает достоверность принимаемых решений.

Литература

1. *Йенсен П.* Потоковое программирование / П. Йенсен, Д.Барнес. – М. : Радио и связь, 1984. – 392 с.

2. Использование метода анализа сети для оптимизации городских транспортных систем с учетом неопределенности информации / Ю. Е. Гагарин, У. В. Никитенко, С. Н. Гагарина, П. Е. Белоножко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года. – Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 1527–1530.

3. *Гагарин Ю. Е.* Оптимизация максимального потока методом анализа сети / Ю. Е. Гагарин, У. В. Никитенко, П. Е. Белоножко // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2022. – № 3-2(66). – С. 134–136.

4. *Гагарин Ю. Е.* Прогнозирование показателей деятельности предприятий с учетом неопределенности исходных данных / Ю. Е. Гагарин, С. Н. Гагарина // Вестник университета. – 2019. – № 1. – С. 94–99.

5. *Гагарин Ю. Е.* Интервальное оценивание объемов потребления ресурсов при стохастических исходных данных / Ю. Е. Гагарин, С. Н. Гагарина // Вестник университета. – 2018. – № 12. – С. 64–70.

УДК 004.94:69.04

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗДАНИЯ С КОМБИНИРОВАННЫМ ВАНТОВЫМ ПОКРЫТИЕМ ПРИ РАСЧЕТЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ К ПРОГРЕССИРУЮЩЕМУ ОБРУШЕНИЮ

Д. С. Глазков, С. Д. Гребенкин, В. А. Козлов

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Основная цель исследования заключалась в разработке и верификации численной модели здания, учитывающей стадийность монтажа, физическую и геометрическую нелинейность, ползучесть бетона и перераспределение усилий. Для выполнения расчетов использовался метод конечных элементов, что позволило оценить устойчивость конструкции как статическим, так и динамическим методами. По итогам расчетов сделаны выводы о преимуществах использования предложенной связки программ при поэтапном создании модели здания Воронежского цирка для расчета на устойчивость к прогрессирующему обрушению. Также проанализированы результаты вычислений и вынесены оценочные суждения по моделированию ситуации локальных отказов и по методикам расчета на устойчивость к прогрессирующему обрушению.
Ключевые слова: метод конечных элементов, методы расчета, устойчивость здания к прогрессирующему обрушению.

Введение

В современных строительных проектах особое внимание уделяется устойчивости зданий и сооружений к прогрессирующему обрушению, вызванному локальными отказами конструктивных элементов. Этот аспект является ключевым для обеспечения безопасности объектов с уникальными архитектурными решениями, особенно тех, которые используют висячие и комбинированные оболочки. Исследование данного направления требует применения передовых методов численного моделирования и учета сложных эффектов, связанных с физической и геометрической нелинейностью [3–7].

Настоящая работа посвящена анализу устойчивости здания Воронежского цирка, построенного по типовому проекту 1960–1970-х годов, к прогрессирующему обрушению. Уникальная конструкция цирка включает предварительно напряженную железобетонную оболочку в виде гиперболического параболоида с несущими вантовыми элементами и сборными плитами покрытия. Такой тип конструкции характеризуется высокой чувствительностью к локальным отказам из-за взаимосвязанной работы элементов.

Особое внимание уделено сравнительному анализу различных подходов к моделированию отказов элементов, включая локальные разрушения колонн и вант, а также изучению их влияния на напряженно-деформированное состояние здания. Полученные результаты позволили сделать выводы о преимуществах применения динамического метода в расчете висячих систем и предложить рекомендации по дальнейшему совершенствованию проектных методик.

1. Применяемые подходы и методы

На начальном этапе компьютерного моделирования происходит разработка геометрии здания и его основных конструктивных элементов в Rhinoceros-3D [1–2].

Далее происходит комплексная доработка модели и ее аналитического представления в КЭ-комплексе ЛИРА-САПР, включая учет физической и геометрической нелинейности, стадийности монтажа оболочки и прочего.

Для приближенного учета физической нелинейности процесса для бетона был выбран экспоненциальный закон деформирования, для арматуры — диаграмма Прандтля. Поэтапный отпуск оттяжек (3–4 этапа) и неполный набор прочности монолитного бетона может быть учтен двумя способами: введением учета ползучести бетона на этапе отпуска оттяжек или использованием секущего модуля упругости, основываясь на законе деформирования. Как показал численный эксперимент, перераспределение напряжений и деформации для этих двух случаев нагружения оказались примерно равными. К дальнейшему расчету был принят способ с введением в качестве начального секущего модуля упругости — в соответствии с этапами отпуска оттяжек.

Стадийность монтажа покрытия моделировалась с целью учета факторов поэтапного отпуска оттяжек и набора бетоном неполной проектной прочности на первых стадиях возведения оболочки, а также для получения приближенного НДС перед стадией приложения эксплуатационных нагрузок, а также перед стадиями исключения потерявших несущую способность элементов при локальном отказе.

1 стадия. Смонтированы все элементы, кроме оболочки и балок омоноличивания. На ванты действует представленная в виде линейно-распределенной нагрузка от оболочки. Происходит преднапряжение вантовых элементов до расчетного уровня преднапряжения с учетом потерь 5 %. Оттяжки смонтированы и представлены в виде односторонних упругих связей.

2 стадия. Обнуление перемещений предыдущей стадии. Приложение собственных весов смонтированных элементов.

3 стадия. Монтаж оболочки здания. В дальнейшем происходит отпуск оттяжек и обжатие оболочки.

4 стадия. Система на данном этапе ведет себя в достаточной степени линейно. Вес оболочки убирается с канатов и прикладывается как объемный к элементам оболочки.

Последующие стадии. Последовательное приложение всех эксплуатационных нагрузок.

Стадии с *1* по *4* назовем первым инициирующим этапом монтажа оболочки, впоследствии все операции работы над расчетной схемой и ее исследование будут проводиться после названного этапа.

На следующем этапе происходит расчет здания цирка на устойчивость к прогрессирующему обрушению. Используются статический, рекомендуемый СП 385.1325800.2018 [9], и динамический методы [7].

В настоящей работе анализировался отказ следующих элементов: 1)наиболее нагруженной колонны; 2) внешней и внутренней колонны с самым невыгодным положением в пространстве; 3) элемента, конструкции, раскрепляющего несущий элемент; 4) участка опорного кольца покрытия в месте анкеровки ванты; 5) одного из канатов ванта.

В разделе результаты и обсуждения приводятся данные для наиболее характерного элемента каркаса — внутренней колонны с наибольшей грузовой площадью, и для элемента покрытия — одного из канатов.

2. Анализ работы расчетной модели здания

Усилие преднапряжения напрягающих (стягивающих) вант [10]: 168 т (на 2 спаренных каната). Уравнение гиперболического параболоида имеет вид: $z = f_x \frac{x^2}{a^2} - f_y \frac{y^2}{b^2}$, где f_x, f_y — стрелы провиса вант, параллельных осям x и y гиперболического параболоида; x, y, z — декартовы координаты; a и b — полуоси контурного эллипса. Форма исследуемой оболочки описывается уравнением [10]: $z = 15,5 + \frac{1}{200} \cdot x^2 - \frac{1}{800} \cdot y^2$.

Отношение погонного распора рабочих вант к погонному распору стягивающих — 1,17 [10]. Это отношение возникло при рассмотрении опорного контура в виде эллипса, так как опорный контур депланирован и расположен в разных уровнях. В плане же опорный контур имеет форму круга. Оценим с точки зрения СП 387.1325800.2018 [8] расчетную нагрузку на покрытие данной формы по ф. 13.28:

H_x (погонный распор рабочих вант) $= \dfrac{(q+p)\cdot a^2}{2\cdot f_x}$;

H_y (погонный распор стягивающих вант) $= \dfrac{p\cdot b^2}{2\cdot f_y}$);

Также $H_y = \dfrac{168\,\text{т}}{2{,}4\,\text{м}} = 70\dfrac{\text{т}}{\text{м}}$ (2,4 м — расстояние между вантами).

При рассмотрении опорного контура в виде круга: $\dfrac{H_x}{H_y} = 1;$ после уточнения и рассмотрения его в виде эллипса: $\dfrac{H_x}{H_y} = 1{,}17.$

Отсюда:

$$p = \frac{H_y \cdot 2 \cdot f_y}{b^2} = \frac{70\cdot 2}{800} = 0{,}175\frac{\text{т}}{\text{м}^2};$$

$$q = \left(1{,}17\cdot\frac{b^2}{f_y}\cdot\frac{f_x}{a^2} - 1\right)\cdot p = (1{,}17\cdot 800\cdot\frac{1}{200} - 1)\cdot 0{,}175 = 0{,}644\frac{\text{т}}{\text{м}^2}.$$

Оценим составленную расчетную модель на проектные расчетные значения нагрузок. Учитываем потерю преднапряжения 5 %. Назначим две стадии нелинейного расчета: 1 — натяжение вантовой сети с собственным весом покрытия (оценка деформаций); 2 — приложение расчетной нагрузки со значением 644 *кгс/м*^{2} (оценка прочности) при отношении распоров 1,17.

1 стадия. Результаты расчета на собственный вес.

На рис. 1 представлены вертикальные перемещения оболочки. Перемещения по оси z (86,2 мм) согласуются с результатами, изложенными в пояснительной записке (86 мм) [10]. На рис. 2 показаны величины нормальных напряжений N_y (аналогично получено распределение нормальных напряжений N_x и касательных τ_{xy}, *МПа*). Как видно из рис. 2, нормальные напряжения по N_y — сжимающие (напряжения N_x также сжимающие), следовательно оболочка обжата по 2 направлениям.

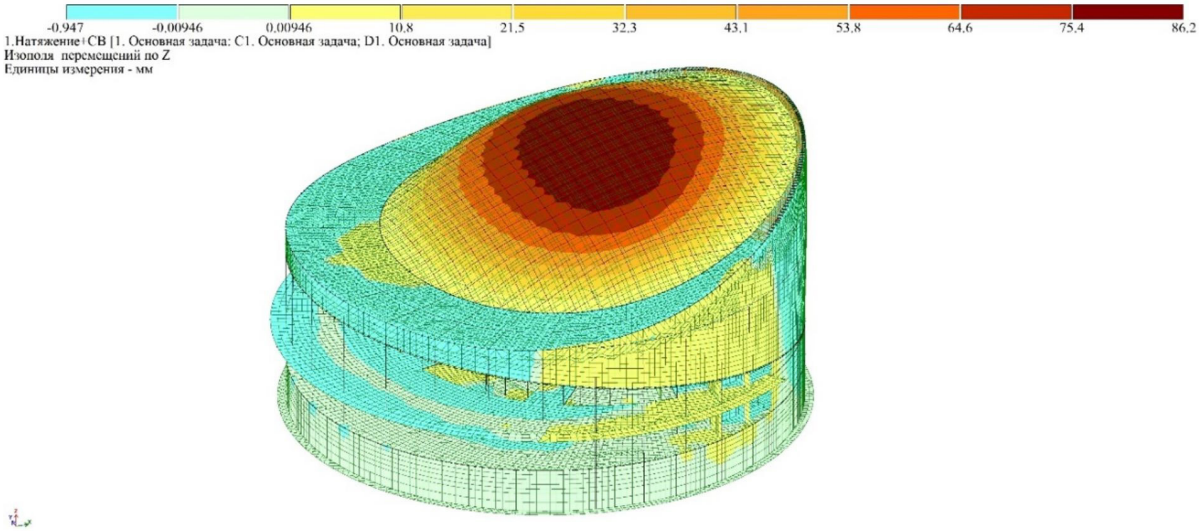


Рис. 1. Перемещения оболочки по оси z (вертикальные)

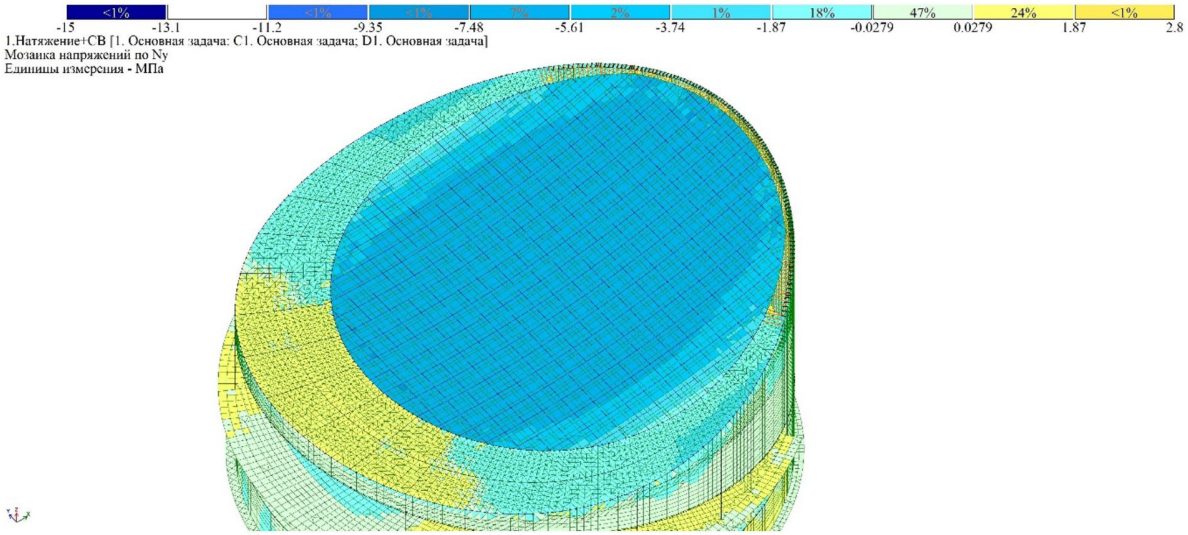


Рис. 2. Напряжения N_y (МПа)

2 стадия. Приложение расчетной нагрузки со значением 644 *кгс/м*^{2}.

На рис. 3–4 показаны величины нормальных напряжений N_x и N_y соответственно, которые остаются сжимающими, следовательно обжатие сохраняется по 2 направлениям (аналогично получено распределение касательных τ_{xy}, *МПа*).

Прочность оболочки (рис. 5) на действие расчетной нагрузки при учете формы опорного контура в виде эллипса с заданным преднапряжением (при учете потери преднапряжения 5 %) обеспечена с запасом 8 %. Прочность расчетной модели покрытия на действие проектных нагрузок, полученных по методикам СП для данной формы покрытия и преднатяжения, обеспечена. Рассмотрение эллиптической формы опорного контура по аналитическим формулам согласуется с работой расчетной модели.

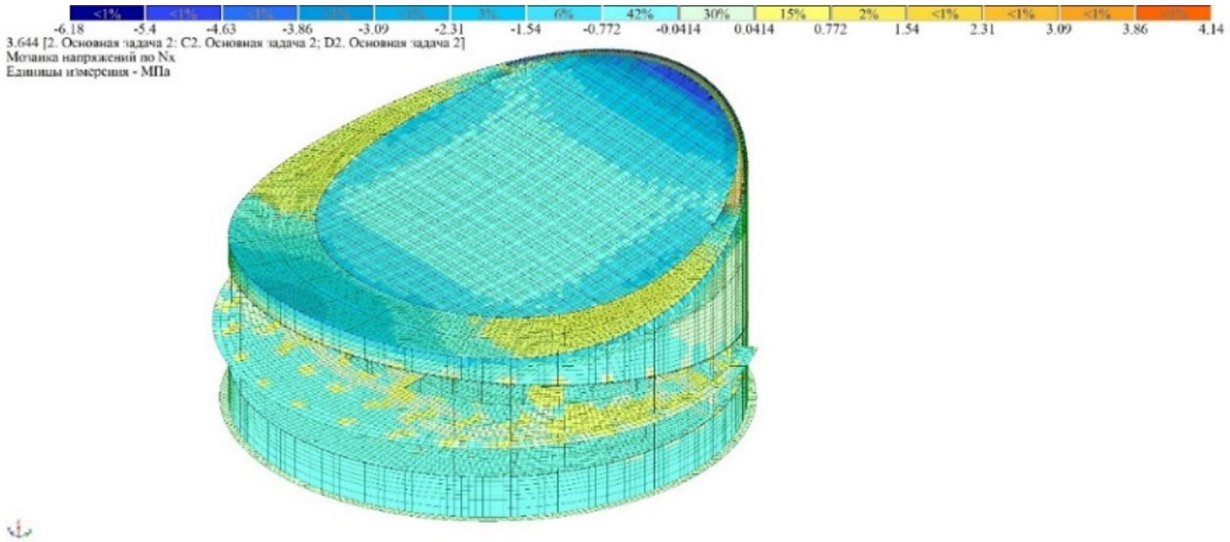


Рис. 3. Напряжения N_x (МПа)

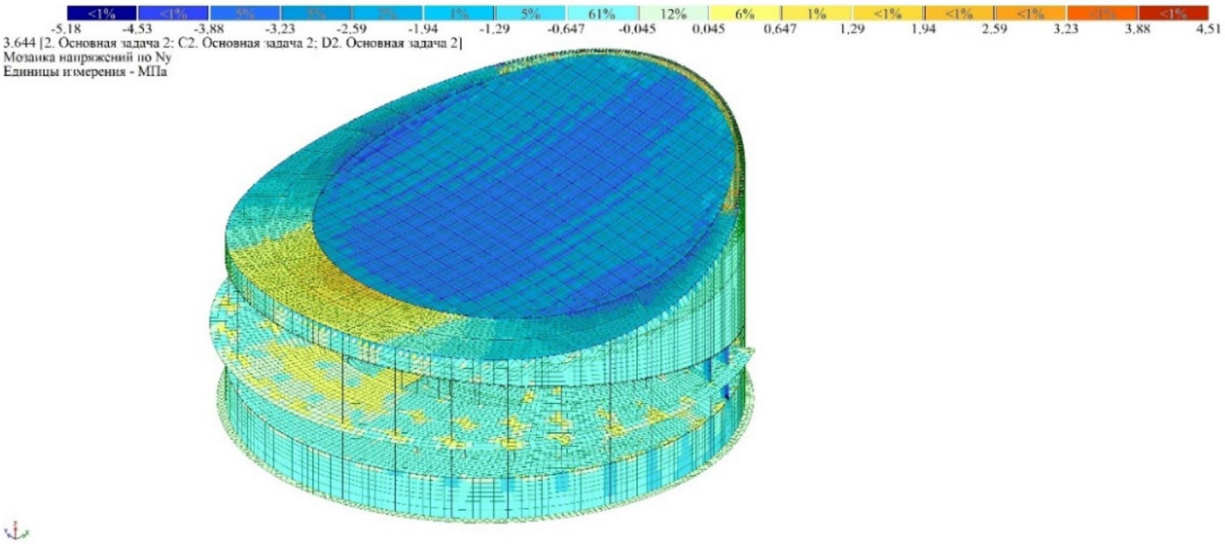


Рис. 4. Напряжения N_y (МПа)

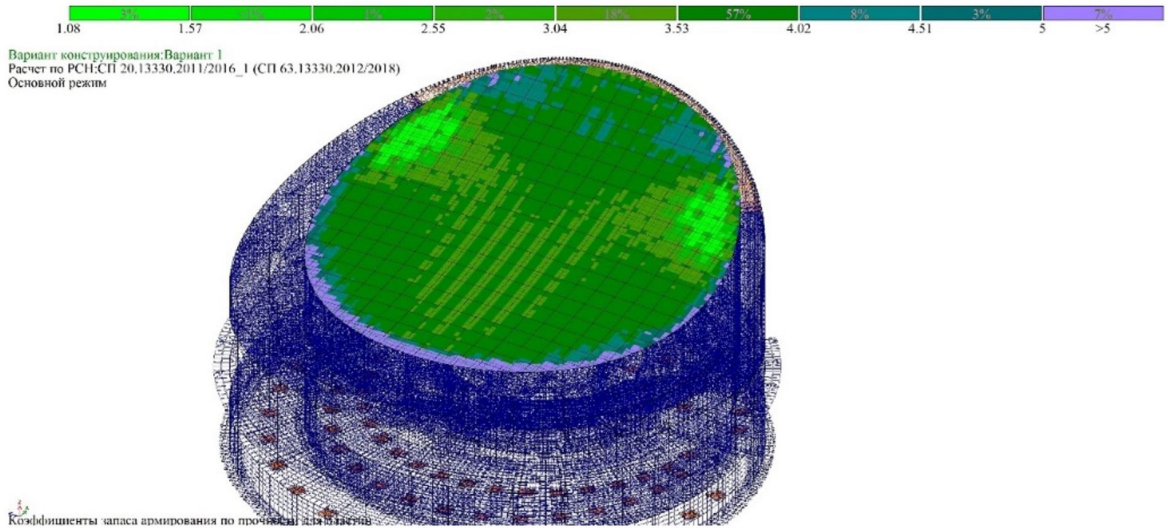


Рис. 5. Проверка прочности оболочки от 2 стадии нагружения

3. Анализ ситуаций локального обрушения

В случае статического метода элемент, несущая способность которого предполагается исчерпанной, статически удалялся из расчетной схемы в последней стадии монтажа, после того как постадийно были приложены все нагрузки и система имела соответствующее НДС.

В случае динамического метода проводился динамический расчет конструкции с удаленным элементом в нелинейной постановке методами прямого интегрирования уравнений динамики во времени в явной постановке с заданными параметрами демпфирования по Рэлею.

1) Рассмотрим внутреннюю колонну с самой большой грузовой площадью.

На основании моделирования монтажных стадий получаем усилия в удаляемой колонне каркаса перед исключением ее из расчетной схемы на последней стадии. Максимальное продольное усилие в колонне от предыстории (одинаковая последовательность нагрузок для динамического и статического удаления сечения элемента) составляет $N_{max} = -1392,64$ *кН*.

Результаты расчета статическим методом представлены на рис. 6.

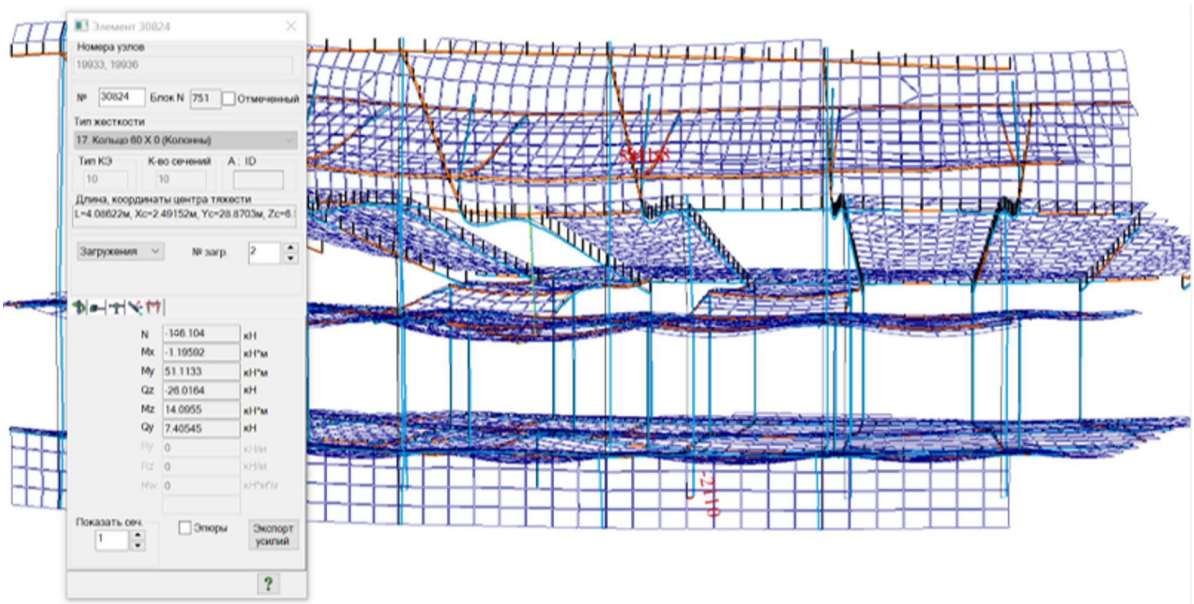


Рис. 6. Продольные усилия в колонне над удаленной после статического демонтажа элементов сечения, кН ($N = -106{,}1$ кН)

Результаты расчета динамическим методом представлены на рис. 7, 8. Усилие в колонне над удаленной при статическом методе расчета на 29 % больше, чем при динамическом методе, однако в обоих случаях остается сжимающей. При этом проверки прочности соблюдаются с большим запасом и в том и другом случае, коэффициенты запаса прочности различаются незначительно.

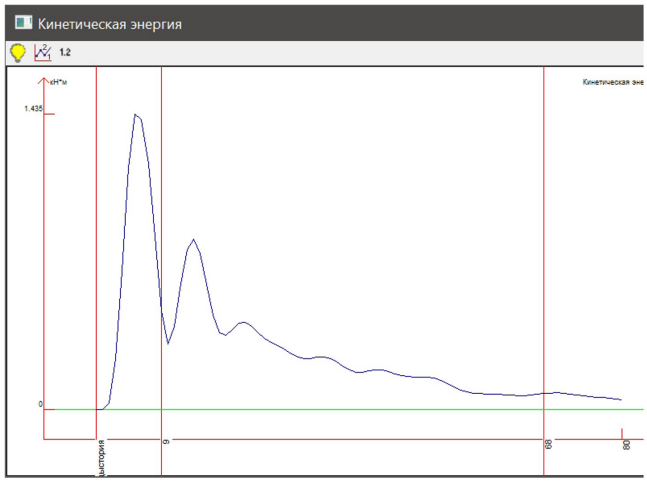


Рис. 7. График изменения кинетической энергии системы во времени

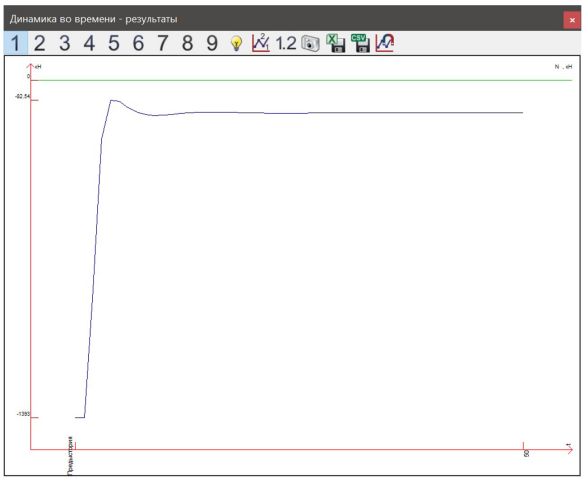


Рис. 8. Продольные усилия в колонне над удаляемой во времени ($N(0{,}03\ c) = -82{,}54$ кН)

2) Рассмотрим удаление одного из канатов центральной ванты.

Максимальное продольное усилие в вантовой сети от предыстории (одинаковая последовательность нагрузок для динамического и статического удаления сечения элемента) составляет $N = 916{,}5$ кН.

При статическом методе расчета максимальное продольное усилие в вантовой сети после статического демонтажа имеет значение $N_{max} = 1317$ кН. При динамическом методе расчета максимальное продольное усилие во времени принимает значение $N_{max}(0{,}10\ c) = 1406$ кН.

Продольное усилие в оставшемся канате при динамическом методе на 7 % превышает усилие при статической постановке задачи.

Картины потери прочности сборных плит покрытия в обоих случаях приблизительно одинаковые (рис. 9). Видим, что в окрестности обрыва одного из канатов ванта, не проходят проверку прочности сборные плиты оболочки. За пределами этой окрестности прочность элементов обеспечена. Усилия в оставшемся канате в обоих случаях не превышают усилия каната на разрыв (приблизительно 2000 *кН* [10]).

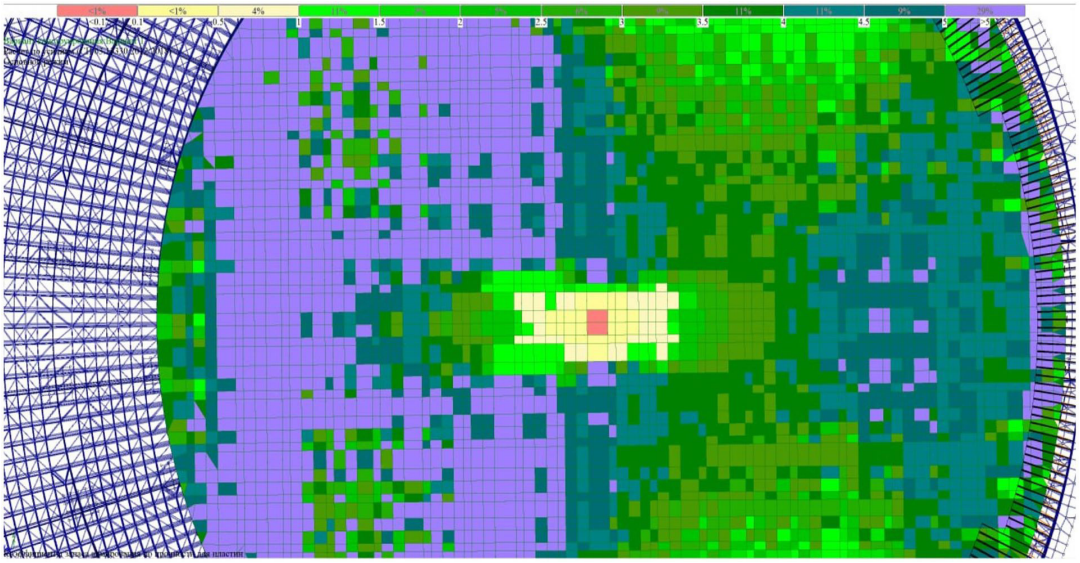


Рис. 9. Проверка прочности пластин в окрестности разрыва каната

Заключение

В работе была предпринята попытка верификации расчетной схемы при анализе ее работы и сравнении с информацией о поведении реального объекта. Сравнение показало близкие результаты перемещений оболочки в процессе отпуска оттяжек и ее обжатия. Стадийность монтажа, учтенная в расчете, согласуется со схемой работы реальной оболочки как в стадии обжатия, так и в эксплуатационной. Моделирование особенностей поэтапного отпуска оттяжек и не набора бетоном проектной прочности позволило добиться адекватной работы конструкции.

Рассмотрены расхождения в значениях продольных сил как для колонны, так и для каната при моделировании отказа элементов статическим и динамическим методами. Расхождения можно объяснить следующим образом: в жестких и многосвязных системах, таких как каркас здания, влияние диссипации колебательной энергии и перераспределение внутренних усилий, учитываемые динамическим процессом, позволяют более точно оценить эффективность работы конструкций и обнаружить большую прочность. В пространственных менее жестких системах, таких как висячее покрытие, учет динамических эффектов важен, так как может обнаружить менее выгодное НДС конструкции, чем статический метод.

По результатам расчета покрытия объекта можно сделать вывод о том, что для определенных зданий и сооружений, их отдельных конструкций, в частности для висячих систем, динамический нелинейный расчет имеет приоритетное значение.

Литература

1. *Шумилов К. А., Гурьева Ю. А.* Применение Grasshopper, Rhino, Archicad для моделирования различных форм архитектурных объектов, содержащих элементы сложной геометрии //

Инженерно-строительный вестник Прикаспия: научно-технический журнал. – 2022. – № 3 (41). – С. 92–95.

2. *Рогожников П. С.* GDL-проектирование моделей на основе программного комплекса Rhinoceros и Grasshopper // Сборник трудов Международной научно-технической конференции молодых ученых БГТУ им. В.Г. Шухова. – Белгород, 2019. – С. 1032–1035.

3. *Долганов А. И.* Об учете прогрессирующего разрушения при проектировании // Надежность. – 2020. – № 1. – С. 20–24.

4. *Ведяков И. И., Еремеев П. Г., Одесский П. Д., Попов Н. А., Соловьев Д. В.* Расчет строительных конструкций на прогрессирующее обрушение: нормативные требования // Промышленное и гражданское строительство. – 2019. – № 4. – С. 16–24.

5. *Савин С. Ю., Федорова Н. В.* Сопоставление методов расчета несущей системы на внезапный отказ одного из ее элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2022. –Т. 18, № 4. – С. 329–340.

6. *Belostotsky A. M., Karpenko N. I., Akimov P. I., Sidorov V. N., Karpenko S. N., Petrov A. N., Kaytukov T. B., Kharitonov V. A.* About development of methods of analysis and assessment of vulnerability of spatial plate-shell reinforced concrete structures with allowance for physical non-linearities, crack formation and induced anisotropy // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol. 14, No 2. – P. 30–47.

7. *Еремеев П. Г.* Методы проектирования на прогрессирующее обрушение: гармонизация российских и международных нормативных документов // Промышленное и гражданское строительство. – 2022. – № 4. – С. 23–28.

8. СП 387.1325800.2018 «Железобетонные пространственные конструкции покрытий и перекрытий. Правила проектирования».

9. СП 385.1325800.2018 «Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. Правила проектирования. Основные положения».

10. Пояснительная записка по монтажу висячей оболочки цирка в г. Новосибирске. Министерство культуры СССР. Государственный проектный институт «ГИПРОТЕАТР», 1967 г.

УДК 519.82

СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ В РОССИИ

М. В. Глуховский

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрено понятие системы поддержки принятия решений и основные понятия временных рядов. Была решена практическая задача кластеризации городов России по темпу роста населения с помощью методов машинного обучения, а также специальных алгоритмов для трендовых моделей на языке программирования Python.
Ключевые слова: система поддержки принятия решений, временные ряды, трендовые модели, машинное обучение, Python, демография, кластеризация, метод k-средних, линейная регрессия, ARIMA.

Введение

Современная демографическая ситуация в России является одной из ключевых проблем, требующих серьезного внимания и комплексного анализа. Население страны стареет, рождаемость снижается, миграционные процессы оказывают влияние на структуру населения. Для эффективного управления демографическими процессами необходима система поддержки принятия решений, способная анализировать данные, выявлять тенденции и предлагать методы их улучшения.

Таким образом, работа направлена на создание системы поддержки принятия решений для анализа и улучшения демографической ситуации в России с использованием современных методов анализа данных и моделирования. Результаты и выводы исследования могут иметь практическое значение для различных сфер деятельности и способствовать развитию стратегий по улучшению демографической ситуации в стране.

1. Понятие системы поддержки принятия решений

Системы поддержки принятия решений (СППР) представляют собой комплексные инструменты, предназначенные для анализа данных, выработки альтернативных вариантов и оценки возможных последствий для принятия обоснованных решений [1]. Они играют важную роль в различных областях, включая бизнес, науку, здравоохранение, государственное управление и другие. СППР объединяют в себе методы математического моделирования, статистического анализа, экспертных оценок и другие техники для обеспечения информационной поддержки процесса принятия решений.

Основные компоненты СППР:

– база данных: центральным элементом СППР является база данных, содержащая информацию о предметной области, исторические данные, статистику и другие сведения, необходимые для анализа;

– моделирование и анализ: СППР используют различные математические модели, статистические методы и алгоритмы для анализа данных и прогнозирования последствий различных решений;

– интерфейс пользователя: важным компонентом является удобный интерфейс, позволяющий пользователям взаимодействовать с системой, вводить данные, настраивать параметры анализа и визуализировать результаты;

– экспертная система: некоторые СППР содержат экспертные системы, которые используют знания специалистов для автоматического анализа ситуации и предложения наилучших вариантов действий.

2. Временные ряды и трендовые модели

Так как при создании системы планируется анализировать данные о населении городов России в разные года, то стоит отдельно рассмотреть понятие временного ряда.

Временной ряд представляет собой числовую последовательность, отражающую изменение явления во времени [2].

Тенденция — некоторое общее направление развития. Тенденцию ряда динамики представляют в виде гладкой кривой (траектории), которая аналитически выражается некоторой функцией времени, называемой трендом. Тренд характеризует основную закономерность движения во времени, свободную в основном, но не полностью, от случайных воздействий [3].

В зависимости от вида функции различают следующие основные формы тренда:

– линейная:

$$y = at + b,$$

где y — уровни, освобожденные от колебаний, выровненные по прямой, b — начальный уровень тренда в момент или период, принятый за начало отсчета времени, a — среднегодовой абсолютный прирост (среднее изменение за единицу времени t).

Линейный тренд хорошо отражает тенденцию изменений при действии множества разнообразных факторов, изменяющихся различным образом по разным закономерностям. Равнодействующая этих факторов при взаимном погашении особенностей отдельных факторов (ускорение, замедление, нелинейность) часто выражается в примерно постоянной абсолютной скорости изменения, т. е. в прямолинейном тренде.

– параболическая:

$$y = a + bt + ct^2,$$

где c — квадратический параметр, равный 0,5 ускорения.

Параболический тренд выражает ускоренное или замедленное изменение уровней ряда с постоянным ускорением. Такой характер развития можно ожидать при наличии важных факторов прогрессивного (регрессивного) развития.

– экспоненциальная:

$$y = a \cdot e^k,$$

где k — темп роста изменения в разах, e — константа тренда.

Если $k > 1,$ экспоненциальный тренд выражает тенденцию ускоренного и все более ускоряющегося возрастания уровней. При росте по экспоненте абсолютный прирост пропорционален достигнутому уровню. Так росло население Земли в эпоху «демографического взрыва» в XX столетии.

При $k < 1$ экспоненциальный тренд означает тенденцию постоянно все более замедляющегося роста уровней динамического ряда.

– логарифмическая:

$$y = a + b \log t,$$

Логарифмический тренд пригоден для отображения тенденции замедляющегося роста уровней при отсутствии предельного возможного значения.

Моделирование временных рядов является важным инструментом для прогнозирования будущих значений ряда, что позволяет принимать более обоснованные решения в различных областях.

Авторегрессионные модели (AR-модели) используют прошлые значения ряда для прогнозирования его будущих значений. Эта модель предполагает, что текущее значение ряда зависит от его предыдущих значений.

Следующий метод моделирования временных рядов — ***скользящее среднее (MA-модели)***. Эта модель использует прошлые значения ошибок — разницу между фактическими значениями ряда и его прогнозируемыми значениями, для прогнозирования будущих значений.

ARIMA — это модель, комбинирующая авторегрессионные и скользящие средние модели. ARIMA позволяет моделировать данные, не являющиеся стационарными, как это не требуется для AR- и MA-моделей.

3. Подготовка данных и обучение моделей

Постановка задачи:

По данным о населении городов России (1994–2023 гг.) оценить демографическую ситуацию в конкретных городах, кластеризовать их по темпу роста населения и предложить способы улучшения ситуации с помощью языка программирования Python.

Решение:

Имеется таблица, содержащая информацию о численности населения городов в период с 1994 по 2023 г. Часть исходных данных представлена на рис. 1:

Город	Год	Численность населения
Абакан	1994	155224.0
Альметьевск	1994	130980.0
Ангарск	1994	268455.0
Арзамас	1994	110123.0
Армавир	1994	171678.0
...	...	...
Элиста	2023	102618.0
Энгельс	2023	225731.0
Южно-Сахалинск	2023	200854.0
Якутск	2023	318768.0
Ярославль	2023	609828.0

Рис. 1. Исходные данные

Начнем с подготовки данных [4].

Заметим, что про Симферополь, Севастополь, Евпаторию и Керчь данных очень мало — только с 2015 года, так что исключим их из рассмотрения.

Нормализируем столбец «численность населения», используя метод Z-нормализации.

Перейдем к построению моделей [5].

Разделим данные на тренировочные и тестовые, выделив на последние 15 % от всех данных, и построим линейную регрессию, трендовую экспоненциальную модель и модель ARIMA, так как они являются наиболее подходящими для решения данной задачи.

На рис. 2–4 изображены результаты прогнозирования всех трех моделей, а также реальные значения целевой переменной (численности населения) для Воронежа, Москвы и Барнаула в качестве примера:

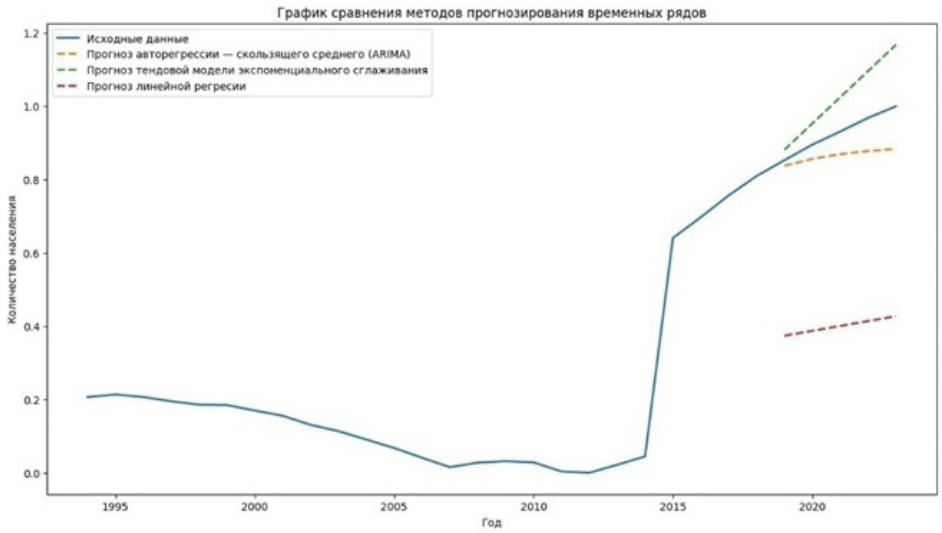


Рис. 2. Воронеж

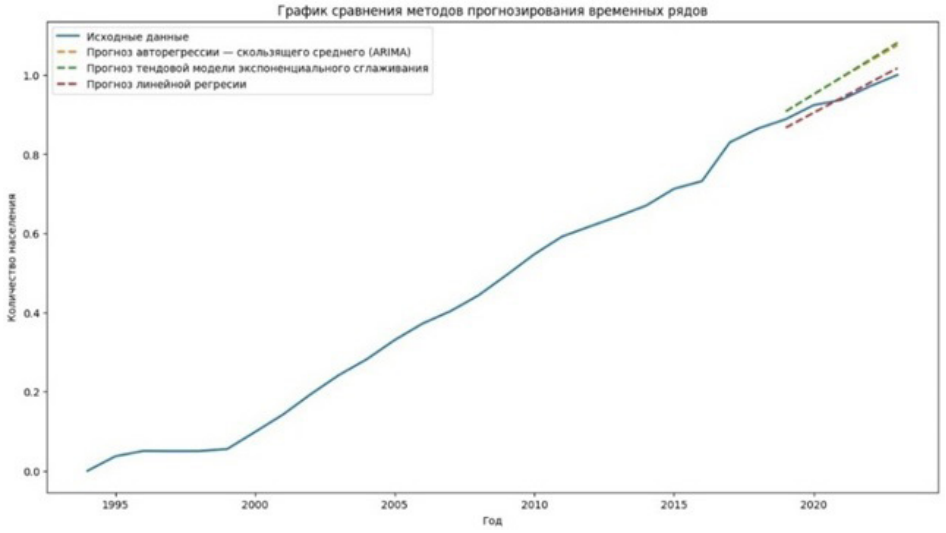


Рис. 3. Москва

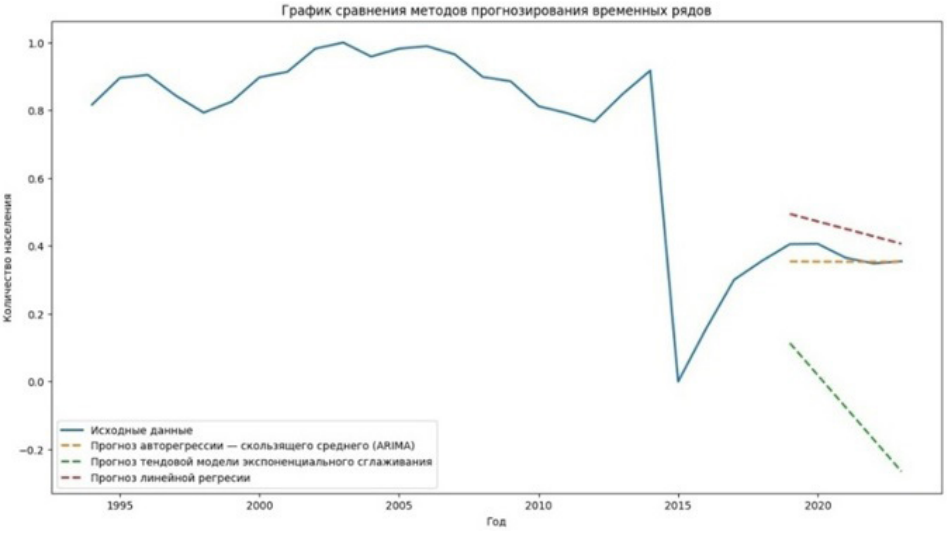


Рис. 4. Барнаул

Оценим качество построенных моделей с помощью метрик MSA, RMSA и MAE (рис. 5) [8]:

Город	Метод	MSE	RMSE	MAE
Абакан	ARIMA	0.001502	0.038759	0.034407
Абакан	ExponentialSmoothing	0.001671	0.040873	0.030207
Абакан	LinearRegression	0.119734	0.346026	0.334046
Альметьевск	ARIMA	0.008658	0.093047	0.081497
Альметьевск	ExponentialSmoothing	0.007664	0.087545	0.076583
...	...	...	...	...
Ярославль	ExponentialSmoothing	0.015320	0.123773	0.107144
Ярославль	LinearRegression	0.371202	0.609263	0.598474
Грозный	ARIMA	0.027897	0.167024	0.149869
Грозный	ExponentialSmoothing	0.006046	0.077757	0.073010
Грозный	LinearRegression	0.017776	0.133326	0.126315

Рис. 5. Оценка качества построенных моделей

Для 97 городов наилучший результат показала модель ARIMA, для 73 городов – трендовая экспоненциальная модель, а для 14 городов — линейная регрессия. Так как ARIMA показала наилучший результат в большинстве городов, в дальнейшем будем рассматривать её.

4. Разбиение городов на кластеры

Перейдем к кластеризации. Для начала определим оптимальное количество кластеров с помощью метода «локтя» (рис. 6):

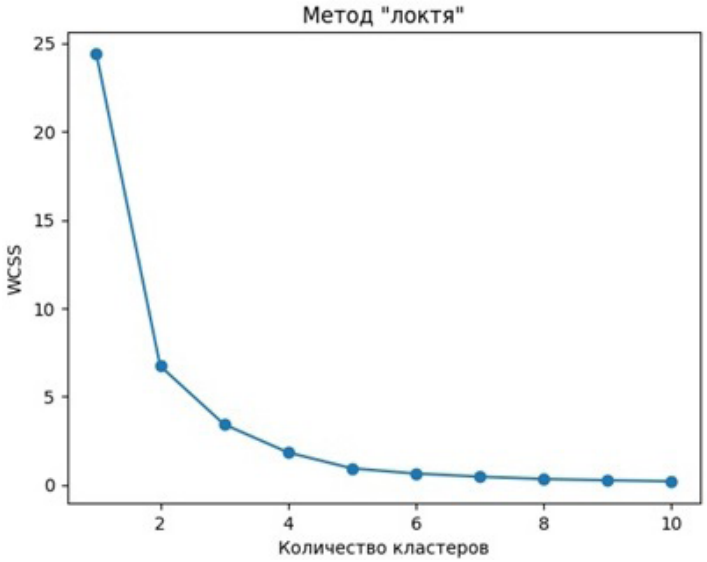


Рис. 6. Метод локтя

Начиная с 5, сумма квадратов внутрикластерных расстояний до центра кластера перестает резко убывать, поэтому будем разбивать города на 5 кластеров. Для этого воспользуемся методом k-средних [6]:

1) выбираем число кластеров k;

2) выбираем k случайных значений, эти точки будут работать как центроиды кластеров;

3) создаем кластеры, для этого измеряем расстояние между каждым значением наших данных до каждого из центроидов по формуле (в двумерном пространстве):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

где $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — координаты точек, между которыми вычисляется расстояние, а затем добавляем его к наиболее близкому кластеру;

4) вычисляем новый центроид каждого кластера как среднее арифметическое абсцисс всех точек, попавших в данный кластер, и среднее арифметическое ординат этих точек;

5) оцениваем качество каждого кластера, вычисляя величину Within-Clustersumofsquares (WCSS) — сумму квадратов внутрикластерных расстояний до центра кластера:

$$WCSS = \sum_{j=1}^{k} \sum_{x_i \in j} d(x_i; \overline{x}_j)^2,$$

где j — номер кластера, x_i — точки, принадлежащие кластеру j, $\overline{x}_j$ — центроид кластера j;

6) повторяем шаги 3–5 относительно новых центроидов, пока кластеры не перестанут меняться.

Автором метода k-средних является Карол Бездек, благодаря которому нечеткая кластеризация и получила широкое применение. Нечеткие методы кластеризации позволяют одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким (или даже всем) кластерам, но с различной степенью принадлежности [7]. Нечеткая кластеризация во многих ситуациях более «естественна», чем четкая, например, для объектов, расположенных на границе кластеров.

Получим следующее разбиение (рис. 7):

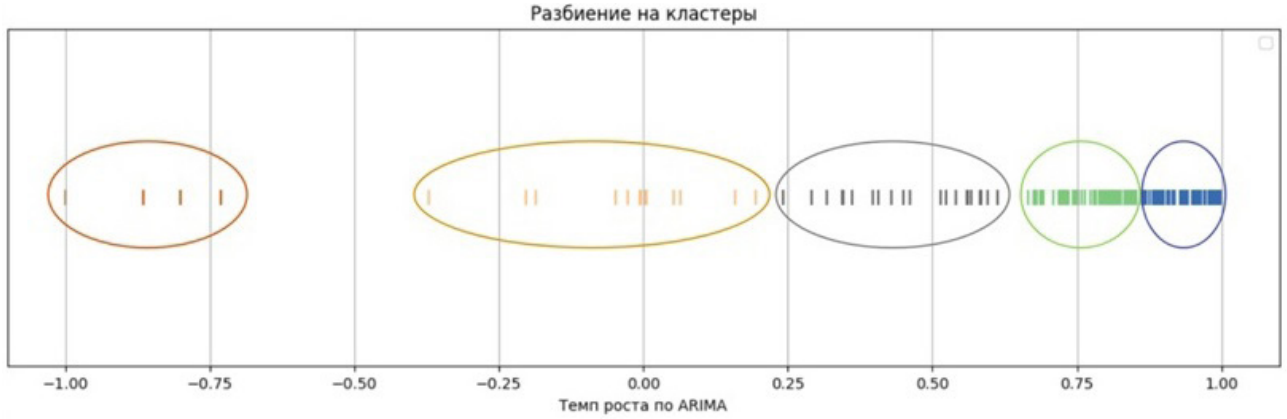


Рис. 7. Разбиение на кластеры

В первый кластер с наименьшим темпом роста населения попало всего 4 города: Междуреченск, Салават, Майкоп и Кемерово.

Во второй кластер попало 15 городов, в том числе, Великий Новгород, Омск и Тула.

В третий кластер попало 22 города, в том числе, Волгоград, Рязань и Петрозаводск.

В четвертый кластер попало 52 города, в том числе, Воронеж, Магадан и Тверь.

И в пятый кластер с самым большим темпом роста попал 91 город.

Самыми быстро растущими городами оказались Екатеринбург, Стерлитамак и Дербент.

Стоит отметить, что в пятый кластер попало очень много городов из Подмосковья, что может быть обусловлено тем, что качество жизни (медицина, транспорт, возможность получить хорошее образование и посетить культурные мероприятия) не сильно уступает московскому, и многие готовы тратить ежедневно время на поездку в столицу, экономя на жилье.

После проведенного анализа выявились определенные проблемы, приводящие к ухудшению демографической ситуации, и соответствующие пути их решения:

– вложение средств в медицину;
– проведение культурных мероприятий;
– увеличение рабочих мест;
– проведение мероприятий по улучшению экологической ситуации.

За счет перераспределения государственного бюджета таким образом, чтобы больше средств уходило на города из пятого кластера, а точнее на вышеперечисленные пути решения проблем, есть возможность улучшить демографическую ситуацию в отстающих городах.

Заключение

В ходе работы была разработана система поддержки принятия решений для определения демографической ситуации в городах России. Анализ получившейся кластеризации позволил определить основные проблемы и пути их решения, что может быть использовано при перераспределении государственного бюджета.

Литература

1. *Сизова О. В.* Системы поддержки принятия решений: учебное пособие / О.В. Сизова. – Иваново: Ивановский государственный химико-технологический университет, 2017. – 61 с.

2. *Кизбикенов К. О.* Прогнозирование и временные ряды: учебное пособие / К. О. Кизбикенов. – Барнаул : АлтГПУ, 2017. – 115 с.

3. *Артамонов Н. В.* Введение в анализ временных рядов: учебное пособие для вузов / Н. В. Артамонов, Е. А. Ивин, А. Н. Курбацкий, Д. Фантаццини; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, Кафедра эконометрики и математических методов экономики. – Вологда : ВолНЦ РАН, 2021. – 134 с.

4. Глуховский М. В. Машинное обучение в прогнозировании / М. В. Глуховский, Л. А. Смирнова // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Мужвузовской научной конференции молодых ученых, студентов и школьников (Воронеж, 24–25 апреля 2024 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2024. – С. 150–157.

5. *Сапрыкин О. Н.* Интеллектуальный анализ данных: учебное пособие / О. Н. Сапрыкин. – Самара : Издательство Самарского университета, 2020. – 80 с.

6. *Барсегян А. А.* Методы анализа данных: OLAP и Data Mining / А. А. Барсегян, М. С. Куприянов, В. В. Степаненко, И. И. Холод. – Санкт-Петербург : БВХ-Петербург, 2004. – 336 с.

7. *Глуховский М. В.* Нечеткое моделирование в среде Matlab / М. В. Глуховский, Е. М. Аристова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции (Воронеж, 4–6 декабря 2023 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2023. – С. 401–407.

8. Метрики качества линейных регрессионных моделей. Loginom. – URL: https://loginom.ru/blog/quality-metrics (дата обращения: 30.09.2024).

УДК 519.6

ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ОТ ВЕЛИЧИНЫ ШАГА ПРИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Т. Н. Глушакова, И. А. Меркулов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье приведены зависимости, связывающие коэффициенты кубического сплайна при экстраполяции на шаги длины 1 и 2 статистических данных.
Ключевые слова: интерполяционные сплайны, экстраполяция, прогнозирование.

Введение

Общепринято, что полиномиальные сплайны применяются для интерполяции дискретных значений внутри заданного интервала. Однако в последнее время всё чаще стали появляться работы [1–6], в которых сплайны используются для прогнозирования значений на 1–2 шага, показывая при этом неплохие результаты. При экстраполяции сплайнами статистических данных по ДТП для разных значений шагов были выявлены интересные зависимости, которые и будут описаны в данной статье.

Постановка задачи и основные результаты

Кратко опишем построение кубического сплайна.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана таблица значений

$x_0 = a$	x_1	x_2	…	$x_n = b$
y_0	y_1	y_2	…	y_n

с равномерной сеткой $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ h = x_i - x_{i-1}\ \ (i = 1,\ldots,n)$ — шаг сетки.

Рассмотрим частичный отрезок $[x_{i-1}, x_i]\ \ (i = 1,\ldots,n)$ и построим на нем кубический сплайн $S_i(x)$ с краевыми условиями $S''(a) = S''(b) = 0.$ Запишем его в виде

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \quad (i = 1,\ldots,n).$$

где $a_i = y_i,\ \ b_i = \frac{c_i}{2}h - \frac{d_i}{6}h^2 + \frac{y_i - y_{i-1}}{h},\ \ d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h}\ \ (c_0 = 0).$

Коэффициенты c_i находятся как решение системы

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{i-1}\,h + 4\,c_i\,h + c_{i+1}\,h = F_i \quad (i = 1,\ldots,n-1) \\ c_n = 0 \end{cases}$$

с $F_i = 6 \cdot \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h}\ \ (i = 1,\ldots,n-1).$

Рассмотрим статистические данные по ДТП (в тыс.) в России, представленные в табл. 1.

В [5] показано, что при экстраполяции табличных значений с 2000 года по 2022 год на шаг $h = 1$ все прогнозируемые значения, при отбрасывании по одному году слева, в 2023 году совпадают, что возможно лишь в случае, когда в последней точке $x_n = b$ отрезка $[a,b]$ величина $b_n + \frac{d_n}{6}$ постоянна.

Таблица 1

Количество ДТП и погибших в них с 2000 по 2023 год

Год	Количество ДТП	Количество погибших
2000	157.5	29.6
2001	164.4	30.9
2002	184.4	33.2
2003	204.3	35.6
2004	208.6	34.5
2005	223.3	33.9
2006	229.1	32.7
2007	233.8	33.3
2008	218.3	29.9
2009	203.6	26.1
2010	199.4	26.6
2011	199.9	27.9
2012	203.6	27.9
2013	199.4	27.0
2014	199.7	26.9
2015	184.0	23.1
2016	173.7	20.3
2017	169.4	19.1
2018	168.1	18.2
2019	164.4	16.9
2020	145.1	16.2
2021	133.3	14.9
2022	126.7	14.1
2023	132.5	14.5

Рассмотрим теперь экстраполяцию табличных значений на шаг $h = 2$. Для этого уберём из табл. 1 чётные года и оставим нечётные. Полученные значения представлены в табл. 2.

Таблица 2

Количество ДТП и погибших в них с 2001 по 2023 год

Год	Количество ДТП	Количество погибших
2001	164.4	30.9
2003	204.3	35.6
2005	223.3	33.9
2007	233.8	33.3
2009	203.6	26.1
2011	199.9	27.9
2013	199.4	27.0
2015	184.0	23.1
2017	169.4	19.1
2019	164.4	16.9
2021	133.3	14.9
2023	132.5	14.5

Отбрасывая по 2 года слева, в результате экстраполяции получим значения, представленные в табл. 3.

Таблица 3

Прогнозируемые значения на шаг $h = 2$

Годы	Прогноз кол-ва ДТП	Прогноз кол-ва погибших
2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, … , 2021	102.2	12.9
2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, … , 2021	102.2	12.9
2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, … , 2021	102.2	12.9
2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9
2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9
2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9
2013, 2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9
2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9

Из табл. 3 видно, что все прогнозируемые значения совпадают.

Найдём коэффициенты кубического сплайна для последнего частичного отрезка и закономерность, их связывающую. Результаты вычислений запишем в табл. 4.

Таблица 4

Значения коэффициентов для экстраполяции на один шаг для $h = 2$

	b_n	d_n	$2b_n + \frac{4}{3}d_n$
2001–2021	–19.277	5.591	–31.100
2003–2021	–19.277	5.591	–31.100
2005–2021	–19.280	5.594	–31.100
2007–2021	–19.279	5.594	–31.100
2009–2021	–19.260	5.566	–31.100
2011–2021	–19.212	5.494	–31.100
2013–2021	–19.327	5.665	–31.100
2015–2021	–19.964	6.621	–31.100

Рассмотрим теперь прогноз на полшага вперёд для шага $h = 2,$ и полученные результаты занесём в табл. 5.

Таблица 5

Прогнозируемые значения на полшага для $h = 2$

Годы	Прогноз кол-ва ДТП	Прогноз кол-ва погибших
2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010, … , 2022	118.613	13.0787
2002, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, … , 2022	118.613	13.0787
2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, … , 2022	118.613	13.0787
2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, … , 2022	118.612	13.0786
2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018, … , 2022	118.61	13.0781
2010, 2012, 2014, 2016, 2018, 2020, 2022	118.616	13.0791
2012, 2014, 2016, 2018, 2020, 2022	118.676	13.0937
2014, 2016, 2018, 2020, 2022	118.761	13.1019
2016, 2018, 2020, 2022	118.925	13.0339

Из табл. 6 видно, что стабилизация данных начинается с 10 значений.

Заключение

Из всего вышеизложенного следует, что при экстраполяции вперед на один шаг для $h=1$ и $h=2$ достаточно взять всего лишь 4 значения, а для прогнозирования на полшага для $h=2$ нужны как минимум 10.

Литература

1. *Глушакова Т. Н.* Применение сплайнов для экстраполяции скачкообразных кривых / Т. Н. Глушакова, К. П. Лазарев, О. А. Будко // Научный альманах. – 2022, № 2-2(88). – С. 37–46.

2. Сплайн-экстраполяция MathCAD 12 руководство. – Режим доступа: http://radiomaster.ru/ cad/mc12/glava_13/index06.php.

3. *Лабинский А. Ю.* Краткосрочное прогнозирование с помощью сплайн-экстраполяции / А. Ю. Лабинский // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). – 2022. – № 4 (44). – С. 12–19.

4. *Кайбичев И. А.* Рекурсивное прогнозирование сплайнами в среднесрочном прогнозе / И. А. Кайбичев // Пожаровзрывобезопасность. – 2011. – Том 20, № 9. – С. 49–53.

5. *Меркулов И. А.* Об одной интересной особенности экстраполяции кубическими сплайнами / И. А. Меркулов // Математика, информационные технологии, приложения [Электронный ресурс]: межвузовская научная конференция молодых ученых, студентов и школьников. Воронеж, 24–25 апреля 2024 г.

6. *Глушакова Т. Н.* О некоторых интересных результатах при экстраполяции кубическими сплайнами / Т. Н. Глушакова, И. А. Меркулов // Научный альманах. – 2024, № 4-3(114). – С. 79–82.

УДК 519.6

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ РАЗНЫМИ МЕТОДАМИ

Т. Н. Глушакова, И. А. Меркулов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматриваются такие методы прогнозирования, как линейная и параболическая аппроксимации, а также метод сплайн-интерполяции для краткосрочного прогнозирования статистических данных.
Ключевые слова: линейная аппроксимация, параболическая аппроксимация, сплайн-интерполяция.

Введение

В последнее время всё чаще для краткосрочного прогнозирования используются сплайны [1–6]. В данной статье проводится сравнение результатов краткосрочного прогнозирования статистических данных, полученных с применением стандартных методов (линейной и квадратичной аппроксимаций), с нестандартным подходом – экстраполяцией интерполяционным кубическим сплайном.

Постановка задачи и основные результаты

Для анализа результатов краткосрочного прогнозирования возьмём статистические данные о ДТП в России с 2000 по 2023 год, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Официальная статистика ДТП в России

Год	Количество ДТП общее	Количество погибших общее	Количество ДТП в сост. опьянения	Кол-во погибших в ДТП с водителями в сост. опьянения	Кол-во ДТП в темное время суток	Кол-во погибших в ДТП в темное время суток	Кол-во ДТП с наездом на пешехода	Кол-во погибших в ДТП с наездом на пешехода
2000	157.5	29.6						
2001	164.4	30.9						
2002	184.4	33.2						
2003	204.3	35.6						
2004	208.6	34.5						
2005	223.3	33.9						
2006	229.1	32.7						
2007	233.8	33.3						
2008	218.3	29.9						
2009	203.6	26.1						

2010	199.4	26.6						
2011	199.9	27.9						
2012	203.6	27.9						
2013	204.1	27						
2014	199.7	26.9						
2015	184	23.1	15.34	3.753	67.732	11.827	56.886	6.991
2016	173.7	20.3	15.67	4.569	60.430	9.803	52.001	5.786
2017	169.4	19.1	14.97	4.336	60.216	9.466	51.839	5.634
2018	168.1	18.2	15.17	4.296	57.341	8.810	48.814	5.155
2019	164.4	16.9	14.67	4.050	56.894	8.147	47.440	4.783
2020	145.1	16.2	14.48	4.064	50.897	7.888	38.716	4.368
2021	133.3	14.9	11.76	3.411	44.693	6.834	35.666	3.767
2022	126.7	14.1	10.81	3.187	41.434	6.347	34.604	3.529
2023	132.5	14.5	10.602	3.0	42.874	6.3	34.921	3.394

Проведем сравнение прогнозирования кубическими сплайнами с другими известными методами, такими как линейная и квадратичная аппроксимации. Для этого найдём прогнозируемые значения на 2023 год для каждой выборки данных из табл. 1 и построим для них графики кубических сплайнов, линейной и полиномиальной аппроксимации, представленных в табл. 2 и на рис.1–6.

Таблица 2

Сравнение полученных результатов прогнозирования

	Кол-во ДТП (кол-во погибших)	Количество ДТП с водителями, находящимися в состоянии опьянения (кол-во погибших)	Количество ДТП, произошедших в темное время суток (кол-во погибших)	Количество ДТП, повлекших наезд на пешехода (кол-во погибших)
Реальное значение	132.5 (14.5)	10.602 (3.0)	42.874 (6.3)	34.921 (3.394)
Кубический сплайн	120.1 (13.3)	9.86 (2.96)	38.175 (5.86)	33.542 (3.291)
Линейная аппроксимация	157.67 (14.83)	11.22 (3.46)	39.27 (5.55)	30.77 (2.98)
Квадратичная аппроксимация	116.47 (13,23)	10,81 (2,95)	41,23 (6,82)	33,21 (3,21)

Заключение

Исходя из полученных данных в табл. 2 и графиков на рис. 1–8, можно отметить, что в целом экстраполяция кубическими сплайнами на 1 шаг даёт более точный результат, чем линейная и квадратичная аппроксимации.

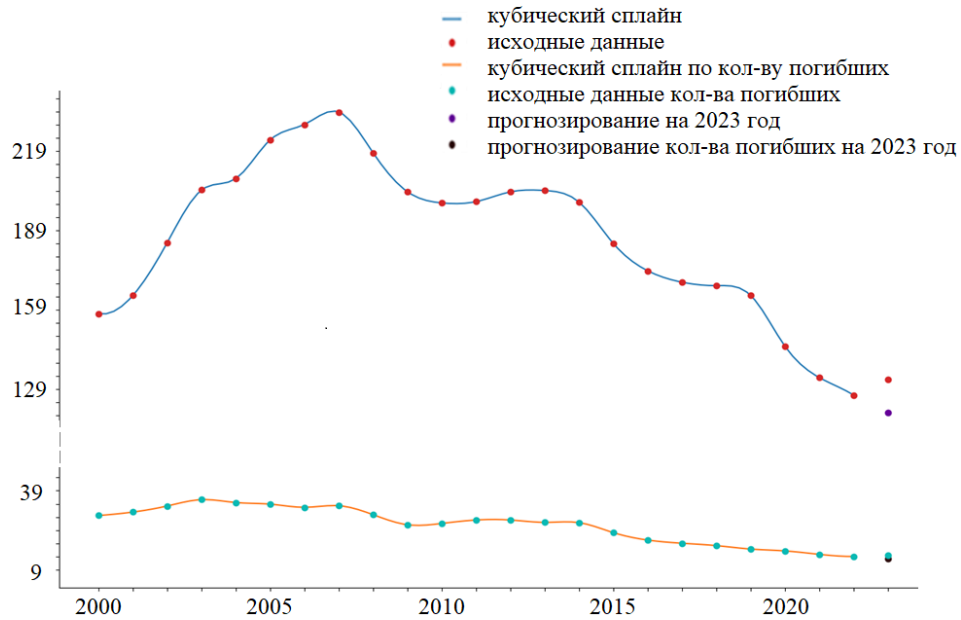


Рис. 1. Кубический сплайн для кол-ва ДТП и погибших в них

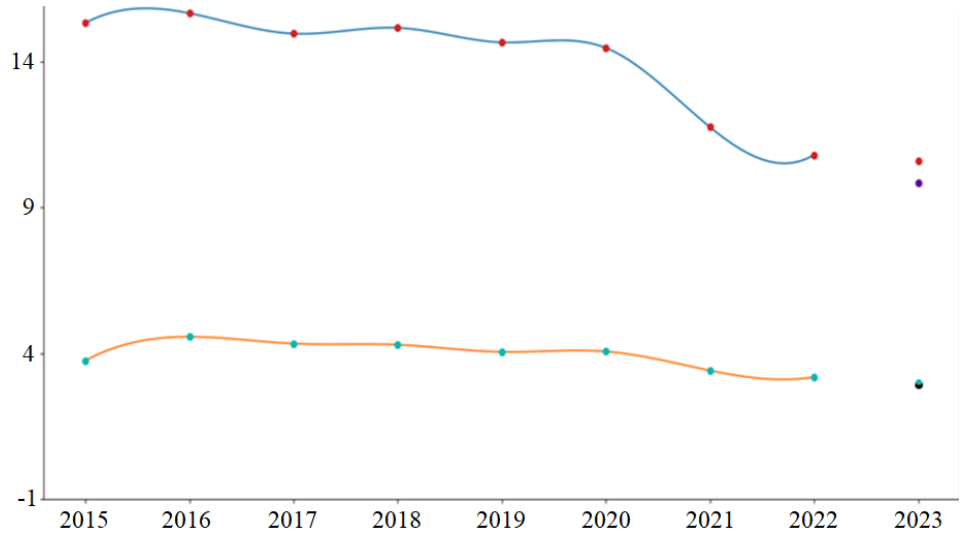


Рис. 2. Кубический сплайн для кол-ва ДТП с водителями, находящимися в состоянии опьянения, и погибших в них

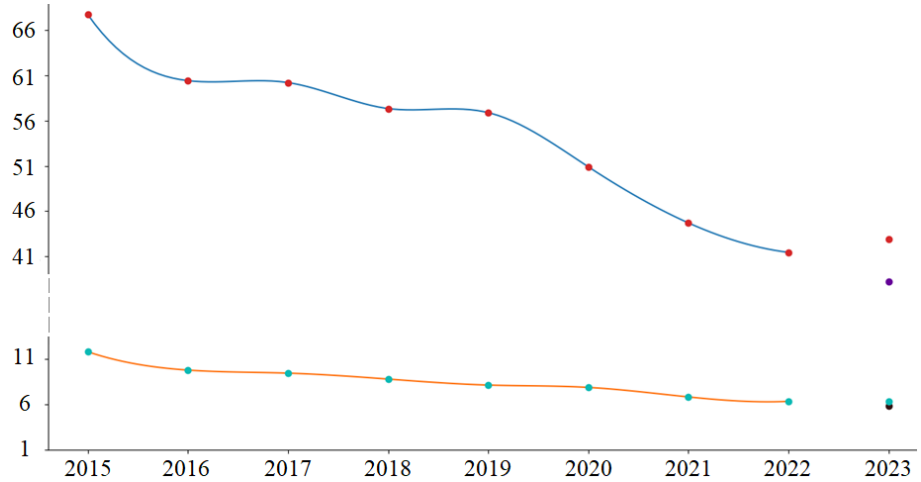


Рис. 3. Кубический сплайн для кол-ва ДТП, произошедших в темное время суток, и погибших в них

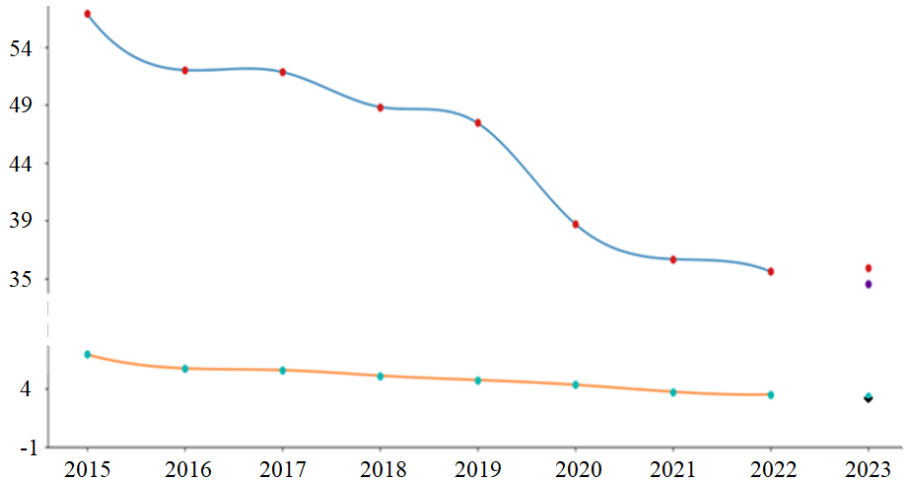


Рис. 4. Кубический сплайн кол-ва ДТП, повлекших наезд на пешехода, и погибших в них

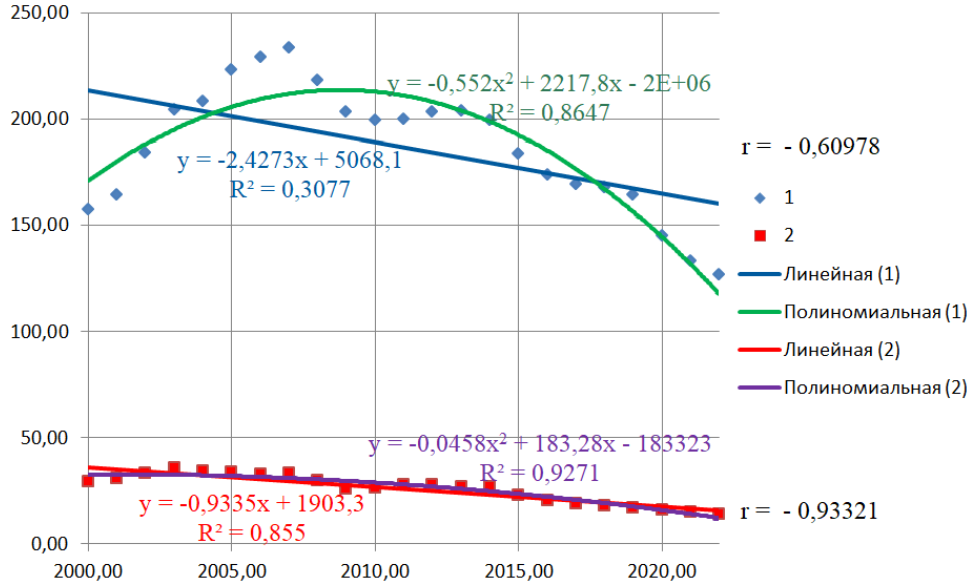


Рис. 5. Графики аппроксимаций для кол-ва ДТП и погибших в них

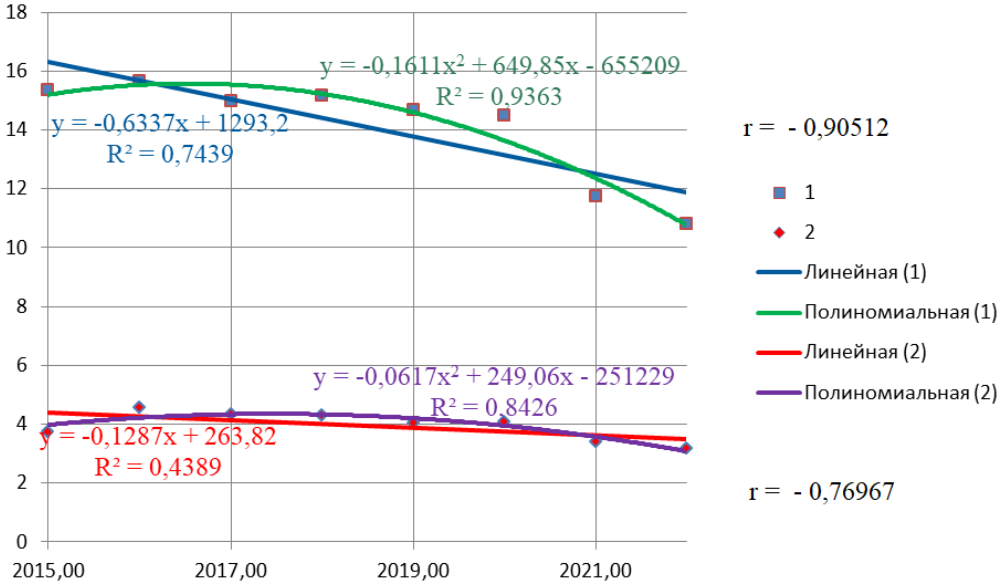


Рис. 6. Графики аппроксимаций для кол-ва ДТП с водителями, находящимися в состоянии опьянения, и погибших в них

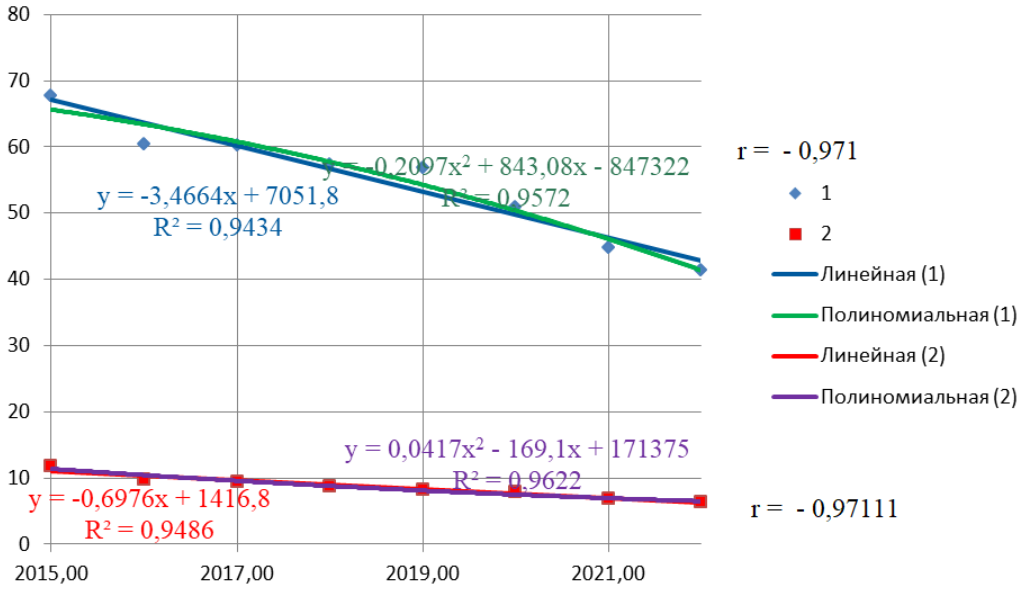


Рис. 7. Графики аппроксимаций для кол-ва ДТП, произошедших в темное время суток, и погибших в них

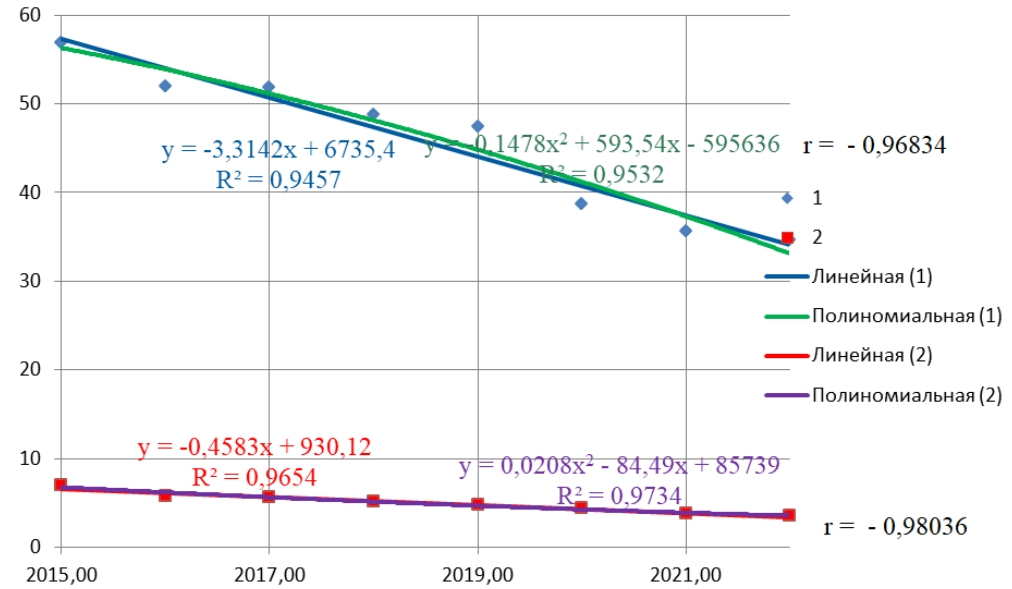


Рис. 8. Графики аппроксимаций для кол-ва ДТП, повлекших наезд на пешехода, и погибших в них

Литература

1. *Глушакова Т. Н.* Применение сплайнов для экстраполяции скачкообразных кривых / Т. Н. Глушакова, К. П. Лазарев, О. А. Будко // Научный альманах. – 2022, № 2-2(88). – С. 37–46.

2. Сплайн-экстраполяция MathCAD 12 руководство. – Режим доступа: http://radiomaster.ru/ cad/mc12/glava_13/index06.php.

3. *Лабинский А. Ю.* Краткосрочное прогнозирование с помощью сплайн-экстраполяции / А. Ю. Лабинский // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). – 2022. – № 4 (44). – С. 12–19.

4. *Кайбичев И. А.* Рекурсивное прогнозирование сплайнами в среднесрочном прогнозе / И. А. Кайбичев // Пожаровзрывобезопасность. – 2011. – Том 20, № 9. – С. 49–53.

5. *Меркулов И. А.* Об одной интересной особенности экстраполяции кубическими сплайнами / И. А. Меркулов // Математика, информационные технологии, приложения [Электрон-

ный ресурс]: межвузовская научная конференция молодых ученых, студентов и школьников. Воронеж, 24-25 апреля 2024 г.

6. *Глушакова Т. Н.* О некоторых интересных результатах при экстраполяции кубическими сплайнами / Т. Н. Глушакова, И. А. Меркулов // Научный альманах. – 2024. – № 4-3(114). – С. 79–82.

УДК 519.246.85

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КАЧЕСТВА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В УСЛОВИЯХ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ЗАМЕНЫ НЕДОСТАЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ

П. Ю. Гусев, А. В. Таволжанский

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В настоящей работе рассматривается проблема замены недостающих значений временных рядов. Приведены теоретические сведения, раскрывающие основные принципы работы различных методов заполнения отсутствующих значений. Данные принципы иллюстрируются примером. Далее, представленные методы, такие как: заполнение последующими и предыдущими значениями, интерполяция, метод ближайших соседей и заполнения последним доступным значением применяются для решения поставленной задачи на реальных данных. Данные представляют собой показания измерительных приборов с электрогенератора. По полученным результатам прогнозов и средней величине среднеквадратичной ошибки делается вывод, предлагаются направления дальнейшего развития темы.

Ключевые слова: предиктивная аналитика, машинное обучение, анализ данных, прогнозирование.

Введение

Временные ряды являются одним из распространенных типов данных в экономике, производстве и многих других областях [1–4].

Отсутствие данных в временных рядах может возникать по разным причинам. Одной из наиболее распространенных причин является техническая неполадка при получении или записи информации на носитель. Например, при сборе данных с помощью датчиков могут возникать сбои в работе оборудования, что приводит к пропуску значений. Кроме того, физические ограничения, такие как ограниченная частота измерений, обусловленная возможностями датчиков, также могут приводить к отсутствию данных в определенных интервалах времени.

Для решения проблемы отсутствия данных в временных рядах существует несколько подходов. Один из наиболее распространенных подходов заключается в удалении строк с отсутствующими данными. Однако этот подход не всегда возможен или желателен. Например, в некоторых случаях удаление строк с отсутствующими данными может привести к потере важной информации о динамике процесса. Кроме того, в некоторых случаях удаление строк может привести к искажению статистических характеристик ряда, что также может повлиять на точность анализа и прогнозирования.

Альтернативным подходом является заполнение пропущенных данных. Существует множество методов заполнения пропущенных данных, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Например, методы интерполяции позволяют заполнить пропущенные значения на основе соседних значений в ряду. Методы моделирования позволяют заполнить пропущенные значения на основе модели, которая описывает динамику процесса.

В данной работе предлагается рассмотреть разные способы замены значений, а также проанализировать их влияние на качество прогноза временных рядов.

1. Теоретические сведения

Заполнение пропущенных значений в исходных данных является актуальной задачей в области обработки данных. Существуют различные методы, позволяющие решить эту пробле-

му [5–7]. В настоящей работе будут рассмотрены методы ffill, bfill, линейной интерполяции (linear), метод ближайших соседей (nearest) и метод последнего доступного значения (pad).

Метод ffill (forward fill) заполняет пропущенные значения предыдущими известными значениями: если значение отсутствует в текущем ряду, оно будет заменено значением из предыдущего ряда.

Метод bfill (backward fill), напротив, заполняет пропущенные значения последующими известными значениями: если значение отсутствует в текущем ряде, оно будет заменено значением из следующего ряда.

Метод (linear) заполняет пропущенные значения, используя линейную интерполяцию между соседними непустыми значениями.

Метод ближайших соседей (nearest). Этот метод заполняет пропущенные значения ближайшим доступным значением. Этот метод прост в реализации, но может привести к неточным результатам, особенно если пропуски расположены близко друг к другу или данные сильно изменяются.

Метод pad заполняет пропущенные значения последним доступным значением. Метод pad также прост в реализации, но может привести к искажениям данных, если пропуски расположены в начале набора данных.

Рассмотрим, как работают методы с помощью следующего примера.

Сначала найдём значение функции $y(x) = x^2$, для значений из столбца x. Далее удалим часть данных и занесём в столбец raw. Затем применим к столбцу ранее перечисленные методы и запишем результаты в табл. 1.

Таблица 1

Результаты работы представленных методов

x	$y(x)$	raw	ffill	bfill	linear	nearest	pad
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	4	4	4	4	4	4
3	9		4	25	11	4	4
4	16		4	25	18	25	4
5	25	25	25	25	25	25	25
6	36		25	49	37	25	25
7	49	49	49	49	49	49	49
8	64		49	100	66	49	49
9	81		49	100	83	100	49
10	100	100	100	100	100	100	100

2. Проведения эксперимента на реальных данных

Проведем исследование точности прогнозирования временных рядов для различных методов заполнения недостающих значений.

В качестве исходных данных будут выступать показания, снятые с измерительных устройств электрогенератора в течение девяти дней [8–10].

В качестве параметров эксперимента определим следующие параметры:

– количество дней для обучения — 1 день;

– шаг дискретизации значений — 5 секунд;

– количество данных для обучения — 10 измерений;

– срок прогнозирования — 500 измерений.

В качестве данных для прогнозирования каждого признака (UID) будет использован информация оставшихся признаков, исключая собственные измерения. Модель для прогноза — модель линейной регрессии. В качестве целевой функции, для оптимизации обучения выбрана среднеквадратичная ошибка (MSE).

Для представления в виде временного ряда исходные данные записываются с определённым шагом дискретизации. В случае отсутствия показания в определённое время, значение остаётся пустым, а далее заполняется согласно определённому методу.

После обучения модели и последующего прогнозирования найдём среднюю величину MSE для каждого метода (табл. 2). В поле count укажем количество исходных измерений. Ячейки с минимальной ошибкой для признака выделим зелёным, а максимальной — красным.

Таблица 2

Результаты исследования на реальных данных

UID	count	ffill	bfill	linear	nearest	pad
1	51290	18,4278	17,7516	12,7986	11,4671	11,8402
2	48481	1,83E–05	2,03E–05	1,68E–04	1,23E–04	9,42E–05
3	44909	0,1402	0,1947	0,2092	0,2202	0,2535
4	43885	3,64E–04	4,41E–04	6,86E–04	6,47E–04	5,93E–04
5	42535	2,86E–04	2,72E–04	4,09E–04	3,64E–04	3,77E–04
6	27898	153,4913	165,1853	107,8104	141,1644	136,2733
7	26939	33,6814	36,8767	26,7942	36,2452	36,2047
8	21954	9,87E–03	1,18E–02	1,64E–02	1,63E–02	1,63E–02
9	10064	1,30E–03	1,01E–03	1,16E–03	1,24E–03	1,50E–03
10	3720	0,2295	0,2071	0,1494	0,1489	0,1484
11	2036	13,3525	12,5334	7,0747	7,0685	6,3150
12	335	411,1501	463,4293	134,1374	126,5519	121,5680

3. Обсуждение результатов

Анализ табл. 2 демонстрирует значительное влияние выбора метода заполнения отсутствующих данных на точность модели. В частности, для признака UID2 удалось на порядок снизить ошибку прогнозирования.

Результаты показывают, что метод nearest является одним из наиболее оптимальных, так как не демонстрирует наихудших значений по сравнению с другими методами.

Для высокочастотных признаков метод ffill продемонстрировал лучшие результаты, в то время как для низкочастотных признаков лучше подходит метод pad.

Данные результаты свидетельствуют о необходимости тщательного выбора метода заполнения пропущенных значений для оптимизации точности модели.

Заключение

Выбор метода замены отсутствующих является важным этапом при работе с временными рядами. Эффективность прогнозирования напрямую зависит от правильного подбора метода, который должен учитывать как характер исходных данных, так и поставленные задачи.

Проведенное исследование демонстрирует важность выбора подходящего метода заполнения пропущенных данных для достижения высокой точности прогнозирования. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации процессов анализа и прогнозирования данных в различных областях.

Особый интерес представляет дальнейший анализ влияния метода заполнения пропущенных данных на точность модели в зависимости от дней, используемых для обучения и тестирования. Дополнительным направлением является изучение влияния отсутствия начальных или конечных значений на результаты моделирования.

Литература

1. *Ковалев В. З.* Анализ методов прогнозирования потребления электрической энергии и мощности / В. З. Ковалев, С. Ю. Швецов, О. В. Архипова // Инженерный вестник Дона. – 2023. – Т. 4, № 100. – С.127–141.

2. *Неизвестный О. Г.* Программа имитационного моделирования системы предиктивного управления процессом дегидрирования этилбензола / О. Г. Неизвестный // Вестник воронежского государственного технического университета. – 2023. – Т. 19, № 6. – С. 32–40.

3. *Shehadeh A.* Machine learning models for predicting the residual value of heavy construction equipment: An evaluation of modified decision tree, LightGBM, and XGBoost regression / A. Shehadeh, O. Alshboul, R. E. Al Mamlook, O. Hamedat // Automation in Construction. – 2021. – Vol. 129, № 2. – P. 103827.

4. *Семаков С. Л.* Простейшая прогнозная модель временного ряда и ее реакция на линейное и параболическое входные воздействия / С. Л. Семаков, И. С. Семаков // Труды МАИ. – 2018. – № 100. – С. 25.

5. *Зангиева И. К.* Сравнение эффективности алгоритмов заполнения пропусков в данных в зависимости от используемого метода анализа / И. К. Зангиева, Е. С. Тимонина // Мониторинг общественного мнения: экономические и социальные перемены. – 2014. – Т. 119, № 1. – С. 41–55.

6. *Фомина Е. Е.* Обзор методов и программного обеспечения для восстановления пропущенных значений в массивах социологических данных / Е. Е. Фомина // Гуманитарный вестник. – 2019. – № 4 (78). – С. 10.

7. *Рыженкова К. В.* Методы восстановления пропуска данных при проведении статистических исследований / К. В. Рыженкова // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2012. – № 3. – С. 127–133.

8. *Таволжанский А. В.* Инструменты предиктивной аналитики / А. В. Таволжанский, П. Ю. Гусев // Сборник научных статей 12-й Международной молодежной научной конференции: в 4 т. – Курск, 2023. – С. 96–99.

9. *Гусев П. Ю.* Алгоритмизация обработки и подготовки данных для построения моделей предиктивной аналитики / П. Ю. Гусев, А. В. Таволжанский // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2024. – Т. 19, № 2. – С. 14–19.

10. *Гусев П. Ю.* Techniques and algorithms for predictive analysis / П. Ю. Гусев, А. В. Таволжанский // Антропоцентрические науки в образовании: вызовы, трансформации, ресурсы. – 2024. – С. 396–400.

УДК 51-7:548.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВИНТОВОЙ ДИСЛОКАЦИИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ, В ДИССИПАТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ

В. В. Дежин

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе изучен вклад малых изгибных колебаний бесконечной винтовой дислокации в дислокационное внутреннее трение. Рассмотрено влияние барьера Пайерлса и упругого взаимодействия с точечными дефектами, расположенными вдоль линии винтовой дислокации. Получено выражение для обобщенной восприимчивости винтовой дислокации в диссипативном кристалле с учетом рассмотренных влияний. Найдены формулы для собственной частоты изгибных колебаний винтовой дислокации и вклада изгибных колебаний в дислокационное внутреннее трение. На примере конкретного кристалла проведен вычислительный эксперимент и построены графики частотной зависимости внутреннего трения.
Ключевые слова: математическое моделирование, винтовая дислокация, изгибные колебания, электронное трение, напряжение Пайерлса, точечные дефекты, обобщенная восприимчивость, собственные колебания, внутреннее трение, вычислительный эксперимент.

Введение

Ранее вклад изгибных колебаний дислокаций в дислокационное внутреннее трение не рассматривался в связи с его малой величиной и трудностью вычисления. Учет изгибных волн выполнен в теории внутреннего трения при рассмотрении колебаний дислокационного сегмента в диссипативном кристалле (модель струны) [1]. Известно, что диссипация энергии при движении дислокаций (внутреннее трение) вызывается динамическим торможением [2], в частности при низких температурах основным механизмом является торможение электронами проводимости [3]. В реальных кристаллах необходимо учитывать влияние барьеров Пайерлса и точечных дефектов на движение дислокаций. Напряжение Пайерлса впервые теоретически исследовано в работах [4, 5] и продолжается в настоящее время [6, 7]. Известно, что дислокации собирают вокруг себя точечные дефекты (атмосфера Котрелла) [8]. Эти точечные дефекты упруго взаимодействуют с дислокациями, причем в случае винтовой дислокации возникает только короткодействующая связь вследствие размерного эффекта и модульного эффекта [9, 10]. Из-за размерного эффекта точечный дефект типа «атом замещения» притягивается к винтовой дислокации в случае $\Omega_2 > \Omega_1$, где Ω_1 — объем атома кристалла-растворителя, Ω_2 — объем атома замещения. Из-за модульного эффекта точечный дефект притягивается к винтовой дислокации в случае $\mu_2 < \mu_1$, где μ_1 — модуль сдвига кристалла-растворителя, μ_2 — модуль сдвига кристалла из атомов замещения. Это взаимодействие оказывает сопротивление движению дислокаций [11, 12] дополнительно к сопротивлению за счет барьера Пайерлса и динамическому торможению. В работах [13–15] исследовано внутреннее трение при изгибных колебаниях краевой дислокации в бездиссипативном и диссипативном кристалле и винтовой дислокации в бездиссипативном кристалле с учетом рельефа Пайерлса и взаимодействия с точечными дефектами. В настоящей работе проведем исследование внутреннего трения за счет электронного торможения изгибных колебаний винтовой дислокации с учетом рельефа Пайерлса и взаимодействия с точечными дефектами.

1. Расчет внутреннего трения для выбранной модели

Выполним математическое моделирование поставленной задачи. Проведем ось Oz вдоль равновесного положения бесконечной винтовой дислокации и предположим, что изгибные колебания винтовой дислокации происходят в плоскости xOz. Поместим четыре точечных дефекта типа «атом замещения» вокруг винтовой дислокации (рис. 1). Расстояния от винтовой дислокации до точечных дефектов $d_1 \neq d_2$ приняты с учетом реальной симметрии кристалла. На рис. 1 $\xi(z,t)$ — смещение точек винтовой дислокации во время изгибных колебаний, причем $\xi(z,t) << d_1$ и $\xi(z,t) << d_2$, так как рассматриваем малые колебания в одной долине Пайерлса.

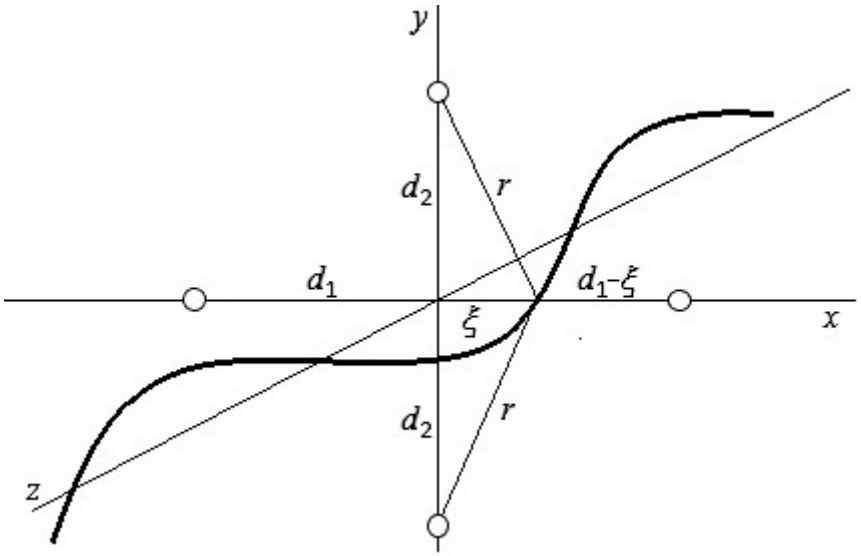


Рис. 1. Схема расположения винтовой дислокации и точечных дефектов

Энергия взаимодействия винтовой дислокации с двумя точечными дефектами, расположенными на оси Ox [9, 10]:

$$W_x = -\frac{1}{8\pi^2}\mu_1\Omega_1\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]b^2\left[\frac{1}{(d_1-\xi)^2}+\frac{1}{(d_1+\xi)^2}\right], \quad (1)$$

где ν — коэффициент Пуассона кристалла-растворителя, b — длина вектора Бюргерса винтовой дислокации. Энергия взаимодействия винтовой дислокации с двумя точечными дефектами, расположенными на оси Oy [9, 10]:

$$W_y = -\frac{1}{4\pi^2}\mu_1\Omega_1\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]\frac{b^2}{d_2^2+\xi^2}. \quad (2)$$

Общая энергия взаимодействия винтовой дислокации с четырьмя точечными дефектами $W_{xy} = W_x + W_y$. Рассмотрим четыре цепочки этих точечных дефектов параллельных оси Oz с линейной плотностью c. Энергия взаимодействия винтовой дислокации с четырьмя цепочками на единицу длины винтовой дислокации $W = cW_{xy}$. Проекция силы взаимодействия винтовой дислокации с точечными дефектами на ось Ox:

$$F(z,t) = -\frac{\partial}{\partial\xi}W \approx \frac{1}{2\pi^2}\mu_1 b^2\Omega_1 c\left(\frac{3}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^4}\right)\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]\xi(z,t). \quad (3)$$

При записи приближенного выражения (3) учтены неравенства $\xi(z,t) << d_1$ и $\xi(z,t) << d_2$. Совершая Фурье-преобразование выражения (3), получим

$$F(k_z,\omega) \approx \frac{1}{2\pi^2}\mu_1 b^2\Omega_1 c\left(\frac{3}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^4}\right)\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]\xi(k_z,\omega), \quad (4)$$

где k_z — компонента волнового вектора $\mathbf{k}$ вдоль линии винтовой дислокации, ω — частота изгибных колебаний винтовой дислокации. С учетом напряжения Пайерлса [13–15] и взаимодействия с точечными дефектами (4) действительная часть обратной обобщенной восприимчивости винтовой дислокации [16] в диссипативном кристалле запишется в виде

$$\operatorname{Re}\alpha^{-1}(k_z,\omega)=\pi\sigma_P-\frac{1}{2\pi^2}\mu_1 b^2\Omega_1 c\left(\frac{3}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^4}\right)\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]-$$

$$-\frac{b^2\mu_1}{4\pi}\int\limits_{|k_z|}^{k_m}kdk\left[\frac{\omega^2}{s_t^2k^2}-3\frac{k_z^2}{k^2}+4\frac{k_z^2s_t^2}{s_l^2k^2}-4\frac{\omega^2\gamma_t^2}{s_t^4k^4}+\frac{1}{(s_t^2k^2-\omega^2)^2+4\omega^2\gamma_t^2}\left(\omega^4-\frac{\omega^6}{s_t^2k^2}-8\frac{\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^2}-3k_z^2s_t^2\omega^2+\right.\right.$$

$$+3\frac{k_z^2\omega^4}{k^2}+4k_z^4s_t^4+4\omega^2\gamma_t^2-4\frac{k_z^4s_t^2\omega^2}{k^2}-12\frac{k_z^2\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^4}+16\frac{k_z^4\omega^2\gamma_t^2}{k^4}+4\frac{\omega^6\gamma_t^2}{s_t^4k^4}+16\frac{\omega^4\gamma_t^4}{s_t^4k^4}+16\frac{k_z^4\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^6}\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{(s_l^2k^2-\omega^2)^2+4\omega^2\gamma_l^2}\left(4k_z^2s_t^2\omega^2-4\frac{k_z^2s_t^2\omega^4}{s_l^2k^2}-16\frac{s_t^2k_z^2\omega^2\gamma_l^2}{s_l^2k^2}-4k_z^4s_t^2s_l^2+4\frac{k_z^4s_t^2\omega^2}{k^2}-16\frac{s_l^2k_z^2\omega^2\gamma_t^2}{s_t^2k^2}+\right.$$

$$\left.\left.+16\frac{s_l^2k_z^4\omega^2\gamma_t^2}{s_t^2k^4}+16\frac{k_z^2\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^4}-16\frac{k_z^4\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^6}+32\frac{k_z^2\omega^2\gamma_t\gamma_l}{k^2}-32\frac{k_z^4\omega^2\gamma_t\gamma_l}{k^4}\right)\right]. \qquad (5)$$

Здесь диссипация энергии осуществлялась торможением колебаний винтовой дислокации электронами проводимости, σ_P — напряжение Пайерлса в кристалле-растворителе, k_m — максимальное волновое число, s_t и s_l — скорости поперечных и продольных звуковых волн в кристалле-растворителе, $\gamma_t(x)$ и $\gamma_l(x)$ — коэффициенты затухания поперечных и продольных звуковых волн электронами проводимости [17, 16], $x=kl$, l — длина свободного пробега электрона. Максимальные потери энергии происходят при больших значениях частоты колебаний дислокаций [1, 18]. Так как большим значения частот ω соответствуют большие значениям k_z, то будем искать решение задачи в коротковолновой области $1<<|k_zl|<<k_ml$. Тогда для коэффициентов электронного затухания звуковых волн можно использовать приближенные выражения [16]:

$$\gamma_t(x)\approx{}^{4}\!/_{3\pi}\,\gamma^0x,\qquad \gamma_l(x)\approx{}^{\pi}\!/_{6}\,\gamma^0x, \qquad (6)$$

где γ^0 — коэффициент, зависящий от материала кристалла. Подставив выражения (6) в формулу (5) и учтя $\gamma^0l/s_t<<1$, получим для действительной части обратной обобщенной восприимчивости винтовой дислокации

$$\operatorname{Re}\alpha^{-1}(k_z,\omega)\approx\pi\sigma_P-\frac{\mu_1b^2}{2\pi^2}\Omega_1c\left(\frac{3}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^4}\right)\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}-1\right)+\left(1-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu_1b^2}{8\pi}\left[\left(3-4\frac{s_t^2}{s_l^2}\right)k_z^2-\frac{\omega^2}{s_t^2}\right]\ln\frac{k_m^2}{k_z^2}. \qquad (7)$$

Из решения дисперсионного уравнения $\operatorname{Re}\alpha^{-1}(k_z,\omega)=0$ найдем собственные частоты колебаний винтовой дислокации

$$\omega_0=s_t\sqrt{\frac{4\pi^2\sigma_P}{\mu_1b^2\ln(k_m/|k_z|)}-\frac{2K}{\pi\ln(k_m/|k_z|)}+(3-4\zeta)k_z^2}. \qquad (8)$$

Здесь обозначено $K=\Omega_1c\left(3/d_1^4-1/d_2^4\right)\left[(1-\nu)\left(\Omega_2/\Omega_1-1\right)/(1-2\nu)+\left(1-\mu_2/\mu_1\right)\right]$, $\zeta=s_t^2/s_l^2$.

Мнимую часть обратной обобщенной восприимчивости винтовой дислокации для коротковолновой области, учитывая $\gamma^0l/s_t<<1$, получим из результатов работы [19]

$$\operatorname{Im}\alpha^{-1}(k_z,\,\omega)\approx-B\omega-\left(\frac{2}{\pi^2}-\frac{16}{3\pi^2}\zeta+\frac{1}{3}\zeta^2\right)\frac{\mu_1}{s_t^2}b^2\gamma^0\omega|k_zl|, \qquad (9)$$

где B — коэффициент электронного торможения прямолинейной составляющей винтовой дислокации [3, 16]. Электронное торможение винтовой дислокации приводит к внутреннему трению в кристалле [18]. Используя общую формулу для потерь энергии за период колебаний [20] аналогично работам [13–15] найдем вклад в дислокационное внутреннее трение, обусловленный изгибными колебаниями винтовой дислокации:

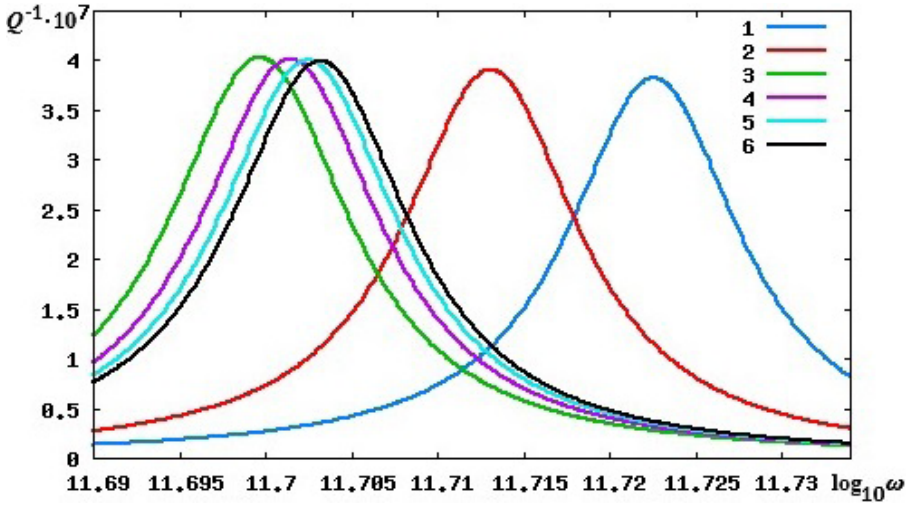
$$Q^{-1} = \frac{\rho_d \theta \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{16}{3\pi^2}\zeta + \frac{1}{3}\zeta^2 \right) \frac{b^4}{s_t^2} \gamma^0 l |k_z| \omega}{\left\{ \pi \frac{\sigma_P}{\mu_1} - \frac{b^2 K}{2\pi^2} + \frac{b^2}{4\pi} \left[(3-4\zeta)k_z^2 - \frac{\omega^2}{s_t^2} \right] \ln \frac{k_m}{|k_z|} \right\}^2 + \left\{ \frac{B}{\mu_1} + \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{16}{3\pi^2}\zeta + \frac{1}{3}\zeta^2 \right) \frac{b^2}{s_t^2} \gamma^0 l |k_z| \right\}^2 \omega^2} \quad (10)$$

Здесь ρ_d — плотность винтовых дислокаций в кристалле-растворителе, θ – ориентационный фактор винтовых дислокаций.

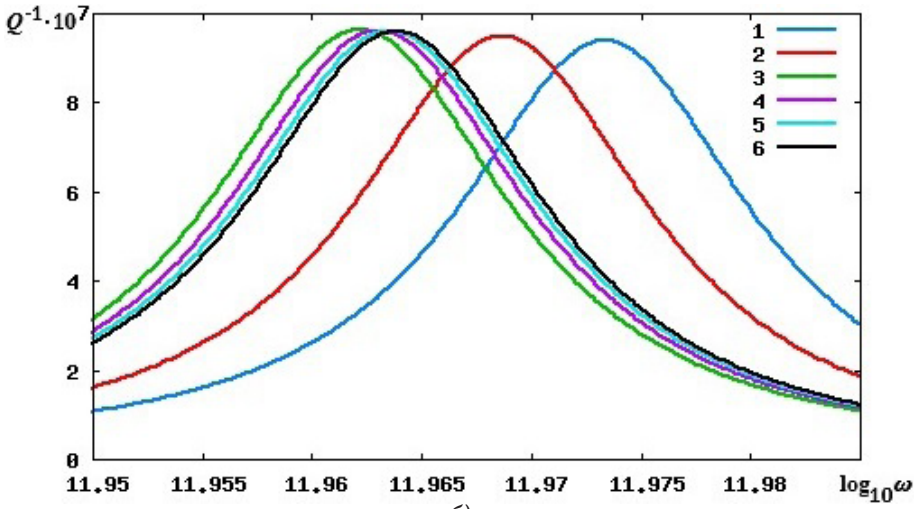
2. Результаты вычислительного эксперимента и обсуждение

Для численного расчета выберем такие материалы, чтобы точечные дефекты притягивались к винтовой дислокации. При этом желательно, чтобы кристалл-растворитель и кристалл из замещающих атомов имели одинаковую кристаллическую решетку. Записанные условия выполняются если в качестве кристалла-растворителя взять кристалл меди, а в качестве атомов замещения взять атомы алюминия. Действительно, кристаллы меди и алюминия имеют ГЦК решетку, $\Omega_1 = \Omega_{Cu} = 1.18 \cdot 10^{-29}$ м^3, $\Omega_2 = \Omega_{Al} = 1.66 \cdot 10^{-29}$ м^3, $\mu_1 = \mu_{Cu} = 4.61 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu_2 = \mu_{Al} = 2.65 \cdot 10^{10}$ Па [21, 22]. Пусть вектор Бюргерса винтовой дислокации — наименьший возможный вектор Бюргерса для полной дислокации [8]: $\mathbf{b} = (a/2)[110]$, где $a = 3.615 \cdot 10^{-10}$ м — параметр решетки кристалла меди [21, 22], тогда $b = 2.556 \cdot 10^{-10}$ м. В дальнейшем положение точечных дефектов будем выбирать в узлах кристаллической решетки с учетом выбранного направления винтовой дислокации [110] и выбранной плоскости скольжения (001). Для проведения вычислений по найденным формулам (8) и (10) запишем значения констант для кристалла меди: $\nu = 0.35$, $s_t = 2270$ м/с, $s_l = 5010$ м/с [21, 22], $\sigma_P / \mu_1 \approx 5 \cdot 10^{-4}$ [6, 7, 10], $B/\mu_1 = 8.68 \cdot 10^{-17}$ с [10], $l = 5 \cdot 10^{-7}$ м [23], $\gamma^0 = 3.9 \cdot 10^8$ с$^{-1}$ [16]. Также принимаем значения $k_m = 10^{10}$ м$^{-1}$, $\rho_d = 10^{10}$ м$^{-2}$, $\theta = 0.5$.

По формуле (10) вычисляем внутреннее трение и строим графики частотной зависимости $Q^{-1}(\omega)$ при $k_z = 2 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ (рис. 2, а) и $k_z = 2 \cdot 10^8$ м$^{-1}$ (рис. 2, б) для различных значений d_1, d_2, c. С помощью этих графиков и численных расчетов находим частоты ω_m, соответствующие максимальным значениям внутреннего трения.



а)



б)

Рис. 2. Частотная зависимость внутреннего трения при $k_z = 2\cdot 10^7$ *м*$^{-1}$ *(а) и* $k_z = 2\cdot 10^8$ *м*$^{-1}$ *(б) для различных значений* d_1, d_2, c: ***1*** — $d_1 = 2b = 5.112\cdot 10^{-10}$ *м*, $d_2 = a = 3.615\cdot 10^{-10}$ *м*, $c = 2\cdot 10^8$ *м*$^{-1}$; ***2*** — $d_1 = 2b = 5.112\cdot 10^{-10}$ *м*, $d_2 = a = 3.615\cdot 10^{-10}$ *м*, $c = 10^8$ *м*$^{-1}$; ***3*** — $d_1 = 3b = 7.669\cdot 10^{-10}$ *м*, $d_2 = 2a = 7.230\cdot 10^{-10}$ *м*, $c = 10^8$ *м*$^{-1}$; ***4*** — $d_1 = 3b = 7.669\cdot 10^{-10}$ *м*, $d_2 = 2a = 7.230\cdot 10^{-10}$ *м*, $c = 5\cdot 10^7$ *м*$^{-1}$; ***5*** — $d_1 = 4b = 1.0225\cdot 10^{-9}$ *м*, $d_2 = 3a = 1.0845\cdot 10^{-9}$ *м*, $c = 5\cdot 10^7$ *м*$^{-1}$; ***6*** — $c = 0$

По формуле (8) находим собственные частоты изгибных колебаний винтовой дислокации ω_0 при $k_z = 2\cdot 10^7$ м$^{-1}$ и $k_z = 2\cdot 10^8$ м$^{-1}$ для различных значений d_1, d_2, c. Результаты вычислений ω_m и ω_0 помещаем в табл. 1.

Таблица 1

Значения частот ω_0 *и* ω_m *при различных* d_1, d_2, c

d_1, м	d_2, м	c, м$^{-1}$	$k_z = 2\cdot 10^7$, м$^{-1}$		$k_z = 2\cdot 10^8$, м$^{-1}$	
			ω_0, рад/с	ω_m, рад/с	ω_0, рад/с	ω_m, рад/с
$5.112\cdot 10^{-10}$	$3.615\cdot 10^{-10}$	$2\cdot 10^8$	$5.2802\cdot 10^{11}$	$5.2796\cdot 10^{11}$	$9.4067\cdot 10^{11}$	$9.4037\cdot 10^{11}$
$5.112\cdot 10^{-10}$	$3.615\cdot 10^{-10}$	10^8	$5.1661\cdot 10^{11}$	$5.1654\cdot 10^{11}$	$9.3056\cdot 10^{11}$	$9.3025\cdot 10^{11}$
$7.669\cdot 10^{-10}$	$7.230\cdot 10^{-10}$	10^8	$5.0089\cdot 10^{11}$	$5.0084\cdot 10^{11}$	$9.1680\cdot 10^{11}$	$9.1664\cdot 10^{11}$
$7.669\cdot 10^{-10}$	$7.230\cdot 10^{-10}$	$5\cdot 10^7$	$5.0293\cdot 10^{11}$	$5.0292\cdot 10^{11}$	$9.1857\cdot 10^{11}$	$9.1833\cdot 10^{11}$
$1.0225\cdot 10^{-9}$	$1.0845\cdot 10^{-9}$	$5\cdot 10^7$	$5.0414\cdot 10^{11}$	$5.0408\cdot 10^{11}$	$9.1962\cdot 10^{11}$	$9.1939\cdot 10^{11}$
—	—	0	$5.0495\cdot 10^{11}$	$5.0489\cdot 10^{11}$	$9.2033\cdot 10^{11}$	$9.2003\cdot 10^{11}$

Соответствующие значения частот ω_0 и ω_m очень близки (табл. 1), что свидетельствует о резонансном типе пиков внутреннего трения на рис. 2. Малая разница частот $\omega_0 - \omega_m > 0$ связана с малым затуханием изгибных колебаний винтовой дислокации. На рис. 2 кривые расположены близко друг от друга по частоте, так как влияние точечных дефектов очень мало. Это объясняется их противоположным воздействием на винтовую дислокацию. Действие точечных дефектов, лежащих в плоскости xOz, при $\xi(z,t) \neq 0$ приводит к увеличению смещения винтовой дислокации. Действие точечных дефектов, лежащих в плоскости yOz, приводит к уменьшению смещения винтовой дислокации из положения равновесия. Если суммарное воздействие точечных дефектов стремится вернуть винтовую дислокацию в равновесное положение (кривые 1 и 2 на рис. 2), то эффективное напряжение Пайерлса увеличивается. Если суммарное воздействие точечных дефектов стремится вывести винтовую дислокацию из равновесного положения (кривые 3–5 на рис. 2), то эффективное напряжение Пайерлса умень-

шается. При увеличении расстояния между цепочками точечных дефектов и винтовой дислокацией, а также при уменьшении линейной плотности точечных дефектов кривые на рис. 2 приближаются к кривой 6 (случай отсутствия точечных дефектов). Из табл. 1 видно, что при увеличении эффективного напряжения Пайерлса частоты ω_0 и ω_m (строки 1 и 2) больше соответствующих частот для случая отсутствия точечных дефектов (строка 6). При уменьшении эффективного напряжения Пайерлса частоты ω_0 и ω_m (строки 3–5) меньше соответствующих частот для случая отсутствия точечных дефектов (строка 6). При уменьшении длины изгибной волны винтовой дислокации (увеличении k_z) кривые смещаются вправо по частоте (рис. 2, б). Соответственно увеличиваются значения частот ω_0 и ω_m. Это объясняется увеличением линейного натяжения дислокационной линии, что приводит к увеличению эффективного напряжения Пайерлса. Увеличение линейного натяжения дислокационной линии приводит также к уменьшению амплитуды колебаний, следовательно, должно уменьшаться внутреннее трение. Но, как видно из рис. 2, внутреннее трение увеличивается. Это несоответствие объясняется тем, что в статье находится вклад изгибных колебаний в дислокационное внутреннее трение. Поэтому в числителе формулы (10) стоит выражение, связанное с затуханием изгибных колебаний винтовой дислокации, а в знаменателе стоит сумма выражений, обусловленных затуханием прямолинейной составляющей и изгибных колебаний дислокации. Слагаемое, обусловленное затуханием прямолинейной составляющей, является преобладающим при рассмотренных значениях k_z, поэтому поведение выражения (10) при возрастании k_z определяется числителем.

Заключение

В результате проведения математического моделирования вклада изгибных колебаний винтовой дислокации в дислокационное внутреннее трение, обусловленное электронным торможением, и вычислительного эксперимента установлено следующее:

- пики частотной зависимости имеют резонансный тип;
- вклад изгибных колебаний винтовой дислокации в дислокационное внутреннее трение очень мал;
- при рассмотренном выборе расположения точечных дефектов их суммарное влияние на внутреннее трение мало вследствие их разнонаправленного действия на винтовую дислокацию;
- при уменьшении плотности точечных дефектов и увеличении расстояния между ними и винтовой дислокацией кривые частотной зависимости внутреннего трения асимптотически приближаются к предельной кривой (случай $c = 0$), при этом высота пиков практически не изменяется;
- действие точечных дефектов на винтовую дислокацию может увеличивать или уменьшать эффективное напряжение Пайерлса в зависимости от рассматриваемых значений d_1 и d_2, при этом частоты ω_0 и ω_m соответственно увеличиваются или уменьшаются;
- при рассмотренных значениях k_z их увеличение приводит к росту пиков внутреннего трения и смещению вправо по частоте.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории колебаний дислокаций и дислокационного внутреннего трения в реальных кристаллах.

Литература

1. *Granato A. V.* Theory of mechanical damping due to dislocations / A. V. Granato, K. Lucke // J. Appl. Phys. – 1956. –V. 27. – P. 583–593.

2. *Alshits V. I.* Mechanisms of dislocation drag / V. I. Alshits, V. L. Indenbom // Dislocations in solids. V. 7 / ed. F. R. N. Nabarro. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – P. 43–111.

3. *Каганов М. И.* Электронное торможение дислокаций в металлах / М. И. Каганов, В. Я. Кравченко, В. Д. Нацик // Успехи физических наук. – 1973. – Т. 111, № 4. – С. 655–682.

4. *Peierls R. E.* The size of a dislocation / R. E. Peierls // Proc. Phys. Soc. – 1940. – V. 52. – P. 34–38.

5. *Nabarro F. R. N.* Dislocations in a simple cubic lattice / F. R. N. Nabarro // Proc. Phys. Soc. – 1947. – V. 59. – P. 256–272.

6. *Shin I.* Possible origin of the discrepancy in Peierls stresses of fcc metals: first-principles simulations of dislocation mobility in aluminum / I. Shin, E. A. Carter // Phys. Rev. B. – 2013. – V. 88. – P. 064106.

7. Comparative modeling of the disregistry and Peierls stress for dissociated edge and screw dislocations in Al / S. Xu, J. R. Mianroodi, A. Hunter [et al.] // Int. J. Plasticity. – 2020. – V. 129. – P. 102689.

8. *Хирт Дж.* Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М.: Атомиздат, 1972. – 600 с.

9. *Nabarro F. R. N.* Solution and precipitation hardening / F. R. N. Nabarro // The physics of metals. V. 2 / ed. by P. B. Hirsch. – Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1975. – P. 152–188.

10. *Судзуки Т.* Динамика дислокаций и пластичность / Т. Судзуки, Х. Есинага, С. Такеути. – М. : Мир, 1989. – 296 с.

11. *Gremaud G.* Dislocation-point defect interactions / G. Gremaud // Materials Science Forum. – 2001. – V. 366. – P. 178–246.

12. *Малашенко В. В.* Коллективное преодоление дислокациями точечных дефектов в динамической области / В. В. Малашенко // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56, № 8. – С. 1528–1530.

13. *Дежин В. В.* Математическое моделирование внутреннего трения при изгибных колебаниях краевой дислокации, взаимодействующей с точечными дефектами, в бездиссипативном кристалле / В. В. Дежин // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4–6 декабря 2023 г. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 420–425.

14. *Dezhin V. V.* Internal friction due to electron braking of edge dislocation bending vibrations when interacting with point defects / V. V. Dezhin // AIP Conf. Proc. – 2024. – V. 3154. – P. 020027.

15. *Dezhin V. V.* Internal friction during screw dislocation bending vibrations in the Peierls relief when interacting with point defects in non-dissipative crystal / V. V. Dezhin // AIP Conf. Proc. – 2024. – V. 3154. – P. 020026.

16. *Рощупкин А. М.* Обобщенная восприимчивость дислокации в диссипативном кристалле / А. М. Рощупкин, И. Л. Батаронов, В. В. Дежин // Известия РАН. Серия физическая. – 1995. – Т. 59, № 10. – С. 12–16.

17. *Kittel Ch.* Quantum theory of solids / Ch. Kittel. – New York: Wiley, 1987. – 516 p.

18. Internal friction in metallic materials / M. S. Blanter, I. S. Golovin, H. Neuhäuser, H.-R. Sinning. – Berlin: Springer-Verlag, 2007. – 539 p.

19. *Dezhin V. V.* On damping of screw dislocation bending vibrations in dissipative crystal: limiting cases / V. V. Dezhin // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2018. – V. 327. – P. 032017.

20. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. Ч. I. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2002. – 616 с.

21. Свойства элементов. Ч. 1. Физические свойства // под ред. Г. В. Самсонова. – М.: Металлургия, 1976. – 600 с.

22. CRC handbook of chemistry and physics // ed. by W. M. Haynes. – Boca Raton: Taylor & Francis, 2014. – 2663 p.

23. *Gall D.* Electron mean free path in elemental metals / D. Gall // J. Appl. Phys. – 2016. – V. 119. – P. 085101.

УДК 004.021

МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ НА БАЗЕ ОПЕРАТОРОВ ГЕЙЗЕНБЕРГА — ВЕЙЛЯ И ПАУЛИ КАК СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОСТОЯНИЙ МНОГОУРОВНЕВЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Л. А. Демидова, В. В. Масленников

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В статье рассматривается уникальный подход к преобразованию состояний многоуровневых квантовых систем любой размерности на основе матрицы плотности с использованием операторов Гейзенберга — Вейля и Паули. Представлено математическое описание метода, а также приведён пример с представлением куквинта в форме сферообразной геометрической конструкции Блоха. Преимущество метода рассматривается с точки зрения отсутствия альтернатив и доступности его реализации как в средах физического и виртуального квантового вычислительного устройства, так и в условиях проведения вычислений с квантово-инспирированным подходом.
Ключевые слова: квантовые вычисления, кудит, квантовая система, сфера Блоха, матрица плотности, операторы Гейзенберга — Вейля, операторы Паули, квантовый вентиль, унитарная операция, комплексное пространство.

Введение

Квантовые вычисления являются альтернативой классическим вычислениям и представляют собой междисциплинарную область, состоящую из множества различных аспектов таких предметных областей, как компьютерные науки, физика и математика. Такие вычисления в своей основе используют явления квантовой механики, что позволяет ускорить решение существующих сложных задач или получить результаты при выполнении трудноразрешимых задач, которые недоступны для реализации на классических вычислительных устройствах ввиду ограниченности как технических, так и технологических возможностей человечества на текущий момент времени. Квантовые вычисления осуществляются благодаря физическим или виртуальным квантовым вычислительным устройствам, которые функционируют на базе квантовых принципов и концепций, где для выполнения операций применяется квантовый бит или кубит — основная единица квантовой информации.

Кубит в рамках физического квантового вычислительного устройства является квантовой частицей, которая представляет собой перехваченный ион или фотон как реальных или искусственных атомов, так и квазичастиц [1]. При этом кубит может принимать значения ноль, единицу и множество других промежуточных значений с определёнными вероятностями, что достигается за счёт эффекта суперпозиции базисных состояний кубита. Для изменения состояний кубита существует большое количество различных квантовых вентилей — логических элементов квантового компьютера, осуществляющих преобразование входных состояний кубита в выходные в соответствии с квантовыми законами.

Кроме кубита также существует альтернативная единица квантовой информации, которая представляет собой многоуровневую квантовую систему, называемую кудитом [2]. Однако в связи с невозможностью представления кудита в виде сферы Блоха в явном виде и, как следствие, с отсутствием достаточного количества соответствующих кудиту квантовых вентилей, выполнение преобразования его состояний является сложной задачей.

В данной работе предлагается метод преобразования состояний многоуровневых квантовых систем на основе матрицы плотности с применением операторов Гейзенберга — Вейля и Паули, ориентированный на работу с кудитом любой размерности.

Описание метода

Дадим определение термину «кудит». **Кудит** — квантовая система в d-мерном состоянии, которое описывается вектором в d-мерном Гильбертовом пространстве H_d. Пространство данной квантовой системы состоит из множества ортонормированных базисных векторов $\{|0\rangle,|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle,\ldots,|d-1\rangle\}$, а общий вид состояния кудита выражается в форме:

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle + \alpha_3|3\rangle + \ldots + \alpha_{d-1}|d-1\rangle = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{d-1}) \in \mathbb{C}^d, \quad (1)$$

где $|\psi\rangle$ — квантовая система, находящаяся одновременно в более, чем двух состояниях, а $\alpha_0 \ldots \alpha_{d-1}$ — амплитуды вероятностей при $\alpha_0 \ldots \alpha_{d-1} \in \mathbb{C}^d$ и $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + \ldots + |\alpha_{d-1}|^2 = 1$.

В случае с кубитом его состояние формируется за счёт вращений сферы Блоха в соответствии с унитарными операциями при соблюдении условия $U^\dagger U = UU^\dagger = E, U^{-1} = U^\dagger$, где U — ограниченный линейный оператор, $U^\dagger$ — эрмитово-сопряжённый к U оператор, E — единичная матрица. Однако для описания состояния высокой размерности $d \geq 3$ использование сферы Блоха в явном виде не представляется возможным. По этой причине для кудита предлагается использовать альтернативный подход, заключающийся в применении операторов Гейзенберга — Вейля [3].

Базис операторов Гейзенберга — Вейля определяется как

$$\left\{U_{00} = E, U_{pq} = \omega^{-\frac{pq}{2}} Q_d |p\rangle P_d |q\rangle, \left(p,q = \overline{0,d-1}\right)\right\},$$

где унитарный оператор U_{pq} формируется на основе операторов Q_d, P_d, которые соответствуют классическим операторам поворота Паули Z и X. Тогда используя базис Гейзенберга — Вейля, разложение ограниченного оператора матрицы плотности в $\mathbb{C}^d$ [4] можно задать следующей формулой:

$$\rho = \frac{1}{d}\sum_{p=q=0}^{d-1} b_{pq}U_{pq} = \frac{1}{d}\left(E + \sum_{p\neq 0, q\neq 0} b_{pq}U_{pq}\right) = \frac{1}{d}\left(E + \sum_{p\neq 0, q\neq 0} b_{pq}\omega^{-\frac{pq}{2}} Q_d|p\rangle P_d|q\rangle\right) = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{d}\left(E + \sum_{p\neq 0, q\neq 0} b_{pq} e^{-\frac{i\pi pq}{d}} Q_d|p\rangle P_d|q\rangle\right) = \frac{1}{d}\left(E + \sum_{p\neq 0, q\neq 0} b_{pq}(-1)^{-\frac{pq}{d}} Q_d|p\rangle P_d|q\rangle\right),$$

где ρ — матрица плотности, описывающая состояние квантовой системы, состоящей из кудита размерности d, $\omega := e^{\frac{2i\pi}{d}}$, $e^{i\pi} = -1$ согласно тождеству Эйлера, $b_{00} = 1$ и $b_{pq} = \mathrm{tr}\left(\rho U_{pq}^\dagger\right)$ формируют компоненты вектора Блоха. При этом получившаяся сферообразная геометрическая конструкция Блоха принадлежит пространству $\mathbb{R}^{(d^2-1)/2}$ при $d \in \mathbb{P}$ и пространству $\mathbb{R}^{(d^2+2)/2}$ в случае $d \notin \mathbb{P}$.

Операторы Паули P_d и Q_d определяются как:

$$P_d|q\rangle = |(q+1) \bmod d\rangle, \quad (3)$$

$$Q_d|p\rangle = \omega_d^p|p\rangle = (-1)^{\frac{2p}{d}}|p\rangle, \quad (4)$$

где $\bmod d$ — конгруэнтность по модулю d на множестве $\mathbb{Z}$.

Приведём пример представления куквинта $(d=5)$ в виде сферообразной конструкции Блоха пространства $\mathbb{R}^{12}$, используя разложение (2):

$$\rho = \frac{1}{5}(E + b_{01}U_{01} + b_{02}U_{02} + b_{03}U_{03} + b_{04}U_{04} + b_{10}U_{10} + b_{11}U_{11} + b_{12}U_{12} + b_{13}U_{13} +$$
$$+ b_{14}U_{14} + b_{20}U_{20} + b_{21}U_{21} + b_{22}U_{22} + b_{23}U_{23} + b_{24}U_{24} + b_{30}U_{30} + b_{31}U_{31} + b_{32}U_{32} +$$
$$+ b_{33}U_{33} + b_{34}U_{34} + b_{40}U_{40} + b_{41}U_{41} + b_{42}U_{42} + b_{43}U_{43} + b_{44}U_{44}). \quad (5)$$

Необходимо отметить, что согласно свойству $\rho^{\dagger}=\rho$ коэффициенты b_{pq} подчиняются следующим соотношениям:

$$b_{10}=n_1e^{\mathrm{i}\theta_1},b_{40}=n_1e^{-\mathrm{i}\theta_1},b_{20}=n_2e^{\mathrm{i}\theta_2},b_{30}=n_2e^{-\mathrm{i}\theta_2},$$
$$b_{01}=n_3e^{\mathrm{i}\theta_3},b_{04}=n_3e^{-\mathrm{i}\theta_3},b_{02}=n_4e^{\mathrm{i}\theta_4},b_{03}=n_4e^{-\mathrm{i}\theta_4},$$
$$b_{11}=n_5e^{\mathrm{i}\theta_5},b_{44}=n_5e^{-\mathrm{i}\theta_5},b_{23}=n_6e^{\mathrm{i}\theta_6},b_{32}=n_6e^{-\mathrm{i}\theta_6},$$
$$b_{12}=n_7e^{\mathrm{i}\theta_7},b_{43}=n_7e^{-\mathrm{i}\theta_7},b_{21}=n_8e^{\mathrm{i}\theta_8},b_{34}=n_8e^{-\mathrm{i}\theta_8},$$
$$b_{13}=n_9e^{\mathrm{i}\theta_9},b_{42}=n_9e^{-\mathrm{i}\theta_9},b_{24}=n_{10}e^{\mathrm{i}\theta_{10}},b_{31}=n_{10}e^{-\mathrm{i}\theta_{10}},$$
$$b_{14}=n_{11}e^{\mathrm{i}\theta_{11}},b_{41}=n_{11}e^{-\mathrm{i}\theta_{11}},b_{22}=n_{12}e^{\mathrm{i}\theta_{12}},b_{33}=n_{12}e^{-\mathrm{i}\theta_{12}}, \quad (6)$$

где $n_i,\theta_i\in\mathbb{R}$.

Окончательное представление куквинта в форме матрицы плотности осуществляется за счёт вынесения в (5) общих множителей, применения унитарного оператора $U_{pq}=(-1)^{-\frac{pq}{d}}Q_d\left|p\right\rangle P_d\left|q\right\rangle$ с раскрытием $P_d\left|q\right\rangle$ и $Q_d\left|p\right\rangle$ через (3) и (4), и подстановки (6) в (5):

$$\rho=\frac{1}{5}(E+n_1e^{\mathrm{i}\theta_1}U_{10}+n_1e^{-\mathrm{i}\theta_1}U_{40}+n_2e^{\mathrm{i}\theta_2}U_{20}+n_2e^{-\mathrm{i}\theta_2}U_{30}+n_3e^{\mathrm{i}\theta_3}U_{01}+$$
$$+n_3e^{-\mathrm{i}\theta_3}U_{04}+n_4e^{\mathrm{i}\theta_4}U_{02}+n_4e^{-\mathrm{i}\theta_4}U_{03}+n_5e^{\mathrm{i}\theta_5}U_{11}+n_5e^{-\mathrm{i}\theta_5}U_{44}+n_6e^{\mathrm{i}\theta_6}U_{23}+$$
$$+n_6e^{-\mathrm{i}\theta_6}U_{32}+n_7e^{\mathrm{i}\theta_7}U_{12}+n_7e^{-\mathrm{i}\theta_7}U_{43}+n_8e^{\mathrm{i}\theta_8}U_{21}+n_8e^{-\mathrm{i}\theta_8}U_{34}+n_9e^{\mathrm{i}\theta_9}U_{13}+$$
$$+n_9e^{-\mathrm{i}\theta_9}U_{42}+n_{10}e^{\mathrm{i}\theta_{10}}U_{24}+n_{10}e^{-\mathrm{i}\theta_{10}}U_{31}+n_{11}e^{\mathrm{i}\theta_{11}}U_{14}+n_{11}e^{-\mathrm{i}\theta_{11}}U_{41}+$$
$$+n_{12}e^{\mathrm{i}\theta_{12}}U_{22}+n_{12}e^{-\mathrm{i}\theta_{12}}U_{33})=\frac{1}{5}(E+n_1\left(e^{\mathrm{i}\theta_1}U_{10}+e^{-\mathrm{i}\theta_1}U_{40}\right)+$$
$$+n_2\left(e^{\mathrm{i}\theta_2}U_{20}+e^{-\mathrm{i}\theta_2}U_{30}\right)+n_3\left(e^{\mathrm{i}\theta_3}U_{01}+e^{-\mathrm{i}\theta_3}U_{04}\right)+n_4\left(e^{\mathrm{i}\theta_4}U_{02}+e^{-\mathrm{i}\theta_4}U_{03}\right)+$$
$$+n_5\left(e^{\mathrm{i}\theta_5}U_{11}+e^{-\mathrm{i}\theta_5}U_{44}\right)+n_6\left(e^{\mathrm{i}\theta_6}U_{23}+e^{-\mathrm{i}\theta_6}U_{32}\right)+n_7\left(e^{\mathrm{i}\theta_7}U_{12}+e^{-\mathrm{i}\theta_7}U_{43}\right)+$$
$$+n_8\left(e^{\mathrm{i}\theta_8}U_{21}+e^{-\mathrm{i}\theta_8}U_{34}\right)+n_9\left(e^{\mathrm{i}\theta_9}U_{13}+e^{-\mathrm{i}\theta_9}U_{42}\right)+n_{10}\left(e^{\mathrm{i}\theta_{10}}U_{24}+e^{-\mathrm{i}\theta_{10}}U_{31}\right)+$$
$$+n_{11}\left(e^{\mathrm{i}\theta_{11}}U_{14}+e^{-\mathrm{i}\theta_{11}}U_{41}\right)+n_{12}\left(e^{\mathrm{i}\theta_{12}}U_{22}+e^{-\mathrm{i}\theta_{12}}U_{33}\right))=$$
$$=\frac{1}{5}(E+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_1\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_1}\left(-1\right)^{-\frac{1*0}{5}}Q_5\left|1\right\rangle P_5\left|0\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_1}\left(-1\right)^{-\frac{4*0}{5}}Q_5\left|4\right\rangle P_5\left|0\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_2\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_2}\left(-1\right)^{-\frac{2*0}{5}}Q_5\left|2\right\rangle P_5\left|0\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_2}\left(-1\right)^{-\frac{3*0}{5}}Q_5\left|3\right\rangle P_5\left|0\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_3\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_3}\left(-1\right)^{-\frac{0*1}{5}}Q_5\left|0\right\rangle P_5\left|1\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_3}\left(-1\right)^{-\frac{0*4}{5}}Q_5\left|0\right\rangle P_5\left|4\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_4\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_4}\left(-1\right)^{-\frac{0*2}{5}}Q_5\left|0\right\rangle P_5\left|2\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_4}\left(-1\right)^{-\frac{0*3}{5}}Q_5\left|0\right\rangle P_5\left|3\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_5\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_5}\left(-1\right)^{-\frac{1*1}{5}}Q_5\left|1\right\rangle P_5\left|1\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_5}\left(-1\right)^{-\frac{4*4}{5}}Q_5\left|4\right\rangle P_5\left|4\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_6\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_6}\left(-1\right)^{-\frac{2*3}{5}}Q_5\left|2\right\rangle P_5\left|3\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_6}\left(-1\right)^{-\frac{3*2}{5}}Q_5\left|3\right\rangle P_5\left|2\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_7\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_7}\left(-1\right)^{-\frac{1*2}{5}}Q_5\left|1\right\rangle P_5\left|2\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_7}\left(-1\right)^{-\frac{4*3}{5}}Q_5\left|4\right\rangle P_5\left|3\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_8\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_8}\left(-1\right)^{-\frac{2*1}{5}}Q_5\left|2\right\rangle P_5\left|1\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_8}\left(-1\right)^{-\frac{3*4}{5}}Q_5\left|3\right\rangle P_5\left|4\right\rangle\right)+$$

$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_9)}{2}\left(e^{i\theta_9}(-1)^{-\frac{1*3}{5}}Q_5|1\rangle P_5|3\rangle+e^{-i\theta_9}(-1)^{-\frac{4*2}{5}}Q_5|4\rangle P_5|2\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{10})}{2}\left(e^{i\theta_{10}}(-1)^{-\frac{2*4}{5}}Q_5|2\rangle P_5|4\rangle+e^{-i\theta_{10}}(-1)^{-\frac{3*1}{5}}Q_5|3\rangle P_5|1\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{11})}{2}\left(e^{i\theta_{11}}(-1)^{-\frac{1*4}{5}}Q_5|1\rangle P_5|4\rangle+e^{-i\theta_{11}}(-1)^{-\frac{4*1}{5}}Q_5|4\rangle P_5|1\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{12})}{2}\left(e^{i\theta_{12}}(-1)^{-\frac{2*2}{5}}Q_5|2\rangle P_5|2\rangle+e^{-i\theta_{12}}(-1)^{-\frac{3*3}{5}}Q_5|3\rangle P_5|3\rangle\right))=$$
$$=\frac{1}{5}(E+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_1)}{2}\left(e^{i\theta_1}(-1)^{\frac{2}{5}}|1\rangle|1\rangle+e^{-i\theta_1}(-1)^{\frac{8}{5}}|4\rangle|1\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_2)}{2}\left(e^{i\theta_2}(-1)^{\frac{4}{5}}|2\rangle|1\rangle+e^{-i\theta_2}(-1)^{\frac{6}{5}}|3\rangle|1\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_3)}{2}\left(e^{i\theta_3}|0\rangle|2\rangle+e^{-i\theta_3}|0\rangle|0\rangle\right)+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_4)}{2}\left(e^{i\theta_4}|0\rangle|3\rangle+e^{-i\theta_4}|0\rangle|4\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_5)}{2}\left(e^{i\theta_5}(-1)^{\frac{1}{5}}|1\rangle|2\rangle+e^{-i\theta_5}(-1)^{-\frac{8}{5}}|4\rangle|0\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_6)}{2}\left(e^{i\theta_6}(-1)^{-\frac{2}{5}}|2\rangle|4\rangle+e^{-i\theta_6}|3\rangle|3\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_7)}{2}\left(e^{i\theta_7}|1\rangle|3\rangle+e^{-i\theta_7}(-1)^{-\frac{4}{5}}|4\rangle|4\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_8)}{2}\left(e^{i\theta_8}(-1)^{\frac{2}{5}}|2\rangle|2\rangle+e^{-i\theta_8}(-1)^{-\frac{6}{5}}|3\rangle|0\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_9)}{2}\left(e^{i\theta_9}(-1)^{-\frac{1}{5}}|1\rangle|4\rangle+e^{-i\theta_9}|4\rangle|3\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{10})}{2}\left(e^{i\theta_{10}}(-1)^{-\frac{4}{5}}|2\rangle|0\rangle+e^{-i\theta_{10}}(-1)^{\frac{3}{5}}|3\rangle|2\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{11})}{2}\left(e^{i\theta_{11}}(-1)^{-\frac{2}{5}}|1\rangle|0\rangle+e^{-i\theta_{11}}(-1)^{\frac{4}{5}}|4\rangle|2\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{12})}{2}\left(e^{i\theta_{12}}|2\rangle|3\rangle+e^{-i\theta_{12}}(-1)^{-\frac{3}{5}}|3\rangle|4\rangle\right))=\frac{1}{5}\left(E+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{12}\mathrm{tr}(\rho H_i)H_i\right),\qquad(7)$$

где $n_i=\frac{\mathrm{tr}(\rho H_i)}{2}$, $H_i=e^{i\theta_i}(-1)^{-\frac{p*q}{5}}Q_5|p\rangle P_5|q\rangle+e^{-i\theta_i}(-1)^{-\frac{p*q}{5}}Q_5|p\rangle P_5|q\rangle$ — эрмитова матрица, θ_i — угол поворота.

Угол поворота θ определяется в зависимости от специфики конкретной решаемой задачи или от окружающих условий, в которых, например, существует физическое квантовое вычислительное устройство. Так, в [5] авторы предлагаемого исследования разработали новый квантово-инспирированный генетический алгоритм численной оптимизации на основе кудита в условиях имитации квантовой декогеренции. В своём исследовании авторы рассматривают квантовую декогеренцию в контексте влияния различных шумов (внешних флуктуаций) на кудит как виртуальную квантовую систему любой размерности. Поскольку физические величины, которые подвергаются влиянию множества случайных помех, строго подчиняются нормальному распределению, моделирование воздействия шумов на виртуальную квантовую си-

стему реализуется с точки зрения использования нормальной случайно величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, то есть $\theta = \tau * \xi$, где τ — уровень ошибки, $\xi \sim N(0,1)$.

Заключение

В работе рассмотрен метод преобразования состояний многоуровневых квантовых систем на базе матрицы плотности с применением операторов Гейзенберга — Вейля и Паули. Матрица плотности и операторы Гейзенберга — Вейля позволяют представить кудит любой размерности в форме сферообразной геометрической конструкции Блоха, а изменение состояний кудита осуществляется за счёт дополнительного использования модифицированных операторов Паули, выполняющих вращение сферообразной геометрической конструкции Блоха на заданный угол. Преимущество метода заключается в доступности его реализации как в средах физического и виртуального квантового вычислительного устройства, так и в условиях проведения вычислений с квантово-инспирированным подходом. Также стоит отметить, что на сегодняшний день отсутствуют альтернативные подходы к преобразованию состояний многоуровневых квантовых систем.

Литература

1. *Моисеев С. А.* Квантовый компьютер в схеме атомного квантового транзистора с логическим кодированием кубитов / С. А. Моисеев, С. Н. Андрианов, Е. С. Моисеев // Оптика и спектроскопия. – 2013. – Т. 115, № 3. – С. 406. – DOI 10.7868/S0030403413090171. – EDN QYXHNL.

2. Qudits and High-Dimensional Quantum Computing / Y. Wang, Z. Hu, S. Kais, B. C. Sanders // Frontiers in Physics. – 2020. – Vol. 8. – P. 589504. – DOI 10.3389/fphy.2020.589504. – EDN YDPEGN.

3. *Sharma G., Ghosh S.* Four-dimensional Bloch sphere representation of qutrits using Heisenberg-Weyl Operators. – 2021.

4. *Asadian A., Erker P., Huber M., Klöckl C.* Heisenberg-Weyl Observables: Bloch vectors in phase space. Physical Review A. – 2016. – 94. 10.1103/PhysRevA.94.010301.

5. *Maslennikov V. V., Demidova L. A.* Modification of a Quantum-inspired Genetic Algorithm for Numerical Optimization Using Qudit under Conditions of Simulating Quantum Decoherence. Computational Nanotechnology. – 2024. – Vol. 11, No 2. – P. 58–85. (In Rus.). DOI: 10.33693/2313-223X-2024-11-2-58-85. EDN: MRWGYA

УДК 004.942

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАЗМЕРА НАНОКРИСТАЛЛА СЕРЕБРА НА ЕГО ПРОСТРАНСТВЕННУЮ СТРУКТУРУ В РАМКАХ МОДЕЛИ САТТОНА — ЧЕНА

О. Г. Деста[1], М. И. Быкова[2], Ю. К. Тимошенко[2]

[1]Mai-Nefhi College of Science, Asmara, Eritrea
[2]Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе методом молекулярной динамики в рамках полуэмпирической математической модели Саттона — Чена выполнен численный анализ влияния размера нанокристалла серебра на его пространственную структуру в центральной области. Рассматривались нанокристаллы, содержащие 14, 172, 424, 666 и 1688 атомов. Предложен подход анализа пространственной структуры нанокристалла на основе расчета положений атомов в пространстве относительно центра масс.
Ключевые слова: нанокристалл, серебро, математическая модель, Саттон —Чен, метод молекулярной динамики.

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию наносистем в связи с довольно широким их применением в науке и технике. Количество задач, связанных с этими системами, возрастает с каждым годом. Очевидно, что форма и протяженность наносистем (система называется наноразмерной, если её протяженность хотя бы в одном пространственном направлении находится в интервале 1 ÷ 100 нм) влияют на физико–химические свойства. В данной работе численно исследуется влияние размера нанокристаллов кубической формы на положения атомов в пространстве. Когда количество атомов в наносистеме велико, то чаще всего используются полуэмпирические модели. Такого рода полуэмпирические подходы многочисленны и будут актуальны и в будущем; см., например, публикации [1, 2]. Мы ранее также использовали преимущественно полуэмпирическую модель межатомных взаимодействий Саттона — Чена при компьютерном моделировании механических свойств металлических сплавов [3–7]. В настоящей работе рассматривались нанокристаллы, содержащие 14, 172, 424, 666 и 1688 атомов. Использовалась полуэмпирическая модель межатомного взаимодействия Саттона — Чена [8]. В качестве нулевого приближения пространственной соответствующей конфигурации рассматривался фрагмент в форме правильного куба или параллелепипеда гранецентрированной кубической (ГЦК) решетки кристаллического серебра.

Полная потенциальная энергия межатомного взаимодействия в рамках модели Саттона — Чена выражается следующим образом:

$$E_{tot} = \varepsilon\left[\frac{1}{2}\sum\sum_{i\neq j} V\left(r_{ij}\right) - c\sum_{i}\sqrt{\rho_i}\right], \tag{1}$$

где $V\left(r\right)=\left(\frac{a}{r}\right)^{n}$; $\rho_i = \sum_{i\neq j}\left(\frac{a}{r_{ij}}\right)^{m}$. (2)

Здесь r_{ij} — расстояние между атомами i и j, c — положительный безразмерный параметр, ε — параметр, имеющий размерность энергии, a — параметр длины, m и n — положительные целые числа. Модель Саттона — Чена с математической точки зрения довольно проста, что объясняет её популярность. Существует несколько параметризаций модели Саттона — Чена. Мы использовали параметры из работы [8]: $m=6$, $n=12$, $\varepsilon = 2.5415\cdot 10^{-3}$ эВ, $c=144.41$, $a=4.09$ Å. Эти параметры для серебра по умолчанию используются в известной компьютерной программе GULP (version 5.1) [9]. Равновесная пространственная конфигура-

ция многоатомной системы находилась методом молекулярной динамики в режиме квазидинамического демпфирования.

Для сравнения полученных результатов вычислялись координаты атомов относительно центра масс каждого релаксированного нанокристалла. Положение центра масс $\vec{r}_c$ системы N материальных точек в классической механике определяется следующим образом

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} M_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} M_k}, \tag{3}$$

где M_k — масса k-й материальной точки, а $\vec{r}_k$ — радиус-вектор, указывающий на её положение в пространстве. В нашем случае массы всех атомов равны, поэтому (3) приобретает вид

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k}{N}. \tag{4}$$

Далее, представление об удалении атомов от центра масс дает функция:

$$D(r) = \sum_{k=1}^{N} \delta\left(r - \left|\vec{r}_k - \vec{r}_c\right|\right), \tag{5}$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, $r = |\vec{r}\,|$. Для визуализации $D(r)$ обычно заменяют дельта-функцию Дирака гауссовской функцией подходящей полуширины:

$$D(r;\sigma) = \sum_{k=1}^{N} g(r,\sigma,\mu_k), \tag{6}$$

где $\mu_k = |\vec{r}_k - \vec{r}_c\,|$; $g(r,\sigma,\mu_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r-\mu_k}{2\sigma^2}\right)$. (7)

В табл. 1 приведены численные значения абсцисс пиков функции $D(r;\sigma)$.

Таблица 1

Абсциссы (Å) первых трех максимумов функции $D(r;\sigma)$, $\sigma = 0.05$ для нанокристаллов из 14, 172, 424, 666 и 1688 атомов. Форма стартовой конфигурации нанокристалла в единицах ребра элементарного куба ГЦК решетки

Кол-во атомов	Форма	1-й максимум	2-й максимум	3-й максимум
14	1×1×1	2.025	3.365	нет
172	3×3×3	2.035	3.495	4.555
424	5×5×3	2.025	3.525	4.525
666	5×5×5	2.035	3.525	4.555
1688	7×7×7	2.035	3.525	4.565

Из этих данных следует, что атомы, равновесные положения которых рассчитаны в рамках полуэмпирической модели Саттона — Чена очень слабо изменяются при изменении размеров нанокристаллов, хотя количество атомов в самом маленьком и самом большом из них отличаются на два порядка. Объяснить это можно тем, что параметры модели Саттона–Чена калибровались для идеального кристалла. Прояснить полученные данные могли бы расчеты с использованием квантовомеханических моделей. Тем не менее, представляется, что применение рассмотренной полуэмпирической модели к численному моделированию топологии серебряных наносистем со сложным пространственным строением, в частности, содержащих краевые дислокации, атомно-шероховатые поверхности и т. п., целесообразно и способно получить корректные результаты, как минимум, на качественном уровне.

Литература

1. *Wang D., Hu Z., Peng G., Yin Y.* Surface energy of curved surface based on lennard-jones potential // Nanomaterials. – 2021. – Vol. 11, No 3. – P. 686. – URL: http://dx.doi.org/10.3390/nano11030686.

2. *Januszko A., Bose S. K.* Phonon spectra and temperature variation of bulk properties of Cu, Ag, Au and Pt using Sutton — Chen and modified Sutton — Chen potentials // Journal of Physics and Chemistry of Solids. – 2015. – Vol. 82. – P. 67–75. URL: http://dx.doi.org/10.1016/J.JPCS.2015.03.008.

3. *Desta O. G., Bykova M. I., Timoshenko Yu. K.* Computer simulations of the influence of atomic structure disorder on the hardness of Cu – Ag and Au – Ag alloys // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – P. 012027. – URL: http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012027.4

4. *Desta O. G., Bykova M. I., Timoshenko Yu. K.* The Effect of High Hydrostatic Pressure on the Mechanical Properties of the Binary Alloys of the System AuAg3, AgAu3 and Their Components Using Computer Simulation // Journal of Computer Science & Computational Mathematics. – 2021. – Vol. 11, No 4. – P. 79–86. – URL: https://doi.org/10.20967/jcscm.2021.04.001.

5. *Desta O. G., Timoshenko Yu. K.* Comparison of MEAM–2NN and Sutton-Chen Mathematical Models for Computing Mechanical Properties of Binary Alloys of Cu – Ag // Journal of Computer Science & Computational Mathematics. – 2021. – Vol. 11, No 3. – P. 63–68. – URL: https://doi.org/10.20967/jcscm.2021.03.006.

6. *Desta O. G., Bykova M. I., Timoshenko Yu. K.* The Study of Effect of High Hydrostatic Pressure on the Mechanical Properties of Al – Cu Binary Alloys // materials of the international scientific and methodological seminar "Physical basis of modern science-intensive technologies". Voronezh: Voronezh State University of Forestry and Technologies. – 2022. – P. 17–26. – URL: http://dx.doi.org/10.34220/PFMSIT2022_17-26.

7. *Desta O. G.* The geometry optimization calculations on mechanical properties of L12 structure Al3X ANDAlX3-type (X = Au, Ag, Cu) intermetallic compounds / Desta O. G., Timoshenko Yu. K. // materials of the international scientific and methodological seminar "Physical basis of modern science-intensive technologies". Voronezh: Voronezh State University of Forestry and Technologies. – 2022. – P. 27–34. – URL: http://dx.doi.org/10.34220/PFMSIT2022_27-34.

8. *Sutton A. P.* Long-range finnis–sinclair potentials / A. P. Sutton, J. Chen // Philosophical Magazine Letters. – 1990. – Vol. 61, No 3. – P. 139–146.

9. *Gale J. D.* The General Utility Lattice Program (Gulp) / J. D. Gale, A. L. Rohl // Molecular Simulation. – 2003. – Vol. 29, No 5. – P. 291–341.

УДК 303.094.7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫПОЛНЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТА В УСЛОВИЯХ КОРРЕКЦИИ РЕШЕНИЯ ЕГО ОТДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

А. В. Дятчина, С. А. Олейникова

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Объектом исследования является стохастический проект, отдельные задачи которого допускают коррекцию. Предметом исследования является случайная величина, описывающая длительность проекта. Целью являются оценки числовых характеристик данной величины и ее закона распределения (для определения вероятности выполнения проекта в заданном временном интервале). Для достижения поставленной цели используется аппарат имитационного моделирования. В результате проведен эксперимент, позволяющий оценить гистограмму распределения и вероятности несвоевременного завершения проекта в разных условиях.

Ключевые слова: стохастический проект, случайная длительность, коррекция работ, математическое ожидание, дисперсия, закон распределения, гистограмма, имитационная модель, AnyLogic, вычислительный эксперимент.

Введение

Рассматривается задача анализа случайной величины, описывающей длительность выполнения некоторого проекта, который задается множеством последовательно-параллельных задач. Длительность решения отдельной задачи представляет собой случайную величину. Принципиальной особенностью является ненулевая вероятность выполнения задачи с ненадлежащим уровнем качества. Так, например, для IT-проектов в результате тестирования программного кода возможно нахождение некоторых ошибок, требующих устранения, выполнение какой-либо отдельной работы для обслуживающей системы может быть ненадлежащего качества и т. д. В этом случае существующие методы, используемые для оценки гистограммы длительности всего проекта и отдельных его числовых характеристик, могут давать существенные погрешности. Все это обуславливает необходимость проведения исследования случайной величины в условиях, описанных выше.

В качестве инструмента для проведения исследования выбран аппарат имитационного моделирования. В частности, среда AnyLogic имеет весь арсенал средств для имитации выполнения отдельных работ, моделирования их зависимостей и сбора необходимой статистики. В связи с этим, тематика работы посвящена постановке и проведению эксперимента для анализа числовых характеристик и закона распределения длительности проекта, который определяется совокупностью задач, допускающих коррекцию, а также анализу полученных результатов.

1. Обзор существующих методов решения задачи

Пусть имеется некоторый проект, заданный совокупностью взаимно-зависимых стохастических задач, допускающих коррекцию после завершения своего выполнения. Необходимо найти числовые характеристики случайной величины, определяющей его длительность, и оценке соответствующего закона распределения.

Данная задача относится к области управления проектами [1–5]. Наиболее распространенным методом, позволяющим получить ее решения в условиях стохастических характеристик является метод PERT. Длительности отдельных задач при этом должны быть заданы наименьшим (a), наибольшим (b) и наиболее вероятным (m) значениями. Длительность отдельной за-

дачи при этом оценивается случайной величиной, распределенной по закону бета, а ее математическое ожидание — формулой (1):

$$M^*(\xi_i) = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}. \quad (1)$$

Дисперсия такой величины оценивается, согласно правилу трех сигм:

$$D^*(\xi_i) = \frac{(b_i - a_i)^2}{36}. \quad (2)$$

При этом, согласно центральной предельной теореме, длительность всего проекта оценивается нормальным законом распределения. Математическое ожидание соответствующей случайной величины имеет следующую оценку:

$$M^*(\eta) = \sum_{k \in Krit} M^*(\xi_k). \quad (3)$$

Здесь $Krit$ — критический путь проекта; η — случайная величина, описывающая длительность проекта. Дисперсия η оценивается аналогично:

$$D^*(\eta) = \sum_{k \in Krit} D^*(\xi_k). \quad (4)$$

Следовательно, вероятность попадания случайной величины η в некоторый временной интервал $(\min, \max)$ будет оцениваться по формуле [6]:

$$P^*(\min < \eta < \max) = F_\eta^*(\max, a, \sigma) - F_\eta^*(\min, a, \sigma). \quad (5)$$

Здесь $(\min, \max)$ — интересующий временной интервал; $F_\eta^*(x, a, \sigma)$ — функция распределения нормальной случайной величины с параметром a, определяемым формулой (3), и σ, который рассчитывается как корень из дисперсии (формула (4)).

Данный метод в целом дает относительно точные результаты для математического ожидания (3) в случае, если отдельные случайные величины определяются числовыми характеристиками (1) и (2). Относительно других искомых характеристик в настоящее время он в целом наилучший по соотношению параметров «точность»-«вычислительная сложность». Однако, интерес представляет величина отклонения значений от результатов, полученных по формулам (3), (4) и (5) в случае необходимости повторного решения некоторых задач.

Данную задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть длительность каждой из взаимно-зависимых задач задана параметрами a_{i0}, b_{i0} и m_{i0}. Пусть задана некоторая вероятность $q_{i1} = 1 - p_{i1}$ коррекции решения данной задачи. Случайная величина, описывающая процесс коррекции, также может быть оценена с помощью наибольшего, наименьшего и наиболее вероятного времени a_{i1}, b_{i1} и m_{i1}. Возможны также повторные коррекции решения задачи (эти события также оценивается некоторыми вероятностями q_{i2}, q_{i3} и т. д.).

Необходимо оценить влияние процесса коррекции на распределение случайных величин (как длительностей отдельных задач, так и проекта в целом).

2. Моделирование исследуемого проекта

Для достижения поставленной цели соберем статистику о выполнении проекта с исследуемыми особенностями на разных значениях длительностей и разных зависимостях между задачами. Для этого воспользуемся аппаратом имитационного моделирования на базе среды AnyLogic [7]. Эта среда содержит объекты, необходимые для моделирования отдельных работ и их зависимостей, библиотеки статистических функций, позволяющих задать любое распределение случайным величинам, а также инструментарий для сбора статистики. Кроме того, среда позволяет добавлять для каждого события свои дополнительные действия, реализованные на Java.

Опишем моделирование случайных величин, определяющих время задержки при решении задачи. Как было отмечено ранее, для этого воспользуемся законом бета. Его плотность зависит от границ интервала длительности (a,b), а также параметров (p,q). Несложно получить соотношения, описывающие зависимость этих параметров от математического ожидания и моды [8]:

$$p = \left(\left(b - M(\xi)\right)\cdot\left(M(\xi) - a\right)^2 - D(\xi)\cdot\left(M(\xi) - a\right)\right) / \left(D(\xi)\cdot(b-a)\right) \quad (6)$$

и

$$q = \left(\left(b - M(\xi)\right)^2\cdot\left(M(\xi) - a\right) - D(\xi)\cdot\left(b - M(\xi)\right)\right) / \left(D(\xi)\cdot(b-a)\right). \quad (7)$$

Предполагается, что математическое ожидание и дисперсия для этих формул предварительно будут рассчитаны по формулам (1) и (2) соответственно.

Следовательно, для определения параметров бета-распределения для каждой работы по известным значениям наименьшего, наибольшего и наиболее вероятного времени необходимо сначала определить математическое ожидание и дисперсию по формулам (1) и (2), а затем найти значения параметров по формулам (6) и (7). Расчет реализован с помощью параметров и динамических переменных среды AnyLogic. Для каждой работы с помощью библиотеки «Системная динамика» сформированы следующие зависимости (рис. 1). Каждое значение динамической переменной определено формулами, описанными выше.

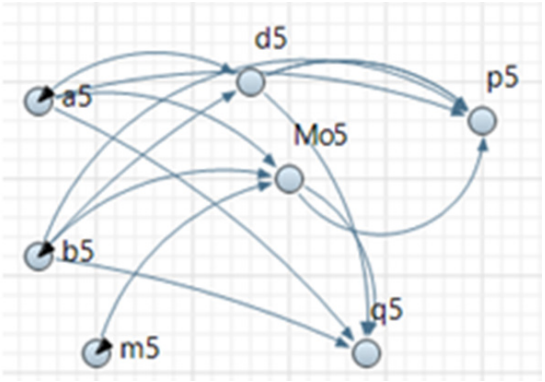


Рис. 1. Зависимости для расчета параметров p и q для бета-распределения

Далее смоделируем сам проект как множество взаимосвязанных объектов Service, каждый из которых имитирует решение задачи за время, заданное функцией beta() с параметрами, нахождение которых описывалось выше. Если некоторое событие является начальным для нескольких работ, оно моделируется блоком Split. Если для выполнения работы необходимо завершения нескольких работ, между ними ставится блок assembler. Коррекция некоторых работ добавляется с помощью условного блока типа SelectOutput, где с некоторой вероятностью заявка завершает работу, а с оставшейся требует повторного выполнения. Если при коррекции необходимо изменить параметры бета-распределения (что соответствует ситуации, когда время на доработку, например, меньше, чем время на решение задачи), то соответствующий код, задающий зависимость изменения параметров (функционально или напрямую через изменение предыдущих значений) пишется в действиях при выходе false из порта SelectOutput. Для построения гистограммы в модель добавлен объект chart, данные в который заносятся при завершении очередного прогона модели.

Пример модели приведен на рис. 2.

Здесь объекты service, имитирующие процесс выполнения работ, обозначены наименованиям job_1,…,job_11; блоки split — sp1,…,sp4; блоки assembler — asm, asm1,asm2; блоки selectOutput — so,sO1, sO2.

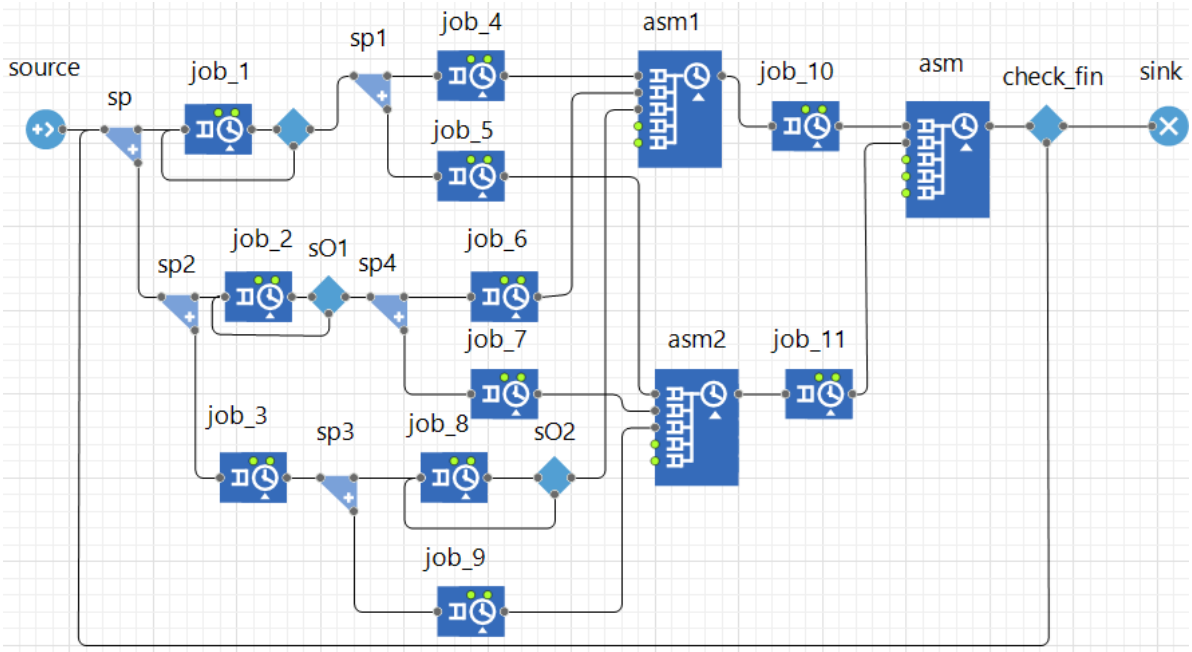


Рис. 2. Пример модели проекта

Кроме того, с помощью дополнительных параметров-счетчиков можно оценить вероятность выполнения проекта в заданном временном интервале (для этого по завершении очередного проекта проверяется попадание итоговой длительности в интересующий временной интервал; фиксируется число положительных исходов и общее число исходов).

Таким образом, получен инструментарий для анализа случайной величины, описывающей время выполнения комплекса взаимно-зависимых работ.

3. Анализ результатов моделирования

Проведем вычислительный эксперимент с целью анализа случайной величины, описывающей длительность проекта при допущении о возможной коррекции решения задач. Для каждой модели проекта менялись временные параметры задач a, b и m, вероятности коррекции решения задачи, а также сами задачи, решение которых подвергается коррекции. Кроме того, меняются сами модели проекта (количество задач и их взаимная зависимость).

Приведем в первую очередь анализ случайной величины, характеризующей длительность отдельной задачи в случае ее возможной коррекции. Как было отмечено ранее, без коррекции соответствующая случайная величина достаточно точно аппроксимировалась законом бета. В случае коррекции соответствующая случайная величина может быть представлена следующей гистограммой (рис. 3).

Как видно из данного рисунка, закон уже не будет являться одномодальным. Число составляющих будет совпадать с количеством коррекций, высота каждой «волны» распределения будет зависеть от вероятности коррекции (и, как следствие, от числа случаев в эксперименте, когда решение данной задачи было скорректировано). Кроме того, следует отметить, что у данной случайной величины изменяется правая граница диапазона (она может существенно увеличиться даже при небольшой вероятности коррекции) и, как следствие, дисперсия.

Далее проанализирована специфика случайной величины, описывающей длительность всего проекта, где решения задач после завершения могут быть скорректированы. На рис. 4 приведен сравнительный анализ гистограмм длительностей на одних и тех же исходных данных для случая, когда задачи не допускают коррекции (слева) и с коррекцией с вероятностью 0.05 единственной задачи, не лежащей на критическом пути проекта (справа).

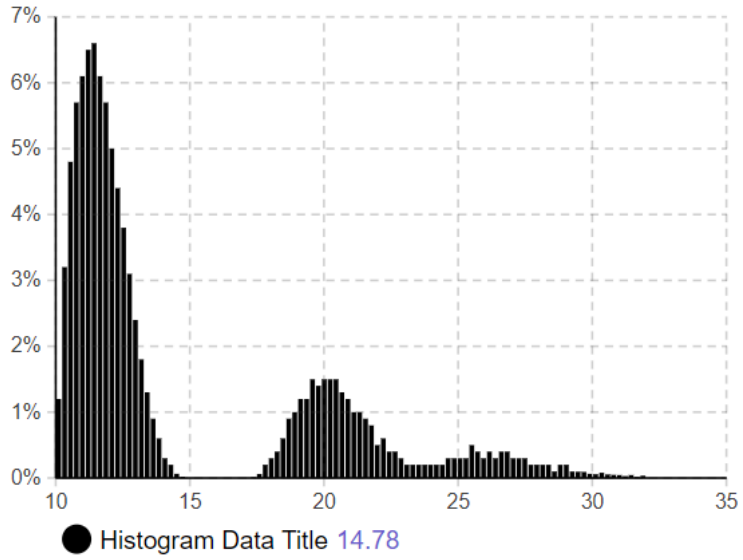


Рис. 3. Гистограмма длительности выполнения работы при ее коррекции

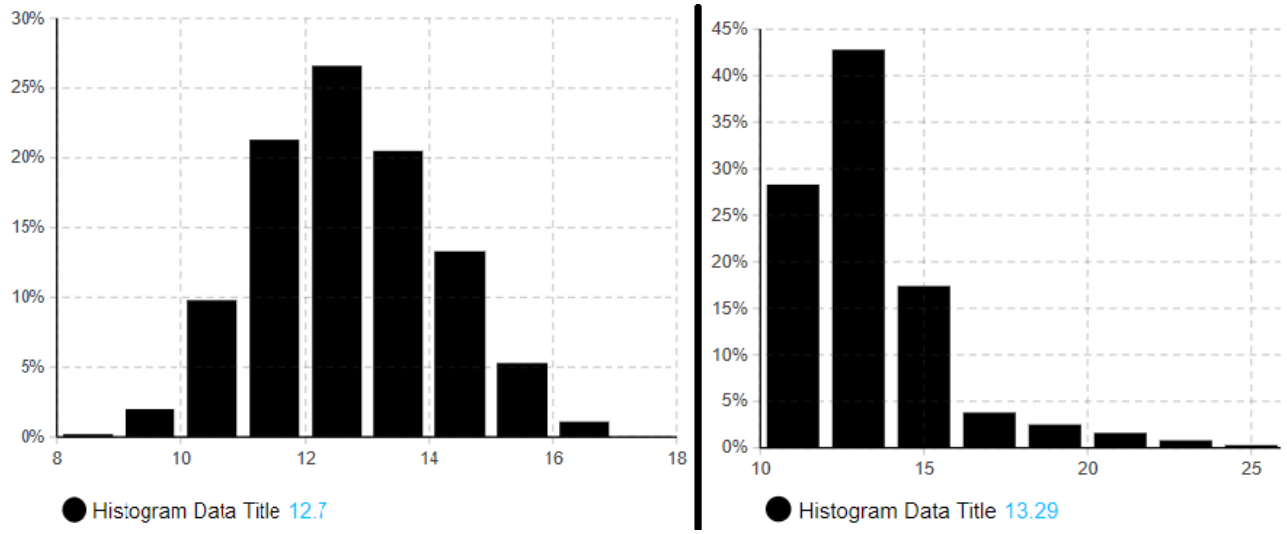


Рис. 4. Гистограмма длительности проекта
(слева — без коррекции, справа — с вероятностью 0.05 коррекции единичной работы)

Проводя анализ законов распределения длительностей на разных проектах с разными вероятностями коррекции решения отдельных задач и разным числом задач, допускающих такую коррекцию, можно сделать вывод о том, что в интервале от начала и до среднего значения гистограмма практически не претерпевает изменения. Само среднее значение незначительно увеличивается (величина его увеличения зависит от вероятностей коррекции работ). После среднего внешний вид гистограммы претерпевает существенные изменения. Это будет уже вытянутая во времени функция, количество локальных максимумов которой зависит от значений вероятностей коррекции. Так, например, на рис. 5 слева представлена гистограмма, описывающая длительность проекта, все задачи которого допускают коррекцию с вероятностью 0.05, а справа гистограмма, в которой половина задач выполнены без последующей коррекции, а решение оставшейся половины задач подвергается коррекции с вероятностью 0.05, а одной задачи — с вероятностью 0.25.

Кроме непосредственно гистограммы в модели также предусмотрена оценка разнообразных вероятностей, касающихся длительности проекта. В частности, на рис. 5 приведены оценки вероятности события, заключающегося в том, что проект будет завершен в пределах плани-

руемых сроков. Этот срок рассчитывается как $M^*(\eta)+3\sigma$, где $M^*(\eta)$ оценивается формулой (3), а σ находится с помощью формулы (4).

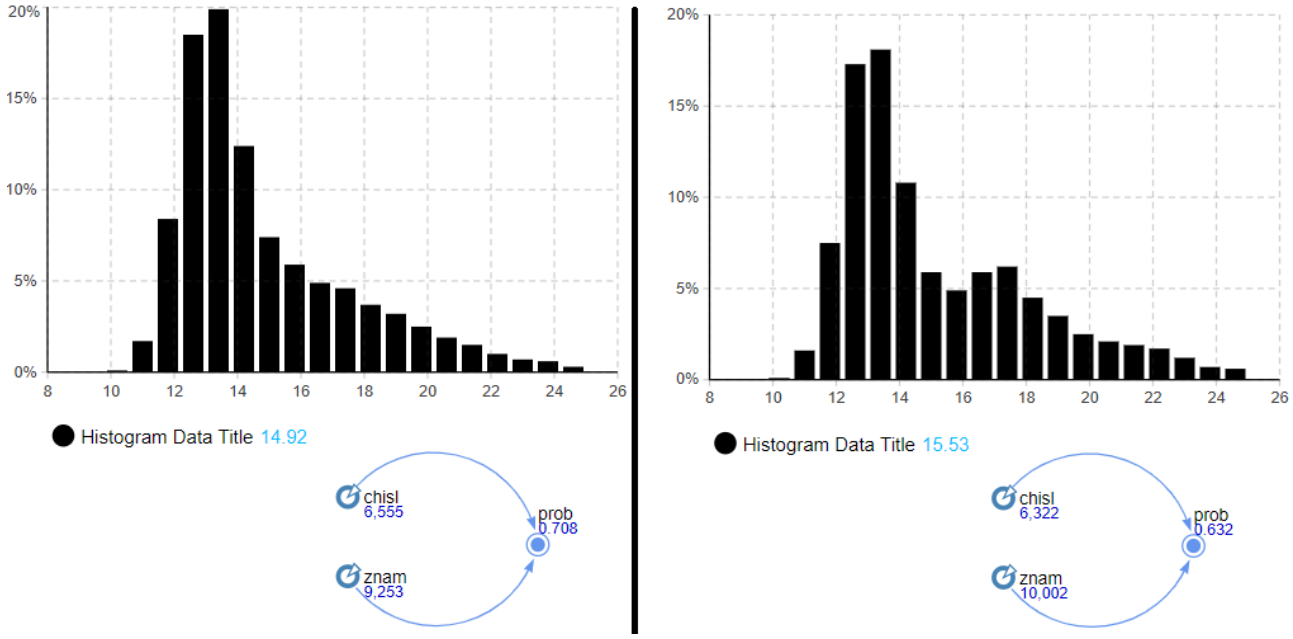


Рис. 5. Гистограммы длительности проекта
(слева с коррекцией всех работ с вероятностью 0.05;
справа — половины работ с вероятностью 0.05 и одной с вероятностью 0.25)

Таким образом, можно оценить, насколько имеющиеся в PERT оценки можно использовать для случая, если отдельные задачи проекта допускают последующую коррекцию. Как видно из рис. 5, соответствующие вероятности для описанных выше случаев равны 0.708 и 0.632, что говорит о том, что необходимо новый математический аппарат, учитывающий специфику данных проектов.

Заключение

В работе с помощью аппарата имитационного моделирования была проведена серия экспериментов, позволяющая исследовать случайную величину, которая описывает длительность проекта в случае, если отдельные его задачи допускают коррекцию. В результате экспериментов можно сделать вывод о том, что коррекция решения даже одной задачи влияет на закон распределения соответствующей случайной величины. В случае, если решения большинства задач допускают коррекцию даже с невысокой вероятностью, вероятность завершить проект вне планируемых (даже максимальных) сроков существенно возрастает. Таким образом, даже малая вероятность допущения коррекции приводит к существенному потенциальному увеличению длительности проекта.

Все это обуславливает необходимость разработки нового математического аппарата, который бы позволял в результате расчета оценок учитывать нюансы исследуемого класса задач.

Литература

1. *Цителадзе Д. Д.* Алгоритмизация процессов управления проектом / Д. Цителадзе // Научные исследования и разработки. Российский журнал управления проектами. – 2020. –Т. 9, № 1. – С. 12–21.

2. *Терентьева З. С.* Гибкие методы управления проектами, анализ и сравнение / З. С. Терентьева, И. А. Хализова // Азимут научных исследований: экономика и управление. –2019. – Т. 8, № 1 (26). – С. 374–376.

3. Математические основы управления проектами: учеб. пособие / С. А. Баркалов, В. И. Воропаев, Г. И. Секлетова [и др.]; под ред. В. Н. Буркова. – М. : Высш. шк., 2005. – 423 с.

4. *Кендалл И.* Современные методы управления портфелями проектов и офис управления проектами: Максимизация ROI / И. Кендалл, К. Роллинз; пер. с англ. – М. : ЗАО «ПМСОФТ», 2004. – 576 с.

5. *Новиков Д. А.* Управление проектами: организационные механизмы / Д. А. Новиков. – М. : ПМСОФТ, 2007. – 140 с.

6. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.

7. *Borshchev A.* The Big Book of Simulation Modeling. Multimethod Modeling with AnyLogic 6 [Электронный ресурс] // AnyLogic.ru. URL https://www.anylogic.ru/resources/books/big-book-of-simulation-modeling/.

8. *Олейникова С. А.* Вычислительный эксперимент для анализа закона распределения случайной величины, описывающей длительность проекта в задачах сетевого планирования и управления / С. А. Олейникова // Экономика и менеджмент систем управления. – 2013. – № (9). – С. 91–97.

УДК 656.132

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРАТЕГИЙ УТИЛИЗАЦИИ ТЕПЛОТЫ ВОЗДУХА ВЫВОДИМОГО ИЗ САЛОНА ЭЛЕКТРОБУСА

А. М. Ермаков, Р. Р. Салахов, И. Р. Хафизов, А. Ф. Закиров

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева - КАИ

Аннотация. Эксплуатация электробусов в российских климатических условиях сталкивается с увеличенным потреблением энергии в холодное время года. Для увеличения пробега электробуса на одном заряде необходимо использовать все имеющиеся ресурсы на борту электробуса, в том числе и теплоту салонного воздуха. В данной работе рассмотрены стратегии утилизации теплоты салонного воздуха электробуса. Для анализа стратегий использования теплоты воздуха создана одномерная численная модель электробуса, включающая в себя салон электробуса с учетом геометрии и характеристиками ограждающих конструкций, жидкостный контур терморегулирования силовых электрических компонентов и парокомпрессионную климатическую установку. Моделирование проведено в диапазоне температур от минус 30 °С до плюс 40 °С.
Ключевые слова: электробус, климатическая система, теплота салона, численное моделирование, утилизация, теплообмен.

Введение

Одной из главных проблем использования электрических автобусов в России, является эксплуатация его в холодное время года, когда на обеспечение микроклимата салона может уходить значительная часть энергии батарей [1].

Исследователи по всему миру ищут способы снижения затрат на обогрев салона электромобилей в холодное время года. Предлагаются различные способы, одним из наиболее перспективных является использование теплоты воздуха, выводимого из салона, где также есть несколько направлений её использования.

В работе [2] предлагается использовать теплоту воздуха, выводимого из салона для терморегулирования тяговых батарей и поддержании микроклимата салона, за счет смешивания выводимого воздуха со свежим воздухом, поступающим в салон, при такой конфигурации использования теплоты, продемонстрированы быстрая реакция по поддержанию микроклимата, но такой режим потребовал увеличение энергопотребления на 10 %.

В работе [3] рассматривается вариант использования теплоты салона в испарителе климатической установки, повышая таким образом температуру испарения и увеличивая термодинамическую эффективность парокомпрессионной установки и коэффициент преобразования от 2,05 до 4,71, обеспечивая таким образом экономию энергии на 13,2 %.

В работе [4] проведена оценка использования теплоты салона электробуса в испарителе парокомпрессионной установки в холодное время года, что приводит к увеличению коэффициента преобразования парокомпрессионной установке, работающей в режиме теплового насоса на 25,55 %, в работе [5] увеличение составляет 13,2 %, а работе [6] увеличение — 18,9 %.

В российском научном сообществе, работ, посвященных использованию теплоты салонного воздуха электробусов мало, примером подобной работы может служить [7], где рассматривается использование теплоты воздуха, выводимого из пассажирского вагона с помощью пластинчатых или роторных теплообменников, что позволяет снизить затраты тепловой энергии для обеспечения микроклимата на 50–65 %. Таким образом, необходимо сравнить различные подходы при утилизации теплоты салонного воздуха в испарителе парокомпрессионной установки или дополнительном рекуператоре, подогревающим воздух, поступающий в салон.

Целью данной работы является исследование стратегий использования теплоты салонного воздуха при работе в объединенной системе термоменеджмента электробуса со сравнением вышеперечисленных подходов.

1. Численное моделирование работы утилизатора теплоты электробуса

1.1. Постановка задачи

Для оценки затрат на поддержание микроклимата в салоне электробуса создана подробная модель электробуса, которая включает в себя как расчет ограждающих конструкций электробуса с учетом температуры окружающего воздуха, скорости электробуса, так и расчет температуры салонного воздуха с учетом количества пассажиров, а также систему охлаждения силового электрооборудования. В одномерной модели реализованы алгоритмы управления, которые позволяют производить оценку работы комплексной системы термоменеджмента, как в установившихся режимах, так и смешанном и городском циклах.

Одномерная модель системы термоменеджмента электробуса условно разбита на блоки, которые в отдельности верифицированы:

– блок задания внешних условий, в котором задается температура внешнего воздуха. Материалы ограждающих конструкций салона электробуса. Также задается плотность энергии солнечного излучения, которая представляет собой аппроксимацию данных по плотности солнечного излучения в г. Москва и средней температуры окружающего воздуха, при температуре ниже минус 20 °C значение плотности теплового потока равняется нулю;

– блок задания нагрузок на электробус, в котором по температуре окружающего воздуха определяется целевая температура в салоне. Также в блоке задается нагрузка на силовое электрооборудование для расчета его тепловыделений, которая может быть как постоянная, так и нестационарной по смешанному циклу или городскому циклу;

– блок расчета ограждающих конструкций салона электробуса, в котором заданы площади боковых панелей, крыши и окон салона электробуса с учетом их расположения (вертикальное или горизонтальное) для расчета тепловых нагрузок от солнечной радиации. Также задано количество слоев и материалы этих слоев в зависимости от ограждающей конструкции. С стороны внешних слоев на ограждающие конструкции действует скорость с температурой окружающего воздуха для расчета конвективного теплообмена. Также заданы материал и масса сидений, необходимые при расчете прогрева электробуса;

– блок расчета подачи воздуха в салон электробуса, в котором задан объем воздуха салона, вентиляторы для подачи окружающего воздуха, вентиляторы отопителей, теплообменник рекуператор теплоты салонного воздуха. Тепловыделение от пассажиров сымитировано теплообменным аппаратом, к которому подводится количество теплоты, рассчитанное как количество пассажиров, умноженное на тепловыделение одного пассажира, что необходимо при расчете в транзиентных циклах при движении по маршруту и меняющемся количестве пассажиров;

– блок расчета контура охлаждения силового электрооборудования, в котором заданы масса портальных мостов, батарей и инверторов, а также гидравлические характеристики каналов их охлаждения, для расчета коэффициентов теплоотдачи. Подвод энергии производится пропорционально действующей нагрузки и может быть как постоянным, так и меняющимся по смешанному и городскому циклу. В объединенной системе термоменеджмента обогрев и охлаждение салона реализуется через теплообменные аппараты в контуре охлаждения. Подвод и отвод тепловой энергии климатической установкой, также реализован через жидкостный теплообменник;

– блок расчета климатической установки, в котором производится расчет тепловой и холодильной мощности, а также потребление энергии компрессором. В нем задается перепад температур между хладагентом и средой. Кроме того, в нем же рассчитываются коэффициенты преобразования;

– блок алгоритмов управления системой термоменеджмента (рис. 1), в котором в зависимости от температуры окружающего воздуха происходит регулирование температуры охлаждающей жидкости и в салоне электробуса.

Рис. 1. Общий алгоритм управления системы терморегулирования

Одномерная модель в сборе содержит в себе также более 60 глобальных переменных, в которых заданы геометрические характеристики и свойства материалов, а также производится расчет геометрических характеристик теплообменных аппаратов, использующихся при расчете их теплообмена.

1.2. Одномерное численное моделирование

Для выбора наиболее рациональной стратегии использования теплоты воздуха выводимого из салона рассмотрены следующие варианты её использования:

– без утилизации теплоты отводимого воздуха;

– использование теплоты в испарителе климатической установки в холодное время года;

– использование теплоты в теплообменнике-рекуператоре, разработанном на втором этапе данного проекта.

Использование утилизации теплоты салонного воздуха осуществлялось при температуре окружающего воздуха ниже плюс 10 °C.

Без использования теплоты салонного воздуха в системе термоменеджмента (рис. 2) основная нагрузка по обогреву салона в зимнее время приходится на климатическую установку. В холодное время года потребляется значительно большее количество энергии на привод компрессора, что обусловлено большим перепадом температур в испарителе и конденсаторе.

При использовании теплоты салонного воздуха в испарителе климатической установки (рис. 3) воздух из салона смешивается с воздухом из окружающей среды и повышая его на 3–5 °C, что приводит к повышению термодинамической эффективности парокомпрессионной

установки и потребляемая мощность при этом снижается с 6,5 кВт при минус 30 °С без утилизации до 5,8 кВт при минус 30 °С при утилизации в испарителе.

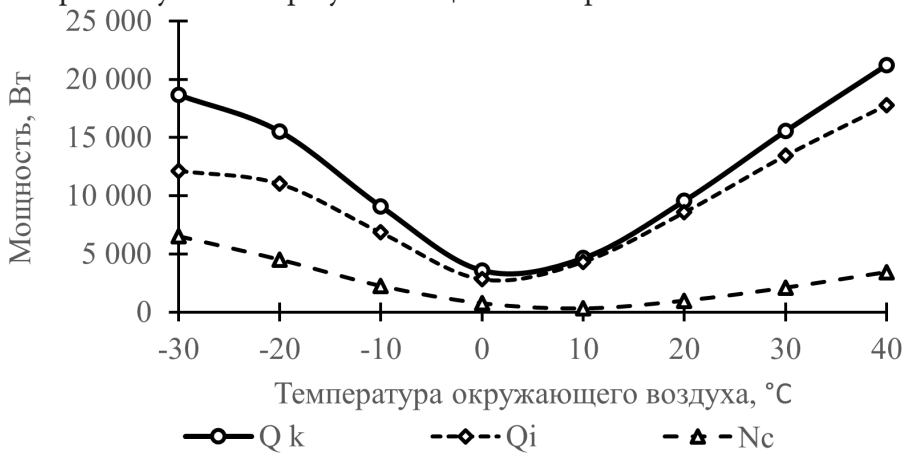


Рис. 2. Мощности в оборудовании климатической установке без использования системы утилизации салонного воздуха

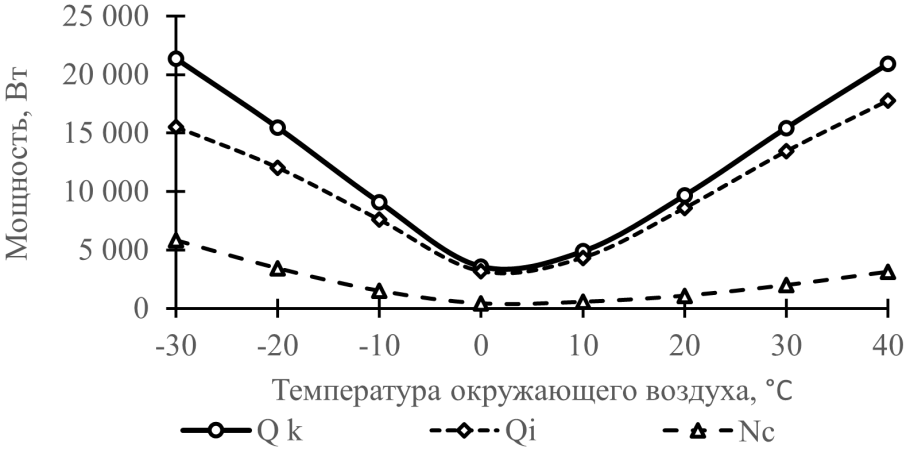


Рис. 3. Мощности в компонентов климатической установки при утилизации теплоты салонного воздуха в испарителе

При использовании теплоты воздуха, отводимого из салона, в теплообменнике рекуператоре происходит нагрев подаваемого воздуха в салон и происходит снижение тепловой нагрузки на климатическую установку в холодное время года (рис. 4), что влечет за собой снижение потребляемой мощности компрессора до 2,1 кВт.

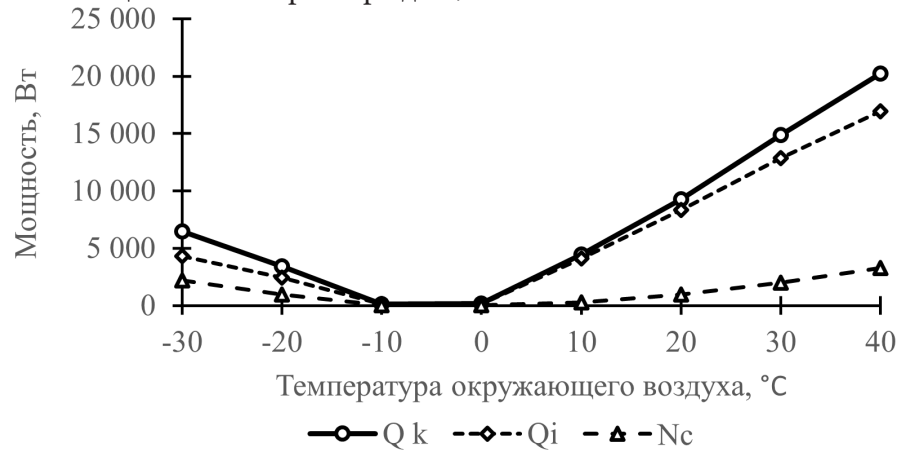


Рис. 4. Мощность компонентов климатической установки при утилизации теплоты салонного воздуха в рекуператоре

При сравнении мощности компрессора, потребляемой при рассмотренных стратегиях использования теплоты воздуха отводимого из салона (рис. 5), в теплое время года при температуре больше 0 °С практически мощности отличаются незначительно, но при низких температурах утилизация в испарителе позволяет сэкономить от 10 до 44 %, а утилизация в теплообменнике рекуператоре – от 66 до 93 %.

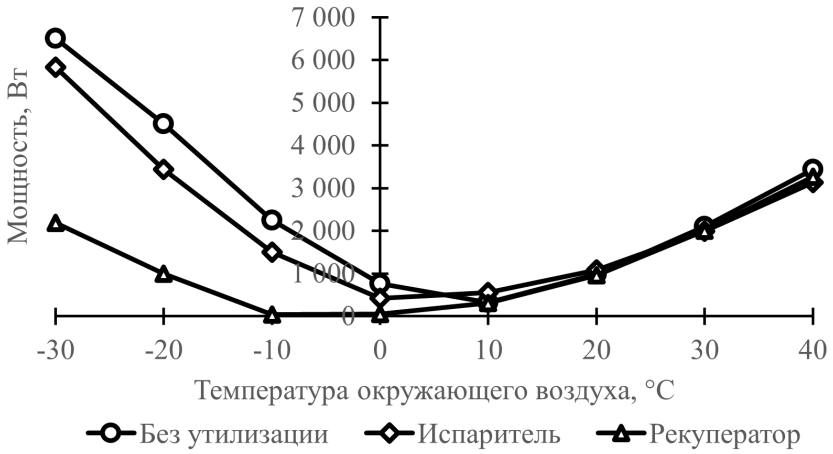


Рис. 5. Потребляемая мощность компрессора климатической установки при различных вариантах утилизации теплоты салонного воздуха

Заключение

Получены сравнительные результаты стратегий утилизации теплоты воздуха, выводимого из салона электробуса в испарителе парокомпрессионной установки и в системе утилизации теплоты салонного воздуха. При утилизации в испарителе климатической установки снижение потребляемой мощности составляет уменьшается от 44 % при 0 °С до 10 % при минус 30 °С, в то время как, при утилизации в испарителе снижение потребляемой мощности составляет от 93 % при 0 °С до 66 % при минус 30 °С. Наиболее предпочтительным вариантом в холодное время года является утилизация теплоты салонного воздуха для подогрева холодного воздуха, подаваемого в салон электробуса, что позволяет снизить нагрузку на климатическую установку и существенно снизить мощность, потребляемую компрессором.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00373, https://rscf.ru/project/22-19-00373/

Литература

1. *Девянин С. Н.* Проблемы электрификации автомобильного транспорта России / С. Н. Девянин, В. А. Марков, А. А. Савастенко, Э. А. Савастенко // Двигателестроение. – 2022. – №1(287). – С. 21–31.

2. *Choi M. G.* Integrated battery thermal management and CO2 control in electric buses using recirculated air and waste heat recovery / M. G. Choi, M. Koushaeian, J. S. Park, H. Y. Lee, J. D. Chung // Results in Engineering. – 2024. – V. 24. – 102883.

3. *Yang D.* Recent advances on air heating system of cabin for pure electric vehicles: A review / D. Yang, Y. Huo, Q. Zhang, J. Xie, Z. Yang // Heliyon. – 2022. – V. 8 (10). – e11032.

4. *Han X.* Investigation on the heating performance of the heat pump with waste heat recovery for the electric bus / X. Han, H. Zou, J. Wu, C. Tian, M. Tang, G. Huang // Renewable Energy. – 2020. – V. 152. – P. 835–848.

5. *Tian Z.* Performance evaluation of an electric vehicle thermal management system with waste heat recovery / Z. Tian, B. Gu, W. Gao, Y. Zhang // Applied Thermal Engineering. – 2020. –V. 169. – 114976.

6. *Yu X.* A novel energy-economic-environmental evaluation model for heat pump air conditioners integrated with waste heat recovery in electric vehicles / X. Yu, R. Jiang, G. Lu, H. Liu, Y. Tong, G. Qian, R. Huang, Z. Li // Case Studies in Thermal Engineering. – 2023. – V. 41. – 102605.

7. *Стоякин Г. М.* Пути улучшения характеристик климатических систем пассажирского подвижного состава / Г. М. Стоякин, А. В. Костин, С. Н. Науменко // Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. – 2020. – Т. 79, № 1. – С. 34–38.

УДК 538.911:004.942

АНАЛИЗ ДЕФЕКТА ТРЕЩИНЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ АТОМИСТИЧЕСКОГО И КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДОВ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Е. П. Ермилов

Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королёва

Аннотация. Аналитическое решение системы уравнений напряжений у края трещины при континуальном подходе является классическим подходом в анализе дефектов в металлах. Однако по определению континуальной механики, свойства материала являются однородными во всём пространстве. Метод молекулярной динамики (далее — МД) является более гибким подходом, поскольку учитывает структуру материала. Задачей данной работы является анализ дефекта трещины в кристалле никеля с гранецентрированной кубической решёткой (далее — ГЦК) с помощью атомистического подхода в ПО LAMMPS (Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator) и континуального подхода, посредством решения системы уравнений у края трещины, в том числе определение временного промежутка выполняемости закона Гука при заданных физических условиях [1].
Ключевые слова: молекулярная динамика, компьютерное моделирование, континуальная механика, потенциалы взаимодействия, дефект кристалла, гранецентрированная кубическая решётка, тензор напряжений, функция напряжений Эри, ПО LAMMPS, растягивающая нагрузка.

Введение

Молекулярно-динамическое моделирование, основанное на потенциалах взаимодействий, нашло широкое применение в вопросах анализа материалов с учётом их структур. В данной работе применяется метод «погруженного атома» (далее — “embedded atom method” / EAM), полученный на основе модификации ранней теории квазиатома. Следует отметить решение проблемы авторами потенциала учёта объёма кристаллической решётки при подсчёте полной потенциальной энергии при возмущении системы после «внедрения» атома [2].

Задача состоит в сравнении молекулярно-динамического и континуального подходов при моделировании трещины в кристалле никеля с гранецентрированной кубической решёткой с предварительным отысканием временного интервала выполнимости закона Гука при молекулярно-динамическом моделировании.

1. Теоретические сведения

Общая энергия при потенциале внедрённого атома записывается следующим образом:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\phi_{\alpha_i-\alpha_j}(r_{ij}) + \sum_i F_{\alpha_i}(\rho_i),$$

где $\phi_{\alpha_i-\alpha_j}(r_{ij})$ — парный потенциал взаимодействия атомов по химическим сортам,

$F_{\alpha_i}(\rho_i)$ — энергия «погружения» атома как функции суммарной электронной плотности на позиции атома, обусловленная всеми другими атомами в системе (соответствует притяжению атомов) [1].

Запишем систему уравнений у края острой трещины для функции напряжения Эри χ:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \\ \sigma_r = \nabla^2 \chi - \sigma_\theta, \\ \tau_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \chi}{\partial \theta}\right). \end{cases}$$

где θ — угол при трещине,

r — радиальная координата трещины [2].

Решением данной системы является множество компонент тензора напряжений, одним из множителей которого являются универсальные угловые распределения. Компоненты тензора в данной работе реализованы функциональным программированием на языке Python.

2. Экспериментальная часть

С целью определения временного интервала и скорости деформации было произведено моделирование в ПО LAMMPS с построением графика «напряжения-деформации». Написана инструкция в ПО по созданию кубической структуры ГЦК никеля с линейным размером 10 Å. Среда описывается NPT ансамблем с температурой равновесия 300 K с загрузкой потенциала внедрённого атома. Построенные графики изображены на рис. 1.

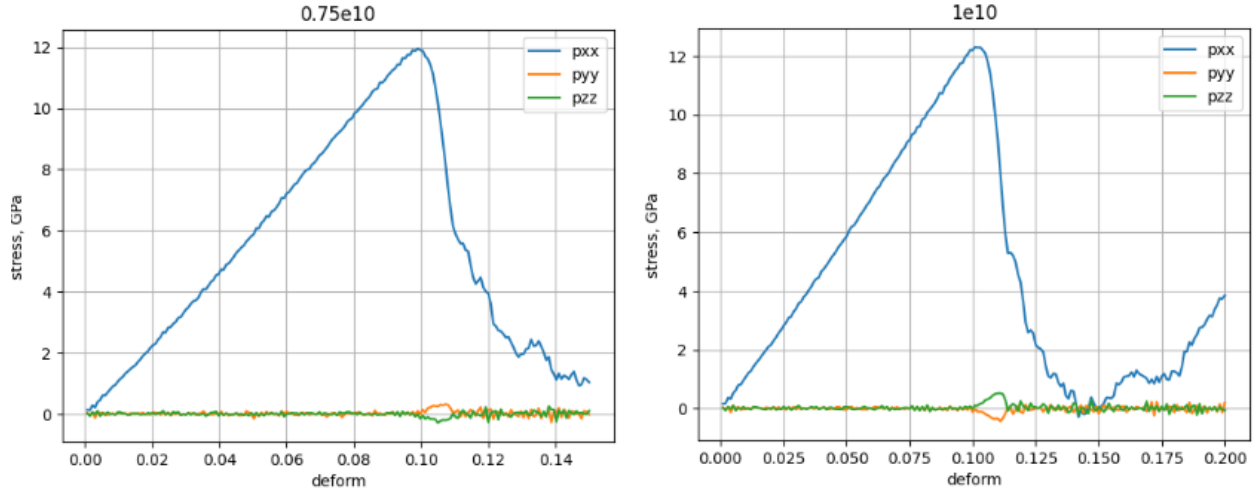


Рис. 1. Графики «напряжение – деформация»

Из графиков наблюдается сохранение закона Гука до временного шага 10 пс для данного случая. Дальнейшие явления не рассматриваются. Выбирается скорость растяжения 0,1.

Далее производим создание структуры в программном пакете LAMMPS (в виде инструкции) в виде пластины из 200000 атомов с линейными размерами $(350,63 \times 350,63 \times 10,52)$ Å. Входной параметр решётки равен 3,524. Создана трещина длиной 38,48 Å методом удаления взаимодействий между атомами, затем применилась растягивающая нагрузка вдоль оси y по полученной скорости нагрузки. Далее произведён дамп координат и тензоров напряжений в ПО OVITO. Данное ПО обладает возможностью выделения цвета по значению определенных параметров через функцию expression selection, с помощью которой произведено усечение структуры в кольцо для построения графика распределения компонент напряжения от угла в окружности молекулярно-динамическим методом (рис. 2). Через color coding были выведены компоненты напряжений для каждого временного шага, а также произведено построение двух графиков функции зависимостей компонент напряжений от угла при временных шагах 2,5; 5; 7,5; 10 пс (рис. 3–6).

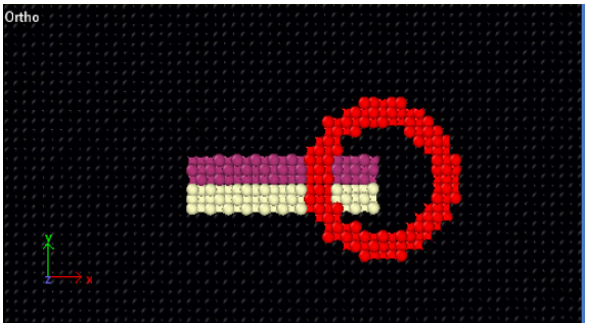


Рис. 2. Кольцевая структура в ПО OVITO

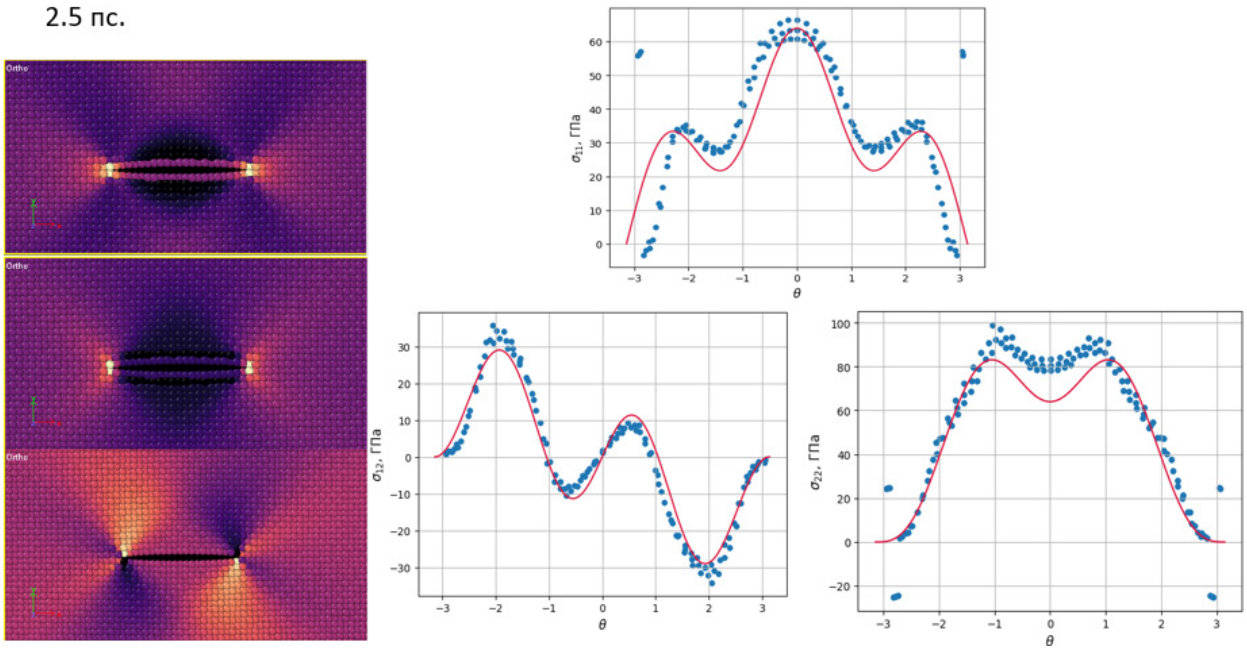


Рис. 3. Распределение полей напряжений и графики при 2,5 пс

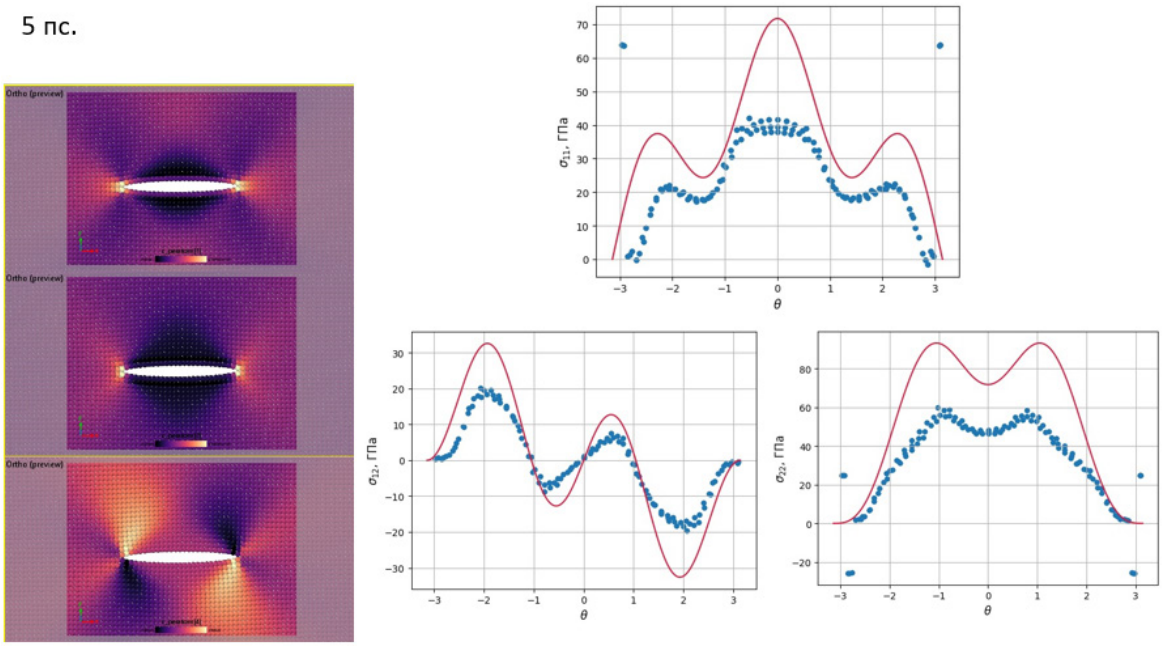


Рис. 4. Распределение полей напряжений и графики при 5 пс

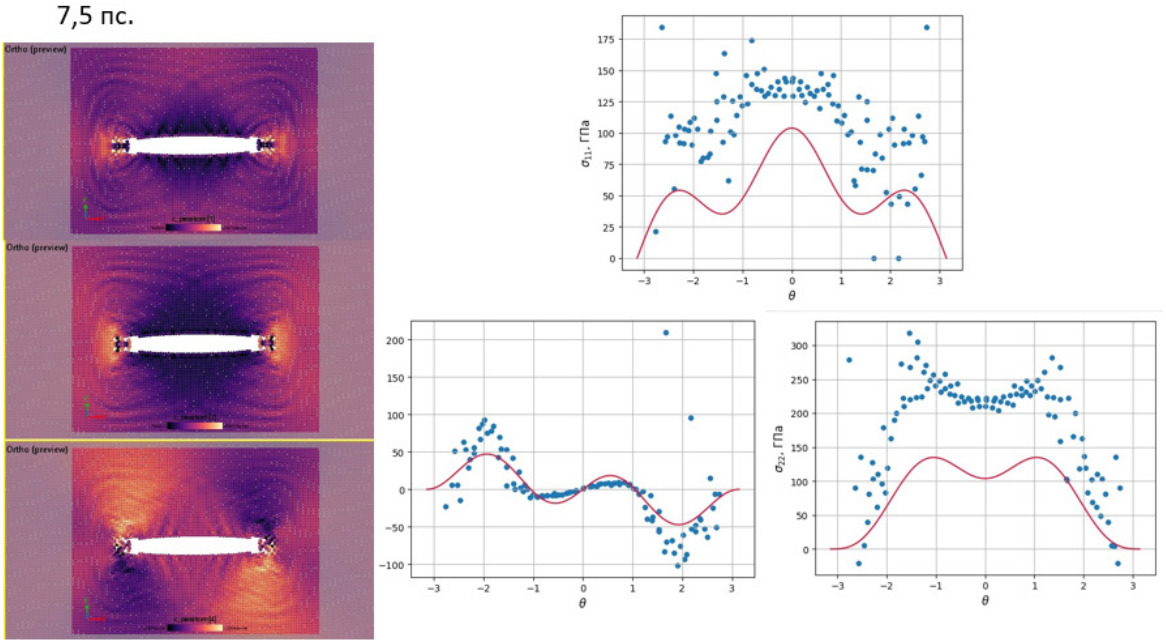


Рис. 5. Распределение полей напряжений и графики при 7.5 пс

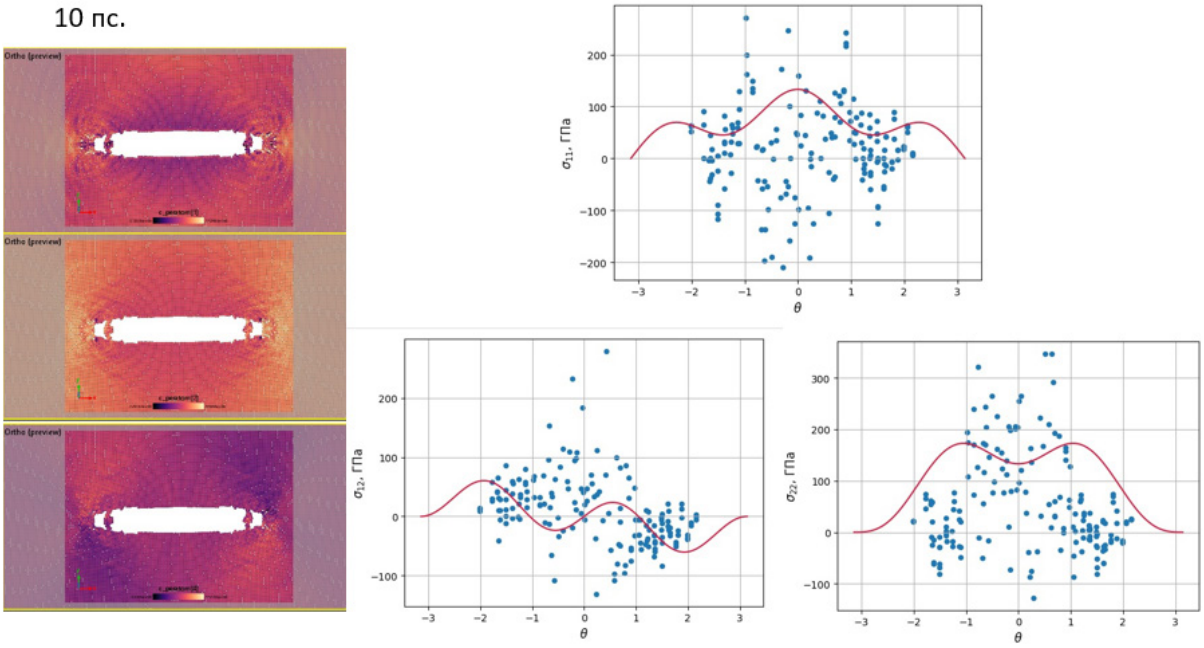


Рис. 6. Распределение полей напряжений и графики при 10 пс

Наблюдаем соответствие континуального и атомистического подхода для никеля с структурой ГЦК (для временных шагов 2,5; 5 пс), соответствие подходов для одной из компонент для временного шага 7,5 пс, для 10 пс наблюдаем отсутствие связи. Соответствие выполняется в приблизительно временных рамках действия закона Гука при температуре 300 К и скорости растяжения 0,1.

Заключение

Таким образом получаем соответствие континуального и атомистического подходов для никеля в гранецентрированной кубической решётке при временных шагах менее или равно 5 пс. При увеличении временного шага два метода показывают приращение разности между

собой. Отсюда следует, что при стремлении к временным шагам, где закон Гука не представляется в линейной форме, два подхода показывают большее несоответствие.

Литература

1. *Мушанкова К. А.* Применение молекулярно-динамического моделирования к анализу полей напряжений анизотропных материалов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4–6 декабря 2023 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 573–576.

2. *Степанова Л. В.* Экспериментальное и конечно-элементное опреде-ление коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I / Л. В. Степанова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 237–249.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА В ГАРМОНИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ТЕПЛА

О. И. Иванищева, А. А. Левченко

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье исследуется характер влияния различных параметров стохастической модели теплопроводности на значение характеристики температурного поля неоднородного материала. Построены зависимости математического ожидания и дисперсии стохастического температурного поля от глубины слоя и статистических характеристик неоднородности Рассмотрены экспоненциальный и нормальный законы распределения коэффициента теплопроводности среды. Моделирование 2D и 3D образов проведено в системе компьютерной математики.

Ключевые слова: гармонический поток тепла, неоднородное тело, функции Бесселя, стохастическая модель материала, коэффициент теплопроводности, математическое ожидание, дисперсия.

В работе рассмотрена стохастическая модель на основе краевой задачи теплопроводности для неоднородной среды. Моделирование проведено на основе полученной многопараметричекой модели с использованием разделов библиотеки системы компьютерной математики Mathcad [1].

1. Исследование температурного поля тела в гармоническом потоке тепла

1.1. Температурное поле слоя в гармоническом потоке тепла

Расположим координатные оси x, y в верхней плоскости, ограничивающей слой, ось z направим вниз. Таким образом, в рассматриваемых ниже задачах $\lambda(x, y, z) = \lambda(z)$.

Примем, что граничные условия на каждой из плоскостей, ограничивающих слой, одинаковы по всему ее протяжению.

При рассмотрении слоя толщиной h удобнее представить функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = B_1 \operatorname{sh} \gamma z + B_2 \operatorname{ch} \gamma z.$$

2. Распределение температур в неоднородном теле

2.1. Вариант материала полосы с неоднородностью теплофизических свойств, подчиняющейся степенному закону

Если коэффициент теплопроводности изменяется по закону

$$\lambda(z) = \lambda_0 (1 + \varepsilon z)^{\mu+1},$$

то $f(z)$ выражается через бесселевы функции [2]. Введем новую независимую переменную $\xi = 1 + \varepsilon z$, обозначим $\delta = \gamma / \varepsilon$, тогда [3]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\mu+1}{\xi} \frac{df(\xi)}{d\xi} - \delta^2 f(\xi) = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение приводится к уравнению Бесселя [4] подстановкой

$$f(\xi) = \xi^{-\frac{\mu}{2\nu}} (\xi),$$

в результате которой получаем

$$\frac{d^2v}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dv}{d\xi}-\delta^2 v-\frac{\mu^2}{4\xi^2}v=0.$$

Следовательно, решение уравнения (1) имеет вид

$$f(\xi)=\xi^{-\mu/2}\left[B_1 I_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)+B_2 K_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)\right]. \qquad (2)$$

Если μ есть нечетное число, то $f(\xi)$ выражается через элементарные функции.

В частном случае $\mu=0$, если коэффициент теплопроводности изменяется по линейному закону,

$$f(\xi)=B_1 I_0(\delta\xi)+B_2 K_0(\delta\xi). \qquad (3)$$

В задаче о полупространстве необходимо положить в (2), (3) $B_1=0$ для того, чтобы избежать неограниченного возрастания $f(\xi)$ при $z\to\infty$.

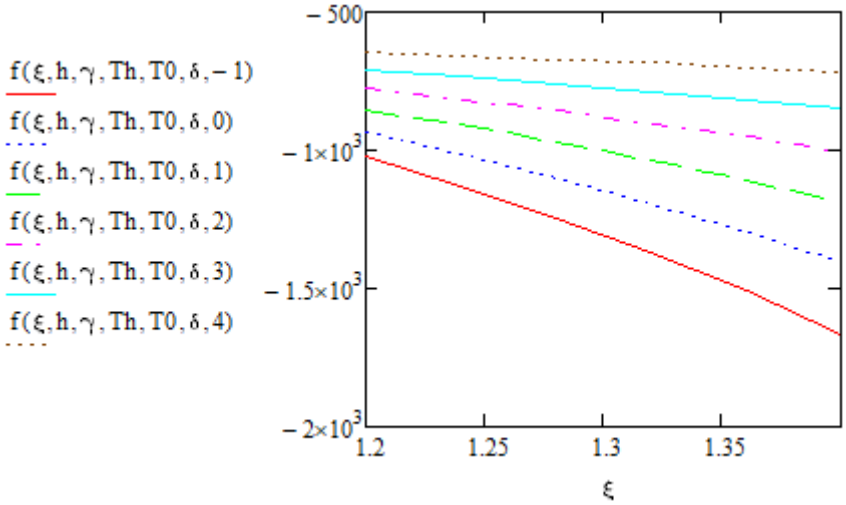


Рис. 1. Зависимость характеристики температурного поля от глубины слоя при различных значениях показателя степени функции, описывающей неоднородность теплофизических свойств материала

Увеличение показателя степени приводит к возрастанию температуры в каждом сечении. Это влияние увеличивается с глубиной слоя.

С увеличением параметра μ скорость изменения температуры уменьшается и стремится к постоянной величине.

3. Статистическая обработка результатов моделирования

3.1. Построение математического ожидания стохастического температурного поля

В случае экспоненциального закона распределения случайного параметра имеем

$$\left\langle f(\xi)\right\rangle=\int_0^\infty \xi^{-\mu/2}\left[\left(\frac{q_h}{\lambda_0\gamma\cosh\gamma h}-T_0\tanh\gamma h\right)I_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)+T_0K_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)\right]ke^{-k\lambda_0}d\lambda_0.$$

В случае нормального закона распределения случайного параметра имеем

$$\left\langle f(\xi)\right\rangle=\int_0^\infty \xi^{-\mu/2}\left[\left(\frac{q_h}{\lambda_0\gamma\cosh\gamma h}-T_0\tanh\gamma h\right)I_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)+T_0K_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)\right]\frac{1}{\frac{1}{k}\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\left(\lambda_0-\frac{1}{k}\right)^2}{2\left(\frac{1}{k}\right)^2}}d\lambda_0.$$

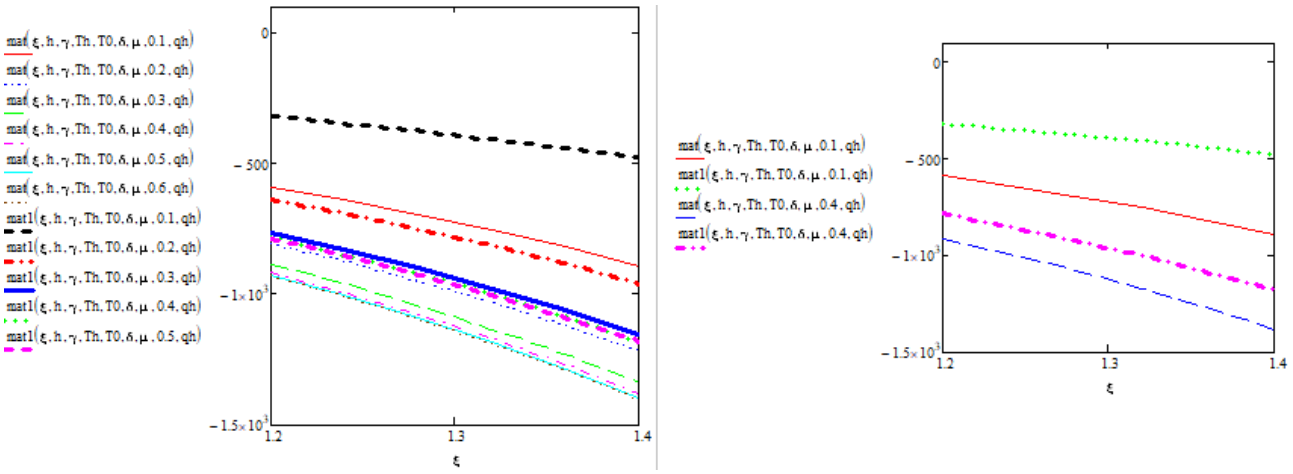


Рис. 2. Зависимость математического ожидания температурной характеристики от параметра модели k

Расчеты проведены при T0 = 200, Th = 100, $\mu = 0$.

Рассмотрены зависимости математического ожидания температурной характеристики при различных значениях параметра $k \in [0.1, 0.2, \ldots, 1]$.

Анализ показывает, что:

1) Увеличение параметра k приводит к уменьшению значения математического ожидания функции.

2) С увеличением глубины слоя влияние параметра k на математическое ожидание температурной характеристики увеличивается.

3) Чем ближе значение параметра k к 1, тем меньше разброс.

4) При нормальном законе распределения математическое ожидание принимает большие значения, чем при экспоненциальном. Влияние параметра k на математическое ожидание при нормальном законе более заметно.

5) Зависимости имеют монотонный характер.

3.2. Оценка дисперсии стохастической характеристики температуры

В случае экспоненциального закона распределения дисперсия стохастической характеристики имеет вид

$$\mathrm{D}(\xi) = \int_0^{\infty} \left(f(\xi) - \langle f(\xi) \rangle \right)^2 k e^{-k\lambda_0} d\lambda_0.$$

При нормальном законе распределения случайной величины дисперсия имеет вид

$$\mathrm{D}(\xi) = \int_0^{\infty} \left(f(\xi) - \langle f(\xi) \rangle \right)^2 \frac{1}{\frac{1}{k}\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{-\left(\lambda_0 - \frac{1}{k}\right)^2 * k^2}{2}} d\lambda_0.$$

Расчеты проведены при T0 = 200, Th = 100, $\mu = 0$.

Рассмотрены зависимости дисперсии температурной характеристики при различных значениях параметра $k \in [0.000001, 0.00001, \ldots, 1]$.

Анализ показывает, что:

1) Увеличение параметра k до значения, близкого к 0.1, приводит к увеличению значения дисперсии функции. При дальнейшем увеличении параметра до значения 1 и больше значение дисперсии стремится к 0.

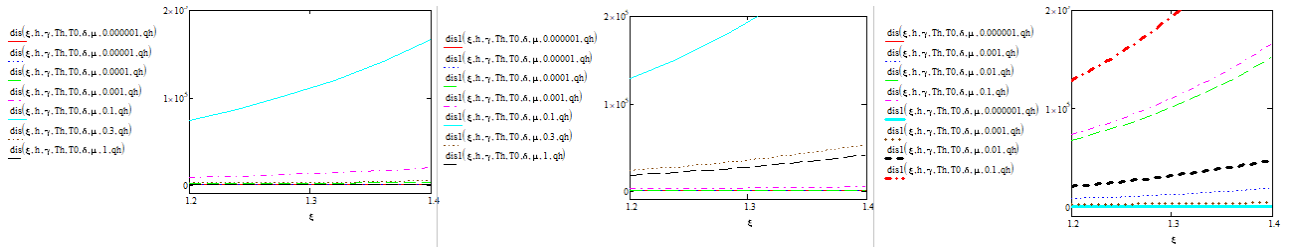


Рис. 3. Зависимость дисперсии температурной характеристики от параметра модели k

2) С увеличением глубины слоя влияние параметра k на дисперсию температурной характеристики увеличивается.

3) Чем ближе значение параметра k к 0, тем меньше разброс.

4) При нормальном законе распределения дисперсия принимает большие значения, чем при экспоненциальном. Влияние параметра k на дисперсию при нормальном законе более заметно.

5) Зависимости имеют монотонный характер.

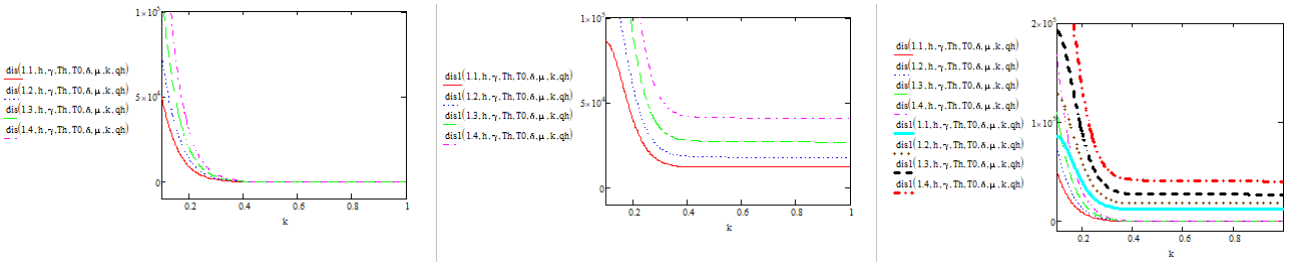


Рис. 4. Зависимость дисперсии температурной характеристики от глубины слоя ξ

Расчеты проведены при T0 = 200, Th = 100, $\mu = 0$.

Рассмотрены зависимости дисперсии температурной характеристики при различных значениях глубины слоя $\xi \in [1.1,1.2,\ldots,1.4]$.

Анализ показывает, что:

1) Увеличение глубины слоя ξ приводит к увеличению значения дисперсии функции.

2) При уменьшении значения параметра ξ влияние глубины слоя на дисперсию уменьшается.

3) Чем ближе значение параметра ξ к 0, тем меньше разброс.

4) При нормальном законе распределения значения дисперсии имеют больший разброс, чем при экспоненциальном. Влияние параметра ξ на дисперсию при нормальном законе более заметно.

5) Зависимости имеют монотонный характер.

Заключение

В работе исследован характер влияния параметров построенной модели на значение характеристики температурного поля неоднородного материала. Рассмотрены экспоненциальный и нормальный законы распределения коэффициента теплопроводности среды. Построены математическое ожидание и дисперсия стохастического температурного поля, проведен их сравнительный анализ.

Литература

1. *Кирьянов Д. В.* Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.

2. *Грей Э., Метьюз Г.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. – Перевод с англ. Коган С. Я. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1949. – 386 с.

3. *Коренев Б. Г.* Задачи теории теплопроводности и термоупругости. Решения в бесселевых функциях. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 400 с.

4. *Иванищева О. И.* Элементы статистического моделирования в задаче упругости со случайными параметрами: учебно-методическое пособие / О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. – 21 с.

УДК 528.9, 532.5

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЕФА ПОЙМ КРУПНЫХ РЕК

А. Н. Ильичева, А. Ю. Кликунова, А. В. Хоперсков

Волгоградский государственный университет

Аннотация. Исследование направлено на разработку метода построения цифровой модели рельефа (ЦМР) речной долины высокой точности. Итерационный подход построения ЦМР предполагает использование большого количества различных входных данных для достижения высокого разрешения полученных моделей, а также методов вычислительной гидродинамики. Верификация модели проводится через сравнение данных уровня воды с гидропостами Волгоградской области, что подтверждает её применимость для оценки гидродинамических процессов. Результаты исследования дают возможность более точно прогнозировать паводковые явления и принимать меры по сохранению водных ресурсов региона.

Ключевые слова: ГИС-технологии, цифровая модель гидрологического ландшафта, цифровая модель рельефа, пространственные данные, Волго-Ахтубинская пойма, Волжская ГЭС, гидродинамическое моделирование, вычислительный эксперимент, модель мелкой воды.

Введение

Изучение рельефа местности и его последующее моделирование является ключевой задачей современной географической науки. Развитие вычислительной техники и численных методов позволяют значительно расширить возможности для моделирования прикладных задач динамики жидкости для территорий, которые чувствительны к любым заметным гидрологическим изменениям [5, 6, 8, 9]. Особенно актуально это для анализа и прогноза состояния пойменных систем, где любое отклонение в водном балансе может привести к разрушительным последствиям для экосистем и местного хозяйства [6, 9].

Применение геоинформационного анализа и гидродинамического моделирования обеспечивает высокую точность в исследовании пространственного распределения воды, с учетом всех основных физических и топографических особенностей территории, и изменяющихся во времени метеорологических условий, гидрологических процессов и других факторов [3, 8].

Проблема негативного изменения водных ресурсов Волго-Ахтубинской поймы (ВАП), связанная с различными естественными процессами (эрозия берегов, изменения русла реки, каскад природных водоемов в период паводка) [7], антропогенными воздействиями и метеорологическими факторами [16], требует проведения мер по спасению поймы [6, 10]. Одним из вариантов решения является компьютерное моделирование паводковых событий с использованием современных высокопроизводительных вычислений, что позволяет прогнозировать последствия гидрологических изменений и разрабатывать эффективные защитные меры [6, 8].

Целью исследования является разработка метода построения высокоточной цифровой модели рельефа речных пойм с применением методов численного моделирования динамики поверхностных вод на примере северной части Волго-Ахтубинской поймы.

1. Математическая модель

Модель мелкой воды, основанная на уравнениях Сен-Венана, позволяет учитывать большое количество факторов (физических и метеорологических), влияющих на динамику тече-

ний жидкости при решении задач затопления территорий. Стандартная модель мелкой воды получается усреднением трехмерных уравнений гидродинамики [4, 13]:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_x)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_y)}{\partial y}=q(\vec{\mathbf{r}},t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial (Hu_x)}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_xu_y)}{\partial y}=-gH\frac{\partial \eta}{\partial x}+Hf_x^{(M)}+Hf_x^{(q)}+Hf_x^{(turb)}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (Hu_y)}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_xu_y)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_y^2)}{\partial y}=-gH\frac{\partial \eta}{\partial y}+Hf_y^{(M)}+Hf_y^{(q)}+Hf_y^{(turb)}, \tag{3}$$

где H — глубина воды, $\vec{\mathbf{u}}=\{u_x,u_y\}$ — вертикально усредненная скорость воды, q — поверхностные источники воды, определяемые гидрографом плотины $Q(t)$, $\eta(x,y,t)=b(x,y)+H(x,y,t)$ — уровень воды, измеряемый от отметки дна (глубина слоя воды в метрах), $b(x,y)$ — неоднородный рельеф местности, $\vec{\mathbf{f}}^{(M)}=\{f_x^{(M)},f_y^{(M)}\}$ — сила гидравлического сопротивления, которая зависит от коэффициента трения по Маннингу, $\vec{\mathbf{f}}^{(q)}=\{f_x^{(q)},f_y^{(q)}\}$ — удельная сила, описывающая импульс, связанный с источником q, $\vec{\mathbf{f}}^{(turb)}=\{f_x^{(turb)},f_y^{(turb)}\}$ — вязкая сила из-за турбулентного трения, g — ускорение свободного падения.

Для численного интегрирования уравнений (1)–(3) и моделирования динамики поверхностных вод применяется CSPH-TVD метод [6, 14]. Он представляет собой базовую версию вычислительного модуля аппаратно-программного комплекса «EcoGIS-Simulation», разработанного для проведения высокопроизводительных вычислений на суперкомпьютерах с графическими сопроцессорами [11]. Программный модуль подготавливает все необходимые входные данные, включая пространственные и временные характеристики, подробно описанные в работах [5, 6]. Моделирование проводится на равномерной прямоугольной сетке с постоянным шагом.

2. Метод построения цифровой модели рельефа

Процесс построения ЦМР основан на итерационном подходе с использованием разнородных источников информации о высотных характеристиках территории [1, 15]. В основе метода лежит разработанный алгоритм с применением геоинформационных технологий. Он сочетает результаты гидрологических исследований с данными численного моделирования динамики поверхностных вод, что предполагает применение современных методов анализа пространственных данных, позволяющих учитывать особенности водоразделов, русел, прибрежных зон и других элементов рельефа, влияющих на динамику водных потоков (рис. 1).

При решении практической задачи затопления территории, изучение динамики течения жидкости требует детальной информации о свойствах осадков, поверхностных и подземных вод, придонном трении и уклоне донной поверхности, инфильтрации и сгонно-нагонных явлений. Поэтому первый этап построения ЦМР предполагает исследование речной поймы в рамках натурных гидрологических данных, а именно данных наблюдений об изменениях береговых линий многочисленных водоемов во время весеннего паводка.

Второй этап построения ЦМР сводится к созданию ряда тематических слоев карты высокого разрешения, содержащих в себе информацию о структуре рельефа исследуемой территории Волгоградской области:

1) глобальный рельеф поверхности суши, построенный на основе данных дистанционного зондирования Земли (SRTM и SRTMGL1);

2) модель рельефа дна исследуемого участка реки Волга на основе лоцманских карт: векторизация изобат для уточнения модели дна речной сети с добавлением абсолютных отметок

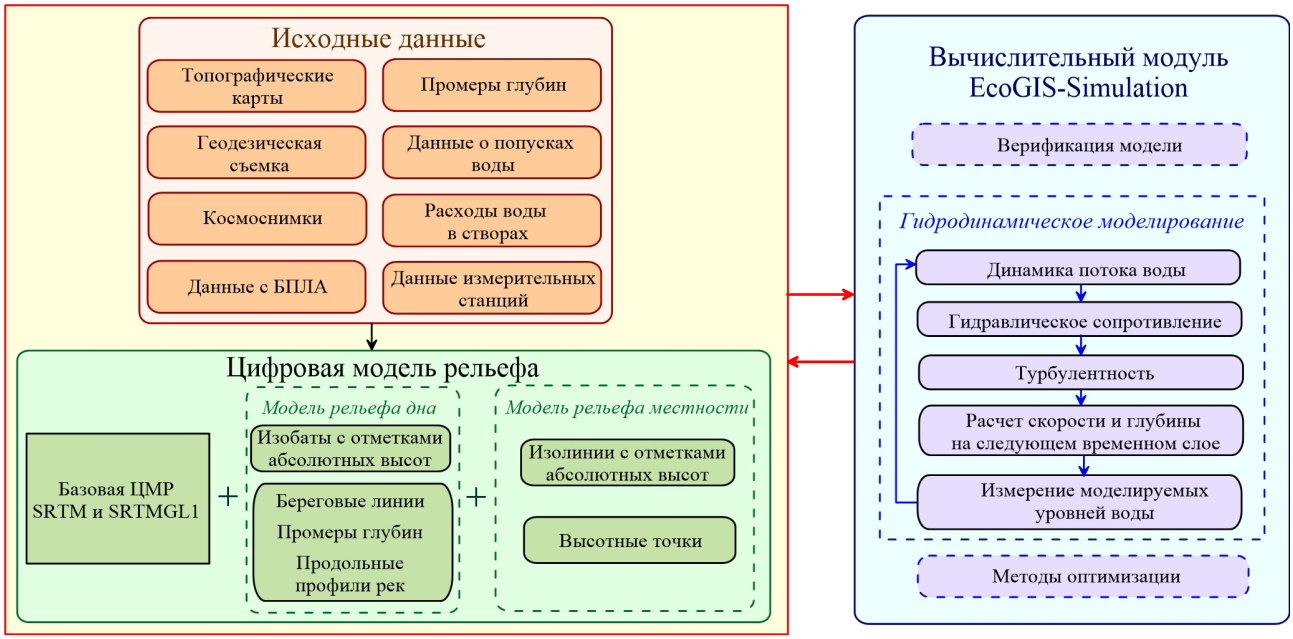


Рис. 1. Общая схема метода построения ЦМР

высот с шагом 0.5 метра, в соответствии с числовыми значениями на карте глубин водоемов; формирование матрицы высот на основе космических снимков и топографических карт для векторизации русловой системы; аппроксимация данных промеров глубин, распределенных на все узлы расчетной сетки, с последующим созданием матрицы с высотными данными речных русел; уточнение матриц высот путем использования данных о динамике береговых линий; построение цифрового продольного профиля Волго-Ахтубинской поймы;

3) модель рельефа местности на основе проектных планов: векторизация изолиний ериков, водоемов и озер; формирование точечного слоя абсолютных высот для создания модели рельефа местности вблизи исследуемой речной сети [2].

Дополнительная обработка матриц высот проводится с использованием различных методов сглаживания и сведение разнородной топографической информации в единую систему. Построенная ЦМР воспроизводит детализированное изображение русел рек Волга и Ахтуба, включая основные ерики и пойменную часть исследуемой территории (рис. 2).

Для оценки применимости модели рельефа в решении гидродинамической задачи затопления исследуемой территории Волгоградской области используем модель в качестве входных данных в расчетном аппаратно-программном комплексе «EcoGIS-Simulation». Результатом верификации является сравнение уровней воды, полученных в результате численного моделирования с использованием построенной ЦМР, с данными, зафиксированными на трех гидрологических постах Нижней Волги: Нижний бьеф Волжской ГЭС, речной порт г. Волгоград (расположенный на расстоянии 17.5 км ниже плотины Волжской ГЭС) и пгт. Светлый Яр (расположенный на расстоянии 60 км ниже плотины Волжской ГЭС). Отличие этих рядов данных не превышает 20 см при характерных глубинах реки Волга 5–10 м.

Заключение

В рамках исследования разработан и апробирован метод построения высокоточной цифровой модели рельефа на примере северной части Волго-Ахтубинской поймы, применяемый для задач гидродинамического моделирования. Использование метода CSPH-TVD в аппаратно-программном комплексе «EcoGIS-Simulation» позволило эффективно решить задачу численного моделирования движения воды с учетом реальных особенностей местности. Разрабо-

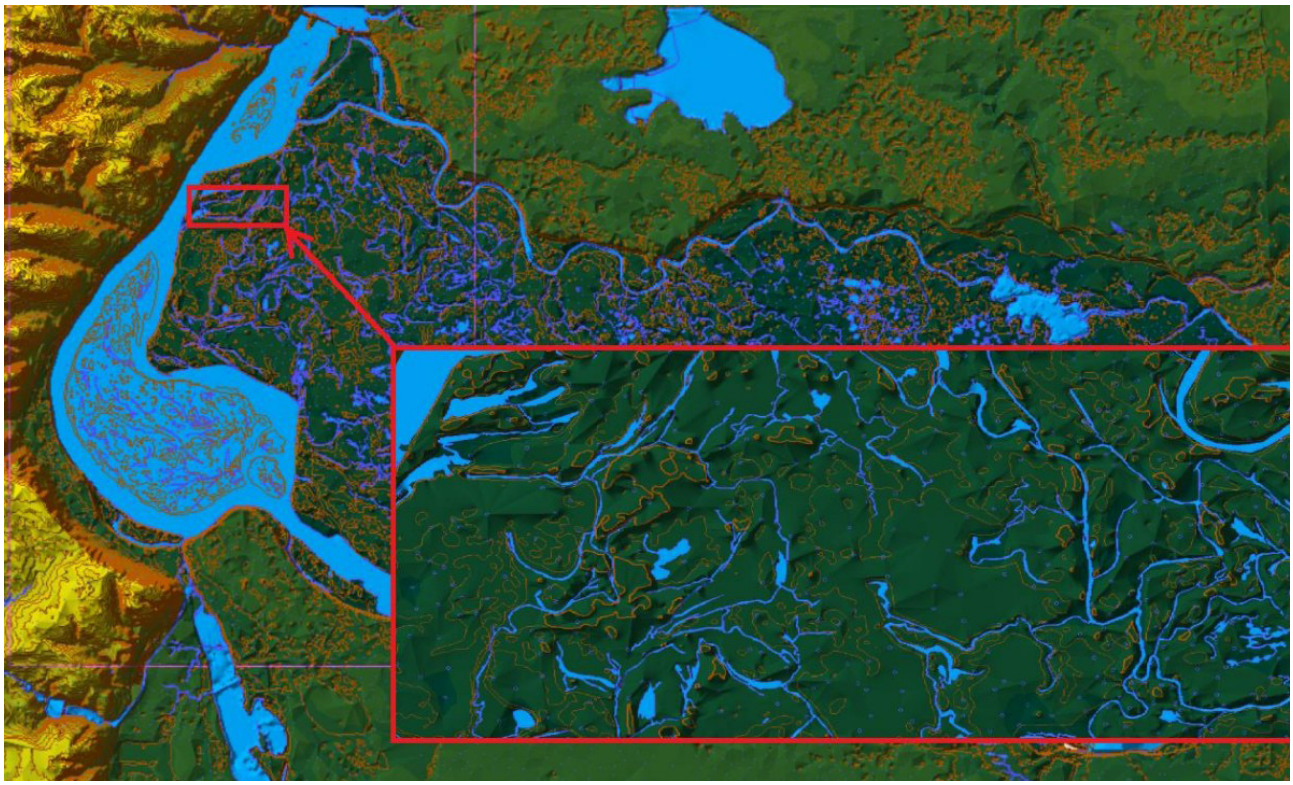


Рис. 2. Построенная цифровая модель рельефа северной части ВАП (размер элемента матрицы 10 м)

танный метод может быть использован для решения задач по управлению водными ресурсами и защиты пойменных территорий, подверженных затоплению, а также для повышения устойчивости экосистемы региона к неблагоприятным гидрологическим изменениям.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-71-00016, https://rscf.ru/project/23-71-00016/). Исследование проводится с использованием оборудования совместного исследовательского центра высокопроизводительных вычислительных ресурсов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Литература

1. *Кликунова А. Ю.* Метод построения кадастровых карт затопления речных долин на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования / А. Ю. Кликунова // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2023. – Т. 26, № 3. – С. 15–25.

2. *Мальцева А. Н.* Построение цифровой модели рельефа дна участка реки Волга / А. Н. Мальцева // Материалы Научной сессии в 2 томах. – Волгоград: Волгоградский государственный университет. – 2023. – Т. 2. – С. 73–77.

3. Геодинамическая эволюция и морфоструктурный анализ западной части арктического шельфа России / Н. О. Сорохтин, С. Л. Никифоров, С. М. Кошель, Н. Е. Козлов // Вестник Мурманского государственного технического университета. Науки о Земле и смежные экологические науки. – 2016. – Т. 19, № 1/1. – С. 123–137.

4. Численное моделирование самосогласованной динамики поверхностных вод, влекомых и взвешенных наносов: I. влияние промышленной добычи песка на безопасность судоходства

в русле р. Волга / С. С. Храпов, Е. О. Агафонникова, А. Ю. Кликунова [и др.] // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2022. – Т. 25, № 23. – С. 31–57.

5. *Храпов С. С.* Численное моделирование самосогласованной динамики поверхностных и грунтовых вод / С. С. Храпов // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2021. – Т. 24, № 3. – С. 45–62.

6. *Agafonnikova E. O.* Computer simulation of the Volga river hydrological regime: problem of water-retaining dam optimal location / E. O. Agafonnikova, A. Y. Klikunova, A. V. Khoperskov // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2017. – Vol. 10, № 3. – P. 148–155.

7. *Bondareva V. V.* Dynamics of vegetation in the Volga–Akhtuba floodplain (by the example of a transect near the settlement of Bolkhuny) / V. V. Bondareva, V. B. Golub // Biology Bulletin. – 2016. – Vol. 43, № 10. – P. 1370–1376.

8. *Voronin A.* Project Optimization for Small Watercourses Restoration in the Northern Part of the Volga-Akhtuba Floodplain by the Geoinformation and Hydrodynamic Modeling / A. Voronin, A. Vasilchenko , A. Khoperskov // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. – 2018. – Vol. 973. – P. 012064.

9. *Voronin A. A.* Control model of floodplain socio-economic development process / A. A. Voronin, I. I. Isaeva // Mathematical Physics and Computer Simulation. – 2023. – Vol. 26, № 2. – P. 16–31.

10. Designing Mechanisms of the Hydrological Regime Management of the Volga-Akhtuba Floodplain Based on Geoinformation and Hydrodynamic Modelling / A. A. Voronin, A. A. Vasilchenko, A. V. Pisarev, S. S. Khrapov, Yu. E. Radchenko // Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics. – 2016. – № 1 (32). – P. 24–37.

11 *Dyakonova T.* Numerical model of shallow water: the use of NVIDIA CUDA graphics processors // T. Dyakonova, A. Khoperskov, S. Khrapov // Communications in Computer and Information Science. Supercomputing: Second Russian Supercomputing Days, RuSCDays 2016. – 2016. – P. 132–145.

12. Modeling the Territorial Structure Dynamics of the Northern Part of the Volga-Akhtuba Floodplain / I. I. Isaeva, A. A. Voronin, A. V. Khoperskov, M. A. Kharitonov // Conference: 2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – 2022. – №10 (4). – P. 313–318.

13. *Khoperskov A.* A Numerical Simulation of the Shallow Water Flow on a Complex Topography / A. Khoperskov, S. Khrapov // Numerical Simulations in Engineering and Science. – Rijeka : IntechOpen. – 2018. – № 13. – P. 237–254.

14. *Khrapov S. S.* Numerical Modeling of Hydrodynamic Accidents: Erosion of Dams and Flooding of Territories / S. S. Khrapov // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. – 2023. – Vol. 56, № 2. – P. 261–272.

15. *Klikunova A. Y.* Numerical hydrodynamic model of the Lower Volga / A. Y. Klikunova, A. V. Khoperskov // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. – 2018. – Vol. 1128, № 1. – P. 012087.

16. *Lebedeva S. V.* Flow Distribution, Flooding and Water Engineering Measures in the Volga-Akhtuba Floodplain Region: 2 Modeling / S. V. Lebedeva, I. V. Zemlyanov, A. A. Lomonosov // Russian Meteorology and Hydrology. – 2018. – Vol. 43. – P. 655–663.

УДК 004.054

ПЕНТЕСТИНГ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

А. Д. Истратов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена моделированию, реализации и анализу процесса проведения тестов на проникновение (пентестинга) информационных систем. Для моделирования атак создана тестовая модель в среде EVE-NG, включающая устройства, уязвимые к различным угрозам. В качестве инструментария использовались специализированные платформы, такие как Kali Linux и Metasploit Framework, а также сканеры уязвимостей Nmap.
Ключевые слова: кибератака, пентестинг, моделирование, Kali Linux, EVE-NG.

Введение

Информационные системы стали неотъемлемой и основной частью инфраструктуры большинства предприятий, организаций и производств. Однако параллельно с ростом их значимости увеличилось и число кибератак, что, в свою очередь, требует внимания к вопросам кибербезопасности. Определить наличие уязвимостей в такой системе возможно с помощью проведения тестирования на проникновение, или пентестинга. Пентестинг позволяет выявить уязвимости в системе до того, как они будут использованы злоумышленниками. Данная возможность является особенно важной когда речь заходит о критически важных информационных объектах.

1. Актуальность проблемы

Актуальность пентестинга в современных условиях обусловлена резким ростом числа и сложности кибератак. Организации по всему миру сталкиваются с новыми вызовами: хакеры используют более сложные методы атак, такие как целевые фишинговые кампании, эксплуатация уязвимостей нулевого дня и использование ботнетов, созданных на основе IoT-устройств. В таких условиях пентестинг становится ключевым элементом стратегии кибербезопасности, позволяя выявлять уязвимости до того, как ими воспользуются злоумышленники.

Так, Согласно данным Cybereason, 77 % компаний, которые проводили пентесты в 2023 году, сообщили о значительном улучшении уровня защиты их инфраструктуры, а Исследование компании Synopsys показало, что компании, проводившие регулярный пентестинг, снижали вероятность успешной атаки на 30–40 %.

2. Постановка задачи

При проведении пентестинга важной задачей является проектирование модели информационной системы, которая позволяет оценить уровень защищенности системы, обеспечиваемый выбранными решениями, и заблаговременно разработать эффективные механизмы борьбы с различными атаками.

Существует ряд подходов для моделирования систем, каждый из которых имеет определенные преимущества и недостатки.

Так одним из вариантов реализации может являться система имитационного моделирования (СИМ). Она представляет собой набор программных средств для создания имитационной

модели и ее симуляции (имитационного моделирования). При использовании СИМ процесс создания имитационных моделей упрощается за счет реализации атомарных компонентов (каналов, сетевых устройств, протоколов и моделей приложений), обычно используемых для создания моделей компьютерных систем. Наиболее известными примерами СИМ являются: Cisco Packet Tracer, GNS3, Omnit++, CORE и EVE-NG.

Однако наиболее точные результаты достигаются при натурном и полунатурном моделировании, при котором производится тестирование системы при помощи реальных инструментов реализации разного рода атак.

3. Реализация задачи

В качестве примера будет рассмотрена модель VLAN, простроенная с помощью системы виртуализации EVE-NG. Она будет представлять из себя 3 персональных компьютера на операционной системе Windows 7: Ultimate, которые соединены между собой сетевым коммутатором Switch. Так же одна из виртуальных машин, а именно “Win1” подключена напрямую к сети интернет “Net2”. Основным рабочим инструментом является виртуальная машина под названием “Linux”, которая основана на “Kali Linux”. С её помощью будет производится пентестинг устройств находящихся в VLAN (рис. 1).

Далее будет продемонстрирована работа виртуальной машины Linux. На рис. 2 продемонстрирована консоль, с помощью которой будет запущен графический инструмент Armitage. Получив права администратора, необходимо ввести Armitage.

Так как утилита была предустановлена заранее, происходит подключение к базе данных проекта Metasploit. На рис. 3 продемонстрирован главный экран Armitage. По центру будут выведены найденные устройства исследуемой сети. В нижней части экрана располагается консоль, которую так же можно задействовать. Используя встроенный Nmap Scan, были найдены устройства внутренней сети.

Кроме обнаруженных портов, Armitage предоставляет базу данных атак, которые могут быть реализованы с помощью выявленных уязвимостей. Так, перепробовав несколько предложенных атак, было найдено несколько успешных, которыми злоумышленник может воспользоваться. Одна из таких приведена рис. 4.

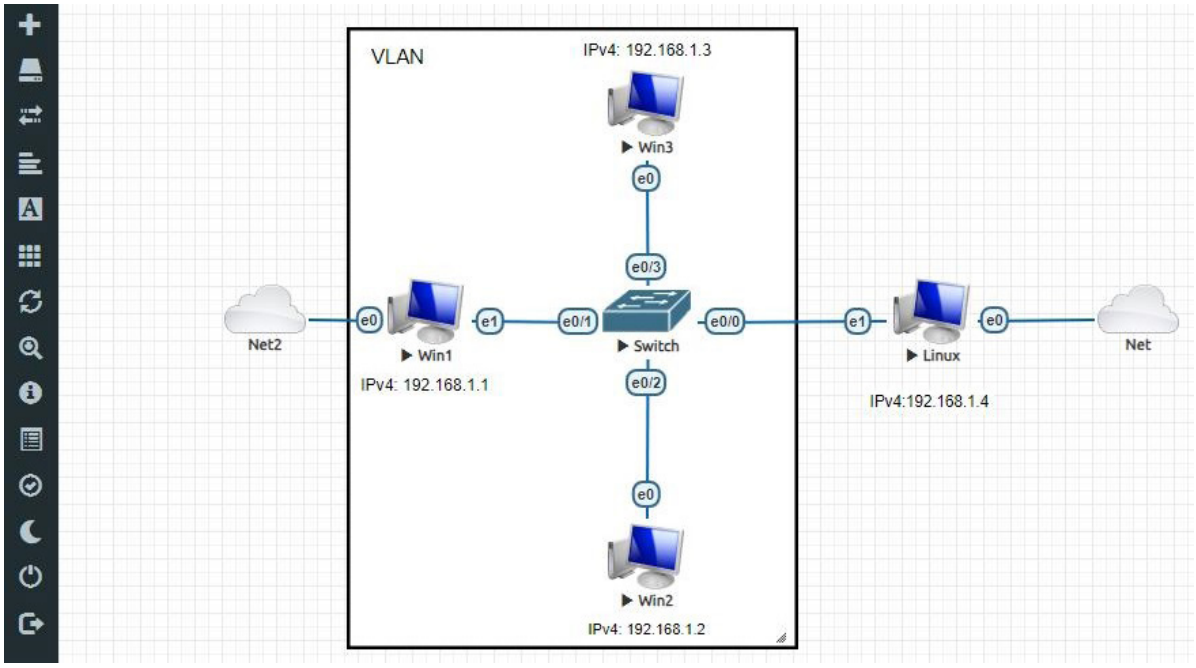


Рис. 1. Инфраструктура VLAN

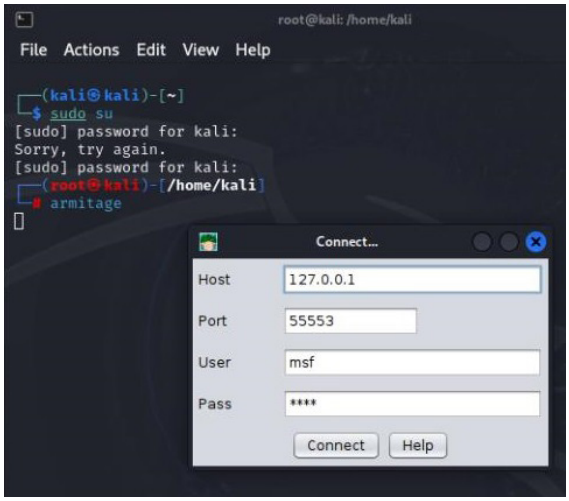


Рис. 2. Консоль Kali-Linux

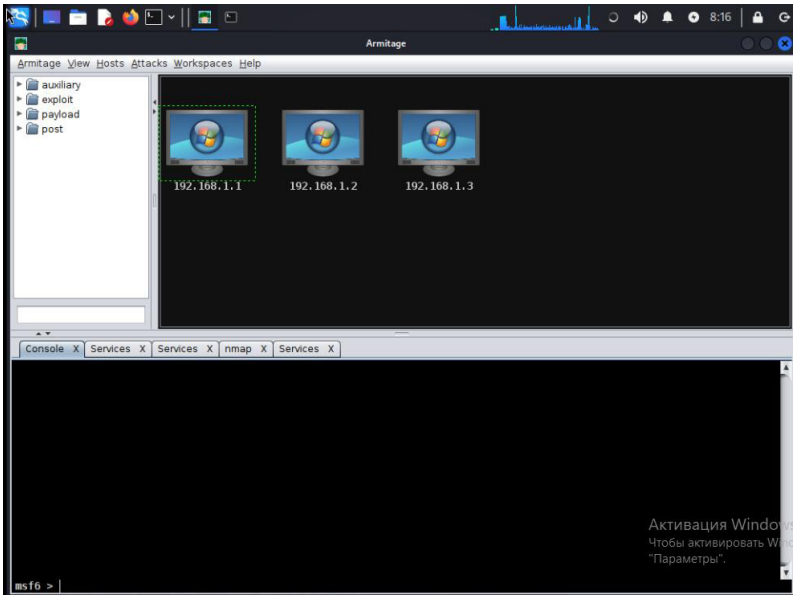


Рис. 3. Рабочий экран утилиты Armitage

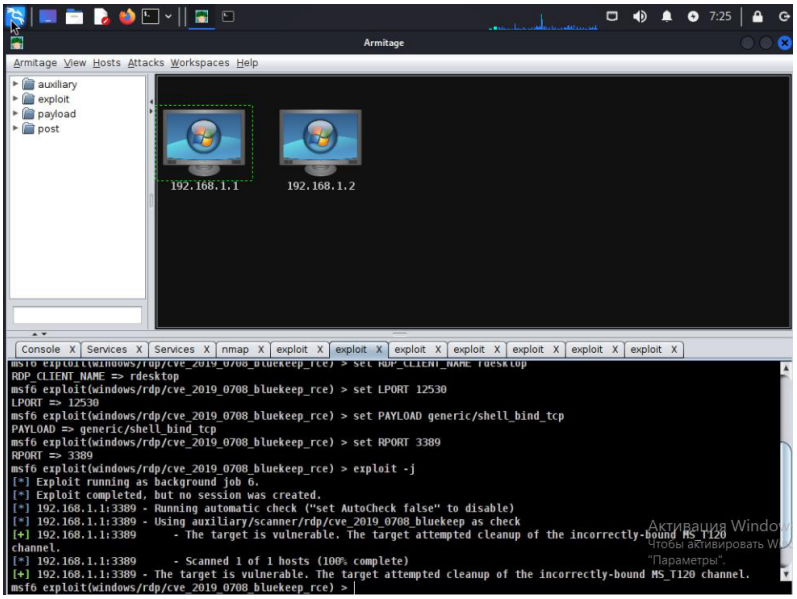


Рис. 4. Пример успешной атаки на host 192.168.1.1

Заключение

По итогам данной работы была смоделирована и проанализирована на уровне трафика DDoS-атака со стороны злоумышленника. Результаты исследования могут помочь оценить уязвимости сети и принять меры по повышению ее безопасности. Разработка новых методов и технологий по средствам полученных данных, а также постоянное обновление и улучшение существующих систем защиты являются ключевыми факторами в борьбе с DDoS-атаками и обеспечении безопасности сетевых инфраструктур.

Литература

1. Инфраструктурный пентест по шагам. – URL: https://habr.com/ru/companies/bastion/articles/767704/ (дата обращения: 29.10.2024).

2. Пентест: методы тестирования. – URL: https://ksb-soft.ru/blog/ekspertiza/pentest-metody-testirovaniya/ (дата обращения: 30.10.2024).

3. Установка и использование виртуальной сетевой лаборатории EVE-NG. – URL: https://habr.com/ru/articles/323014/ (дата обращения: 08.11.2024).

4. Строим киберполигон. – URL: https://xakep.ru/2021/08/09/eve-ng/ (дата обращения: 09.11.2024).

УДК 550.388.2

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ И СТРУКТУР В СРЕДНЕШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРЕ В РАЗЛИЧНЫХ ГЕЛИОГЕОФИЗИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

С. А. Ишанов, Д. А. Савкин, П. М. Каратаева, А. В. Шоть, Е. П. Ставицкая

Балтийский федеральный университет имени И. Канта

Аннотация. С применением математической модели ионосферы и плазмосферы, разработанной на основе МГД-уравнений, были проведены исследования различных динамических процессов и нестационарных структур. Исследования проводились в существенно анизотропной среде в спокойных и возмущенных условиях. В примененной в рамках исследования модели была учтена как глобальная динамика ионосферной плазмы, так и основные процессы химической кинетики, взаимодействие плазмы с нейтральным ветром, амбиполярная диффузия и ряд других параметров. По результатам проведенных компьютерных экспериментов был проведен анализ пространственно-временного распределения основных показателей, характеризующих поведение ионосферно-магнитосферной плазмы.
Ключевые слова: ионосфера, плазмосфера, численное моделирование, вычислительный эксперимент, кинетика, неустойчивость, возмущение, магнитная гидродинамика.

Введение

Необходимо отметить, что проведение исследования физической природы, динамических характеристик и структуры околоземной космической плазмы имеет основополагающее значение для обеспечения работоспособности разнообразных космических аппаратов, осуществления радиосвязи, функционирования различных спутниковых систем. Без данных исследований невозможно планирование научных экспериментов в космическом пространстве и проведение анализа полученных данных, прогнозирования различных возмущений в ионосфере. Решение экологических проблем, стоящие перед человечеством, также невозможно без исследования ионосферы. Таким образом, исследование околоземной космической плазмы является актуальной проблемой физики плазмы и вычислительной математики [1, 2].

Изучение околоземной космической плазмы также тесно связано с такими направлениями современных исследований как изучение ускорения заряженных частиц, применением различных подходов к регистрации быстропротекающих реакций, исследованием процессов генерации электромагнитного излучения, распространения и рассеивания электромагнитных волн в плазме и плазмоподобных средах.

Изучение процессов зарождения и изменения пространственно-временных структур в ионосфере является составной и важной частью разрабатываемых в настоящее время геофизических приложений.

Целью работы является исследование динамики плазмы среднеширотной ионосферы и плазмосферы в возмущенных и спокойных условиях с учетом широкого спектра геофизических факторов, ответственных за образование этих структур: сложного состава ионосферной плазмы, диффузии электронно-ионного газа, фотохимии, дипольной геометрии геомагнитного поля, электрического дрейфа, ионосферно-плазмосферного обмена, кинетики сверхтепловых электронов [1–3].

Используемая в данной работе численная модель системы ионосфера-плазмосфера, основанная на системе уравнений магнитной гидродинамики, позволяет рассчитывать концентрации, температуры и скорости ионов H^+, He^+, O^+, N^+, N_2^+, O_2^+, NO^+ и электронов вдоль геомагнитной силовой трубки от высоты 125 км до нескольких радиусов Земли.

В статье представлены результаты некоторых вычислительных экспериментов в различных гелиофизических условиях, проведенных для средних широт.

1. Описание математической модели

При проведении исследований было сделано предположение, что макроскопическое движение плазмы происходит вдоль геомагнитного поля. Использование дипольной системы координат сводит трехмерную физическую задачу трехмерного движения плазмы к двумерной математической задачи от двух переменных: s — координата вдоль силовой линии; t — время. Полученная таким образом математическая модель основана на часто применяемом подходе — численном решении системы уравнений гидродинамики частично ионизированной плазмы для ионов и электронов. Представим систему уравнений непрерывности, импульса и теплового баланса для заряженных компонентов [3, 4] в терминах концентрации n_α, потока $n_\alpha u_\alpha$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_\alpha u_\alpha}{\partial s} + L_\alpha n_\alpha = Q_\alpha \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_\alpha u_\alpha}{\partial s} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_\alpha u_\alpha^2}{\partial s} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial s} = F_\alpha \tag{2}$$

где n_α, u_α, p_α — концентрация, скорость и давление ионов сорта α; A — расходимость силовых линий магнитного поля (коэффициент, обусловленный криволинейностью системы координат); L_α — скорость рекомбинации; Q_α — функция источников ионов сорта α; f_α и F_α — коэффициенты, обусловленные внешними силами — силой тяжести, силой Лоренца, силами трения с ионами другого сорта и нейтральными частицами; пространственная координата s отсчитывается вдоль силовой линии магнитного поля.

$$F_\alpha = -g\sin I + \sum_{j\neq\alpha} S_{\alpha j}(u_\alpha - u_j) + R_\alpha(V_{nx}\cos I - u_\alpha) - \frac{1}{m_\alpha N_e}\frac{\partial P_e}{\partial s}, \tag{3}$$

где g — ускорение силы тяжести;

I — магнитное наклонение;

$S_{\alpha j}$ — коэффициент силы трения ионов сорта α и сорта j;

R_α — коэффициент силы трения ионов сорта α с нейтральными частицами;

V_{nx} — меридиональная составляющая скорости нейтрального ветра;

N_e и P_e — электронная концентрация и давление.

Положим справедливым условие квазинейтральности плазмы

$$N_e = \sum_\alpha n_\alpha. \tag{4}$$

Учет взаимодействия плазмы с горизонтальным термосферным ветром на ионосферных высотах проводится так же, как в [2].

Уравнения движения нейтрального газа записываются в виде

$$\frac{\partial V_{nx}}{\partial t} = \frac{\mu}{\sin^2 I}\frac{\partial^2 V_{nx}}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho_n}\sum_\alpha n_\alpha R_\alpha m_\alpha (V_{nx} - u_\alpha\cos I) + 2\Omega\sin\phi V_{ny} - \frac{1}{\rho_n}\frac{P_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V_{ny}}{\partial t} = \frac{\mu}{\sin^2 I}\frac{\partial^2 V_{ny}}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho_n}\sum_\alpha n_\alpha R_\alpha m_\alpha V_{ny} - 2\Omega\sin\phi V_{nx} - \frac{1}{\rho_n}\frac{\partial P_n}{\partial y}.$$

Здесь V_{ny} — зональная составляющая скорости нейтрального ветра, x и y — оси локальной декартовой системы координат (ось x направлена на юг, ось y — на восток), μ — коэффициент кинематической вязкости, определяемый плотностью и температурой нейтральной атмосферы, Ω — угловая скорость вращения Земли, ϕ — географическая широта, ρ_n и P_n — плотность и давление нейтральной атмосферы.

Нестационарные уравнения фотохимического равновесия для молекулярных ионов O_2^+, NO^+, N_2, записываются в виде

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = Q_i - \alpha_i n_i, \ \ i = 3,\ 4,\ 5 \tag{5}$$

Члены θ_α, входящие в уравнения теплового баланса (3)–(4), которые учитывают упругие и неупругие процессы обмена энергией между заряженными частицами и нейтральными составляющими, взяты из [5]. Для расчета P_g согласно [7], решалось кинетическое уравнение для сверхтепловых электронов.

Численное решение системы уравнений модели осуществлялось вдоль геомагнитной силовой линии с применением метода конечных разностей. Линеаризация разностных уравнений проводилась с использованием значений неизвестных функций, взятых с предыдущего временного слоя, с последующими итерациями по нелинейности и связанности уравнений. При решении системы уравнений (1)–(2) использован подход, приведенный в [9, 10]. Сначала запишем уравнение (2) в дивергентной форме [3]:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A n_i v_i^2}{\partial s} + \frac{\partial n_i v_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial s} = F_i. \tag{6}$$

Здесь F учитывает действие внешних сил:

$$F_i = n_i \gamma_i + v_i (Q_i - \alpha_i n_i),$$

$$\gamma_i = \frac{R_i}{m_i}(v_{nx}\cos I - v_i) - g\sin I + \frac{S_{ij}}{m_i}(v_j - v_i) - \frac{1}{m_i N_e}\frac{\partial p_e}{\partial s}.$$

Используя метод суммарной аппроксимации [11], можно разделить исходную систему уравнений на последовательно решаемую систему уравнений переноса

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_i v_i}{\partial s} = 0, \ \ \frac{\partial n_i v_i}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_i v_i^2}{\partial s} + \frac{\partial p_i}{\partial s} = 0 \tag{7}$$

и систему обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающих элементарные процессы (фотохимию и столкновения)

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \alpha_i n_i = Q_i, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \beta_i v_i = f_i \tag{8}$$

где β_i и f_i учитывают силы взаимодействия (сила тяжести, электрическая сила, силы трения ион-ион, ион-нейтрал):

$$\beta_i = \frac{S_{ij}}{m_i} + \frac{R_i}{m_i}; \ \ f_i = \gamma_i + \beta_i v_i.$$

Решение уравнений (8) дается формулами

$$\hat{n}_i = n_i e^{-\tau\alpha_i} + \frac{Q_i}{\alpha_i}(1 - e^{-\tau\alpha_i}); \ \ \hat{v}_i = v_i e^{-\tau\beta_i} + \frac{f_i}{\beta_i}(1 - e^{-\tau\beta_i}),$$

где n_i, v_i — концентрация и скорость, полученные решением системы (7); $\hat{n}_i$, $\hat{v}_i$ — результирующие значения концентрации и скорости, полученные за два шага: «перенос + элементарные взаимодействия».

Для решения системы уравнений переноса (7) применялся алгоритм, основанный на явной консервативной схеме [9, 11].

2. Результаты вычислительных экспериментов

В рамках работы решение нестационарных задач динамики околоземной космической плазмы при учете спокойных и возмущенных условий проводилось с применением усовершенствованных вычислительных методов и реализующих их алгоритмов.

Для расчета пространственно-временных вариаций температуры нейтральной атмосферы и концентраций компонентов O_2, N_2, O, H, He, N была использована эмпирическая модель температуры, приведенная в [12].

Первый вычислительный эксперимент был проведен для следующих условий: использовалась замкнутая силовая трубка $L = 3{,}2;$ солнечная активность была определена значением $F_{10.7} = 150.$ Расчеты проводились на начало года в Северном полушарии.

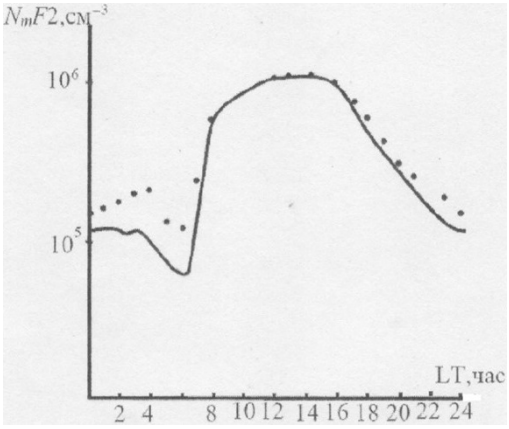


Рис. 1. Сравнение суточного хода значений N_mF2, полученных с помощью компьютерных расчетов на базе ионосферно-плазмосферной модели (изображена сплошной линией) с экспериментальными данными (кружки на графике)

В данном случае F2 — это область, в которой основным ионом является ион O+. При этом считаем, что распределение данного иона в этой области регулируется процессами амбиполярной диффузии и термосферными ветрами.

Необходимо учитывать, что плазмосфера имеет первостепенное значение для формирования структуры F2-области и внешней ионосферы. Поток ионосферной плазмы вдоль геомагнитного поля из плазмосферы ночью поддерживает F2-слой.

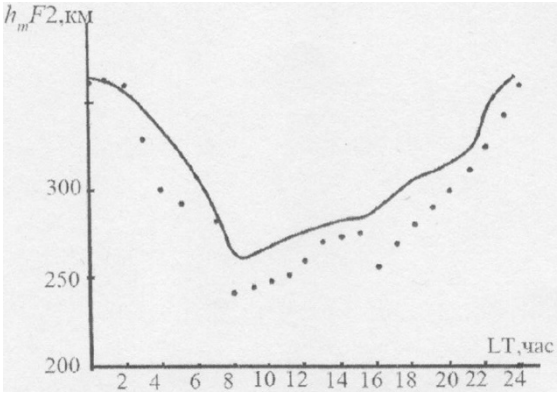


Рис. 2. Сравнение суточного хода значений h_mF2, где модельные расчеты изображены сплошной линией, а экспериментальные изменения h_mF2 обозначаются кружками

В ходе исследований с помощь модели системы ионосфера – плазмосфера были проведены расчеты изменения концентрации электронов в главном ионосферном максимуме (N_mF2) и высоты в максимуме (h_mF2) в течение суток. Результаты приведены на рис. 1 и 2. На рис. 3 представлены расчеты суточной вариации потока ионов O^+.

Сравнение полученных в ходе компьютерных экспериментов расчетных данных с результатами экспериментальных данных, взятых из работы [13], показывает сопоставимость данных.

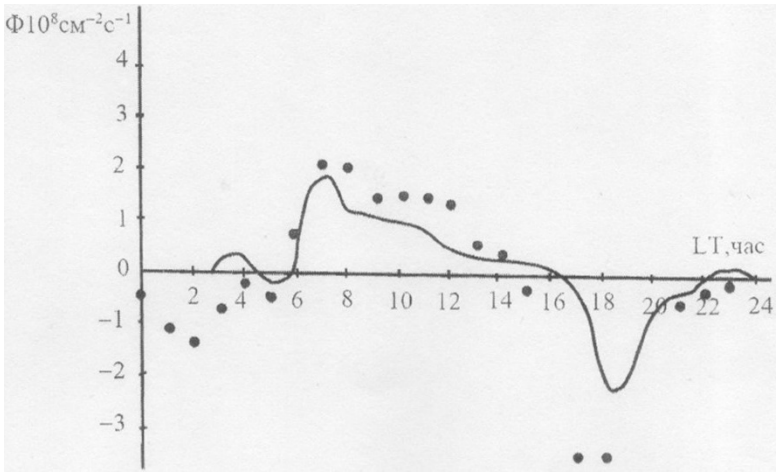


Рис. 3. Сравнение рассчитанной суточной вариации потоков монов O^+ для высоты в 635 км, изображенной сплошной линией, и результатов измерений из [13]

Для второго вычислительного эксперимента была выбрана замкнутая геомагнитная трубка $L = 2$ в условиях равноденствия (81 день) при уровне солнечной активности $F_{10.7} = 80$.

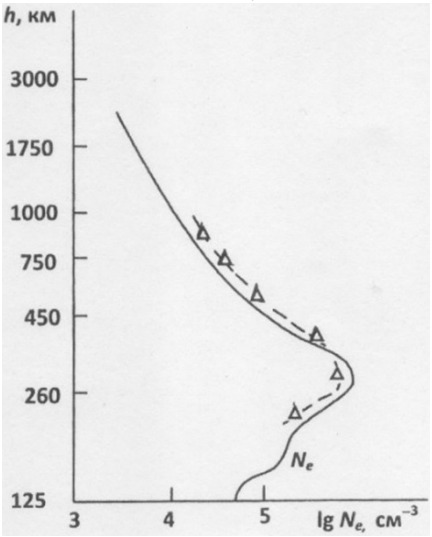


Рис. 4. Сравнение высотного распределения ионных компонент в полдень. На рисунке непрерывная линия обозначает численные расчета, а Δ — экспериментальные данные

На рис. 4 и 5 приведены высотные распределения ионных компонент для дневных и ночных условий: теоретические расчеты и данные экспериментальных измерений [14]. Можно отметить неплохое совпадение результатов.

Для дальнейших исследований была выбрана задача моделирования процессов модификации магнотосферных областей ионосферы при разных техногенных выбросах.

На рис. 6 в виде сплошных линий представлены профили, которые соответствуют возмущенных условиям, а в виде штриховки — «местное» несопряженное воздействие с 12.00 LT. Темными кружками отмечено антропогенное возмущение в Северном и Южном полушариях в 12.00 LT, а светлые кружки обозначают воздействие в Северном полушарии в момент 12.00 LT и Южном полушарии в 13.00 LT.

Для третьего вычислительного эксперимента был выбран расчет суточных вариаций ионосферных параметров для силовой трубки с параметрами Мак-Илвейна $h = 2$ (наибольшая высота над поверхностью Земли 6356 км) для средней солнечной активности ($F_{10.7} = 150$) и начала года — зима в Северном полушарии, лето в Южном полушарии.

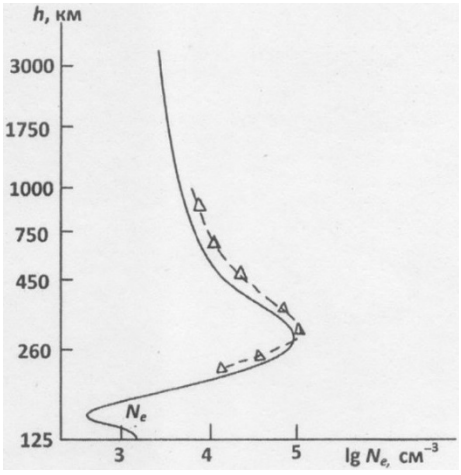


Рис. 5. Высотное распределение ионных компонент в полночь: непрерывная линия — модельные расчеты; Δ — экспериментальные данные

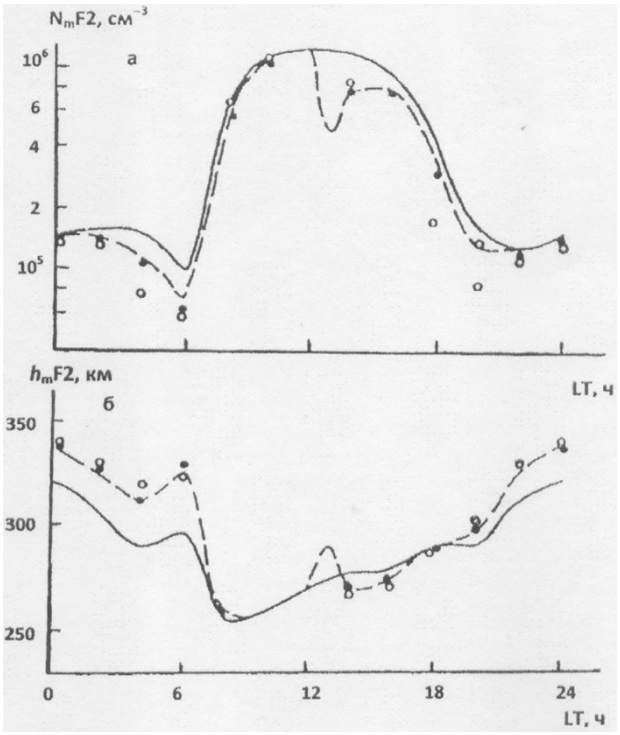


Рис. 6. Временные вариации N_mF2 (а), h_mF2 (б) в Северном полушарии

На рис. 6 показан суточный ход N_mF2, h_mF2 при выбросах воды для зимних условий (момент возмущения LT = 12 час) в Северном полушарии, моменты возмущения ионосферы Южного полушария LT = 12, 13 час. Значения N_mF2 для «местного» несопряженного выброса в Северном полушарии в сравнении с фоном уменьшились (временной интервал 0–6 час.) на 25 %, а для разнесенных по времени и пространству воздействий уменьшились примерно в 2 раза.

Подобное поведение параметров N_mF2, h_mF2 наблюдается и для Южного полушария. Это можно объяснить тем, что плазмосфера сильнее обедняется в случае сопряженных воздействий, и в ночное время это обеднение проявляется наиболее полно.

Заключение

В данной статье приведены результаты ряда вычислительных экспериментов в различных гелиогеографических условиях для исследования пространственно-временных структур и процессов в околоземной космической плазме. Расчеты проводились с применением гидродинамической усовершенствованной модели ионосферно-плазмосферных взаимодействий.

В уравнениях, из которых состоит модель, последовательно и согласованно учтены процессы образования и потерь ионов, оценено влияние диффузии плазмы с учетом нейтрального ветра, обмен энергии, получающейся в результате столкновений ионов, электронов и нейтральных частиц. Также учтена теплопроводность плазмы и взаимодействие с сверхтепловыми электронами.

Результаты, полученные в ходе исследования, показали, что корректная постановка задачи исследования системы ионосфера — плазмосфера задается для полной системы уравнений движения и непрерывности гиперболического типа.

Численная устойчивость и функционирование построенной математической модели по входным данным подтверждены аналитическими решениями задач динамики и энергетики околоземной космической плазмы.

В результате компьютерного эксперимента по исследованию нестационарных процессов и структур в среднеширотной ионосфере получены и проведены сравнительные анализы пространственно-временных распределений макроскопических параметров тепловой плазмы в геомагнитных силовых трубках при различных геофизических ситуациях.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 28.02.2024 № 075-02-2024-1430).

Литература

1. *Мингалев О. В., Мингалев И. В., Малова Х. В., Мерзлый А. М., Мингалев В. С., Хабарова О. В.* Описание крупномасштабных процессов в околоземной космической плазме // Физика плазмы. – 2020. – Т. 46, № 4. – С. 329–350.

2. Современные достижения в плазменной гелиогеофизике // Под редакцией Зеленого Л. Н., Петруковича А. А., Веселовского И. С. – М. : Физматлит, 2019. – 688 с.

3. *Латышев К. С., Зинин Л. В., Ишанов С. А.* Математическое моделирование околоземной космической плазмы // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. – 2008. – Т. 7–1, Ч. 3. – С. 337–349.

4. *Ишанов С. А., Мацула П. В.* Вычислительный эксперимент при моделировании динамики антропогенных возмущений ионосферно-магнитосферной плазмы // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 6. – С. 128–136.

5. *Брюнелли Б. Е., Намгаладзе А. А.* Физика ионосферы. – М. : Наука, 1988. – 528 с.

6. *Richards P. G.* Reexamination of ionospheric photochemistry // J. Geophys. Res. – 2011. – V. 116, iss A8. – A08307.

7. *Barakat A. R., Schunk R. W., Moore T. E., Waite J. H.* Ion escape fluxes from the terrestrial high-latitude ionosphere // J. Geophys. Res. – 1987. – V. 92, № 11. – P. 12255–12266.

8. *Кринберг Н. А., Тащилин А. В.* Ионосфера и плазмосфера. – М. : Наука, 1984. – 189 с.

9. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений // ДАН СССР. – 1984. – Т. 279, № 1. – С. 80–83.

10. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983.

11. *Chetverushkin B., D'Ascenzo N., Ishanov S., Saveliev V.* Hyperbolic type explicit kinetic scheme of magneto gas dynamics for high performance computing systems // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 2015. – 30(1). – P. 27–36.

12. *Hedin A. E.* Thermospheric model // J. Geophys. Res. – 1987. – V. 92, № A5. P. 4649–4662.

13. *Evans J. V.* A Study of F2-region daytime vertical ionisation fluxes at Millstone Hill during 1969 // Planet and Space Sci. – 1975. – Vol. 23, N 11. – P. 1461–1482.

14. *Evans J. V.* Observation of F-region vertical velocities at Millstone Hill. 1. Evidence for drifts due to expansion, contraction and winds. // Radio Sci. – 1971. – Vol. 6, N 5. – P. 542–557.

УДК 519.6

РАЗРАБОТКА ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА ТРОПИЧЕСКОГО ЦИКЛОНА ПО УПРОЩЁННОЙ МОДЕЛИ

А. В. Калач[1], А. А. Парамонов[1], А. Л. Шкерин[1], Т. Е. Смоленцева[1], К. А. Кузнецова[2]

[1]Российский технологический университет – МИРЭА
[2]Воронежский институт ФСИН России

Аннотация. Приведены результаты анализа динамики процесса эволюции тропического циклона с использованием численных методов. Исследовано влияние различных факторов, таких как скорость диффузии, влияние ветра и интенсивность шума, на развитие циклона, с использованием двумерной сеточной модели. Целью исследования является проверка гипотезы о влиянии выбранных факторов на устойчивость и динамическое поведение тропического циклона. Также приведены результаты сравнительного анализа результатов аналитического и численного моделирования эволюции тропического циклона.
Ключевые слова: тропический циклон, численное моделирование, диффузия, влияние ветра, атмосферные явления, динамические системы.

1. Упрощённая модель тропического циклона

Упрощённая модель тропического циклона основана на двухмерной дискретной сетке размером $n \times m$ ячеек. Атмосферное состояние представлено такими параметрами, как давление (в гПа), температура (в Кельвинах), и влажность (в долях). Инициализация модели начинается с однородного распределения этих параметров по всей сетке, что обеспечивает условия для последующего возникновения градиентов, способствующих образованию циклона.

Начальная точка циклона была выбрана в центре сетки (широта 10.0, долгота 80.0). Предлагаемая система уравнений учитывает диффузионные процессы, влияние ветра и стохастический шум. Вектор скорости ветра задается случайным образом и применяется для переноса значений давления, температуры и влажности в соседние ячейки. Диффузия в модели учитывает обмен значениями между соседними ячейками, что позволяет моделировать распространение влияния центральной области циклона на окружающие участки.

Для моделирования трех ключевых параметров — давления, температуры и влажности — были использованы следующие формулы. Уравнение изменения давления:

$$P_{(i,j)}^{(n+1)} = P_{(i,j)}^{n} + D_P * (P_{(i+1,j)} + P_{(i-1,j)} + P_{(i,j+1)} + P_{(i,j-1)} - 4 * P_{(i,j)}) + W_P + \eta_P, \quad (1)$$

где $P_{(i,j)}^{(n+1)}$ — давление в ячейке (i, j) на текущем временном шаге.

D_P — коэффициент диффузии давления.

W_P — вклад от ветра, который учитывает влияние горизонтального переноса атмосферных масс.

η_P — шум для моделирования стохастических флуктуаций в атмосфере.

Уравнение изменения температуры:

$$T_{(i,j)}^{(n+1)} = T_{(i,j)}^{n} + D_T * (T_{(i+1,j)} + T_{(i-1,j)} + T_{(i,j+1)} + T_{(i,j-1)} - 4 * T_{(i,j-1)}) + W_T + \eta_T, \quad (2)$$

где $T_{(i,j)}^{(n+1)}$ — температура в ячейке (i, j) на текущем временном шаге.

D_T — коэффициент диффузии температуры, представляющий процесс теплопереноса.

W_T и η_T аналогичны тем, что используются для давления.

Уравнение влажности:

$$H_{(i,j)}^{(n+1)} = H_{(i,j)}^{n} + D_H * (H_{(i+1,j)} + H_{(i-1,j)} + H_{(i,j+1)} + H_{(i,j-1)} - 4 * H_{(i,j)}) + W_H + \eta_H, \quad (3)$$

где $H_{(i,j)}^{(n+1)}$ — влажность в ячейке (i, j)

D_H — коэффициент диффузии влажности, который определяет распространение водяного пара в атмосфере.

W_H и η_H аналогичны тем, что используются для давления и температуры.

Для моделирования был реализован метод конечных разностей. В каждом временном шаге выполняются следующие вычисления:

• **Инициализация Состояния:** на каждом шаге инициализируется текущее состояние давления, температуры и влажности для всех ячеек сетки.

• **Расчёт Диффузии:** используется метод конечных разностей для учета обмена значениями между соседними ячейками, изменения значений которых описываются уравнениями, приведёнными выше.

• **Влияние Ветра:** Используя случайные компоненты скорости ветра, вычисляется перенос давления, температуры и влажности с учетом коэффициента влияния ветра.

• **Добавление Стохастического Шума:** для учета случайных изменений вводится стохастический шум.

Эти этапы повторяются на каждом временном шаге, и состояние атмосферы обновляется до следующего временного момента. Данный подход позволяет моделировать эволюцию упрощённого тропического циклона на протяжении заданного количества временных шагов. Модель использует фиксированное количество временных шагов для анализа развития циклона в течение определенного периода, что позволяет эффективно оценивать влияние различных параметров.

2. Результаты численного эксперимента

Для первой конфигурации, с низкой скоростью диффузии и минимальным влиянием ветра с отсутствием стохастического шума, наблюдалось незначительное изменение давления и температуры в центральной области циклона, что указывает на слабую эволюцию системы (рис. 1).

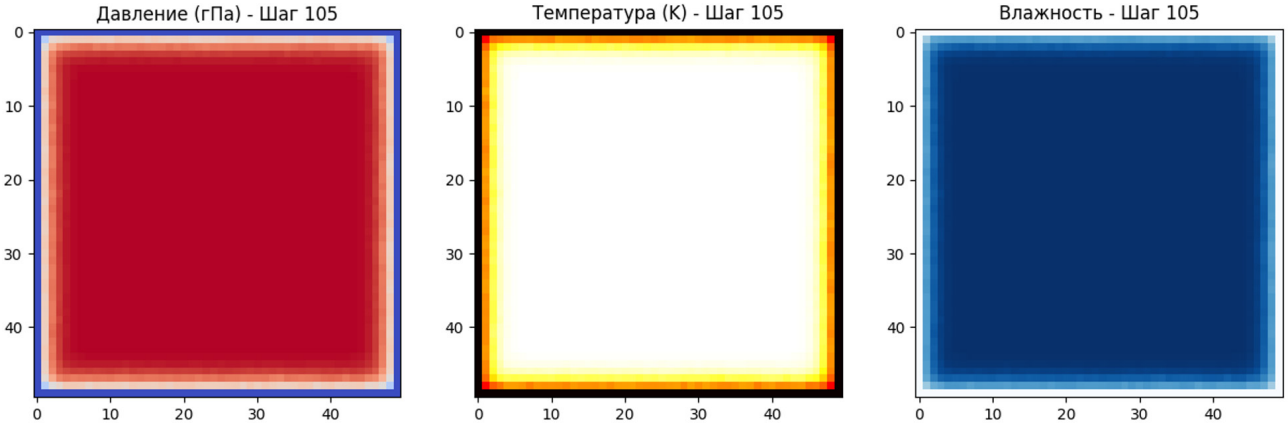


Рис. 1. Результаты моделирования с коэффициентами диффузии, скорости ветра и стохастического шума 0.01, 0.01, 0

В то же время, для конфигурации с высоким влиянием ветра и шума, модель продемонстрировала значительное усиление циклонической активности, что привело к снижению давления в центральной области и увеличению градиента давления от центра к краям (рис. 2).

Результаты также показали, что стохастический шум оказывает значительное влияние на структуру циклона. В моделях с высоким уровнем шума наблюдались более хаотичные изменения давления и температуры, что привело к неустойчивой и нерегулярной форме циклона (рис. 3).

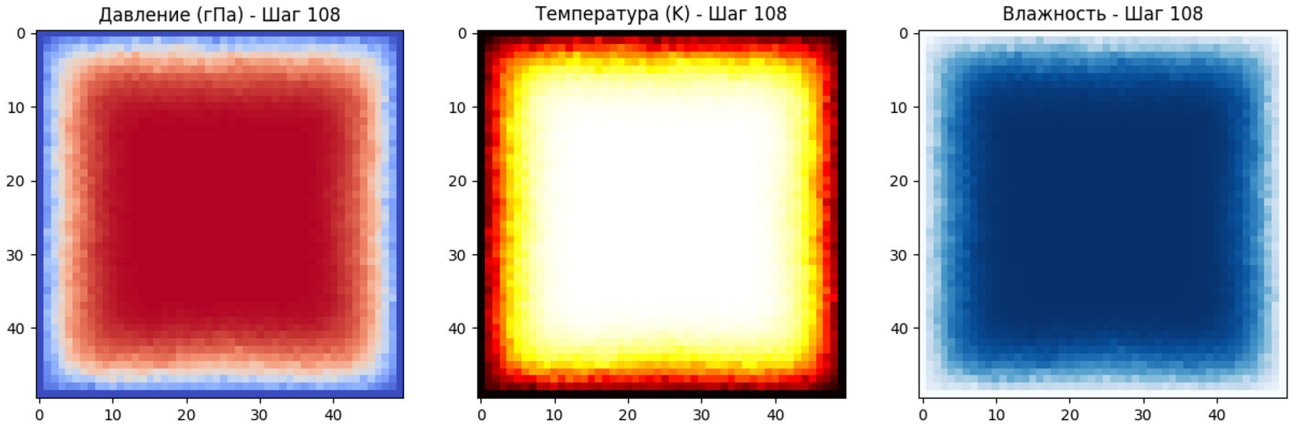


Рис. 2. Результаты моделирования с коэффициентами диффузии, скорости ветра и стохастического шума 0.01, 0.1, 0.1

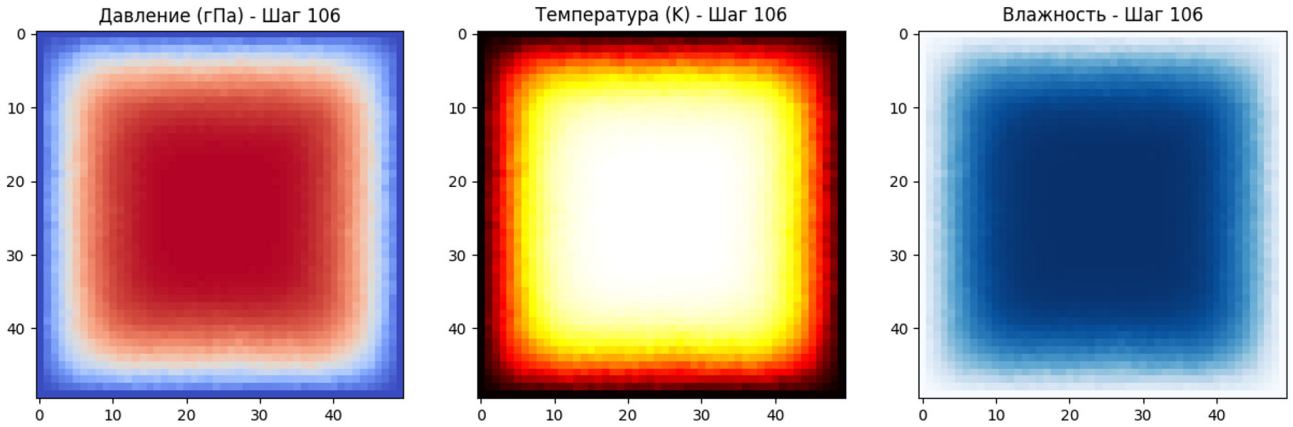


Рис. 3. Результаты моделирования с коэффициентами диффузии, скорости ветра и стохастического шума 0.1, 0.1, 0.2

3. Валидация полученных результатов

Результаты валидации модели с использованием датасета IBCTracks показали, что предложенная модель является слишком упрощенной и не один временной шаг не соответствует реальному поведению тропических циклонов. В частности, модель не учитывает важные атмосферные процессы и взаимодействия, что приводит к значительным расхождениям между смоделированными результатами и наблюдаемыми данными. Это подчеркивает необходимость дальнейшей доработки модели для включения дополнительных факторов, таких как взаимодействие с океаном, вертикальная структура атмосферы и более точное представление ветровых полей.

Эти результаты согласуются с общими представлениями о поведении тропических циклонов в реальной атмосфере, где факторы, подобные ветру и влажности, играют ключевую роль в формировании и развитии циклонических систем, однако показывают, что система гораздо сложнее и требует дополнительных исследований.

Заключение

В данной работе был проведен численный анализ модели тропического циклона, включающий исследование влияния диффузии, ветра и стохастического шума на его развитие. Полученные результаты показали, что изменения в параметрах модели существенно влияют на ди-

намическое поведение циклона, что подтверждает важность оптимизации гиперпараметров для достижения реалистичных результатов.

Однако полученные результаты расходятся при валидации результатов, что показывает необходимость использования другого подхода, метода или иных средств моделирования и учёта дополнительных факторов. Численное моделирование подтвердило, что даже небольшие изменения в параметрах могут привести к значительным изменениям в структуре и интенсивности циклона. Это подчеркивает важность комплексного подхода к моделированию атмосферных явлений и необходимость дальнейших исследований для лучшего понимания процессов, влияющих на формирование тропических циклонов

Литература

1. *Парамонов А. А., Крынецкий Б. А., Смоленцева Т. Е.* Практическая значимость почти-периодического анализа // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – 2024. – Т. 1. – С. 227–230.

2. *Озерова Н. А.* Исследование особенностей эволюции тропических циклонов, влияющих на погоду Дальнего Востока России / Под науч. рук. Анискина О. Г. // Сборник материалов участников XIX Большого географического фестиваля. – Санкт-Петербург : Свое издательство, 2023. – С. 300–304.

3. *Ермакова О. С., Русаков Н. С., Поплавский Е. И., Сергеев Д. А., Троицкая Ю. И.* База данных спутниковых снимков тропических циклонов в сезоны ураганов 2017–2020 гг. // Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук. – 2022.

4. *Юровская М. В.* Набор данных о ветре и волнении для изучения тропических циклонов // Морской гидрофизический журнал. – 2023. – Т. 39, № 2 (230). – С. 220–233.

5. *Калач А. В., Парамонов А. А.* Применение почти-периодического анализа изображений динамики активности циклонов в целях выработки управленческих решений по повышению устойчивости территорий в чрезвычайных ситуациях // Теория и практика повышения устойчивости урбанизированных территорий в чрезвычайных ситуациях. Сборник материалов международного круглого стола «Комплексная безопасность-2024». – Москва : ВНИИ ГОЧС, 2024. – С. 106–112.

6. National Centers for Environmental Information (NCEI). International Best Track Archive for Climate Stewardship (IBTrACS). – URL: https://www.ncei.noaa.gov/products/international-best-track-archive (датаобращения: 27.10.2024).

УДК 550.388.2

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДРЕЙФОВОГО ТИПА В ОБЛАСТИ ВЕРХНЕГО ФРОНТА ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПУЗЫРЕЙ

Н. М. Кащенко, С. А. Ишанов, Е. В. Зубков, Е. П. Ставицкая

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта

Аннотация. В работе исследуется процесс развития неоднородностей на верхних фронтах экваториальных плазменных пузырей в ионосфере Земли, развившихся в результате неустойчивости Релея — Тэйлора. Исследование проводилось в форме серии вычислительных экспериментов с использованием разработанной авторами оригинальной двумерной модели развития неустойчивости Релея — Тэйлора в экваториальной ионосфере Земли и двумерной модели неустойчивости дрейфового типа. Результаты, полученные в ходе проведенных исследований, могут быть использованы как в других теоретических работах, так и при планировании и проведении исследований явления F-рассеяния в ионосфере Земли. Численное моделирование проводилось для геофизических условий, благоприятных для развития в экваториальной F-области ионосферы Земли экваториальных плазменных пузырей.

Ключевые слова: ионосфера, математическое моделирование, численное моделирование, неустойчивости градиентного типа, инкремент неустойчивости, неустойчивость Рэлея — Тейлора, экваториальный плазменный пузырь, F-рассеяние.

Введение

Целью работы является исследование процессов развития мелкомасштабных неоднородностей плазмы механизмами неустойчивостей градиентного типа из малых начальных возмущений на верхнем фронте экваториальных плазменных пузырей, развившихся в результате неустойчивости Релея — Тэйлора и поднявшихся в верхнюю экваториальную ионосферу Земли [2].

Роль начального агента могут играть внутренние гравитационные волны, что может объяснить связь между неоднородной структурой области F и движением нейтрального газа на меньших высотах, например, на уровне турбопаузы [1]. Неустойчивость Рэлея — Тейлора позволяет объяснить появление среднемасштабных по поперечным к магнитному полю Земли направлениям экваториальных плазменных пузырей и построить очень простые модели их поведения [12, 13].

В этом процессе генерируются большие градиенты концентраций электронов, ионов и скоростей, что может приводить в этих зонах к эффекту F-рассеяния [1] вследствие усиления мелкомасштабных неоднородностей механизмами плазменных неустойчивостей различного типа, в частности неустойчивостей дрейфового типа. Как известно [7], благоприятные условия для развития неустойчивости Релея — Тэйлора в экваториальной ионосфере возникают в вечернее время при наличии направленного вверх вертикального дрейфа, при этом условия развития улучшаются во время геомагнитных бурь, и на начальной стадии скорость развития может быть описана линейным инкрементом γ. Наличие положительных значений γ приводит на линейной стадии к экспоненциальному росту обеднения плазмы с характерным временем γ^{-1}.

1. Математическая модель

Модель неустойчивости Релея — Тэйлора в экваториальной ионосфере [2, 10] содержит уравнения непрерывности ионов и электронов (1), уравнения движения ионов (2) и электронов (3), уравнение потенциальности и условие электростатики электрического поля (4) и уравнение непрерывности электрического тока (4):

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\left(n\vec{V}_i\right)=-\nu_r n \tag{1}$$

$$0=-\frac{\nabla p_i}{nm_i}+\frac{e}{m_i}\left(\vec{E}+\vec{V}_i\times\vec{B}\right)-\nu_{in}(\vec{V}_i-\vec{V}_n)-\nu_{ie}(\vec{V}_i-\vec{V}_e)+\vec{g} \tag{2}$$

$$0=-\frac{\nabla p_e}{nm_e}-\frac{e}{m_e}\left(\vec{E}+\vec{V}_e\times\vec{B}\right)-\nu_{ei}(\vec{V}_e-\vec{V}_i) \tag{3}$$

$$\nabla\times\vec{E}=0,\quad \vec{E}=-\nabla\Phi \tag{4}$$

$$\nabla\left(en\left(\vec{V}_i-\vec{V}_e\right)\right)=0 \tag{5}$$

где n — концентрация ионов и электронов; — скорости ионов и электронов; ν_r — скорость рекомбинации электронов и ионов; m_i, m_e — массы ионов и электронов; e — заряд ионов; $p_i=knT_i$, $p_e=knT_e$ – давление ионного и электронного газа; ν_{in}, ν_{ie}, ν_{ei} — частоты столкновений между частицами; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля; Φ — потенциал электрического поля; k — постоянная Больцмана, T_i, T_e — температура ионов и электронов.

В работе использована ортогональная правая система координат (x,y,z): x направлена вдоль силовых линий магнитного поля Земли на юг, y направлена на восток, z направлена вверх. Для вычисления параметров нейтральных частиц использована глобальная эмпирическая термосферная модель MSIS [9]. Для задания начальных значений модели (1)–(5) решались уравнения низкоширотной модели ионосферы до получения периодического по суткам решения.

Модель (1)–(5) в силу предположения достаточно развитых экваториальных плазменных пузырей, вытянутых вдоль магнитного поля Земли может быть записана в двумерном приближении [2, 10], формально получаемом заменой оператора ∇ на оператор $\nabla_\perp$ — поперечная магнитному полю Земли часть оператора ∇. Двумерная математическая модель позволяет использовать достаточно подробные вычислительные сетки, что важно по причине малых размеров исследуемых неоднородностей и достаточно большую область решения, что необходимо в силу электостатической связи с характерными масштабами более 100 км.

2. Модель неустойчивости

Опишем схему анализа линейной стадии неустойчивостей плазмы F-области низкоширотной ионосферы в нелокальном подходе и приведем результаты численных оценок эффективности неустойчивости. Метод анализа существенно используют ряд предположений [1–3]:

– использовано приближение двухжидкостной столкновительной гидродинамики для плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов, а именно O^+;

– развитые экваториальные плазменные пузыри поднимаются на высоты 500 ÷ 700 км, на этих высотах становятся малыми величины интегральной проводимости Холла и концентрации молекулярных ионов;

– пренебрегаем инерцией электронов;

– использовано приближение квазинейтральности плазмы;

– поскольку исследуется послезаходные процессы, пренебрегаем функцией ионизации и полагаем температуру ионов и электронов постоянной и равной;

– пренебрегаем столкновениями электронов и нейтральных частиц и силой Земного тяготения для электронов;

– рассматриваются характерные времена процессов, превышающие времена свободного пробега частиц, характерные пространственные масштабы, превышающие как длины свободного пробега, так и ларморовские радиусы;

– возмущения электрического поля в неоднородностях считаются потенциальными, а возмущения концентрации плазмы — квазинейтральными;

– рассматриваются умеренно вытянутые неоднородности, $l_\perp << l_\parallel$;

– ионосферная плазма считается сильно замагниченной, что справедливо и в области F и во внешней ионосфере.

Вследствие замагниченности ионосферной плазмы F-области процессы переноса вдоль магнитного поля будут определяться столкновениями, а поперек поля — дрейфовым движением плазмы. Из-за сильной анизотропии, обусловленной магнитным полем Земли, процессы переноса заряженных частиц в области F экваториальной ионосферы происходят в основном вдоль силовых линий геомагнитного поля, а в поперечном направлении процессы определяются дрейфовыми движениями. Плазма на высотах экваториальной F-области является высокопроводящей вдоль геомагнитного поля средой, поэтому будем считать, что силовые линии геомагнитного поля эквипотенциальны. Магнитное поле Земли будем считать постоянным по времени и дипольным.

Исходя из описанных приближений получаем ограничения на волновые числа возмущений:

$$k_x < 10^{-2}, \quad k_y > 5\times 10^{-4}, \quad 10^{-3} \ll k_z < 10^{-1}, \quad k_y, k_x \ll k_z.$$

Метод анализа — линеаризация системы по малым возмущениям концентрации n, скоростей ионов и электронов и потенциала Φ для двумерного приближения модели (1)–(5):

$$n = N_0 + N, \quad \vec{V}_i = \vec{V}_0 + \vec{V}, \quad \Phi = \Phi_0 + \varphi \cdot B \tag{6}$$

где N_0 — невозмущенная концентрация электронов; V_{0y} и V_{0z} — невозмущенная скорость дрейфа; Φ_0 — невозмущенный потенциал электрического поля; N, $\vec{V}$, φ — соответствующие возмущения, $\vec{V}$ определено так:

$$V_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{7}$$

Невозмущенные значения этих величин получены из решения двумерного приближения модели неустойчивости Релея — Тэйлора. Тогда система уравнений для N и φ имеет вид, аналогичный модели, описанной в работах [8, 11]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} + (V_{0y} + V_y)\dfrac{\partial N}{\partial y} + (V_{0z} + V_z)\dfrac{\partial N}{\partial z} + V_y \dfrac{\partial N_0}{\partial y} + V_z \dfrac{\partial N_0}{\partial z} = -\nu_r N \\ \Delta\varphi = -\dfrac{V_{0y}}{N_0}\dfrac{\partial N}{\partial z} - \dfrac{V_{0z}}{N_0}\dfrac{\partial N}{\partial y} \end{cases} \tag{8}$$

В отличие от работы [8] здесь не учитывалась диффузия.

3. Численная модель

Численное моделирование проводилось в два этапа. На первом этапе получены невозмущенные значения N_0, $\vec{V}_0$, Φ_0 в области, ограниченной снизу высотой 100 км, сверху высотой 1700 км, по горизонтали протяженность области интегрирования равна 500 км. Уравнения описанной двумерной модели решались численно конечноразностными методами на квазиравномерных сетках, сгущающихся к центру области решения. Сетка на этом этапе выбрана так, что в центральной области шаги равны 0.5 км по координатам y и z. Уровни солнечной активности, геомагнитной активности и восточная компонента фонового электрического поля задавались так: $F_{10.7} = 150.0$, $k_p = 1.0$, $E_y = 1.0$ мв/м. Для концентраций на нижней границе заданы условия химического равновесия, вверху и на боковых границах задано условие равенства нулю потоков. Начальные неоднородности концентрации заданы модельно круглой

формы с отношением концентрации в центре неоднородности к фоновому значению равным 0.9 и полуразмерами области неоднородности равными 5.0 км.

Двумерные уравнения переноса (1) модели решались по схеме расщепления, симметрированной для получения второго порядка точности. Для решения одномерных уравнений переноса выбран метод с нелинейной коррекцией потоков [4–6]. Уравнение потенциала (5) электрического поля решалось многосеточным методом, с использованием F-цикла.

В проведенных численных экспериментах получено, что фазовая скорость верхнего фронта плазменного пузыря на высотах из диапазона от 600 до 800 км приближенно равна 190 м/с, что согласуется с данными наблюдений [7].

На втором этапе результаты расчетов первого этапа использованы в качестве невозмущенных значений для модели неустойчивости (8). Область решения выбрана так: по высоте, $z \in [600;\ 800]$, $y \in [-10;\ 10]$. Разностная сетка конечноразностного метода решения уравнений модели (8) выбрана равномерной, с шагами равными 0.02 км и 0.07 км по переменным y и z соответственно. Двумерные уравнения переноса модели (8) решались по такой же схеме, как уравнение (1), а уравнение потенциала решалось прямым методом — методом редукции.

4. Результаты численных экспериментов

В работе представлены результаты серии численных экспериментов с описанной моделью. На рис. 1 приведено распределение $\lg(n)$ в экваториальной плоскости, полученное решением уравнений модели (1)–(5), распределение соответствует значению времени 3400 с от момента инициализации плазменного пузыря. Белый прямоугольник соответствует области решения на втором этапе.

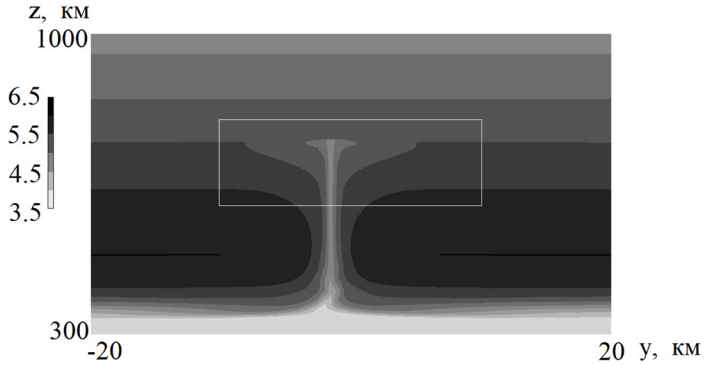


Рис. 1. Распределение $\lg(n)$ *в плоскости* (y, z) *на момент времени 3400 с*

На рис. 2 приведен пример распределения начального возмущения для модели (8) для волновых чисел $k_y = 10^{-2}$ и $k_z = 10^{-3}$. Серый цвет фона на рис. 2 соответствует нулевому значению величины N, черный — максимальному, а белый — минимальному значению.

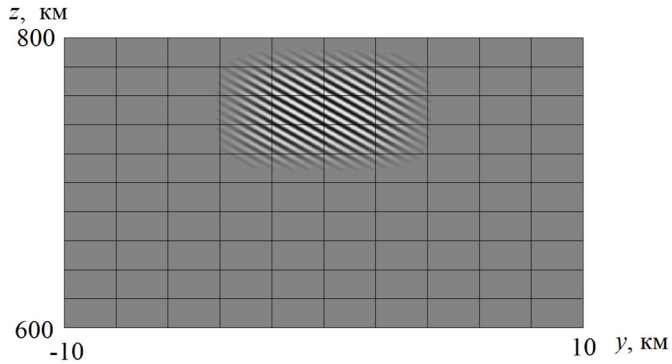


Рис. 2. Распределение начального возмущения в модели (8) для $k_y = 10^{-2}$ *и* $k_z = 10^{-3}$

В первой серии численных экспериментов получено значение инкремента исследуемой неустойчивости для различных значений волновых чисел в условиях, когда центр волнового возмущения имеет координаты (0, 750), что соответствует рис. 1. Значение инкремента вычислялось с помощью полученной зависимости амплитуды возмущения от времени. Результаты этой серии сведены в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость обратного значения инкремента неустойчивости дрейфового типа (с) от волновых чисел возмущения

		k_z						
k_y		–0.0001	0.0000	0.0001	0.0003	0.001	0.003	0.010
	0.0				25.9	163.5	–183.7	–24.0
	0.0001		24.9					
	0.001		23.4					
	0.003		23.4					
	0.010	24.4	21.9	21.0	24.0	–57.7	–44.7	

Во второй серии численных экспериментов исследована зависимость инкремента от положения начального возмущения для волновых чисел $k_y = 0,\ k_z = 10^{-3}$, результаты этой серии представлены в табл. 2.

Таблица 2

Зависимость обратного значения инкремента (с) от положения начального возмущения для волновых чисел $k_y = 0,\ k_z = 10^{-3}$

Положение центра начального возмущения, y (км).	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
Обратное значение инкремента (с)	162	159	166	178	190	164	157	161	200

Заключение

Представленные выше результаты численных экспериментов, описанных в разделе 4, позволяют сделать следующие выводы.

1. Подтверждено, что инкремент неустойчивости дрейфового типа может быть положительным на верхнем фронте развитых плазменных пузырей.

2. Значения инкремента неустойчивости в условиях проведенных численных экспериментов могут достигать значений порядка 0.048 $с^{-1}$, что соответствует времени нарастания начальных возмущений порядка 21 с. Значения инкремента сильно зависят соотношения волновых чисел и слабо от положения начального возмущения.

3. Такие времена нарастания могут являться механизмом генерации мелкомасштабных неустойчивостей на верхних фронтах развитых экваториальных плазменных пузырей в вечернее и ночное время, что в свою очередь может быть одной из причин F-рассеяния.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 28.02.2024 № 075-02-2024-1430).

Литература

1. *Гершман Б. Н., Казимировский Э. С., Кокоуров В. Д., Чернобровкина Н. А.* Явление F-рассеяния в ионосфере. – М.: Наука, 1984. – 141 с.

2. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Мациевский С. В.* Развитие неустойчивости Рэлея — Тейлора в экваториальной ионосфере и геометрия начальной неоднородности // Математическое моделирование. – 2018. – Т. 30(9). – С. 21–32.

3. *Кащенко Н. М., Никитин М. А.* Характеристики инкремента нарастания дрейфово-диссипативной неустойчивости на фронтах экваториальных плазменных пузырей // Геомагнетизм и аэрономия. – 2020. – 60 (4). – С. 502–507.

4. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Зубков Е. В.* Численная модель переноса в задачах неустойчивостей низкоширотной ионосферы Земли с использованием двумерной монотонизированной Z-схемы // Компьютерные исследования и моделирование. – 2021. – Т. 13, № 5. – С. 1011–1023.

5. *Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф., Чеванин В. С.* Об одном варианте существенно неосциллирующих разностных схем высокого порядка точности для систем законов сохранения // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21(11). – С. 19–32.

6. *Сафронов А. В.* Оценка точности и сравнительный анализ разностных схем сквозного счета повышенного порядка // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11(1). – С. 137–143.

7. *Сидорова Л. Н.* Экваториальные плазменные пузыри: зависимость вероятности наблюдения от местного времени // Геомагнетизм и аэрономия. – 2020. – Т. 60, № 5. – С. 557–565.

8. *Суковатов Ю. А.* Численное моделирование нелинейной стадии развития градиентно-дрейфовой неустойчивости во внешней ионосфере // Известия АлтГУ. – 2011. – № 1-2. – С. 168–171.

9. *Hedin A. E., Reber C. A., Newton G. P. [et al.]* A global thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data MSIS 2. Composition // Ibid. – 1977. – V. 82(A1). – P. 2148–2156.

10. *Huba J. D., Joyce G., Krall J.* Three-dimensional modeling of equatorial spread F // Aeronomy of the Earth's atmosphere and ionosphere. IAGA Special Sopron Book Series. – 2011. – Vol. 2. – P. 211–218.

11. *Kashchenko N., Ishanov S., Zubkov E., Khudenko V.* Determination of Gradient-Drift Instability Parameters under Conditions of Multiple Plasma Bubbles. Mathematical Models and Computer Simulations. – 2023. – 15. – P. 615–622. 10.1134/S2070048223040051.

12. *Tulasi Ram S. [et al.]* Vertical rise velocity of equatorial plasma bubbles estimated from Equatorial Atmosphere Radar (EAR) observations and HIRB model simulations // Ibid. – June 2017. – Vol. 122(6). – P. 6584–6594.

13. *Yokoyama T., Shinagawa H., Jin H.* Nonlinear growth, bifurcation, and pinching of equatorial plasma bubble simulated by three-dimensional high-resolution bubble model // Ibid. – 2014. – Vol. 119(12). – P. 10,474–10,482.

УДК 532.5, 004.032.26

ИНТЕГРАЦИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И НЕЙРОСЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОТОКУ ВОДЫ

А. Ю. Кликунова, О. В. Коноваленко

Волгоградский государственный университет

Аннотация. Описан метод определения параметров гидравлического сопротивления потоку воды с использованием методов нейросетевого моделирования. Предложенный подход основан на согласовании результатов моделирования динамики поверхностных вод и данных с измерительных станций, расположенных в речном русле крупной реки. Рассматриваемая модель гидравлического сопротивления имеет четыре свободных параметра, которые определяются с помощью нейронной сети с архитектурой LSTM. Использование полученных параметров для проведения гидродинамического моделирования дает хорошее совпадение результатов расчетов с наблюдаемыми данными.
Ключевые слова: гидрологический режим, вычислительная гидродинамика, модель мелкой воды, нейронная сеть, LSTM, гидравлическое сопротивление, коэффициент шероховатости, турбулентность.

Введение

Гидрологическое моделирование используется для решения широкого круга задач, таких как прогноз затопления территорий [1–5], проектирование проектов гидротехнических сооружений [6], моделирование чрезвычайных ситуаций, связанных с затоплением и подтоплением территорий [7–8], решение задач эвакуации населения [9–10]. Одной из ключевых проблем вычислительной гидрологии поверхностных вод является верификация численных моделей, которые должны обеспечивать согласие с временными рядами измерений на гидропостах [11–12]. Такие модели содержат набор свободных параметров, определяющих, в частности, гидравлическое сопротивление. Последнее зависит от сложных процессов, связанных с взаимодействие потока с неоднородным дном и нестационарностью на разных масштабах, включая турбулентное трение [12]. Определение этих параметров требует привлечения данных измерений уровней и расхода воды в разных точках. Фактически, речь идет о необходимости решения обратной задачи для гидродинамической модели мелкой воды.

1. Модель гидравлического сопротивления в приближении мелкой воды

Для моделирования динамики воды мы используем пакет EcoGIS-Simulation для параллельных вычислений на GPU [13–16], в основе которого лежит решение уравнения мелкой воды [17, 14]:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_x)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_y)}{\partial y}=q(\vec{\mathbf{r}},t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial (Hu_x)}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_xu_y)}{\partial y}=-gH\frac{\partial \eta}{\partial x}+Hf_x^{(q)}+Hf_x^{(HR)}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (Hu_y)}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_xu_y)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_y^2)}{\partial y}=-gH\frac{\partial \eta}{\partial y}+Hf_y^{(q)}+Hf_y^{(HR)}, \tag{3}$$

где функция q задает поверхностную плотность источников или стоков воды, $\eta = b + H, \eta(x, y, t)$ — уровень воды, $b(x, y)$ — функция дна, H — глубина потока, $f^{(q)}$ — удельная сила из-за

источников, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ — вектор скорости. Сток воды $Q(t)$ определяется как $Q(t) = \int q(x, y, t)dxdy$.

Мы полагаем, что гидравлическое сопротивление $f^{(HR)}$ состоит из двух компонент. Первая $f^{(M)}$ зависит от эффективного коэффициента шероховатости n_M, который зависит от пространственной структуры дна. Наша модель учитывает также турбулентную вязкость $f^{(turb)}(H)$, зависящую от двух неизвестных параметров в приближении изотропной турбулентности $(\hat{\alpha}, \gamma)$. В итоге получаем следующее уравнение для определения силы гидравлического сопротивления [11–12]:

$$\vec{\mathbf{f}}^{(HR)} = \vec{\mathbf{f}}^{(M)} + \vec{\mathbf{f}}^{(turb)} = n_M^2 \frac{g\,|\vec{\mathbf{u}}|}{H^{4/3}}\vec{\mathbf{u}} + \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{g}{\lambda^3}\right)^{\gamma/2} |\vec{\mathbf{u}}|^{1-\gamma} H^{\gamma}\vec{\mathbf{u}}. \quad (4)$$

Используется также параметризация граничных условий на выходе потока воды из вычислительной области $(\Theta^{(b)})$. В условиях паводка уровни и расход воды могут изменяться в несколько раз по сравнению с меженными значениями, что требует учета этих параметров от времени, что существенно усложняет задачу восстановления $H = \{n_M, \hat{\alpha}, \gamma, \Theta^{(b)}\}$. Для определения величин H используются методы нейросетевого моделирования [11–12].

Объектом исследования выступает нижнее течение реки Волга (100 км) от Волжской ГЭС до поселка Светлый Яр (рис. 1). На рассматриваемом участке расположено три измерительные станции, на которых каждый день фиксируются уровни воды. Мы ставим перед собой задачу минимизации отклонения уровней воды, полученных в результате гидродинамического моделирования $\eta_{mod}^{(k)}(t_n)$, от соответствующих уровней, зафиксированных на измерительных станциях $\eta_{obs}^{(k)}(t_n)$:

$$\sigma_\eta^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{N_d}\sum_{n=1}^{N_d}\left(\eta_{obs}^{(k)}(t_n) - \eta_{mod}^{(k)}(t_n)\right)^2}, \quad \sigma_\eta = \frac{1}{3}\left(\sigma_\eta^{(1)} + \sigma_\eta^{(2)} + \sigma_\eta^{(3)}\right). \quad (5)$$

Рис. 1. Нижнее течение реки Волга ниже Волжской ГЭС. Красными треугольниками обозначены измерительные станции в русле реки Волга: 1 — нижний бьеф Волжской ГЭС, 2 — речной порт г. Волгоград, 3 — пгт. Светлый Яр

Для нахождения минимума функции (5) используется нейронная сеть LSTM, архитектура которой позволяет учитывать влияние предыдущих состояний системы на состояние в текущий момент времени. В крупных реках, подверженных изменению уровня воды во время регулярных паводков, наблюдаются гистерезисные явления [11], когда уровень воды в данный момент зависит от поведения гидрографа $Q(t)$ на всем исследуемом интервале. Поэтому использование именно такой архитектуры нейронной сети для решения задач моделирования поверхностных вод является обоснованным [11].

На рис. 2 показана общая схема восстановления параметров $H = \{n_M, \hat{\alpha}, \gamma, \Theta^{(b)}\}$, состоящая из нескольких модулей. Первый включает в себя сбор входных данных для проведения моделирования. Второй модуль использует эти данные для проведения вычислительного эксперимента с использованием аппаратно-программного комплекса EcoGIS-Simulation. В рамках модуля машинного обучения мы создаем комбинированную выборку данных, состоящую из результатов численных экспериментов и результатов реальных наблюдений. Первые, в дополнение к гидрографическим данным гидрографа Q и значениям η для трех измерительных станций, включают значения коэффициентов H, поэтому они используются для обучения. На следующем этапе мы формируем обучающий и тестовый наборы. Мы используем стандартное случайное разделение на обучающий и тестовый наборы: 70 % — обучающий набор, 30 % — тестовый набор. Получаем оптимальное решение задачи (5) в виде набора параметров гидравлического сопротивления H, которые используются для конечного вычислительного эксперимента.

В рамках исследования получены соответствующие параметры гидравлического сопротивления для 2022 года для исследуемого участка. Для рассчитанных временных рядов уровней воды было вычислено среднеквадратичное отклонение от результатов измерений (табл. 1). Имеется хорошее согласие для всех трех гидропостов, включая стадию весеннего затопления, когда уровень воды резко повышается в короткие сроки.

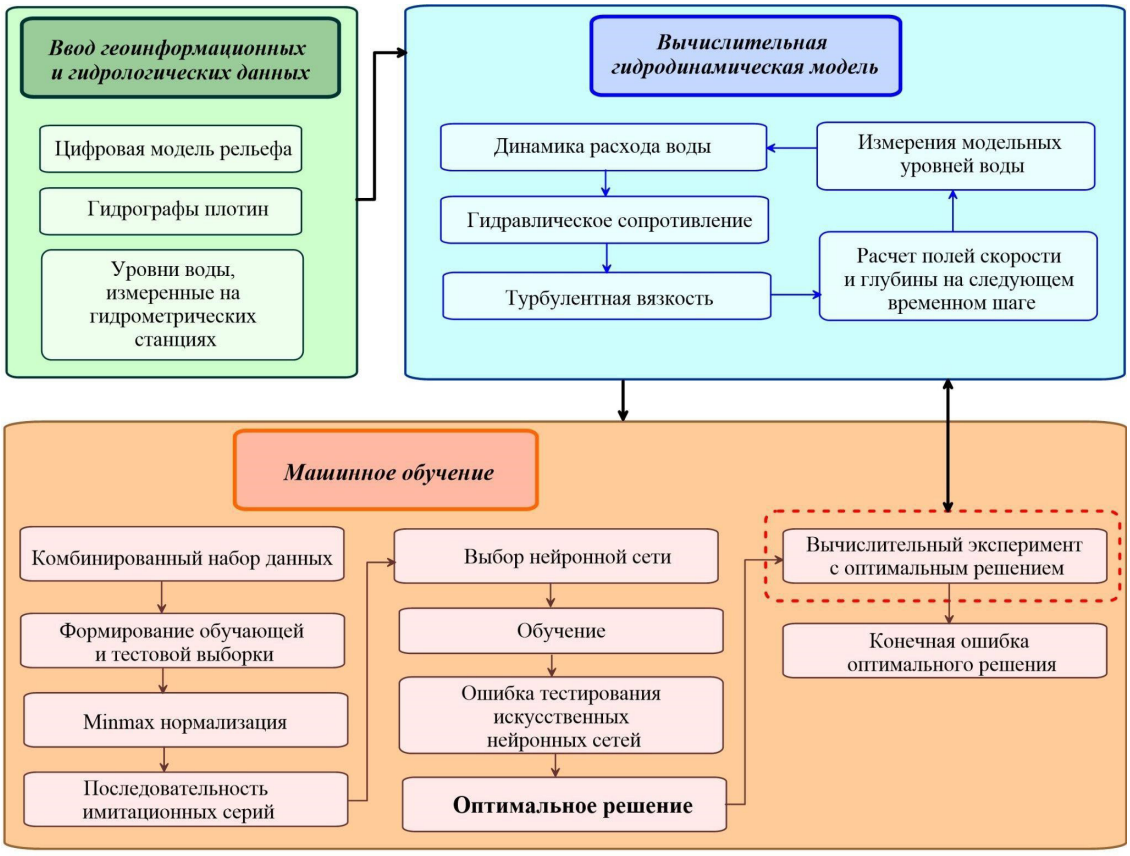


Рис. 2 Схема восстановления параметров гидравлического сопротивления реки на основе сочетания гидродинамического моделирования и машинного обучения

Таблица 1

Среднеквадратичное отклонение результатов моделирования от данных, зафиксированных на измерительных станциях

	Нижний бьеф Волжской ГЭС	Речной порт г. Волгоград	пгт. Светлый Яр
σ	0.111 м	0.182 м	0.203 м

Заключение

Проведенный анализ показал эффективность архитектуры нейронной сети Long Short-Term Memory, которая позволяет учитывать наличие памяти в речной системе длиной несколько суток. Для обучения и тестирования строятся комбинированные наборы данных, объединяющие результаты натурных измерений и гидродинамического моделирования. Развиваемый подход на примере Нижней Волги дает высокую точность воспроизведения рядов наблюдений уровней воды в пределах 10–20 см.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-71-00016, https://rscf.ru/project/23-71-00016/). Исследование проводится с использованием оборудования совместного исследовательского центра высокопроизводительных вычислительных ресурсов Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Литература

1. *Isaeva I. I.* Modeling the Territorial Structure Dynamics of the Northern Part of the Volga-Akhtuba Floodplain / I. I. Isaeva, A. A. Voronin, A. V. Khoperskov, M. A. Kharitonov // Computation. – 2022. – Vol. 10, № 4, id. 62. – P. 31.

2. *Hu H.* Urban hydrological model (UHM) developed for an urban flash flood simulation and analysis of the flood intensity sensitivity to urbanization / H. Hu, M. Yu, X. Zhang., Y. Wang // Geomatics, Natural Hazards and Risk. –2024. – Vol. 15, №. 1. – P. 2302561.

3. *Кликунова А. Ю.* Метод построения кадастровых карт затопления речных долин на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования / А. Ю. Кликунова // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2023. –Т. 26, № 3. – С. 15–23.

4. *Тертычная А. С.* Метод определения береговых линий водных объектов на основе обработки данных дистанционного зондирования LandsatETM+ / А. С. Тертычная, К. С. Тертычный, А. В. Хоперсков // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. – 2023. – Т. 20, № 5. – С. 28–38.

5. *Кликунова А. Ю.* Моделирование затоплений населенных пунктов в период весеннего паводка / А. Ю. Кликунова, Т. А. Дьяконова, Е. О. Агафонникова [и др.] // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2021. – Т. 24, № 3. – С. 63–72.

6. *Гиргидов А.А.* Гибридное моделирование в проектировании гидротехнических сооружений и flow-3d® как средство его реализации / А. А. Гиргидов // Инженерно-строительный журнал. – 2011. – № 3 (21). – С. 21–27.

7. *Klikunova A. Y.* Modeling of Extended Flooding of the Volga-Akhtuba Floodplain Under Various Conditions / A. Y. Klikunova, T. A. Dyakonova, E. O. Agafonnikova // 2023 Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (AMCSM). – IEEE. – 2023. – С. 1–6.

8. *Агафонникова Е. О.* Проблема прогноза и управления гидрологическим режимом на горной территории в период ливневого паводка на основе гидродинамических численных экспериментов / Е. О. Агафонникова, А. В. Хоперсков, С. С. Храпов // Кибернетика и программирование. – 2016. – № 3. – С. 35–53.

9. *Vatyukova O. Yu.* The problem of effective evacuation of the population from floodplains under threat of flooding: algorithmic and software support with shortage of resources / O. Yu. Vatyukova, A. Yu. Klikunova, A. A. Vasilchenko [and others] // Computation. – 2023. – Vol. 11, № 8, id. 150. – P. 1–26.

10. *Voronin A. A.* The Problem of Safe Evacuation of Large Floodplains Population During Flooding / A. A. Voronin, A. A. Vasilchenko, A. Yu. Klikunova A.Yu. [and others] // Advances in Systems Science & Applications. – 2022. – Vol. 22, № 4. – P. 65–78.

11. *Klikunova A. Yu.* Problem of building high-quality predictive model of river hydrology: the combined use of hydrodynamic simulations and intelligent computing / A. Yu. Klikunova, M. V. Polyakov, S. S. Khrapov, A. V. Khoperskov // Communications in Computer and Information Science. – 2023. – Vol. 1909. – P. 191–205.

12. *Khoperskov A. V.* Efficiency of Using GPUs for Reconstructing the Hydraulic Resistance in River Systems Based on Combination of High Performance Hydrodynamic Simulation and Machine Learning / A. V. Khoperskov, S. S. Khrapov, A. Yu. Klikunova, I. E. Popov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, № 7. – P. 3094–3105.

13. *Khrapov S.* EcoGIS-Simulation Software for riverbed sediments modeling / S. Khrapov, E. Agafonnikova, P. Potaptseva [and others] // E3S Web of Conferences. – EDP Sciences. – 2023. – Vol. 411, № 3. – P. 02005.

14. *Khrapov S. S.* Numerical modeling of self-consistent dynamics of shallow and ground waters / S. S. Khrapov // Mathematical Physics and Computer Modeling. – 2021. – Vol. 24, № 3. – P. 45–62.

15. *Khrapov S. S.* Numerical Modeling of Hydrodynamic Accidents: Erosion of Dams and Flooding of Territories / S. S. Khrapov // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. – 2023. – Vol. 56, № 2. – P. 261–272.

16. *Dyakonova T.* Numerical Model of Shallow Water: the Use of NVIDIA CUDA Graphics Processors / T. Dyakonova, A. Khoperskov, S. Khrapov // Communications in Computer and Information Science. – 2016. – Vol. 687. – P. 132–145.

17. *Khrapov S. S.* Application of Graphics Processing Units for Self-Consistent Modelling of Shallow Water Dynamics and Sediment Transport / S. S. Khrapov, A. V. Khoperskov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, № 8. – P. 1475–1484.

УДК 519.652

ЛОКАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ БАЗИСНЫЕ СПЛАЙНЫ

В. А. Конева

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Аннотация. Локальные параболические базисные сплайны — это инструмент для интерполяции и аппроксимации функций, характеризующийся высокой гибкостью и точностью. Они опираются на базисные сплайны, используя формулы для расчета на равномерной сетке. В статье представлена схема построения локального параболического базисного сплайна и, с учетом введения новой переменной *t*, показано, как связывать разные ветви сплайна. Такие сплайны обладают локальными свойствами, позволяющими эффективно управлять формой кривых и расположением узлов, что важно для улучшения качества интерполяции и снижения вычислительных затрат. Они находят применение в моделировании физических процессов, анализе данных, медицинской визуализации и других областях, улучшая качество изображений и облегчая моделирование сложных геометрий.
Ключевые слова: локальные параболические базисные сплайны, интерполяция функций, аппроксимация функций, сплайны, применение сплайнов, интерполирование на равномерной сетке.

Локальные параболические базисные сплайны представляют собой мощный инструмент для интерполяции и аппроксимации функций. Они используют концепцию базисных сплайнов для создания сглаженных кривых, обеспечивая при этом достаточно высокую степень гибкости и точности.

Локальные параболические базисные сплайны опираются на определение базисных сплайнов. Рассмотрим следующую формулу [1]:

$$\tilde{B}_{n,i}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)\sum_{p=i}^{i+n+1}\frac{(x-x_p)_+^n}{\omega'_{n+1,i}(x_P)},$$

где $(x-x_p)_+^n = \begin{cases} 0, x \le x_p \\ (x-x_p)^n, x \ge x_p \end{cases}$ $\omega_{n+1,i}(x) = \prod_{p=i}^{i+n+1}(x-x_p).$

Для случая параболического сплайна $(n=2)$ формула будет иметь следующий вид:

$$\tilde{B}_{2,i}(x) = (-1)^3 \cdot 3\sum_{p=i}^{i+3}\frac{(x-x_p)_+^2}{\omega'_{3,i}(x_P)}$$

$$\omega_{3,i}(x) = \prod_{p=i}^{i+3}(x-x_p) = (x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})(x-x_{i+3})$$

В результате расчета на равномерной сетке мы получим новые значения $\omega_{3,i}(x)$ для различных узлов. Это позволит преобразовать формулу $\tilde{B}_{2,i}(x)$ и привести к выражению, где указаны новые значения для разных диапазонов x:

$$\tilde{B}_{2,i}(x) = \frac{1}{2h^3}(x-x_i)^2, x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\tilde{B}_{2,i}(x) = \frac{1}{2h^3}(x-x_i)^2 - \frac{3}{2h^3}(x-x_{i+1})^2, x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$$

$$\tilde{B}_{2,i}(x) = \frac{1}{2h^3}(x-x_i)^2 - \frac{3}{2h^3}(x-x_{i+1})^2 - \frac{3}{2h^3}(x-x_{i+2})^2, x \in [x_{i+2}, x_{i+3}]$$

Часто применяются нормированные базисные сплайны [1], где $B_{2,i}(x)$ можно выразить через $\tilde{B}_{n,i}(x)$ [3].

Таким образом, через введение переменной $t = \dfrac{x - x_i}{h}$ можно связать разные ветви сплайна и функции $f(x)$ на определенном отрезке будет соответствовать параболический сплайн $S(t)$ [2]:

$$S(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2})^2 f_{i-1} + (-t^2 + \frac{3}{4}) f_i + \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2})^2 f_{i+1}, \ t \in [0;1].$$

В качестве примера на рис. 1 и рис. 2 приведены различные построения по рассматриваемой схеме.

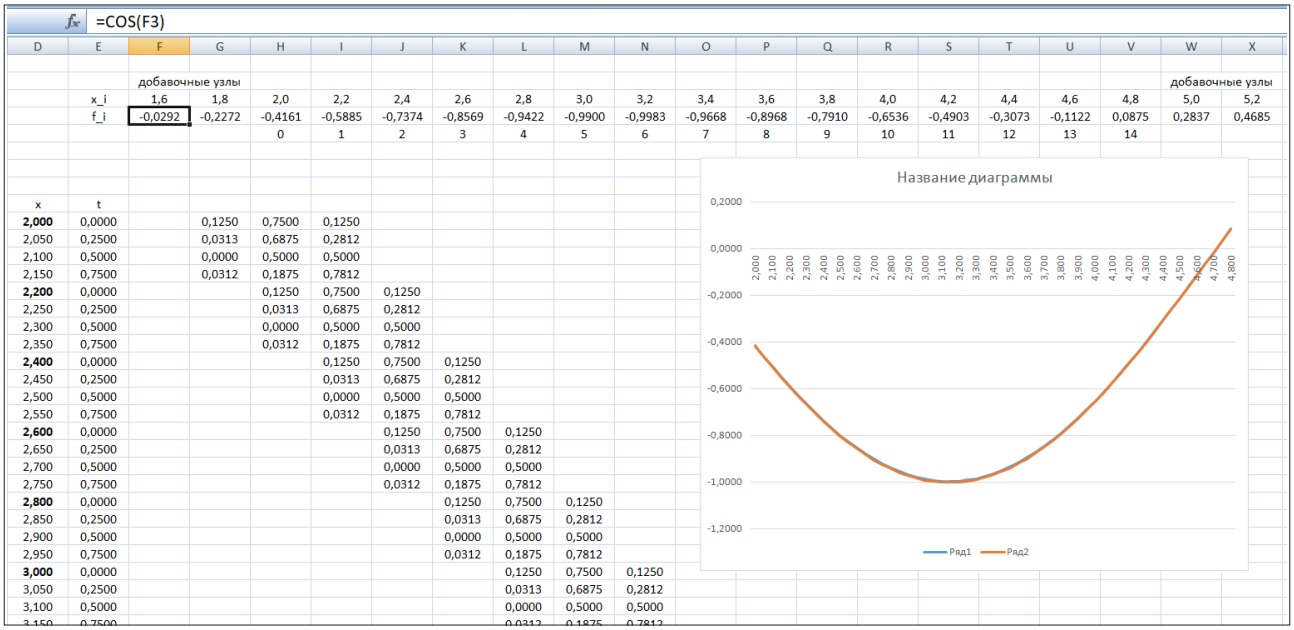


Рис. 1. Сплайн интерполяция функции $y = \cos x$

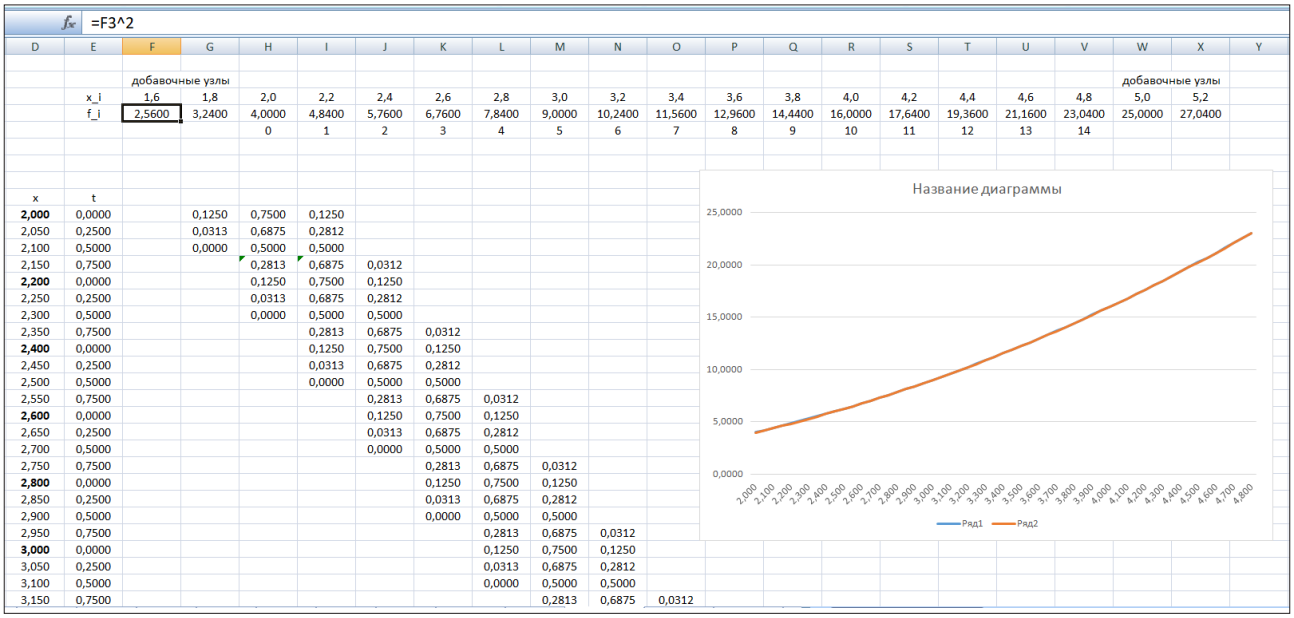


Рис. 2. Сплайн интерполяция функции $y = x^2$

При использовании параболических сплайнов важно учитывать их локальные свойства, что позволяет добиваться высокой точности интерполяции и сглаживания в заданных диапазонах, а также строить сложные формы кривых через множество узлов. При необходимости создания более сложных форм, можно разместить узлы в соответствии с кривизной аппроксимируемой функции, что обеспечит более точное представление. Кроме того, можно изме-

нять местоположение узлов в зависимости от поведения заданной в условии функции. Это не только повышает качество интерполяции, но и снижает вычислительные затраты, так как количество узлов может быть уменьшено в областях с меньшей сложностью. Таким образом, при построении параболических сплайнов получается управлять насыщением узловых точек, а также есть возможность локализованного управления формой, то есть производить изменения в одном сегменте сплайна, минимально влияя на остальные. Это свойство значительно упрощает задачи редактирования и оптимизации, позволяя дизайнерам и инженерам при моделировании сложных поверхностей и объектов сосредоточиться на конкретных участках модели, без необходимости повторного вычисления всей структуры. Кроме того, локальные параболические сплайны обладают высокой вычислительной эффективностью, что делает их подходящими для применения в области обработки изображений. Это открывает новые горизонты для разработки алгоритмов стилизации и улучшения качества изображений, способствует созданию более естественных визуальных эффектов и повышает уровень детализации. В совокупности, локальные параболические базисные сплайны позволяют сохранить точность в создании и манипуляции сложной геометрией, становясь неотъемлемой частью современного подхода к цифровому дизайну.

Локальные параболические сплайны также находят широкое применение в области моделирования физических процессов, таких как динамика жидкостей и газа. Их возможность эффективно адаптироваться к изменяющимся условиям позволяет точно описывать сложные явления, например, в аэродинамике или гидродинамике. Это значительно облегчает работу инженеров, занимающихся разработкой новых технологий и материалов.

В дополнение к этому, локальные параболические сплайны активно используются в анализе и предсказании поведения физических систем. В таких областях, как геофизика, их применяют для интерполяции данных и визуализации сложных моделей, что позволяет изучать процессы, происходящие в недрах Земли. Это особенно актуально для разработки методов обнаружения и добычи полезных ископаемых.

В медицинской визуализации параболические сплайны применяются для реконструкции и анализа изображений, полученных с помощью таких методов, как компьютерная и магнитно-резонансная томография. Здесь сплайны помогают повышать разрешение изображений и сглаживать шумы, что является очень важным для точной диагностики и планирования медицинских процедур. Возможность сохранять высокую четкость границ органов и тканей делает сплайны ценным инструментом в арсенале специалистов.

Таким образом, локальные параболические базисные сплайны предоставляют гибкий и мощный инструментарий для разнообразных задач, включая обработку сигналов, моделирование физических явлений и компьютерную графику, позволяя достигать высокой степени точности и плавности.

Литература

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функции. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – с. 352.

2. *Шевалдин В. Т.* Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 2005. – Т. 8, № 1. – С. 77–88.

3. *Шевалдин В. Т.* Локальная аппроксимация параболическими сплайнами в среднем при больших интервалах усреднения // Матем. заметки. – 2020. – Т. 108, вып. 5. – С. 771–781.

УДК 519.711

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОНТОЛОГИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ПОТРЕБНОСТЕЙ РАБОТОДАТЕЛЕЙ

В. С. Коровина

Кубанский государственный университет

Аннотация. Онтологии представляют собой важный инструмент, позволяющий организовать знания о структуре ожиданий на этом рынке. Данное исследование направлено на анализ применения онтологий для глубокого понимания и моделирования данной области, а также выявление успешных примеров их использования. Важным аспектом работы является рассмотрение методологий создания онтологий и примеров их практического применения. Исследование также охватывает как формальную, так и неформальную информацию о квалификациях и навыках, что может улучшить процессы управления персоналом. Выводы исследования имеют потенциал для трансформации подходов к подбору персонала и управлению человеческими ресурсами.
Ключевые слова: интеллектуальный рынок труда, онтологии, структура знаний, база знаний, интеллектуальные системы, методологии создания онтологий, структура онтологии, предметная область, естественный язык (NLP), методы обработки естественного языка.

Введение

Интеллектуальный рынок труда становится динамичным и комплексным, что требует новых подходов к его анализу. Онтологии играют важную роль в организации знаний о структуре ожиданий на этом рынке. Данное исследование направлено на анализ применения онтологий для глубокого понимания и моделирования этой сферы. Мы также рассматриваем примеры успешного использования онтологий и определяем потенциальные выгоды от их применения. Изучение неформальной информации о квалификациях работников является ключевым для улучшения управления персоналом. Это исследование вносит вклад в методы подбора персонала и оценки квалификаций, что имеет потенциал для революции в области управления человеческими ресурсами.

1. Понятие онтологии и описание её структуры

Онтология представляет собой явное описание концептуализации, в которой описывается множество объектов и связей между ними. Множество терминов систематизируется на основе таксономии, т. е. классификации. Визуально онтологию можно представить в виде направленного графа, в котором концепты располагаются в узлах, а связи между ними отображаются в виде ребер.

Онтология является формальной спецификацией согласованной концептуализации, включающей в себя концепты (т. е. понятия, классы и экземпляры предметной области), отношения между концептами и аксиомы предметной области [1].

В онтологии концепция играет фундаментальную роль в представлении знаний о мире в структурированном и организованном виде. Концепцию можно рассматривать как абстрактную идею или мысленное представление, которое отражает основные свойства и отношения класса объектов, событий или сущностей в определенной области.

На рис. 1 схематично представлен процесс разработки онтологии структуры ожиданий на интеллектуальном рынке труда.

Идентификация предметной области — определение основных концепций, терминов и отношений, характерных для структуры ожиданий на интеллектуальном рынке труда.

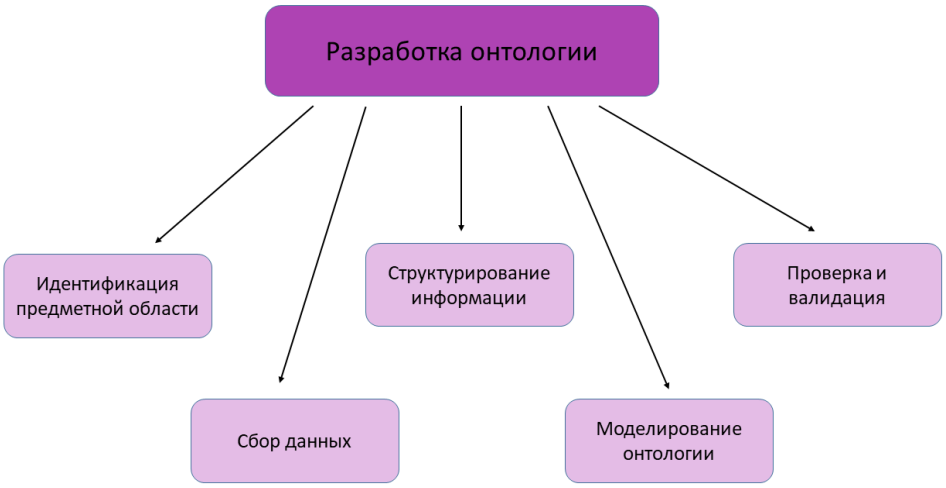


Рис. 1. Схема процесса разработки онтологии

Сбор данных включает в себя анализ существующих источников данных, включая анализ литературы, интервью с экспертами и сбор данных из открытых источников для определения ключевых концепций и отношений в предметной области.

Структурирование информации представляет собой организацию собранных данных в форме, понятной для последующего моделирования. Это может включать создание тезауруса, классификацию понятий и выявление связей между ними.

Моделирование онтологии подразумевает создание формальной спецификации онтологии, которая включает определение основных классов, свойств и отношений среди ключевых концепций структуры ожиданий на интеллектуальном рынке труда.

Проверка и валидация — проверка и тестирование созданной онтологии с помощью экспертов и заинтересованных сторон, чтобы обеспечить её корректность и целостность.

Онтология структуры ожиданий на интеллектуальном рынке труда может быть представлена в виде ориентированного графа, где ключевые концепции предметной области выступают в качестве узлов, а связи между ними выступают в виде ребер. Примерами концепций в данной онтологии могут быть «профессиональные навыки», «квалификация», «опыт работы», «потенциал», «ожидания работодателя», «ожидания работника», «требования к вакансиям» и другие [2].

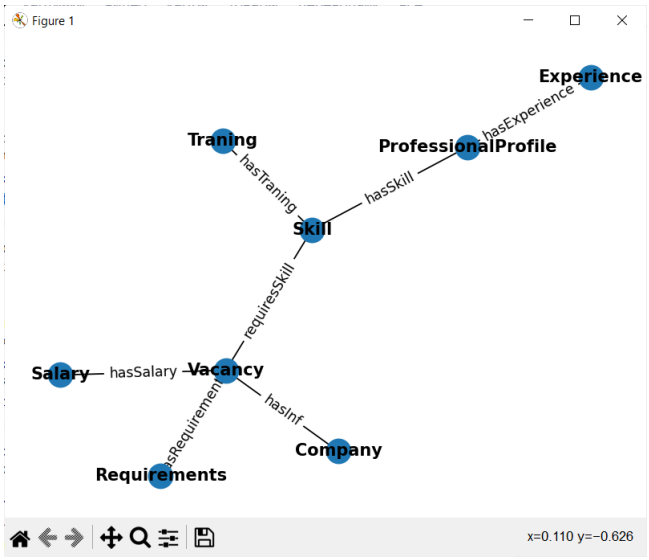


Рис. 2. Фрагмент онтологии для вакансий IT-специалистов

Каждая концепция может иметь свои атрибуты и связи. Например, концепция «профессиональные навыки» может быть связана с концепцией «требования к вакансиям», отражая соответствие навыков требованиям работодателей. Атрибутами могут быть уровень владения навыком, область его применения и другие характеристики.

Элементы онтологии также могут включать аксиомы, ограничения и классификации, которые определяют правила и законы взаимодействия между концепциями.

На рис. 2 представлен фрагмент онтологии для вакансий IT-специалистов.

2. Определение NLP и методы его обработки

Обработка естественного языка (Natural Language Processing, NLP) представляет собой область искусственного интеллекта, посвященную разработке методов и технологий для взаимодействия компьютеров с человеческим языком. В современном информационном обществе огромное количество данных представлено в текстовой форме, и NLP открывает возможности для их обработки, анализа и использования в различных областях, таких как машинный перевод, аналитика данных, автоматизация текстовой обработки, и многое другое.

Одним из ключевых аспектов NLP является обработка текста с целью понимания его смысла, структуры и контекста. Это включает в себя задачи как синтаксического и семантического анализа текста, так и распознавание, и извлечение информации из него. Среди основных методов NLP находятся алгоритмы машинного обучения, статистические модели, искусственные нейронные сети, а также инструменты для обработки текстовых данных, такие как токенизация, лемматизация и частеречная разметка [3].

Методы обработки естественного языка включают в себя различные подходы и техники для анализа и понимания текстовых данных на естественных языках. Один из таких методов в NLP — морфологический анализ, который включает в себя лемматизацию и стемминг.

Морфологический анализ направлен на изучение формы и структуры слов в тексте, включая их грамматические характеристики, части речи, склонения, спряжения и т. д. Морфологический анализ помогает понять особенности слова и его значения в контексте предложения.

Лемматизация является процессом приведения слова к его словарной (нормальной) форме — лемме. Например, для существительного «кошками» леммой будет «кошка», для глагола «бежал» леммой будет «бежать». Лемматизация позволяет сократить вариативность словоформ и упростить дальнейший анализ текста.

Стемминг — процесс обработки слова с целью выделения его основы (стебля). Основной идеей стемминга является обрезка аффиксов (окончаний) слова для получения его основного корня. Например, для слова «бегущий» стеммингом будет «бег», для слова «муха» стеммингом будет «мух». Стемминг позволяет подходить к словам с одинаковой основой как к одному и тому же слову, что упрощает анализ текста и поиск информации [4].

Использование лемматизации и стемминга в методах NLP позволяет улучшить точность и эффективность анализа текстов. Например, при построении поисковых систем, где важно учесть различные формы слова, морфологический анализ поможет объединить все варианты слова в одну лемму или основу, что позволит точнее найти соответствующий запрос.

3. Результаты разрабатываемых решений

На рис. 3–4 представлены навыки frontend разработчиков, python разработчиков и частота их встречаемости. Например, частота встречаемости JavaScript в frontend-разработке равна 0.5112, а в python-разработке — 0.19. В дальнейшем данный анализ поможет нам для связи классов, атрибутов, понятий IT-вакансий.

Далее нам необходимо найти семантическое сходство между концептами с использованием NLP методов.

На рис. 5 представлен вывод числового значения, которое представляет семантическое сходство между различными концептами.

Таким образом, путем дополнения онтологии и графа отношений мы можем корректно представить новые требования к вакансиям IT-специалистов и их соответствующие классы, подклассы.

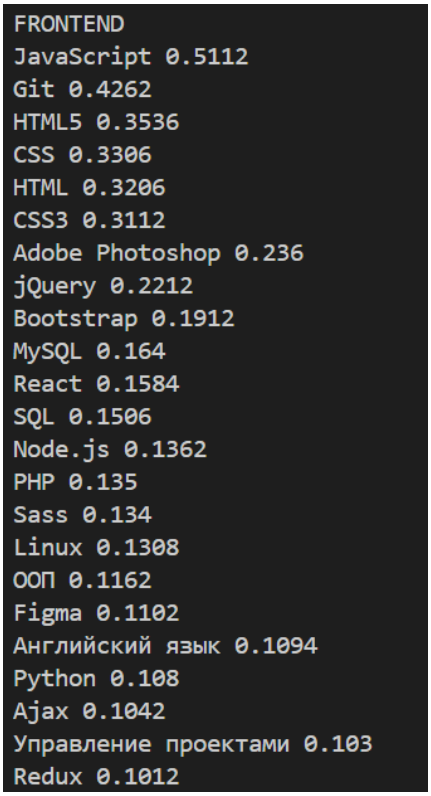


Рис. 3. Навыки frontend разработчиков и их частота встречаемости

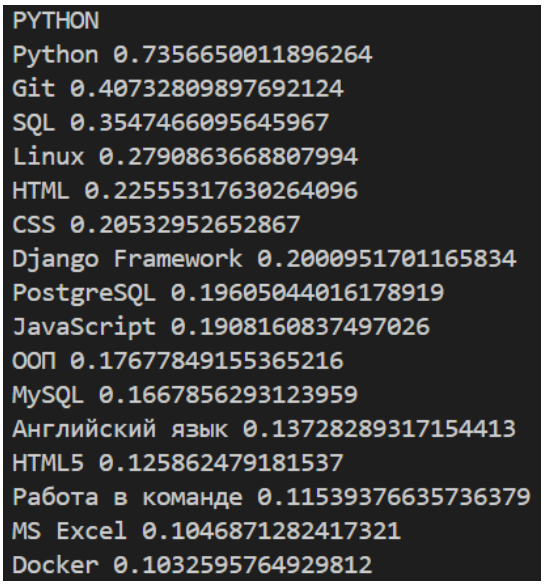


Рис. 4. Навыки python разработчиков и их частота встречаемости

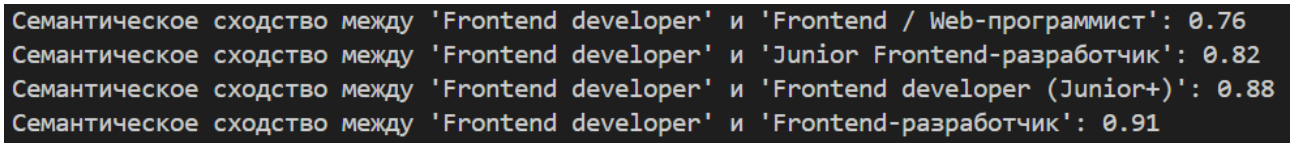


Рис. 5. Вывод семантического сходства между концептами

Заключение

В работе была создана онтология, которая описывает структуру ожиданий работодателей, навыков и квалификации кандидатов на данный рынок. Такой подход позволяет создавать более точные и детальные онтологии, являющиеся важным инструментом для улучшения процессов подбора персонала, анализа потребностей на рынке труда и принятия управленческих решений. Установление связей между объектами и применение современных технологий NLP позволяют создавать эффективные и инновационные системы для работы с текстовыми данными, повышая их ценность, полезность и точность анализа. Благодаря развитию дисциплин NLP и онтологий, мы можем создавать интеллектуальные системы, способные понимать и обрабатывать текстовую информацию, адаптироваться к разным задачам и принимать информированные решения на основе анализа текста.

Литература

1. *Суханов В. И.* Онтологии в представлении знаний: учебное пособие / В. И. Суханов. – Екатеринбург : Изд-во УрФУ, 2020. – 97 с.

2. Хорошевский В. Ф. Проектирование систем программного обеспечения под управлением онтологий: модели, методы, реализации / В. Ф. Хорошевский. – Самара : Изд-во ООО Новая Техника, 2019 – С. 429–448.

3. Автоматическая обработка текстов на естественном языке и компьютерная лингвистика: учебное пособие / Е. И. Большакова, Э. С. Клышинский, Д. В. Ландэ [и др]. – М. : МИЭМ, 2011. – 272 с.

4. *Гольдберг Й.* Методы в обработке естественного языка / пер. с анг. А. А. Слинкина. – М. : ДМК Пресс, 2019. – 282 с.

УДК 004.891

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ИНТЕРАКТИВНЫХ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ

В. С. Котенко

Воронежский государственный университет

Аннотация. «Коллективный интеллект (КИ) — это мощный инструмент решения задач, который используется в многоагентных системах. Технология многоагентных систем (МАС) на данный момент активно развивается благодыаря своим основным преимуществам: гибкости, масштабируемости и эмерджентности.» Интерактивные генетические алгоритмы (ИГА) применяются для решения задач в тех областях, где поиск решения требует постоянной качественной оценки от человека. Эмоциональное мнение пользователя внедряется в эволюционный процесс как мера приспособленности особи. Данная статья изучает метод решения проблемы утомления пользователей при долгой работе с ИГА. Работа метода заключается в том, что множество пользователей одновременно работают с идентичной задачей с помощью ИГА, предоставляя в общий доступ свои суждения об особях и самих особей, что позволяет собрать их как коллективный интеллект. После этого создаётся стратегия использования КИ для ускорения поиска решений для конкретного пользователя в общей для пользователей системе ИГА.
Ключевые слова: коллективный интеллект, многоагентные системы, генетические алгоритмы, интерактивные генетические алгоритмы, групповое принятие решений.

Введение

Генетические алгоритмы (ГА) — это алгоритмы поиска и оптимизации, основанные на принципах естественного отбора, эволюции. Как известно, задачи оптимизации заключаются в нахождении минимума или максимума заданной, целевой функции.

При работе генетического алгоритма создается ряд решений, популяция, соответствующая рассматриваемой задачи, после чего наиболее хорошие решения порождают потомков путём рекомбинации и, иногда, мутации своих генов, из-за чего алгоритмы и называются эволюционными [1].

Процесс продолжается на протяжении многих поколений. Решение — это значение пригодности для каждой особи популяции, которое зависит от целевой функции. Каждое из возможных решений называется «хромосомой». Члены популяции оцениваются по функции приспособленности и получают баллы в зависимости от степени приспособленности.

В процессе отбора ряд хромосом с наивысшими баллами отбираются в качестве родителей для генерации следующего поколения, и посредством операции скрещивания между этими хромосомами генерируется новая популяция. Операция скрещивания — это процесс, при котором комбинация двух родительских хромосом генерирует новые решения, каждое из которых наследует некоторые черты от первого родителя и некоторые от второго. Особи из наилучшей популяции имею больше шансов дать потомство, а часть потомства унаследует лучшие гены родителей. Это соответствует дарвиновской теории выживания наиболее приспособленных. Таким образом, каждое новое поколение будет улучшать гены особей пока не выполнится заданный критерий остановки [1–3].

Интерактивные генетические алгоритмы выделяются своей возможностью включать человеческую интуицию и оценку в процесс оптимизации. В ИГА функция приспособленности не определена явно, она задаётся человеком, который оценивает качество каждого решения. Это позволяет ИГА решать задачи, которые трудно формализовать. В таких задачах чаще всего

гены хромосом кодируют информацию о визуальных качествах особи: цвете, форме, точном расположении мелкой детализации [4].

Одним из основных ограничений ИГА является проблема усталости пользователя, которая возникает, когда одному пользователю требуется оценивать решения в течение длительного периода [5].

1. Интерактивные генетические алгоритмы

На текущий момент существует несколько методов для ускорения работы ИГА.

В 2017 году был рассмотрен подход с автоматической оценкой неблагоприятных особей [6]. В статье рассматривалось применение ИГА для создания дизайна продукции, который окажется наиболее предпочтительным для пользователя. Сам алгоритм исключения кандидатов — это алгоритм обучения, который предсказывает принадлежность особи к набору путем итеративного уточнения двух границ, верхней границы (G) и нижней границы (S). Изначально G устанавливается как наиболее общий и принимает все образцы, в то время как S устанавливается как наиболее конкретный и не принимает ни одного образца. Затем алгоритм выполняет итерацию по обучающим образцам, обобщая или сужая границы по мере необходимости, чтобы принять или отклонить каждый образец.

Преимущество алгоритма заключается в том, что пользователь сначала работает со стандартным ИГА, но оценки пользователя формируют обучающую выборку, которую использует алгоритм для удаления результатов, которые скорее всего будут забракованы пользователем.

Подобные исследования ограничиваются ИГА с одним пользователем. Это несёт ряд недостатков: оценка отдельного человека часто страдает от субъективности или недостатка знаний, эволюционный поиск может быть направлен в ошибочное направление, и процесс будет излишне долог. Напротив, если новому пользователю предоставляется информация о проблеме, полученная от других пользователей, то его предпочтения могут быстрее стать осмысленными, и, таким образом, эволюционный процесс может ускориться, что значительно снизит утомляемость [7].

Предлагаемый подход можно сравнить с совместной коэволюцией [8]. При использовании совместного коэволюцинного алгоритма сложная задача оптимизации разбивается на несколько подзадач, и каждая подзадача решается с помощью отдельной подгруппы, разработанной отдельным эволюционным алгоритмом. Сотрудничество заключается в том, что популяции используют информацию, полученную от других популяций в ходе эволюционного процесса и сами делятся её.

В данном же методе сотрудничество заключается в поиске пользователей с похожими предпочтениями и использовании результатов найденных пользователей для ускорения эволюционного процесса текущего пользователя.

Определим задачу оптимизации следующим образом:

$$\max f(x)$$
$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$$
$$S \subset R^n$$

где $f(x)$ — функция приспособленности, которую невозможно задать в явном виде, поэтому её значение зависит от предпочтения пользователя, x — n-мерная переменная, которая представляет собой особь, S — доступное пространство решений.

Так же, вместо использования чёткого значения функции приспособленности можно использовать нечёткую логику и задавать приспособленность особи через интервал. Такой подход позволяет пользователям быть менее строгими в своих предпочтениях [9].

2. Метод коллективного интеллекта

Первой задачей является выявление схожих между собой пользователей. Разумно предположить, если предпочтения одного пользователя схожи с предпочтениями другого, то их качественные оценки одних и тех же вещей будут схожими. Пусть все особи, которых оценили пользователи, находятся в общем хранилище. Тогда, используя метод кластеризации, особи группируются в кластеры. Пользователи, чьи оценки особей в кластере оказались наиболее схожи, определяются как пользователи со схожими предпочтениями.

Для кластеризации разумно использовать метод k-средних, а схожесть набора можно выразить следующим образом:

$$D_{S^i} = \sqrt{\frac{1}{L_i - 1}\sum_{j=1}^{Li} | x_j - \overline{x} |^2}$$

где $S^i = \{x_1^i, x_2^i, ..., x_{L_i}^i\}$ — i-й класс кластеризации, L_i — число схожих особей в i-м наборе, $\overline{x} = \frac{1}{L_i}\sum_{j=1}^{L_i} x_j$.

В таком случае, кластер в котором D_{S^i} принимает наибольшее значение обладает самым большим разнообразием в генотипе особей, и наоборот. Все рассматриваемые особи были отправлены в хранилище, то есть оказались самими предпочтительными для пользователя. Тогда в кластере с наименьшим разнообразием оказались особи, соответствующие чёткому вкусу пользователей, в то время как в кластере с наибольшим разнообразием находятся особи, которые не могут м такой же большой гарантией оказаться в предпочтении схожего пользователя, но имеют больший шанс понравиться новому пользователю, о предпочтениях которого ещё нет информации.

Таким образом, пользователи со схожими предпочтениями сформированы в общие группы. Это позволяет провести групповое принятие решений о том, какая именно особь из кластера является самой предпочтительной. Благодаря формированию групп мы избежали ситуации, в которой член экспертной группы на эмоциональном уровне испытывает неприязнь к данным особям или не вовлечён в особенности их фенотипа. Каждый участник группы высоко оценил приспособленность этих особей, а использование одного из методов принятия групповых решений, например аддитивной агрегации, позволит выбрать самый оптимальный вариант [10].

3. Применение коллективного интеллекта в интерактивном генетическом алгоритме

Основная задача применения коллективного интеллекта к однопользовательскому ИГА заключается в том, чтобы снизить утомляемость пользователя, ускорив его изучение текущей проблемы оптимизации, путем помощи в формировании предпочтений на начальных этапах ИГА, а также сохранения его предпочтения неизменными в последующих итерациях алгоритма.

Когда новый пользователь начинает выполнять ИГА, его предпочтения обычно нечеткие и неопределенные из-за отсутствия формализованных правил для функции приспособленности. Потребуется больше взаимодействий, чтобы получить достаточно знаний для определения предпочтений. Таким образом, задача состоит в том, чтобы помочь пользователю быстро подтвердить его предпочтения с помощью коллективного интеллекта.

На старте алгоритма вместо инициализации начальной популяции случайными значениями, пользователь получает особей из хранилища, принадлежащих самому разнообразному кластеру. Подобный подход позволяет не тратить время пользователя на оценку особей, которые единогласно признаются плохими, выбор предоставляется из уже оптимальных, в некото-

рой степени, вариантов. Так же при оценке особей происходит обратная связь, алгоритм коллективного интеллекта может оценить к какой группе со схожими предпочтениями отнести нового пользователя. После нахождения других наиболее похожих пользователей количество непригодных особей в каждой популяции станет ещё меньше.

В процессе эволюционного отбора у пользователя могут быть стабильные или нестабильные предпочтения. Предпочтения считаются нестабильными до тех пор, пока в течение заданного количества смен популяций больше половины генов в самых предпочтительных особей будут различны. После стабилизации предпочтений пользователю будут предлагаться особи в окрестностях от предпочтительной, что ещё больше ускорит поиск оптимального решения.

Заключение

Предложенный метод улучшения интерактивных генетических алгоритмов с помощью коллективного интеллекта позволяет минимизировать один из главных недостатков ИГА в виде утомления пользователя. Так же алгоритм формирует экспертные группы, чьи предпочтения являются схожими, благодаря чему, применяя методы группового принятия решений, становится возможным выбирать оптимальный результат качественной оценки, не опасаясь того, что излишняя неприязнь или фаворитизм повлияют на групповое суждение.

Литература

1. *Курейчик В. В.* Теория эволюционных вычислений / В. В. Курейчик, В. М. Курейчик, С. И. Родзин. – Москва : Физматлит, 2012. – 260 с.

2. *Moraglio A.* Geometric crossover for the permutation representation / A. Moraglio, R. Poli // Intelligenza Artificiale. – 2011. – Т. 5. – С. 49–63.

3. Mitchell, M. Genetic Algorithms and Artificial Life / M. Mitchell, S. Forrest // Artificial Life. – 1994. – Т. 1. – С. 297–289.

4. *Takagi H.* Interactive evolutionary computation: Fusion of the capabilities of EC optimization and human evaluation / H. Takagi // Proceedings of the IEEE. – 2001. – Т. 89, № 9. – С. 1275–1296.

5. *Yan J.* User Fatigue in Interactive Evolutionary Computation / J. Yan, M. Yong // Applied Mechanics and Materials. – 2011. – Т. 48–49. – С. 1333–1336.

6. *Sheikhi D.* Improving the interactive genetic algorithm for customer-centric product design by automatically scoring the unfavorable designs / D. Sheikhi, M. Kaedi // Hum. Cent. Comput. Inf. Sci. – 2017. – Т. 7, № 38. – С. 1–18.

7. *Gong D.* Cooperative interactive genetic algorithm based on user's preference / D. Gong, Z. Yong, T. Li // International Journal of Information Technology. – 2005. – Т. 11, № 10. – С. 1–10.

8. *Xialong M.* A Survey on Cooperative Co-Evolutionary Algorithms / M. Xialong, L. Xiadong, Z. Qingfu // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 421–441.

9. *Gong D.* Interactive genetic algorithms with individuals uncertain fitness / D. Gong, X. Sun, J. Yuan // Evolutionary Computation. – 2009. – С. 21–44.

10. *Sun. X.* Interactive genetic algorithm assisted with collective intelligence from group decision making / X. Sun, L. Yang, D. Gong, M. Li // IEEE Congress on Evolutionary Computation. – 2012. – С. 1–8.

УДК 004.942

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ РАБОТЫ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НОНОГРАММ

А. Г. Кудаев, М. К. Чернышов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается задача расшифровки японских кроссвордов (нонограмм), для решения которой в данный момент не существует универсального алгоритма. При этом предлагаются собственные варианты решения данной задачи, обсуждаются вопросы сравнения рассматриваемых подходов между собой.
Ключевые слова: нонограмма, кроссворд, алгоритм.

Введение

Нонограмма — логическая головоломка, в которой, в отличие от обычных кроссвордов, закодированы не слова, а изображение. Этот тип головоломки представляет собой сетку, в которой каждая ячейка должна быть заполнена или оставлена пустой для того, чтобы получить загаданное изображение. Условия по краям сетки указывают длину и последовательность заполненных ячеек в той или иной строке или столбце.

В данной статье описаны два алгоритма решения задачи — алгоритм с возвратом и алгоритм итерационного прохода, приводится их сравнительный анализ, рассчитывается их алгоритмическая сложность.

1. Анализ алгоритма с возвратом

Данный алгоритм имеет второе название — метод проб и ошибок, которое прекрасно характеризует основную концепцию метода, заключающуюся в переборе всех ветвей дерева возможных решений. Тем не менее, если перебирать каждое возможное решение, то алгоритм становится не эффективным, поэтому будет использоваться его модификация, позволяющая анализировать текущий прогресс решения и отсекать варианты, которые не удовлетворяют заданному условию ещё на промежуточных вершинах.

Для формализации алгоритма необходимо закрепить правила, на которые будет опираться последующее изложение:

- N — количество строк нонограммы;
- M — количество ее столбцов;
- Каждая клетка поля может быть закрашена 2 цветами: белый или чёрный. В связи с этим, клетка имеет 3 состояния: закрашена белым, закрашена чёрным, не закрашена.

Таким образом, алгоритм решения задачи будет иметь следующий вид:

1) Ввести новую переменную $i = 1$, отвечающую за номер текущей клетки поля. Присвоить каждой клетке поля, следуя некоторой стратегии, индивидуальный номер в диапазоне $[1; N * M]$.

2) Закрасить клетку с индексом i белым цветом.

3) Проверить на соответствие условию. Если противоречий с условием не обнаружено, то при условии $i = N * M$, завершить работу алгоритма, иначе $i = i + 1$, перейти к шагу 2.

4) (Обнаружено противоречие с условием). Если клетка с индексом i закрашена белым цветом, то изменить цвет на чёрный, перейти к шагу 3.

5) Если клетка с индексом i закрашена чёрным цветом, то вернуть клетку в не закрашенное состояние, $i = i - 1$, перейти к шагу 4.

Поскольку клетка может быть закрашена только одним из двух цветов, а также каждый возможный вариант закраски клетки необходимо проверить на соответствие поставленному условию, сложность данного алгоритма оценивается по формуле: $O(2^{N*M} * \mu(N,M))$, где $\mu(N,M)$ — оценка сложности работы методов проверки на соответствие условию.

Плюсы:

• Если решение задачи существует, то в ходе выполнения данного алгоритма оно будет получено.

• Возможна модификация алгоритма путем улучшения качества поиска противоречий с условием задачи. При добавлении новых методов проверки на соответствие условию будет возрастать $\mu(N,M)$, однако важнее то, что при улучшенной работе данных методов ветки возможных решений, противоречащих условию, будут отбрасываться раньше, что сильно сократит количество рассматриваемых вершин в дереве и ускорит работу алгоритма.

• Возможна модификация алгоритма, связанная с выбором подходящей стратегии для присвоения индексов клеткам нонограммы. Очевидно, что клетки, находящиеся на границе изображения, намного проще анализировать на соответствие с условием, чем центральные клетки. В связи с этим можно попытаться подобрать стратегию, в которой анализ клеток начинается с тех, которые находятся на границе.

Минусы:

• Экспоненциальная сложность алгоритма.

• Алгоритм не является интуитивно понятным.

В целом, данный подход можно и нужно использовать в тех случаях, когда получение конечного результата является первостепенной задачей.

2. Анализ алгоритма итерационного прохода

Данный алгоритм интуитивно используется каждым игроком, желающим разгадать нонограмму. Его суть заключается в том, чтобы рассматривать поле не как набор клеток, а как набор линий и столбцов, и применять к ним некоторые методы, которые однозначно определяют, каким цветом закрашивать клетки. В первом приближении алгоритм заключается в поочерёдном применении определённого метода из существующего набора к каждой строке и каждому столбцу. Продолжать данный цикл следует до того момента, пока или не будет закончен анализ изображения, или не будет выявлено, что заданный набор методов не в состоянии разрешить текущую нонограмму. Для формализации алгоритма используются те же правила и обозначения, что и для алгоритма с возвратом.

Инструкция по работе алгоритма:

1) Определить методы, которые будут использованы для решения нонограммы, и их количество — *Count*. Пронумеровать все методы, используя некоторую стратегию.

2) Ввести переменную $i = 1$, отвечающую за индекс текущего метода.

Ввести переменную $countOfFinishedLines = 0$, отвечающую за подсчёт законченных линий (строк и столбцов).

3) Если $countOfFinishedLines = N + M$, то завершить алгоритм.

4) Выполнить метод под номером i для каждой строки и столбца. Если в процессе работы метода, линия полностью закрашивается, то $countOfFinishedLines = countOfFinishedLines + 1$.

5) Если $i = Count$, то $i = 1$ и перейти к шагу 3, иначе $i = i + 1$ и перейти к шагу 4.

Данная версия алгоритма работоспособна только в том случае, если набор предложенных методов способен решить нонограмму, что не всегда верно. В общем случае необходимо модифицировать данный алгоритм, который в конечном итоге будет выглядеть следующим образом:

1) Определить методы, которые будут использованы для решения нонограммы, и их количество — *Count*. Пронумеровать все методы, используя некоторую стратегию.

2) Ввести переменную $i = 1$, отвечающую за индекс текущего метода. Ввести переменную $countOfFinishedLines = 0$, отвечающую за подсчёт законченных линий (строк и столбцов). Ввести переменную *savePicture*, запоминающую текущее состояние изображения.

3) Если $countOfFinishedLines = N + M$, то завершить алгоритм.

4) Выполнить метод под номером i для каждой строки и столбца. Если в процессе работы метода, линия полностью закрашивается, то $countOfFinishedLines = countOfFinishedLines + 1$.

5) Если $i \neq Count$, то $i = i + 1$ и перейти к шагу 4.

6) ($i = Count$). Сравнить текущее изображение с тем, которое зафиксировано в *savePicture*. Если изображения не содержат отличий, то завершить алгоритм с выводом, что текущий набор методов не способен решить данную нонограмму. Если различия присутствуют, то зафиксировать в *savePicture* текущее изображение, $i = 1$, перейти к шагу 3.

Для подсчёта оценки сложности данного алгоритма необходимо понять, что алгоритм является удобной оболочкой, позволяющей работать с методами, которые на самом деле и решают нонограмму. Таким образом, предварительная оценка сложности данного алгоритма будет следующей:

$$\mathrm{O}\left(\left(\sum_{i=1}^{Count} v_i\right) * countCicle\right), \tag{1}$$

где v_i — скорость работы i-го метода, *countCicle* — количество циклов, которое потребовалось для завершения алгоритма.

Данный результат можно уточнить и улучшить, изучив принципы работы методов, решающих нонограммы. Любой из данных методов анализирует условие, соответствующее рассматриваемой линии, и на его основе, а также позиции закрашенных клеток делает определённые выводы. Условия, соответствующие каждой линии, представляют из себя последовательность чисел, указывающих на то, сколько клеток подряд должно быть закрашено в текущей строке. Учитывая данную информацию, становится ясно, что любому методу для анализа строки необходимо проходить по всем числам из условия, соответствующего данной линии. Таким образом, оценка сложности алгоритма будет линейной: O(*countNumber*), где *countNumber* — количество чисел в условии текущей строки.

При попытке уточнить данный результат необходимо понять, какое максимальное количество чисел может содержать строка длиной в X клеток. При максимально плотной расстановке максимально маленьких чисел (единиц), выявляется чёткая верхняя граница — $\left[\frac{\mathrm{X}}{2}\right] + 1$. Пример представлен на рис. 1.

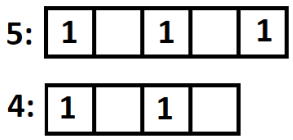


Рис. 1. Демонстрация максимально плотной расстановки чисел в строках размером 5 и 4 клетки

Таким образом, оценка скорости работы методов выглядит следующим образом: $\mathrm{O}\left(\left[\frac{\mathrm{X}}{2}\right] + 1\right)$, где X — количество клеток в текущей линии. Используя данный результат, можно уточнить оценку, полученную в формуле (1):

$$\begin{aligned} &\mathrm{O}(Count * (N * (\frac{M}{2} + 1) + M * (\frac{N}{2} + 1)) * countCicle) = \\ &= \mathrm{O}(Count * (NM + N + M) * countCicle). \end{aligned} \tag{2}$$

В данной формуле фигурирует неизвестная переменная *countCicle*, отвечающая за количество прогонов всех методов. К сожалению, оценить её не представляется возможным, поскольку она зависит от многих факторов, таких как эффективность методов, их количество, порядок, в котором они вызываются.

Плюсы:

• Алгоритм имитирует человеческий подход к решению нонограмм, что делает его более понятным и простым в реализации.

• Достигается высокая скорость работы, благодаря однозначному закрашиванию клеток.

• Алгоритм можно бесконечно совершенствовать, добавляя в него использование новых методов закрашивания в общий список.

• Возможна модификация алгоритма, связанная с выбором подходящей стратегии для последовательности вызовов методов. Если метод закрашивает большое количество клеток и имеет хорошую эффективность, его можно вызывать несколько раз за один цикл.

• Возможна модификация алгоритма, подразумевающая обработку только тех линий, которые ещё не завершены.

Минусы:

• Ответ не всегда может быть получен, и определить это, к сожалению, до прогонки всех методов закрашивания, невозможно.

• После добавления новых методов решения в список необходимо анализировать все существующие методы. Это важно, так как новые алгоритмы могут включать в себя более хорошую логику работы старых алгоритмов, что делает наличие последних бесполезными и замедляющими ход решения.

Таким образом, алгоритм итерационного прохода является гибким и универсальным подходом к решению нонограмм, благодаря возможности добавления новых методов. Главным недостатком является то, что его нельзя назвать универсальным из-за вероятности возникновения ситуаций, в которых решение исходной задачи не будет получено.

Заключение

В результате проведённой работы изучены главные особенности нонограмм, предложены алгоритмы их раскодирования, получены приблизительные оценки сложности работы каждого из алгоритмов решения данной задачи, а также сформулированы основные достоинства и недостатки рассмотренных подходов.

Литература

1. Методы решения японских кроссвордов. – URL: https://www.nonograms.ru/methods (дата обращения: 10.11.2024).

2. Общая информация об истории создания нонограмм. – URL: https://www.puzzlemuseum.com/griddler/gridhist.htm (дата обращения: 10.11.2024).

3. Дополнительные методы решения нонограмм. – URL: https://www.puzzlemuseum.com/griddler/gridins.htm (дата обращения: 10.11.2024).

УДК 519.63:004.032.26

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕН БАРЬЕРНЫХ ОПЦИОНОВ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОСЕТЕЙ

О. Е. Кудрявцев, Д. В. Постолова

ООО НПФ «ИнВайз Системс»,
Южный федеральный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается применение искусственных нейронных сетей (ANN) для вычисления цен барьерных опционов. Основное внимание уделяется разработке метода для аппроксимации функций выплат барьерных опционов, где разрывная функция выплат заменяется на непрерывную аппроксимацию с использованием нейронных сетей. Данный подход обеспечивает улучшенную сходимость и стабильность вычислений. Нейросетевые модели позволяют эффективно и гибко оценивать цены опционов, обеспечивая высокую точность по сравнению с традиционными методами.
Ключевые слова: искусственные нейронные сети, вычислительная финансовая математика, барьерные опционы, модель Блэка — Шоулза.

Введение

В последние годы модели для оценки цен опционов с учетом как постоянной, так и стохастической волатильности становятся все более актуальными в финансовой математике. Эти модели позволяют более точно отражать динамику цен на активы и оптимизировать стратегии хеджирования. В данной статье мы рассматриваем общий подход к вычислению цен опционов, сосредоточившись на методах, основанных на нейронных сетях, таких как искусственные нейронные сети (ANN).

В работах Цыбенко и Хорника [1–2] доказаны теоремы, подтверждающие возможность использования нейронных сетей различных архитектур для аппроксимации непрерывных функций многих переменных. Эти результаты получили название теорем универсальной аппроксимации. В отличие от традиционных методов, нейронные сети способны выявлять скрытые закономерности и обеспечивать высокую точность при решении задач с большой размерностью. Кроме того, нейронные сети могут быть частью гибридных численных методов, выполняя рутинные и повторяющиеся задачи [3].

Стоит отметить несколько исследований, рассматривающих разные аспекты применения нейросетей в финансовой математике. В исследовании [4] рассматривается применение нейросетей в корпоративных финансах, акцентируя внимание на прогнозировании банкротства компаний с помощью однослойных нейронных сетей. Этот подход помогает выявить связь между структурой капитала и корпоративной производительностью, а также улучшает результаты прогнозирования.

Другой подход, представленный в исследовании [5], предлагает два альтернативных метода для аппроксимации функций в финансовых приложениях: generalized stochastic sampling (gSS) и functional tensor train (fTT). Эти методы являются эффективными альтернативами глубоким нейронным сетям и часто превосходят их в типичных финансовых задачах. Важное преимущество этих методов — удовлетворение строгих требований финансовых приложений, таких как предсказуемость и объяснимость.

В работе [6] разработан гибридный численный метод «deep parametric PDE», который объединяет эффективность глубокого обучения для высокоразмерных задач с традиционными методами решения уравнений в частных производных. Этот метод показал высокую производительность в задачах оценки кредитного риска контрагентов и обладает свойством размер-

но-независимой сходимости, используя гиперболический тангенс в качестве функции активации в глубоких нейронных сетях.

В исследовании [7] рассматривается применение нейронных сетей с долгой краткосрочной памятью (LSTM) для прогнозирования финансовых временных рядов. Модель LSTM эффективно решает проблемы нелинейности и нестационарности данных, что делает ее подходящей как для краткосрочного, так и для долгосрочного прогнозирования в финансовой сфере. Результаты исследования показали, что LSTM превосходит другие методы при многократном прогнозировании, что делает ее полезной для анализа временных рядов на финансовых рынках.

Статья [8] посвящена использованию нейронных сетей для решения задачи хеджирования многокомпонентных выплат с помощью ванильных опционов на корзину активов. В частности, предлагается использовать однослойные нейронные сети прямого распространения с функцией активации ReLU для аппроксимации таких выплат. Исследование показало, что предлагаемый метод обеспечивает более точные результаты хеджирования по сравнению с традиционными методами, основанными на опционах на один актив, что делает этот подход перспективным для финансового рынка.

Работа [9] анализирует влияние вычислительной математики на современные финансовые рынки и подчеркивает роль нейронных сетей и других методов машинного обучения в улучшении прогнозов и оптимизации управления рисками. В статье рассматриваются возможности использования этих технологий для оценки деривативов и повышения эффективности финансовых операций.

В исследовании [10] фокусируется внимание на применении искусственных нейронных сетей для моделирования процессов Леви при построении методов Монте-Карло. Нейронные сети используются для аппроксимации функций распределений процесса Леви и его экстремумов. Кроме того, в исследовании были доказаны вероятностные аналоги теорем универсальной аппроксимации.

1. Модели ценообразования опционов при постоянной и стохастической волатильности

Цены опционов зависят от различных факторов, среди которых важное место занимают волатильность и ее динамика. В финансовой теории различают две основные категории моделей: модели с постоянной волатильностью и модели со стохастической волатильностью. Каждая из этих категорий имеет свои особенности, преимущества и недостатки.

Модели с постоянной волатильностью предполагают, что волатильность актива остается неизменной на протяжении всего срока действия опциона. Наиболее известной моделью данного типа является модель Блэка — Шоулза [11]. Модели со стохастической волатильностью позволяют волатильности изменяться со временем, учитывая различные рыночные условия.

При сравнении моделей с постоянной и стохастической волатильностью важно учитывать не только точность предсказаний, но и их практическое применение. Модели с постоянной волатильностью более доступны и быстрее в вычислении, что делает их удобными для трейдеров и аналитиков. В то же время, стохастические модели обеспечивают более реалистичные оценки, что может быть решающим фактором при принятии инвестиционных решений.

Выбор модели зависит от конкретных условий и целей анализа. Для коротких временных промежутков и менее сложных ситуаций модели с постоянной волатильностью могут быть вполне приемлемыми. Однако для долгосрочных прогнозов и более сложных финансовых инструментов использование стохастических моделей является более оправданным.

Для точного моделирования и численного анализа уравнения Блэка — Шоулза требуется генерация начальных условий, охватывающих возможные сценарии поведения цен на активы и опционные выплаты в начальный момент времени. Начальные условия формируются на основе распределения цен, охватывающего диапазон возможных значений переменных, та-

ких как цена актива и параметры опциона, что помогает модели учесть возможные состояния базового актива. Также важна подготовка выборок значений для промежуточных состояний, которые характеризуют взаимодействие цены актива и времени, что повышает полноту данных для обучения модели.

Для создания данных, описывающих уравнение, используются случайные выборки значений переменных в пределах их допустимых диапазонов. Такой метод помогает улучшить обучаемость модели, так как модель получает возможность охватить всю область потенциальных состояний актива и опциона. Данный подход позволяет создать репрезентативную выборку для моделирования различных сценариев и повышения точности прогнозов.

Оптимизация решения уравнения Блэка — Шоулза осуществляется посредством минимизации невязки между предсказанными моделью и теоретически ожидаемыми значениями цен на опционы. Функция потерь учитывает производные по переменным времени и пространству и позволяет вычислить их значения в явном виде, что необходимо для численного решения дифференциальных уравнений.

Для минимизации ошибки предсказания цены опциона функция потерь включает несколько компонентов. Во-первых, ошибка рассчитывается на основе изменений цены актива с учетом волатильности, влияния ставки доходности и производных второго порядка. Во-вторых, учитываются отклонения по граничным данным, что важно для соблюдения условий на границах решения. Этот комбинированный подход позволяет модели обучаться на более точных данных и лучше аппроксимировать решение уравнения в динамических условиях.

Барьерные опционы, в отличие от стандартных, активируются или аннулируются, когда цена базового актива достигает заранее определенного уровня. Уравнение Блэка — Шоулза для барьерного опциона остается фундаментальным для вычисления его цены, однако требует учета дополнительных граничных условий. В данном случае барьерный колл-опцион рассматривается в условиях, когда цена актива S_t движется в пределах $(0, H)$, где H — верхний барьер.

Для барьерного *call* опциона с верхним барьером h, который аннулируется, если цена актива достигает уровня h, значение опциона $V_{barrier}(S,t)$ может быть определено по формуле (1).

$$V_{barrier}(S,t) = \begin{cases} 0\ , & S \geq H \\ V_{BS}(S,K,r,\sigma,T-t) - \text{ коррекция}, & S \leq H \end{cases}, \tag{1}$$

где $V_{BS}(S,K,r,\sigma,T-t)$ — стандартная формула Блэка — Шоулза для европейского опциона *call*,

коррекция — корректирующий элемент, учитывающий вероятность достижения барьера до момента экспирации.

Для обеспечения непрерывности функции выплат вблизи барьера, на отрезке $[h-0.01, h]$, применяется корректирующая функция, которая удовлетворяет уравнению Блэка — Шоулза (2).

$$y(x,t) = \frac{(e^{h-0.01}-1)}{(e^{h-0.01}-e^{h})} e^{x} + \frac{(e^{h-0.01}-1)}{1-e^{-0.01}} e^{r(t-T)}, \tag{2}$$

где $x \in [h-0.01, h]$ и $t = T$.

В точке $x = h-0.01$ функция $y(x,t)$ совпадает с функцией выплат $\max(Se^{x}-K, 0)$, а в точке $x = h$ равна нулю, что обеспечивает непрерывность функции. Это позволяет устранить разрывы и сделать функцию выплат непрерывной, что способствует более эффективному обучению модели и лучшему соответствию аналитическому решению, согласно теореме Цыбенко.

2. Архитектура модели ANN для вычисления цен опционов на примере модели Блэка — Шоулза

Искусственная нейронная сеть (ANN) является классической моделью, широко используемой для решения задач регрессии и классификации. В данном случае мы используем ANN для

моделирования цен на опционы с использованием простой архитектуры, которая состоит из входного слоя, одного или нескольких скрытых слоев и выходного слоя.

Входной слой принимает два основных параметра — значение переменной x, которая отражает логарифмическое отношение цены базового актива к цене страйка, и время t, оставшееся до экспирации опциона. Эти параметры определяют текущие рыночные условия и позволяют модели адаптировать предсказания в зависимости от изменения рынка.

Основная часть обработки данных происходит в скрытых слоях. В ANN скрытые слои используются для нелинейного преобразования входных данных, что позволяет модели выявлять сложные зависимости между переменными. Мы используем активационные функции, такие как сигмоида, для обработки данных, что способствует более плавной интерполяции значений и предотвращает скачкообразные изменения в выходных данных.

Выход модели представляет собой предсказанное значение цены опциона, которое приближается к аналитическому решению уравнения Блэка — Шоулза. Наша цель — минимизировать отклонение между предсказанными значениями и теоретически вычисленными ценами на основе функции потерь, которая учитывает ошибки по начальному и граничным условиям.

В логарифмической шкале уравнение Блэка — Шоулза принимает вид (3).

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-rV=0, \tag{3}$$

где $x=\ln\left(\frac{S}{K}\right)$ — логарифмическая цена актива относительно страйка,

r — безрисковая ставка,

σ — волатильность актива.

При экспирации опциона (в момент времени $t=T$), начальное условие определяется выплатой по опциону *call* (4).

$$V(x,T)=\max(K\cdot(e^x-1),0), \tag{4}$$

где $\max(K\cdot(e^x-1),0)$ соответствует выплате по опциону *call*, если $S>K$.

Для минимизации невязки и корректной аппроксимации цены барьерного опциона используется функция ошибок, которая включает два основных компонента: невязку для решения уравнения и отклонения на границе.

Основная часть ошибки рассчитывается по невязке уравнения Блэка — Шоулза. Для каждой точки внутри области определения модели (значения x и t) вычисляется ошибка между производными модели и значением, заданным уравнением (5).

$$loss_{BS}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial t}=\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-rV\right)^2, \tag{5}$$

где N — количество точек в выборке уравнения.

Для удовлетворения условия $V(h,t)=0$ рассчитывается дополнительный компонент ошибки на границе, измеряющий отклонение предсказания модели от граничного значения (6), (7).

$$loss_{boundary}=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(V(h,t_j)-0)^2, \tag{6}$$

где M — количество точек на границе $x=h$.

$$loss_{initial}=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}(V(x_l,T)-(e^{x_l}-K)_+)^2, \tag{7}$$

где $x_l<h$.

Таким образом, итоговая функция ошибок принимает вид (8):

$$Loss=loss_{BS}+loss_{boundary}+loss_{initial}. \tag{8}$$

Искусственные нейронные сети показали себя эффективными для случаев с устойчивыми рыночными условиями, где волатильность остается постоянной. Однако в условиях высокой волатильности и неожиданных изменений, ANN может недостаточно хорошо учитывать внезапные рыночные колебания, что требует более адаптивного подхода. В построенной модели искусственной нейронной сети (ANN) для вычисления цен барьерных опционов использовалась архитектура с одним скрытым слоем. Модель состоит из двух полносвязных слоев: первый слой преобразует входное пространство в скрытое пространство, а второй слой преобразует скрытое пространство в выходное пространство. В качестве функции активации используется ReLU, что придает модели необходимую нелинейность. После 10000 эпох обучения удалось добиться ошибки на уровне 1.7167×10^{-6}, что подтверждает высокую точность аппроксимации предложенной модели.

Заключение

ANN показала высокую точность на стабильных данных с постоянной волатильностью. Аналогичные подходы с помощью ANN могут быть использованы для моделей со стохастической волатильностью. В этом случае модель будет зависеть от трех переменных x, t, v, где v — волатильность. Спайковые нейронные сети могут использоваться более эффективно при вычислении вероятности пересечения барьера, который является частью цены барьерного опциона. В аппроксимации непрерывных функций SNN, скорее, проигрывают ANN, но, учитывая их вероятностную природу, могут помогать вычислять отдельные параметры.

Таким образом, использование ANN и SNN может быть перспективным подходом, позволяющим использовать сильные стороны каждой архитектуры в зависимости от текущих рыночных условий и задач прогнозирования.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00474, https://rscf.ru/project/23-21-00474/).

Литература

1. *Cybenko G.* Approximation by superpositions of a sigmoidal function // Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS). – 1989. – Т. 2, № 4. С. 303–314.

2. *Hornik K., Stinchcombe M., White H.* Multilayer feedforward networks are universal approximators // Neural networks. – 1989. – Т. 2, № 5. – С. 359–366.

3. *Kudryavtsev O., Grechko A., Mamedov I.* Monte Carlo method for pricing lookback options in Lévy models // Theory Probab. Appl. – 2024. – Т. 69, № 2. – С. 243–264.

4. *Séverin E.* Neural Networks and their application in the fields of corporate finance // Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne. – 2008. – С. 1–15.

5. *Antonov A., Piterbarg V.* Alternatives to Deep Neural Networks for Function Approximations in Finance // SSRN Electronic Journal. – 2021. – URL: https://ssrn.com/abstract=3958331 (дата обращения: 03.10.2024).

6. *Glau K., Wunderlich L.* Neural network expression rates and applications of the deep parametric PDE method in counterparty credit risk // Annals of Operations Research. – 2023. – Т. 336. – С. 1–27.

7. *Preeti, Bala R., Singh R. P.* Financial and Non-Stationary Time Series Forecasting using LSTM Recurrent Neural Network for Short and Long Horizon // 2019 10th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT). – 2019. – С. 1–7.

8. *Bossu S., Crépey S., Nguyen H.-D.* Spanning Multi-Asset Payoffs With ReLUs. – 2024. – С. 1–43.
9. *Bao Z.* Research on the Influence of Financial Mathematics on Modern Financial Market // Highlights in Business, Economics and Management. – 2023. – Т. 15. – С. 260–266.
10. *Kudryavtsev O., Danilova N.* Applications of artificial neural networks to simulating Lévy processes // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – Т. 271. – С. 421–433.
11. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Т. 81, № 3. – С. 637–654.
12. *Wilson E. B.* Probable inference, the law of succession, and statistical inference // Journal of the American Statistical Association. – 1927. – Т. 158, № 22. – С. 209–212.

УДК 519.6

РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ТРАНСПОРТА ВЗВЕСИ В МЕЛКОВОДНОМ ВОДОЕМЕ

И. Ю. Кузнецова[1], А. Е. Чистяков[2]

[1]Южный федеральный университет
[2]Донской государственный технический университет

Аннотация. В работе приведено описание трехмерной гидродинамической модели движения водной среды, включающей в себя уравнения движения Навье — Стокса, уравнение неразрывности, регуляризированное по Б. Н. Четверушкину и учитывающее влияние примеси на плотность водной среды. Данная модель дополнена моделью транспорта взвеси, учитывающей гранулометрический состав, скорость течения водного потока, сложную геометрию береговой линии и дна, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, турбулентный обмен и др. Проведены численные эксперименты по исследованию процесса транспорта многокомпонентной взвеси в мелководном водоеме на основе предложенной трехмерной модели.
Ключевые слова: модель гидродинамики, регуляризация по Б. Н. Четверушкину, транспорт взвеси, схемы расщепления.

Введение

При прогнозировании масштабов стихийных бедствий, а также при планировании реализации крупных инженерных проектов необходимо моделировать возможные сценарии влияния прогнозируемых процессов или проводимых работ на экологическое состояние акватории [1, 2]. В случае чрезвычайных ситуаций требуется получение не только оперативных, но и как можно более точных прогнозов. Для повышения точности описания процессов, происходящих в акватории, требуется построение математических моделей, наиболее точно описывающих происходящие процессы, а также разработка методов и алгоритмов для их численной реализации.

В рамках статьи предлагается рассмотреть комплексную модель гидродинамики и транспорта взвеси. При этом при построении модели гидродинамики рассматривается модель, учитывающая относительно малый временной множитель-гиперболизатор (регуляризация по Б. Н. Четверушкину) [3, 4]. Применение такого подхода приводит к снижению вычислительных затрат при решении самого трудоемкого этапа решения системы, описывающий гидродинамические процессы, — уравнения для расчета давления. Также для повышения точности моделирования процесса транспорта и осаждения взвеси предлагается применять схемы расщепления и вихреразрешающие разностных схем, устойчивые в случае больших сеточных чисел Пекле [5].

1. Постановка задачи

Для моделирования движения водной среды в мелководном водоеме рассмотрим математическую модель гидродинамики с уравнением неразрывности, регуляризованным по Б. Н. Четверушкину [6]:

$$\mathbf{V}_t' + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla\mathbf{P} + \boldsymbol{\mu}\Delta\mathbf{V}, \tag{1}$$

$$\rho_t' + \tau^*\rho_{tt}'' + \nabla\left(\rho\mathbf{V}\right) = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{V} = \{u,\ v,\ w\}$ — компоненты вектора скорости [м/с]; P — давление [Па], ρ — плотность [кг/м^3], $\boldsymbol{\mu} = \{\mu,\ \nu\}$ — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена [м^2/с], $\tau^* \sim h/c$ — параметр регуляризации или характерное время между столкновениями молекул, h — шаг расчетной сетки, c — скорость звука.

Система уравнений (1)–(2) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на входе $u = u_0,\ v = v_0,\ \mathbf{P}'_{\mathbf{n}} = 0,\ \mathbf{V}'_{\mathbf{n}} = 0$;

– боковая граница (берег и дно) $\rho\mu u'_{\mathbf{n}} = -\tau_x,\ \rho\mu v'_{\mathbf{n}} = -\tau_y,\ V_{\mathbf{n}} = 0,\ \mathbf{P}'_{\mathbf{n}} = 0$;

– верхняя граница $\rho\mu u'_{\mathbf{n}} = -\tau_x,\ \rho\mu v'_{\mathbf{n}} = -\tau_y,\ w = -\omega - P'_t/\rho g,\ \mathbf{P}'_{\mathbf{n}} = 0$,

где $\mathbf{V}_{\mathbf{n}}$ — нормальная составляющая вектора скорости, $\mathbf{n}$ — вектор нормали, направленный внутрь расчетной области, ω — интенсивность испарения жидкости, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_x,\ \tau_y\}$ — тангенциальное напряжение [6], g — ускорение свободного падения [м/с^2].

Дополним рассмотренную модель гидродинамики моделью транспорта многокомпонентной взвеси на основе уравнения диффузии-конвекции:

$$\left(c_r\right)'_t + \left(uc_r\right)'_x + \left(vc_r\right)'_y + \left(\left(w + w_{s,r}\right)c_r\right)'_z = \left(\mu\left(c_r\right)'_x\right)'_x + \left(\mu\left(c_r\right)'_y\right)'_y + \left(\nu\left(c_r\right)'_z\right)'_z + F_r, \qquad (3)$$

где c_r — концентрация r-й фракции взвеси [мг/л]; $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости течения водного потока [м/с]; $w_{s,r}$ — скорость осаждения r-й фракции взвеси [м/с]; μ, ν — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена, соответственно [м^2/с]; F_r — функция, описывающая интенсивность распределения источников r-й фракции взвеси [мг/(л·с)].

Система уравнений (3) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на свободной поверхности: $\left(c_r\right)'_z = 0$;

– вблизи поверхности дна: $\nu\left(c_r\right)'_z = -w_{s,r}c_r$;

– на боковой поверхности: $\left(c_r\right)'_{\mathbf{n}} = 0$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \le 0$, и $\mu\left(c_r\right)'_{\mathbf{n}} = -(\mathbf{V}, \mathbf{n})c_r$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) > 0$, где $\mathbf{V}_{\mathbf{n}}$ — нормальная составляющая вектора скорости, $\mathbf{n}$ — внешний вектор нормали (вектор нормали, направленный вне расчетной области).

Система уравнений (1)–(3) позволяет моделировать процесс транспорта примесей с учетом гранулометрического состава взвеси, скорости течения водного потока, ветровых течений и трения о дно, турбулентного обмена и др. Для повышения точности моделирования в условиях сложной геометрии береговой линии и дна можно воспользоваться функцией частичной заполненности [5].

2. Метод решения

Дискретизацию непрерывной модели (1)–(3) выполним на равномерной пространственно-временной расчетной сетке.

Аппроксимацию модели гидродинамики (1)–(2) выполним с применением метода поправки к давлению [7], которое сводит решение поставленной задачи к решению трех подзадач: расчет вектора скорости без учета давления на промежуточном временном слое, решение уравнения для расчета давления и расчет вектора скорости водного потока на следующем временном слое по явной схеме. Стоит отметить, что с вычислительной точки зрения самым трудоемким этапом является расчет поля давления. В работе [6] показано, что применение регуляризатора Б. Н. Четверушкина в уравнении неразрывности влечет за собой изменение способа расчета поля давления и показано, что рассмотренный подход менее вычислительно трудоемок. В работе [8] представлено исследование устойчивости разностной схемы уравнения для расчета давления и оценена погрешность аппроксимации данного уравнения.

Аппроксимацию уравнения (3) проведем на основе явно-неявной схемы расщепления [9, 10], которая сводит решение трехмерной задачи к моделированию на основе явной схемы в

горизонтальных направлениях, и симметричной схемы с весами — по вертикальному направлению (по глубине). Дальнейшая аппроксимация уравнений в горизонтальных направлениях выполнена с применением модифицированной схемы «кабаре» [5], а решение уравнения по вертикальному направлению получено методом прогонки [11].

3. Результаты численных экспериментов

Реализации дискретных аналогов уравнений модели (1)–(3) разработан программный комплекс на языке C++ [12]. В качестве примера работы данного комплекса рассмотрим результаты моделирования процесса транспорта двухкомпонентной взвеси в тестовой области.

Расчетная область представляет собой параллелепипед 1 км × 720 м × 10 м. Пространственная расчетная сетка имеет следующее количество ячеек: 100 × 72 × 10, количество временных слоев — 3 600 и 7 200, то есть 1 ч. и 2 ч. после сброса взвеси, соответственно.

Функция источника взвеси задавалась в области 200–250 м × 300–400 м × 5,5 м. В табл. 1 представлены параметры двух фракций взвеси.

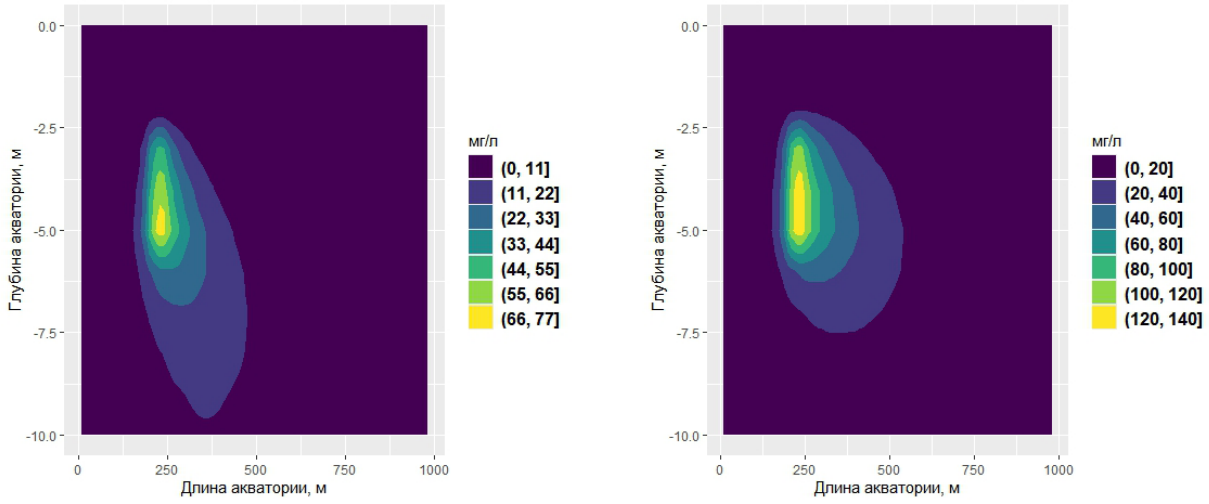
Таблица 1

Параметры фракций взвеси

Параметр	Фракция 1	Фракция 2
Плотность, кг/м^3	2700	2700
Диаметр частиц фракции, мм	0,05	0,03
Коэффициент формы частиц фракций	0,222 (шарообразная форма)	
Скорость осаждения, мм/с	2,31	0,83
Содержание, %	35	65

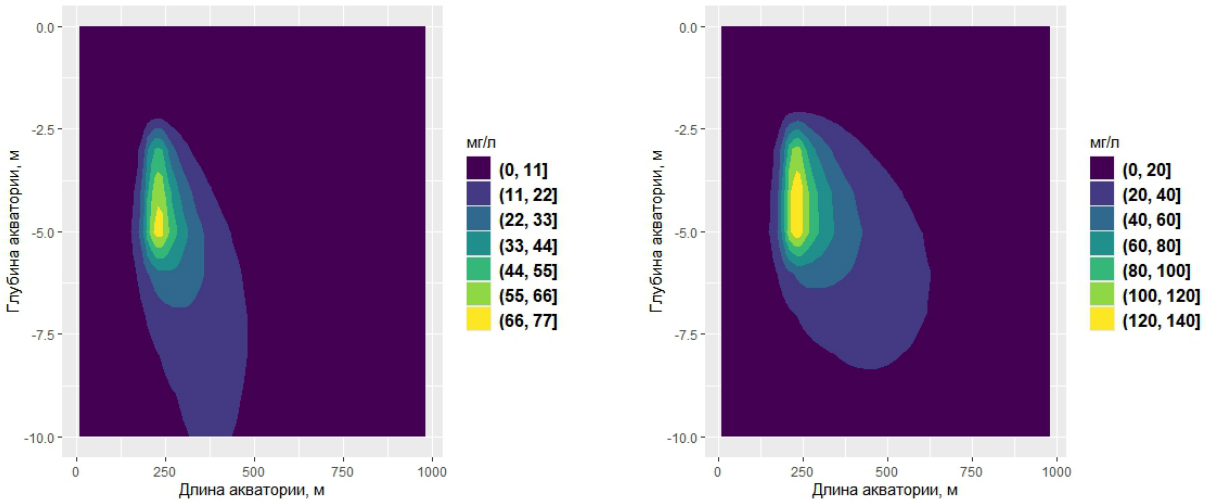
На рис. 1–2 представлены результаты работы программного комплекса по моделированию распространения взвеси в водной среде через 1 ч. и 2 ч. после сброса взвеси. Трехмерная расчетная область представлена в срезе плоскостью вдоль оси Oy (по ширине водоема) в зоне с наибольшей концентрацией взвеси, то есть по середине рассматриваемой акватории.

На рис. 3–4 представлены результаты работы программного комплекса по моделированию зон осаждения взвеси на дно в срезе по ширине водоема. Срез брался в областях с наибольшей высотой осажденного материала.



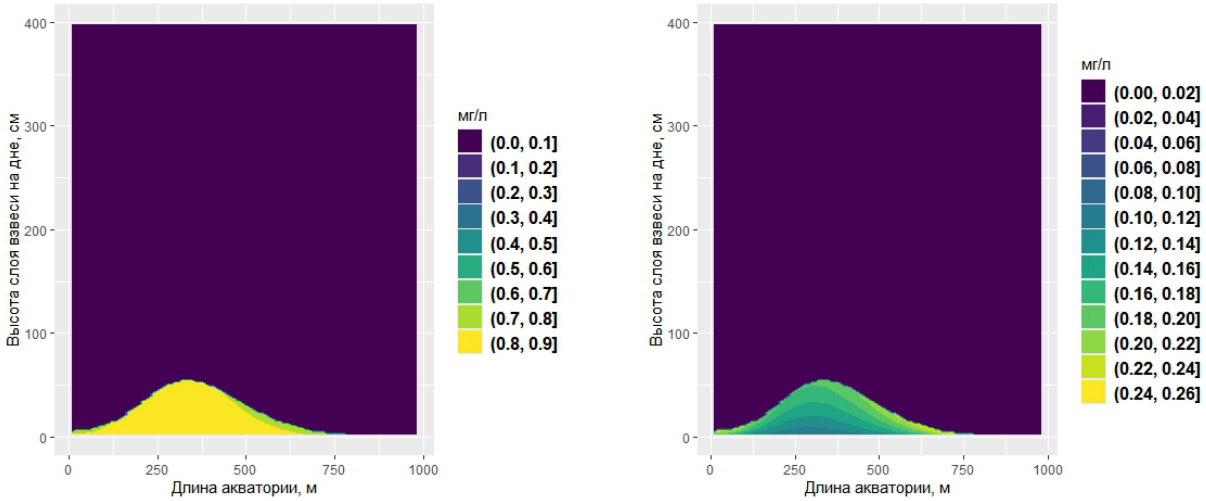
а) фракция 1 *б) фракция 2*

Рис. 1. Концентрация взвеси в толщи воды спустя 1 час после выгрузки



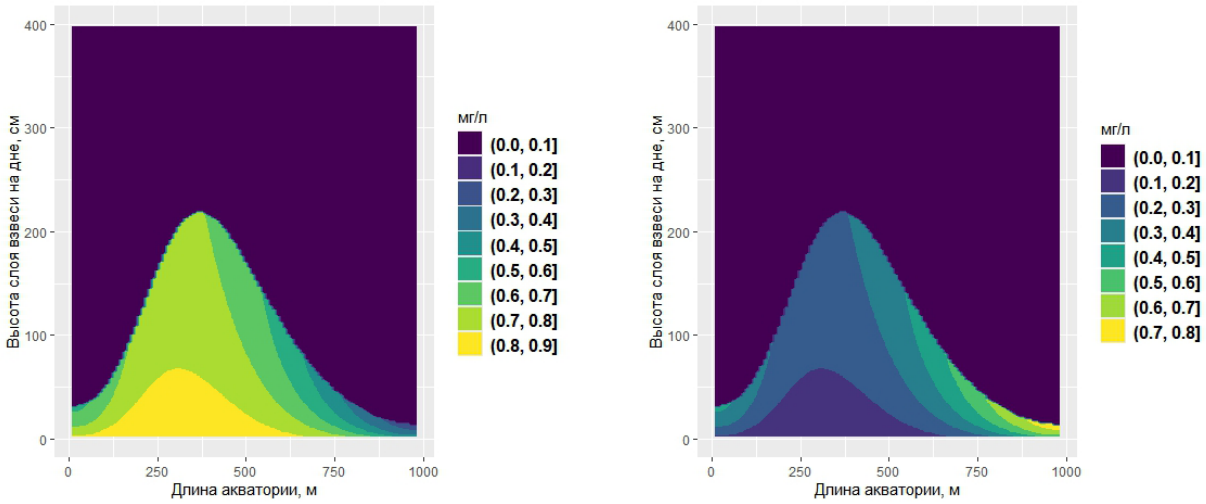
а) фракция 1 *б) фракция 2*

Рис. 2. Концентрация взвеси в толщи воды спустя 2 часа после выгрузки



а) фракция 1 *б) фракция 2*

Рис. 3. Результаты осаждения взвеси на дно акватории через 1 час после выгрузки грунта



а) фракция 1 *б) фракция 2*

Рис. 4. Результаты осаждения взвеси на дно акватории через 2 часа после выгрузки грунта

Заключение

В работе представлена трехмерная гидродинамическая модель движения водной среды, включающая в себя уравнения движения Навье — Стокса, уравнение неразрывности, регуляризированное по Б. Н. Четверушкину и учитывающее влияние примеси на плотность водной среды. Данная модель дополнена моделью транспорта взвеси, учитывающей гранулометрический состав, скорость течения водного потока, сложную геометрию береговой линии и дна, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, турбулентный обмен и др.

Выполнена аппроксимация рассмотренных на равномерной пространственно-временной расчетной сетке. Применение регуляризатора Б. Н. Четверушкина в уравнении неразрывности в случае переменной плотности в трехмерной модели гидродинамики позволило существенно сократить время расчета поля давления, а, следовательно, и поля скорости движения водной среды. С учетом того, что перерасчет поля скорости водной среды выполнялся на каждой временной итерации моделирования процесса транспорта и осаждения взвеси, то это существенно сократило время получения прогноза о областях распространения и осаждения взвеси [13].

Для численного решения рассмотренных моделей с использованием разработанного программного комплекса был проведен вычислительный эксперимент по моделированию процесса распространения двухфракционной взвеси с течением времени. В качестве результатов представлены поля концентраций двух фракций взвеси через 1 и 2 часа после сброса грунта. Разработанный программный комплекс позволяет оценивать зоны подверженные наибольшему загрязнению, что является необходимым при прогнозировании и оценки влияния распределения взвеси на экосистему водоема [2].

Благодарности

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта 22–71–10102, https://www.rscf.ru/project/22-71-10102/

Литература

1. *Чистяков А. Е.* Оценка экологических рисков мелководного водоема при проведении дноуглубительных работ / А. Е. Чистяков, И. Ю. Кузнецова // Безопасность техногенных и природных систем. – 2024. – Т. 8, № 2. – С. 37–46.

2. Аналитическое и численное исследование задачи динамики планктонных популяций при наличии микропластика / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Ю. В. Белова, И. Ю. Кузнецова // Математическое моделирование. – 2024. – Т. 36, № 3. – С. 95–114.

3. *Четверушкин Б. Н.* Кинетические модели для решения задач механики сплошной среды на суперкомпьютерах / Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 5. – С. 65–79.

4. *Четверушкин Б. Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнения сплошных сред // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 11. – С. 33–52.

5. Исследование точности и применимости разностной схемы для решения задачи диффузии-конвекции при больших сеточных числах Пекле / А. И. Сухинов, И. Ю. Кузнецова, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, Ю. В. Белова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13, № 4. – С. 437–448.

6. Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, И. Ю. Кузнецова, А. М. Атаян, А. В. Никитина // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 2. – С 85–100.

7. *Белоцерковский О. М.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. М. Белоцерковский, В. А. Гущин, В. В. Щенников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 197–207.

8. Investigation of the Approximation Error of the Difference Scheme for the Mathematical Model of Hydrodynamics / A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, I. Y. Kuznetsova, E. O. Rakhimbaeva, M. V. Porksheyan // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, No. 5. – P. 1839–1846.

9. *Самарский А. А.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва: URSS, 2009. – 248 с.

10. *Вабищевич П. Н.* Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции / П. Н. Вабищевич, М. В. Васильева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 359–369.

11. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.

12. Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе / В. Н. Литвинов, А. Е. Чистяков, А. В. Никитина, А. М. Атаян, И. Ю. Кузнецова // Компьютерные исследования и моделирование. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 647–672.

13. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина, И. Ю. Кузнецова, А. М. Атаян // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 2. – С. 298–315.

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ 2D-ГОЛОГРАММ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИСТОЧНИКА НА ВЕКТОРНО-СКАЛЯРНЫХ КАНАЛАХ ПРИЕМНИКА

В. М. Кузькин[1], С. А. Переселков[2], И. М. Косенко[2], А. С. Переселков[2]

[1]Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук
[2]Воронежский государственный университет

Аннотация. Описана модель 2D-голограммы высокочастотного источника на векторно-скалярных каналах приемника в мелководной акватории. Представлены результаты теоретического анализа и численного моделирования. Проанализированы 2D-интерферограммы и 2D-голограммы для различных компонент колебательной скорости и звукового давления. В рамках численного эксперимента показано, что голографическая обработка шумовых сигналов с применением векторно-скалярного приемника позволяет обнаруживать источник, оценивать пеленг.
Ключевые слова: мелкое море, шумовой источник, звуковое поле, лучевое описание, интерференция, интерферограмма, голограмма, обнаружение, пеленг.

Введение

Интерферометрическая обработка сигналов (ИОС) [1–6] является одной из ключевых технологий в подводной акустике, предлагая альтернативу методам согласованной обработки сигналов [7–10]. ИОС базируется на формировании в океанических волноводах устойчивых интерференционных структур, создаваемых широкополосным звуковым полем [1, 2]. Интерференция нормальных мод звукового поля приводит к специфическим пространственно-временным и частотным распределениям интенсивности, которые образуют характерные паттерны. Основы математической теории интерференции звукового поля были заложены в работе С. Д. Чупрова [1], где впервые введено понятие волноводного инварианта — ключевого параметра для анализа интерференционных структур. Развитие методов ИОС продолжено в исследованиях [3–5], а также на конференциях, посвящённых подводной акустике [6]. Сегодня ИОС используется для решения широкого спектра задач подводной акустики.

Одним из наиболее динамично развивающихся направлений ИОС является голографическая обработка широкополосных гидроакустических сигналов (ГОС) [7–35]. Теоретические и математические основы ГОС для океанических волноводов изложены в работах [7–11]. В исследовании [9] метод ГОС был адаптирован для шумовых источников, а в [10, 11] анализировалось его применение в низкочастотных волноводах. Работы [12, 13] изучили возможности разрешения нескольких источников при использовании ГОС, а в [14–21] исследована устойчивость метода в присутствии внутренних волн. Адаптивные алгоритмы ГОС описаны в [22–24], а их применение к антенной обработке сигналов обсуждается в [24–26]. Модовая селекция в мелководных волноводах на основе ГОС была проанализирована в исследованиях [28–30]. Большинство работ [7–29] концентрировались на методах ГОС для скалярной компоненты звукового давления в низкочастотном диапазоне. Однако в ряде задач подводной акустики требуется регистрация сигналов с помощью векторно-скалярного приёмника (ВСП) в высокочастотном диапазоне [30–34]. Это предоставляет дополнительные возможности для решения задач подводной акустики. Во-первых, высокочастотный диапазон позволяет аккумулировать больше спектральной плотности в области голограммы. Во-вторых, ВСП регистрирует гидроакустические сигналы сразу на четырёх каналах: звуковое давление $P(t)$, три компоненты колебательной скорости частиц среды $V_X(t)$, $V_Y(t)$, $V_Z(t)$. Таким образом, разработка ГОС для

гидроакустических высокочастотных сигналов с применением ВСП является актуальной задачей. Цель данной статьи — представить результаты теоретического анализа и численного моделирования ГОС для ВСП в высокочастотном диапазоне. Предлагаемый метод ГОС основан на формировании интерферограмм и голограммы источника шума для различных 4-х каналов ВСП. Он позволяет обнаруживать источник и оценивать его пеленг. Представлены результаты верификации ГОС рамках численного моделирования.

1. Модель 2D-голограммы высокочастотного источника на векторно-скалярных каналах приемника

Рассмотрим высокочастотное звуковое поле в следующей модели мелководного волновода. Волновод в координатах (X,Y,Z) представляет собой водный слой воды со скоростью звука $c(\vec{r},z)$. Здесь, $\vec{r}=(x,y)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости. Водный слой ограничен на глубине свободной поверхностью $(z=0)$ и дном $(z=H)$. ВСП находится в точке $Q(\vec{r}_r(x_r,y_r,z_r)$. Высокочастотный звуковой источник — $S(\vec{r}_s(x_s(t),y_s(t),z_s(t))$. Здесь, $\vec{r}_s(t)=\vec{r}_0+\vec{v}t$, где $\vec{v}$ — скорость источника. Спектр сигнала обозначен $s(\omega)$, где $\omega=2\pi f$ — циклическая частота звука. W — коэффициент отражения границы вода-дно.

Рассмотрим звуковое поле с использованием метода изображений источников [35]. Звуковое поле многократно отражается между двумя границами. Каждое отражение звукового луча от границы волновода формирует изображение источника. На (рис. 1) показано схематическое представление вкладов от источника на глубине z_s и его изображений.

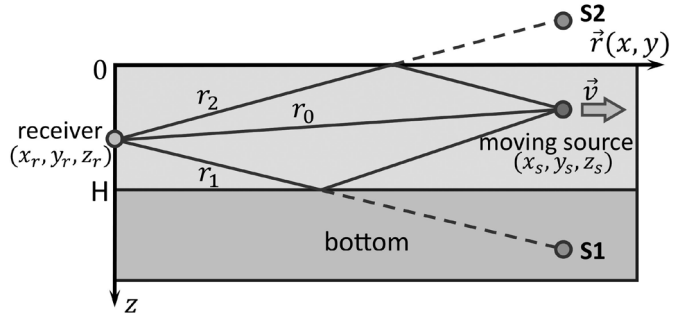


Рис. 1. Модель мелководного волновода. Вертикальная плоскость $(\vec{r},z)$

Далее будем использовать следующие обозначения: звуковое давление поля — $P(f,t)$ и горизонтальные компонент скорости вибрации — $V_X(f,t)$, $V_Y(f,t)$, $V_Z(f,t)$.

Для интерферограмм в частотно-временных области (f,t) используем обозначения:

$$\begin{aligned} I_P(f,t) &= P(f,t)P^*(f,t),\\ I_X(f,t) &= V_X(f,t)V_R{}^*(f,t),\\ I_Y(f,t) &= V_Y(f,t)V_R{}^*(f,t),\\ I_R(f,t) &= V_R(f,t)V_R{}^*(f,t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь, $I_P(f,t)$ — интерферограмма звукового давления, $I_X(f,t)$, $I_Y(f,t)$ и $I_Z(f,t)$ — интерферограммы горизонтальных компонент колебательной скорости.

ГОС реализует квазикогерентное накопление спектральной плотности, которое выполняется в частотно-временной области за счет двумерного преобразования Фурье (2D-FT). Результат 2D-FT интерферограммы $I(f,t)$ называется Фурье-голограммой (голограмма) $F(\tau,v)$. Голограмма $F(\tau,v)$ концентрирует спектральную плотность $I(f,t)$ в двух узких областях в форме фокальных пятен благодаря квазипериодической структуре интерферограмм. Голограммы звукового давления и горизонтальных компонент колебательных скоростей $F_P(\tau,v)$,

$F_X(\tau,\nu)$, $F_Y(\tau,\nu)$ и $F_R(\tau,\nu)$ определяются из интерферограмм $I_P(f,t)$, $I_X(f,t)$, $I_Y(f,t)$ и $I_Z(f,t)$ соответственно при помощи двумерного преобразования Фурье:

$$F(\tau,\nu)=\int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} I(f,t)\exp[i2\pi(\nu t - f\tau)]dtdf, \tag{2}$$

Здесь, ν и τ — частота и время в области голограммы. Области локализации расположены зеркально отноысительно начала координат [10, 11]. Фокальные пятна находятся в первой и третьей четвертях, когда источник движется к приёмнику $(\nu<0)$. Фокальные точки находятся во второй и четвёртой четвертях, когда источник движется от приёмника $(\nu>0)$. Спектральная плотность голограммы $F(\tau,\nu)$ концентрируется главным образом в полосе, ограниченной прямыми линиями [10, 11]:

$$\nu=\tilde{\varepsilon}\tau+\delta\nu,\ \ \nu=\tilde{\varepsilon}\tau-\delta\nu, \tag{3}$$

где $\delta\nu=1/\Delta t$ — полуширина фокальных точек в направлении оси ν, $\tilde{\varepsilon}$ — угловой коэффициент линии, на которой расположены координаты максимумов фокальных пятен. В направлении оси времени полуширина фокальных точек равна $\delta\tau=1/\Delta f$. За пределами этой полосы спектральная плотность голограммы пренебрежимо мала. Угловой коэффициент $\tilde{\varepsilon}$ определяется выражением:

$$\tilde{\varepsilon}=-\frac{\delta f}{\delta t}, \tag{4}$$

где δf — величина частотного смещения интерференционного максмимума за время δt.

Угловые распределения спектральной плотности голограмм $G_P(\chi)$, $G_X(\chi)$, $G_Y(\chi)$ и $G_R(\chi)$ вычисляются соответственно из $F_P(\tau,\nu)$, $F_X(\tau,\nu)$, $F_Y(\tau,\nu)$ и $F_R(\tau,\nu)$ следующим способом:

$$G(\chi)=\int_0^{\Delta\tau}\left|F(\tau,\chi\tau)\right|d\tau, \tag{5}$$

Здесь, $\Delta\tau$ — линейный размер фокального пятня вдоль оси τ; χ — угловой коэффициент прямых линий $\nu=\chi\tau$. В отсутствие помехи функция $G(\chi)$ имеет максимальное значение при $\chi=\tilde{\varepsilon}$.

В качестве критерия обнаружения источника принимается условие

$$G(\tilde{\varepsilon})\geq 2G(\chi), \tag{6}$$

согласно которому значение $G(\tilde{\varepsilon})$ в два или более раз выше значений в других направлениях $\chi\neq\tilde{\varepsilon}$. Для обнаружения источника информация о передаточной функции среды не требуется. Если критерий (19) выполняется, оценки параметров движущегося источника (направление движения, радиальная скорость, дальность, глубина) близки к истинным значениям [7].

Голограммы F_X и F_Y с точностью до множителей $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ воспроизводят голограмму F_R, так что

$$\left|\tan\varphi\right|=\frac{G_Y(\tilde{\varepsilon})}{G_X(\tilde{\varepsilon})}. \tag{7}$$

Здесь φ — пеленг источника, т. е. угол в горизонтальной плоскости между осью X ВСП и направлением на источник. Оценка (20) для пеленга источника неоднозначна: направления $\pm\varphi$ и $\pi\pm\varphi$ неразличимы. Неоднозначность направления устраняется определением знака соотношения интерферограмм:

$$\frac{I_X(f,t)}{I_R(f,t)}=\gamma_X,\quad \frac{I_Y(f,t)}{I_R(f,t)}=\gamma_Y. \tag{8}$$

Критерий для однозначной оценки направления на источник следующий: если $\gamma_X>0$, $\gamma_Y>0$, то источник находится в первой четверти ВСП; если $\gamma_X<0$, $\gamma_Y>0$, то источник находится во второй четверти ВСП; если $\gamma_X<0$, $\gamma_Y<0$, то источник находится в третьей четверти ВСП; если $\gamma_X>0$, $\gamma_Y<0$, то источник находится в четвёртой четверти ВСП.

2. Численное моделирование 2D-голограмм

Для численного эксперимента выбрана следующая модель мелководного волновода. Вертикальная плоскость волновода показана на рис. 2. Глубина волновода $H = 15$ *м*. Профиль скорости звука в водном слое постоянен: $c_w(z) = 1400$ *м/с*. Параметры дна — скорость звука $c_b = 1780$ *м/с*, плотность $\rho_b = 2.0$ *г/см*^{3}. Источник на глубине $z_s = 5$ *м* перемещается по траектории, показанной на рис. 3. Скорость источника $v = 1.5$ *м/с*. Диапазон частот $\Delta f = 2.5 - 11.5$ *кГц*. Приёмник находится на глубине $z_q = 15$ *м* ($x_r = 0$ *м*, $x_y = 0$ *м*, $z_r = 15$ *м*). Время движения $\Delta t = 0 - 15$ *мин*. Параметры траектории источника: старт — A ($x_s = 150$ *м*, $y_s = -675$ *м*, $z_s = 5$ *м*), $r_1 = 691.5$ *м*; траверз — B ($x_s = 150$ *м*, $y_s = 0$ *м*, $z_s = 5$ *м*), $r_2 = 150$ *м*; финиш — C ($x_s = 150$ *м*, $y_s = 675$ *м*, $z_s = 5$ *м*), $r_3 = 691.5$ *м*.

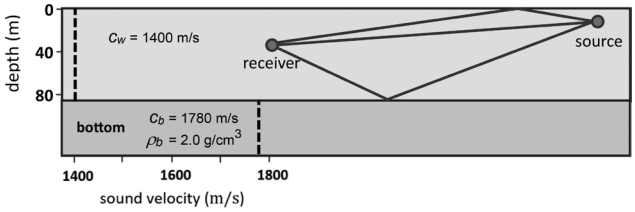


Рис. 2. Параметры модельного эксперимента

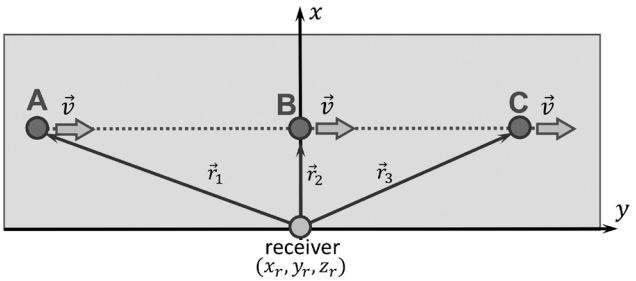


Рис. 3. Траектория источника в горизонтальной плоскости

Результаты численного моделирования представлены на рис. 4–7. На рис. 4 показана интерферограмма звукового давления $I_P(f,t)$ для времени движения $\Delta t = 0 - 15$ *мин* в полосе частот $\Delta f = 2.5 - 11.5$ *кГц*. Как видно из рисунка, интерферограмма звукового давления имеет квази-периодическую структуру.

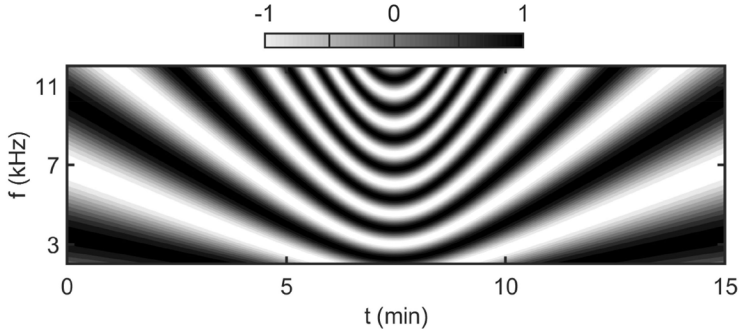


Рис. 4. Интерферограмма $I_P(f,t)$ источника

Интерферограмма $I_P(f,t)$, голограмма $F_P(\tau,v)$ и угловое распределение $G_P(\chi)$ для различных фаз движения источника показаны на рис. 5. Если источник перемещается из точки A в точку B (интервал времени $\Delta t = 2.5 - 4.2$ *мин*), то частотный период интерферограммы уменьшается с $T_f = 9$ *кГц* до $T_f = 1.8$ *кГц*. Наклон интерференционных полос отрицательный: $\delta f / \delta t = -1.5$ *кГц/мин* (рис. 5а). В результате фокальные пятна лежат на прямой $v = \tilde{\varepsilon}\tau$ с угловым коэффициентом $\tilde{\varepsilon} = 40$ *Гц/с* (рис. 5б). Угловое распределение $G_P(\chi)$ имеет экстремальное значение в точке $\chi \approx -0.025$ *с*$^{-2}$ (рис. 5в). Когда источник проходит через зону пересечения траверса ($\Delta t = 6.7 - 8.4$ *мин*), период интерферограммы равен $T_f = 1.8$ *кГц*. Интерференционные полосы параллельны оси t, $\delta f / \delta t = 0$ *кГц/мин*. Фокальные пятна расположены на прямой $v = \tilde{\varepsilon}\tau$ с угловым коэффициентом $\tilde{\varepsilon} = 0$ Гц/с. Угловое распределение имеет экстремальное значение в точке $\chi \approx 0$ *с*$^{-2}$. Этому временному интервалу соответствуют рис. 5 (г–е).

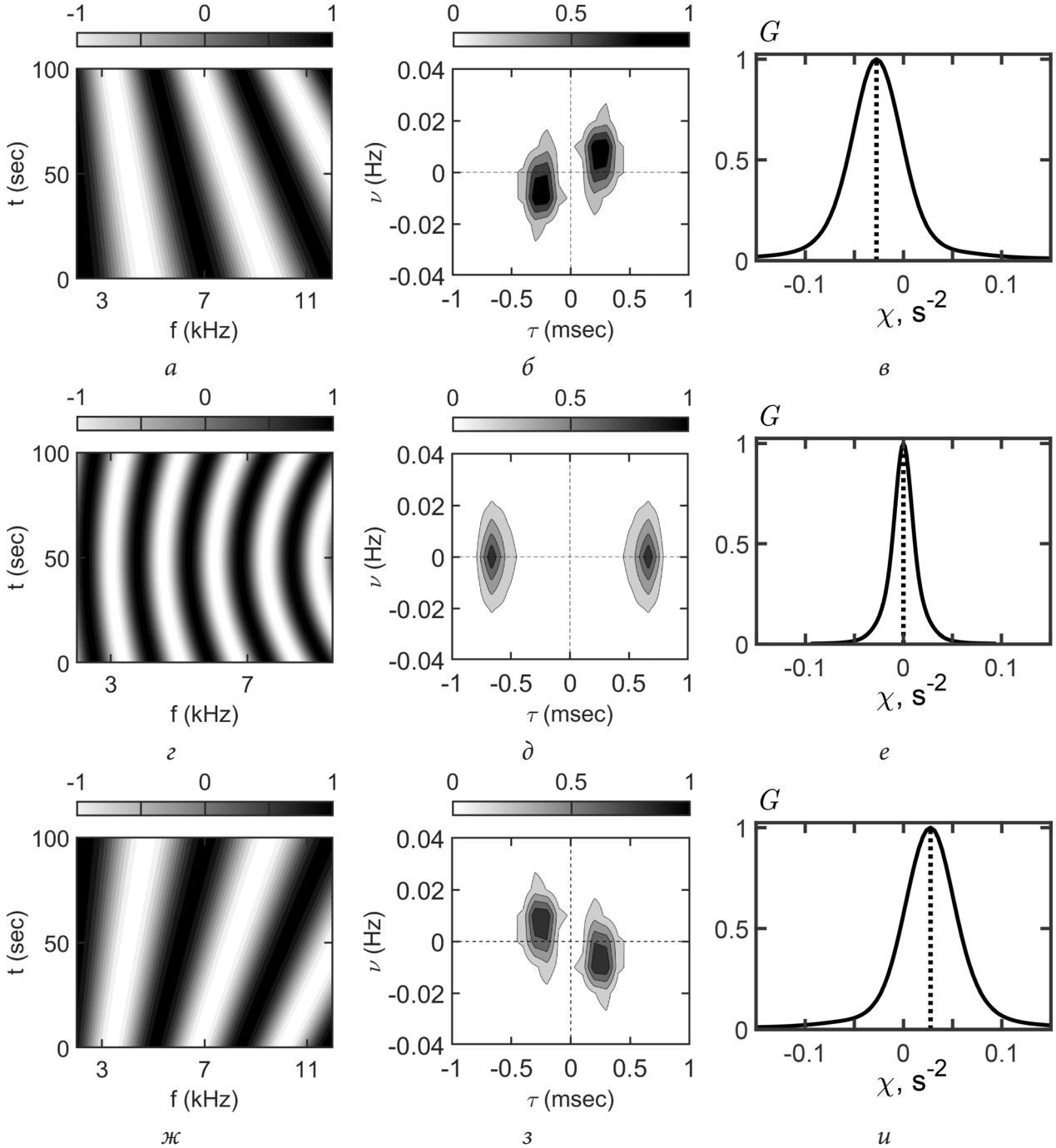
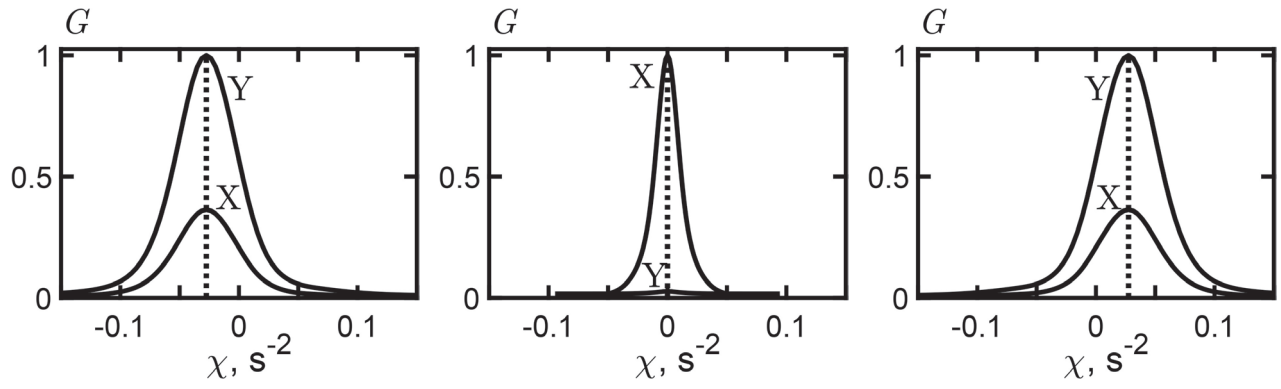


Рис. 5. Нормированные интерферограммы $I_P(f,t)$ (а, г, ж), голограммы $F_P(\tau,\nu)$ (б, д, з) и угловые распределения $G_P(\chi)$ (в, е, и). Временной интервал для (а - в): $\Delta t = 2.5-4.2$ мин. Для (г–е) $\Delta t = 6.7-8.4$ мин. Для (ж–и) $\Delta t = 10.8-12.5$ мин. Полоса частот $\Delta f = 2.5-11.5$ кГц

Наконец, когда источник движется из точки B в точку C в интервале времен, частотный период увеличивается с $T_f = 1.8$ *кГц* до $T_f = 9$ *кГц*. Наклон интерференционных полос положительный: $\delta f / \delta t = 1.5$ *кГц/мин*. Фокальные точки находятся на точках прямой $\nu = \tilde{\varepsilon}\tau$ с угловым коэффициентом $\tilde{\varepsilon} = -40$ *Гц/с* (рис. 5з). Угловое распределение имеет максимум в точке $\chi \approx 0.025$ c^{-2} (рис. 5и). Угловые распределения голограмм G_X и G_Y для трёх случаев движения источника показаны на рис. 6. Формы G_X и G_Y одинаковы, но экстремальные значения различны. Для интервала времени $\Delta t = 2.5-4.2$ *мин* значение $|\tan\varphi|$ соответствует $\varphi \approx -68°$. Для $\Delta t = 6.7-8.4$ *мин* значение $|\tan\varphi|$ соответствует $\varphi \approx 0°$. Для $\Delta t = 10.8-12.5$ *мин* $\varphi \approx 68°$.



а *б* *в*

Рис. 6. Нормированные угловые распределения голограмм $G_X(\chi)$ *и* $G_Y(\chi)$*.*
Временной интервал: (а) $\Delta t = 2.5 - 4.2$ *мин; (б)* $\Delta t = 6.7 - 8.4$ *мин; (в)* $\Delta t = 10.8 - 12.5$ *мин*

Временная зависимость пеленга $\varphi(t)$ для всего интервала времени представлена на рис. 7. Сплошная линия — пеленг источника, соответствующий геометрии траектории. Точки — пеленг источника, восстановленный с помощью голографической обработки сигнала. Как видно, значения пеленга источника, восстановленные в рамках численного моделирования, совпадают с модельными значениями.

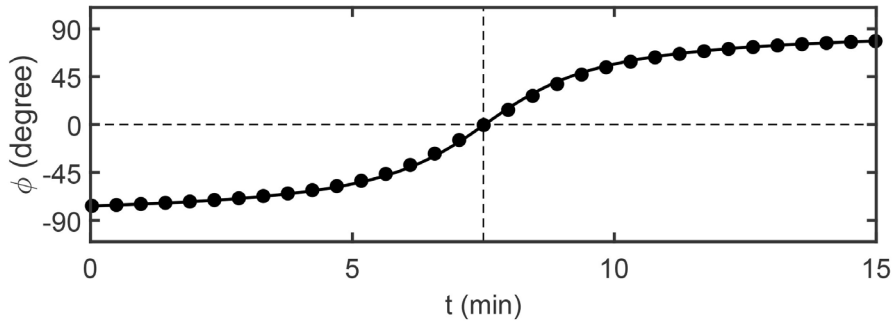


Рис. 7. Временная зависимость пеленга источника $\varphi(t)$

Заключение

В статье описана модель 2D-голограммы высокочастотного источника на векторно-скалярных каналах приемника в мелководной акватории. Изложеные алгоритмы методов ГОС предназначеных для решения следующих задач: формирование интерферограмм $I_P(f,t)$, $I_X(f,t)$, $I_Y(f,t)$ и $I_Z(f,t)$ на каждом из каналов ВСП; формирование голограмм $F_P(\tau,v)$, $F_X(\tau,v)$, $F_Y(\tau,v)$ и $F_R(\tau,v)$; обнаружение движущегося источника с использованием угловых распределений $G_P(\chi)$, $G_X(\chi)$, $G_Y(\chi)$ и $G_R(\chi)$ сформированных голограмм; оценка пеленга движущегося источника по соотношению G_Y / G_X угловых распределений сформированных голограмм. Представлены результаты теоретического анализа и численного моделирования. Проанализированы 2D-интерферограммы и 2D-голограммы для различных компонент колебательной скорости и звукового давления. В рамках численного эксперимента показано, что голографическая обработка шумовых сигналов с применением векторно-скалярного приемника позволяет обнаруживать источник, оценивать пеленг.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/.

Литература

1. *Чупров С. Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане. Акустика океана. Современное состояние / С. Д. Чупров. – Москва : Наука, 1982. – 71–91 с.

2. *Weston D.* Interference of wide-band sound in shallow water / D. Weston, K. Stevens // J. Sound Vibr. – 1972. – Vol. 21, № 2. – P. 57–64.

3. *Грачев Г.* Теория инвариантов акустического поля в слоистых волноводах / Г. Грачев // Акуст. физ. – 1993. – Т. 39, № 1. – С. 67–71.

4. *Орлов Е. Ф.* Интерференция звуковых волн в океане / Е. Ф. Орлов, Г. А. Шаронов. – Дальнаука, 1998. – 196 с.

5. *Ianniello J.* Recent developments in sonar signal processing / J. Ianniello // IEEE Signal Proc. Mag. – 1998. – Vol. 15, № 1. – P. 27–40.

6. *Kuperman W. A.* Ocean acoustic interference phenomena and signal processing / W. A. Kuperman, G. L. D'Spain // Ocean Acoustic Interference Phenomena and Signal Processing 621. – 2002.

7. *Кузькин В. М.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелководном море / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Г. Н.Кузнецов // Акустический журнал. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

8. *Кузькин В. М.* Обнаружение источника в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344.

9. *Kuz'kin V. M.* Noise source detection in an oceanic waveguide using interferometric processing / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, Y. V. Matvienko, G. A. Lyakhov, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 1. – P. 68–74.

10. *Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization / S. Pereselkov, V. Kuz'kin // Acoust. Soc. Am. – 2022, – Vol. 151 – P. 666–676.

11. *Ehrhardt M.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water / M. Ehrhardt, S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin, I. Kaznacheev, P. Rybyanets / J. Sound Vibr. – 2023, – 544 – C. 117388.

12. *Kuz'kin V. M.* Resolving power of the interferometric method of source localization / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, V. A. Grigor'ev / Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

13. *Кузькин В. М.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, В. И. Грачев, П. В. Рыбянец, С. А. Ткаченко // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2024. – Т.16, № 3. – С. 395–406.

14. *Kuz'kin V. M.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, V. G. Zvyagin, Yu. A. Malykhin, D. Yu. Prosovetskiy // Physics of Wave Phenomena. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 160–167.

15. *Badiey M.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 4. – P. 313–319.

16. *Kaznacheeva E. S.* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves / E. S. Kaznacheeva, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Physics of Wave Phenomena. – 2021. – Vol. 29, № 3. – P. 278–284.

17. *Kuz'kin V. M.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, S. A.Pereselkov, M. Badiey, N. V. Ladykin, A. Yu. Malykhin, S. A. Tkachenko // Physics of Wave Phenomen. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 346–354.

18. Badiey M. Interferometry of hydrodynamics of oceanic shelf caused by intensive internal waves / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Fundam. Appl. Hydrophys. – 2020. – Vol. 1. – P. 45–55.

19. *Кузькин В. М.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т.14, № 2 – С. 197–204.

20. *Кузькин В. М.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, Н. В. Ладыкин, М. В. Куцов // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – Т.15, № 3 – С. 317–326.

21. *Pereselkov S.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, M. Ehrhardt, S. Tkachenko, P. Rybyanets, N. Ladykin // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11 – P. 1922.

22. *Кузькин В. М.* Интерферометрическая обработка с использованием вертикальной линейной антенны / В. М. Кузькин, Ю. В. Матвиенко, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 2 – С. 14–23.

23. *Кузькин В. М.* Реализация адаптивного интерферометрического метода локализации источника звука. II часть / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, С. А. Ткаченко, И. В. Казначеев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 1 – С. 14–23.

24. *Pereselkov S.* Adaptive Algorithms for Interferometric Processing / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, G. Lyakhov, S. Tkachenko, E. Kaznacheeva // Phys. Wave Phenom. – 2020. – № 28 – С. 267-273.

25. *Кузькин В. М.* Интерферометрическая обработка акустической информации с использованием протяженных антенн в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, С. А. Ткаченко, И. В. Казначеев // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2020. – Т.12, № 4 – С. 483–494.

26. *Кузькин В. М.* Обнаружение шумового сигнала в океаническом волноводе горизонтальной антенной / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко, Д. Ю. Просовецкий // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т.14, № 1. – С. 65–72.

27. *Kuz'kin V. M.* Mode selection in oceanic waveguides / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskii, E. S. Kaznacheeva // Physics of Wave Phenomena. – 2022 – Vol. 30, № 2. – P. 111–118.

28. *Kuz'kin V. M.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, Yu. V.Matvienko, S. A.Pereselkov, E. S. Kaznacheeva, S. A. Tkachenko // Physics of Wave Phenomena. – 2022 – Vol. 30, № 5. – P. 314–320.

29. *Кузькин В. М.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И.Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 3 – С. 279–286.

30. *Казначеев И. В.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником / И. В. Казначеев, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2018. – Т.64, № 1 – С. 33–45.

31. *Kuznetsov G. N.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin,

S. A. Pereselkov, I. V. Kaznacheev, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2017 – Vol. 25, № 4. – P. 299–306.

32. *Kuz'kin V. M.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, I. V. Kaznacheev // Physics of Wave Phenomena. – 2018 – Vol. 26, № 1. – P. 63–73.

33. *Переселков С. А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов / С. А. Переселков, В. М. Кузькин, Г. Н. Кузнецов, Д. Ю. Просовецкий, С. А. Ткаченко // Акустический журнал. – 2020. – Т. 66, № 4 – С. 437–445.

34. *Кузнецов Г. Н.* Интерференционная структура шумового поля движущегося источника в высокочастотном диапазоне / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, М. В. Куцов, С. А. Переселков // Известия РАН. Серия физическая. – 2021. – Т. 85, № 6 – С. 907–912.

35. *Brekhovskikh L. M.* Fundamentals of Ocean Acoustics / L. M. Brekhovskikh, Y. P. Lysanov // Springer Berlin/Heidelberg, Germany. – 2013.

36. *Гордиенко В. А.* Векторно-фазовые методы в акустике / В. А. Гордиенко // – Москва : Физматлит, 2007 – 480 с.

УДК 62.752, 629.4.015, 628.534, 519.71-74

УПРАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ВИБРАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ СТРУКТУРЫ СИЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. С. Миронов[1], А. В. Елисеев[1,2]

[1]Иркутский государственный университет путей сообщения
[2]Иркутский национальный исследовательский технический университет

Аннотация. Рассматриваются вопросы моделирования вибрационных технологических стендов с учетом технологической нагрузки в виде механической колебательной системы. Цель исследования — разработка методов оценки, коррекции и формирования динамических состояний механических колебательных систем в зависимости от структуры внешних нагружений. Используются методы системного анализа, теоретической и прикладной механики, теории механизмов и машин, динамики машин, теории колебаний, структурного математического моделирования. Разработаны математические модели испытательных стендов, позволяющие формировать режимы динамического гашения колебания по нескольким координатам и режимы предельного сближения частот обнуления и частот резонанса.
Ключевые слова: структурное математическое моделирование, вибрационные испытательные стенды, одновременное динамическое гашение колебаний по нескольким координатам, передаточные отношения, амплитудно-частотная характеристика, предельное сближение частот, сочленение.

Введение

В настоящее время вибрационные технологии имеют большое значение для оценки и модификации свойств технических объектов. Они применяются в различных производственных процессах, таких как перемещение рабочей среды, транспортировка, сепарация и упрочнение. Развитие вибрационных технологий привело к формированию методов механики и виброволновых технологий [1, 2]. Одно из ключевых направлений развития — создание виброиспытательных стендов для испытания образцов современной техники, включая лонжероны транспортных средств [3]. Разработка математических моделей испытательных стендов позволяет разрабатывать широкий класс вибрационных технологических машин [4, 5]. Значительное распространение в разработке методов оценки динамических особенностей вибрационных взаимодействий элементов технических объектов получил структурный подход [6]. Однако ряд вопросов в разработке математических моделей виброиспытательных стендов остаётся нерешённым, в частности, вопросы формирования режимов динамического гашения колебаний по нескольким координатам в зависимости от структуры внешних воздействий ещё не получили должого освещения.

Статья посвящена разработке математических моделей технических объектов с расчетными схемами в виде механических колебательны систем, которые допускают настройку форм колебаний и обеспечивают эффекты динамического гашения колебаний одновременно по двум точкам с помощью связности амплитуд внешних силовых возмущений.

I. Общие положения и постановка задачи

Рассматривается механическая колебательная система, образованная совокупностью твердых тел, совершающих упругие колебания в условиях связных силовых возмущений (рис. 1).

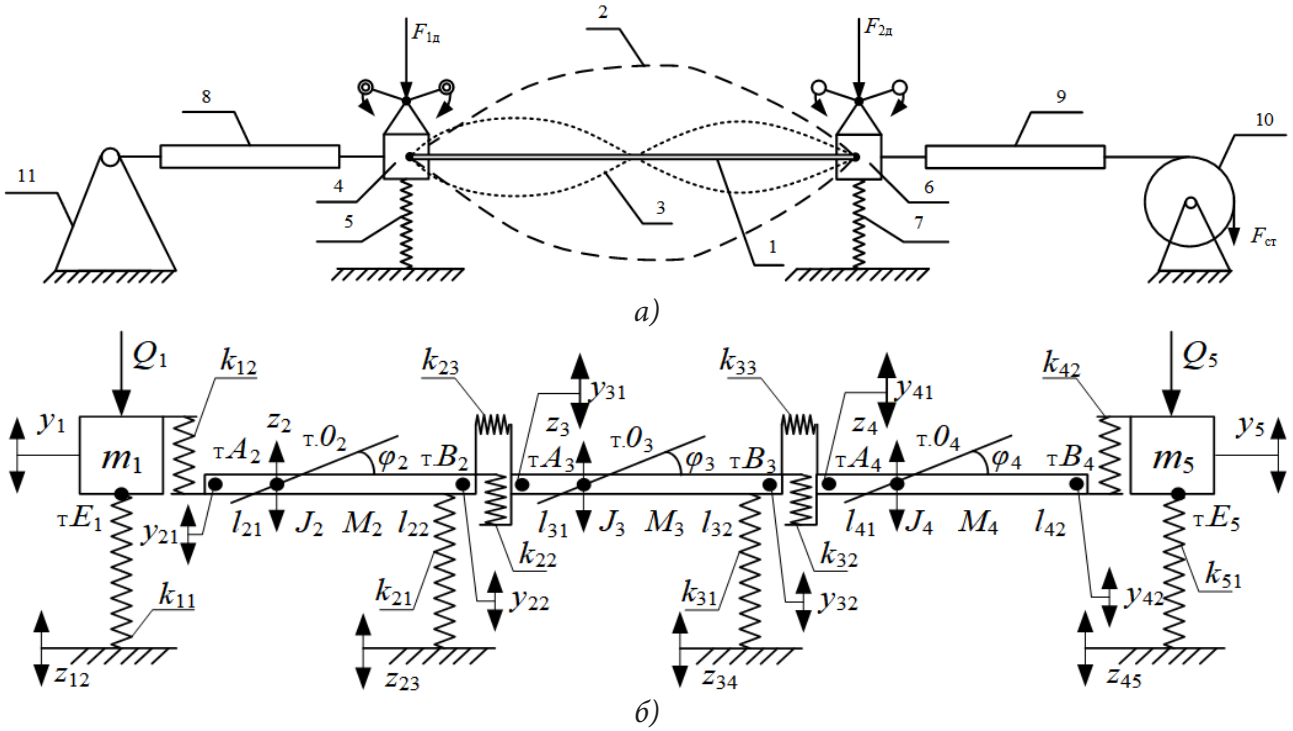


Рис. 1. Испытательный стенд с двумя вибрационным возбудителями: а) кинематическая схема вибрационного стенда; б) m_1, m_5 — сосредоточенные массы, M_1, M_2, M_3 — массы твердых тел

Механическая колебательная система образована двумя сосредоченными массами m_1, m_5, тремя твердыми телами A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 с массами M_2, M_3, M_4 и моментами инерции J_2, J_3, J_4 соответственно. Система твердых тел установлена на опорные поверхности посредством упругих элементов k_{11}, k_{21}, k_{31}, k_{51}, соединения упругого элемента, отображающего испытательный образец, представлено упругими элементами k_{12} и k_{42}. Характеристики жесткости испытательного образца моделируются упругими элементами k_{22} и k_{32}. Воздействие вибровозбудителя, представленного двумя внешними гармоническими силами Q_1 и Q_2, соответственно приложенных к точкам E_1 и E_5 сосредоточенных масс m_1 и m_5. Связность внешних возмущений Q_1 и Q_5 определяется коэффициентом γ, положительные значения которого определяют отношения амплитуд синфазных гармонических колебаний, а его отрицательные значения определяют отношение амплитуд гармонических колебаний находящихся в противофазе. Внешние возмущения, приложенные в точках E_1, E_5 приводит к колебаниям образца $A_2B_2A_3B_3A_4B_4$ в различных формах. Вместе с тем, эффекты возбуждения колебаний в различных формах в зависимости от частоты и связности внешних возмущений ещё не обладают должным уровнем детализации представлений.

Задача заключается в разработке метода оценки, формирования и коррекции динамического состояния испытательного образца в зависимости от частоты и связности внешних воздействий. В качестве частной задачи, необходимо определить коэффициент связности, обеспечивающий гашений колебаний по двум координатам одновременно для системы их нескольких твердых тел.

II. Математическая модель

Расчетная схема (рис. 1) может быть использована для моделирования динамических свойств семейства вибрационных испытательных стендов. Математическая модель в виде си-

стемы дифференциальных уравнений в виде уравнений Лагранжа 2-го рода стоится на основе выражений кинетической и потенциальной энергии:

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_5\dot{y}_5^2+\frac{1}{2}M_2\dot{z}_2^2+\frac{1}{2}M_3\dot{z}_3^2+\frac{1}{2}M_4\dot{z}_4^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2+\frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2+\frac{1}{2}J_4\dot{\varphi}_4^2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\Pi=&\frac{1}{2}k_{11}y_1^2+\frac{1}{2}k_{21}y_{22}^2+\frac{1}{2}k_{31}y_{32}^2+\frac{1}{2}k_{51}y_5^2+\frac{1}{2}k_{12}(y_1-y_{21})^2+\\&+\frac{1}{2}k_{22}(y_{31}-y_{22})^2+\frac{1}{2}k_{32}(y_{41}-y_{32})^2+\frac{1}{2}k_{42}(y_5-y_{42})^2+\\&+\frac{1}{2}k_{23}r^2(\varphi_3-\varphi_2)^2+\frac{1}{2}k_{33}r^2(\varphi_4-\varphi_3)^2,\end{aligned} \tag{2}$$

где $y_1, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}, y_{41}, y_{42}$ — совокупность обобщенных координат, отображающих вертикальные смещения точек твердых тел относительно положения статического равновесия.

Второй системой координат может быть выбрана совокупность вертикальных смещений $y_1,\ y_5,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ центров масс и углов координат $\varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4$. Координаты $\varphi_i,\ z_i,\ i=2,3,4$ и $y_{ij},\ i=2,3,4,\ j=1,2$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases}y_{i1}=z_i-\varphi_i l_{i1}\\ y_{i2}=z_i+\varphi_i l_{i2}\end{cases}, \tag{3}$$

где $i=2,3,4$.

Обратная зависимость имеет вид:

$$\begin{cases}\varphi_i=c_i(y_{i2}-y_{i1})\\ z_i=a_i y_{i1}+b_i y_{i2}\end{cases}, \tag{4}$$

где $c_i=\dfrac{1}{l_{i1}+l_{i2}},\ a_i=\dfrac{l_{i2}}{l_{i1}+l_{i2}},\ b_i=\dfrac{l_{i1}}{l_{i1}+l_{i2}}$. В матричном представлении кинетическая энергия T может быть представлена в виде:

$$T=\frac{1}{2}\left\langle\tau\cdot\vec{\dot{y}},\vec{\dot{y}}\right\rangle, \tag{5}$$

где

$$\tau=\theta^*\mu\theta+\psi^*M\psi+\varphi^*J\varphi, \tag{6}$$

$$\mu=\begin{pmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}M_2&0&0\\0&M_3&0\\0&0&M_4\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}J_2&0&0\\0&J_3&0\\0&0&J_4\end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\theta=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\varphi=\begin{pmatrix}0&-c_2&c_2&0&0&0&0&0\\0&0&0&-c_3&c_3&0&0&0\\0&0&0&0&0&-c_4&c_4&0\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\psi=\begin{pmatrix}0&a_2&b_2&0&0&0&0&0\\0&0&0&a_3&b_3&0&0&0\\0&0&0&0&0&a_4&b_4&0\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$y=\begin{pmatrix}y_1&y_{21}&y_{22}&y_{31}&y_{32}&y_{41}&y_{42}&y_5\end{pmatrix}^*, \tag{11}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Потенциальная энергия может быть представлена в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2}\langle \pi_0 \cdot \vec{y}, \vec{y} \rangle, \tag{12}$$

где

$$\pi_0 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3, \tag{13}$$

$$\pi_{(1)} = U^*_{(1)} K_{(1)} U_{(1)} - U^*_{(2)} K_{(1)} U_{(1)} - U^*_{(1)} K_{(1)} U_{(2)} + U^*_{(2)} K_{(1)} U_{(2)}, \tag{14}$$

$$\pi_{(2)} = U^*_{(3)} K_{(2)} U_{(3)}, \tag{15}$$

$$\pi_{(3)} = r^2 \left(\Phi^*_{(34)} K_{(3)} \Phi_{(34)} - \Phi^*_{(23)} K_{(3)} \Phi_{(34)} - \Phi^*_{(34)} K_{(3)} \Phi_{(23)} + \Phi^*_{(23)} K_{(3)} \Phi_{(23)} \right). \tag{16}$$

$$\Phi_{(34)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & c_4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\Phi_{(23)} = \begin{pmatrix} 0 & -c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$U_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$U_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$U_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$K_{(1)} = \begin{pmatrix} k_{12} & & & \\ & k_{22} & & \\ & & k_{32} & \\ & & & k_{42} \end{pmatrix}, \; K_{(2)} = \begin{pmatrix} k_{11} & & & \\ & k_{21} & & \\ & & k_{31} & \\ & & & k_{51} \end{pmatrix}, \; K_{(3)} = \begin{pmatrix} k_{23} & \\ & k_{33} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

На основе матричных представлений кинетической и потенциальной энергии системы дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода может быть представлена в виде:

$$\tau \cdot \ddot{\vec{y}} + \pi \cdot \vec{y} = \vec{Q}, \tag{23}$$

где

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \gamma \vec{Q}_5, \tag{24}$$

$$\vec{Q}_1 = \begin{pmatrix} Q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*, \tag{25}$$

$$\vec{Q}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_0 \end{pmatrix}^*. \tag{26}$$

Система дифференциальных уравнений (23) может быть преобразована под действием интегральных преобразований Лапласа в систему алгебраических уравнений с учетом равенства нулю начальных условий:

$$(\tau \cdot p^2 + \pi) \cdot \bar{y} = \bar{Q}, \tag{27}$$

где $p = j\omega$, $j^2 = -1$ [7].

Система уравнений (27) может быть представлена в виде обобщенной (матричной) структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении систему автоматического управления (рис. 2).

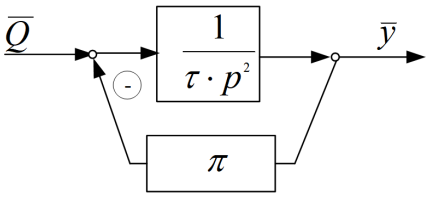


Рис. 2. Обобщенная структурная схема механической колебательной системы на рис. 1

На основе схемы (рис. 2) могут быть построены передаточные функции системы:

$$W_i = \frac{\bar{y}_i}{\bar{Q}_0}, \tag{28}$$

в физическом смысле отображающая представления о динамической податливости системы (рис. 4.3.1). Также могут быть построены передаточные функции межпарциальных связей, отображающих особенности рычажных связей в:

$$W_{ik} = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}_k}. \tag{29}$$

Амплитудно-частотные характеристики передаточных функций W_i и W_{ik} позволяет оценивать динамические состояния в зависимости от частот и коэффициентов связности внешних силовых возмущений γ.

Вместе с тем, механическая колебательная система обладает 8-ю степенями свободы. В свою очередь, обобщенная механическая колебательная система может быть модифицирована с учетом связей, отображающих специфику вибрационных взаимодействий элементов. В частности, можно полагать, что испытательный образец, составленный из трех твердых тел, допускает только относительные угловые упругие связи, а для установка упругого образца можно полагать, что $k_{12} = \infty$ и $k_{42} = \infty$. Подобная систему условий может быть реализована с помощью сочленений в поступательных формах движения в соединениях [8].

III. Оценка динамических особенностей в зависимости от структуры внешних силовых возмущений

Учет особенностей взаимодействий элементов может быть реализован посредством реализации сочленений точек твердых тел в относительных поступательных движений, в предположении, что жесткость соединительных элементов между точками устремляется к бесконечности [9]. Результатом сочленения совокупности соединений является механическая колебательная система с 4-мя степенями свободы (рис. 3).

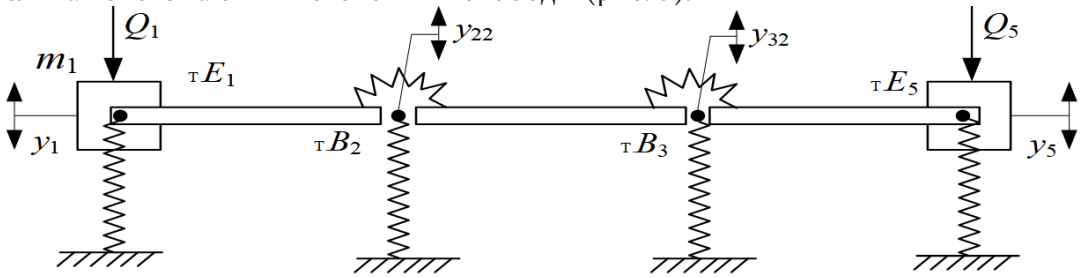


Рис. 3. Механическая колебательная система с учетом сочленений
$k_{12} \to \infty$, $k_{22} \to \infty$, $k_{32} \to \infty$, $k_{42} \to \infty$

Математическая модель сочлененной системы (рис. 3) может быть получена на основе неэквивалентного преобразования исходной механической колебательной системы (рис. 1). Сочленение $k_{12} \to \infty,\ k_{22} \to \infty,\ k_{32} \to \infty,\ k_{42} \to \infty$ приводит к отождествлению координат системы $y_1 = y_{21},\ y_{22} = y_{31},\ y_{32} = y_{41},\ y_{42} = y_5$. Матричный вид системы алгебраических уравнений с 8-ю степенями свободы в результате сочленения может быть представлен в виде системы с 4-мя степенями свободы:

$$(V^* \cdot \tau \cdot V \cdot p^2 + V^* \cdot \pi \cdot V) \cdot \overline{\xi} = V^* \overline{Q}, \tag{30}$$

где

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$\overline{\xi} = (\overline{y}_1, \overline{y}_{22}, \overline{y}_{32}, \overline{y}_5)^*, \tag{32}$$

ξ — совокупность координат сочленений системы, V — матрица перехода.

Система алгебраических уравнений (30) может быть представлена в виде обобщенной структурной схемы (рис. 4).

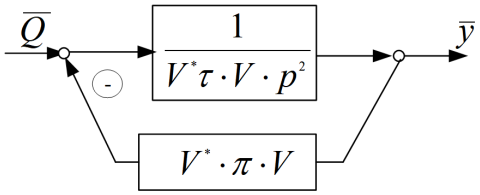


Рис. 4. Обобщенная структурная схема сочлененной механической колебательной системы

Структурная схема позволяет построить передаточные функции системы W_i и передаточные функции межпарциальных связей W_{ik}:

$$W_i = \frac{\overline{\xi}_1}{\overline{Q}_0}, \tag{34}$$

$$W_{ik} = \frac{\overline{\xi}_1}{\overline{\xi}_k}. \tag{35}$$

Амплитудно-частотная характеристика передаточной функции W_i $(p = j\omega)$ в физическом смысле представляет собой динамическую податливость, зависящую от частоты внешнего силового возмущения. В свою очередь, амплитудно-частотные характеристики (34), (35) позволяет оценивать особенности реализации форм вынужденных колебаний в зависимости от структуры внешних силовых возмущений с помощью неявно заданной функции в форме равенства нулю числителей передаточных отношений (34), (35).

На рис. 5 представлены характерные функции связи частот динамического гашения колебаний соответствующих одиночных координат $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4$ и коэффициента связности γ силовых возмущений $Q_1,\ Q_4$.

На рис. 5 показано, что кривые (линии 1, 2, 3, 4), отображающие связь режимов динамического гашения колебаний одиночных координат, пересекаются в точках (тт. 11, 12, 13, 14),

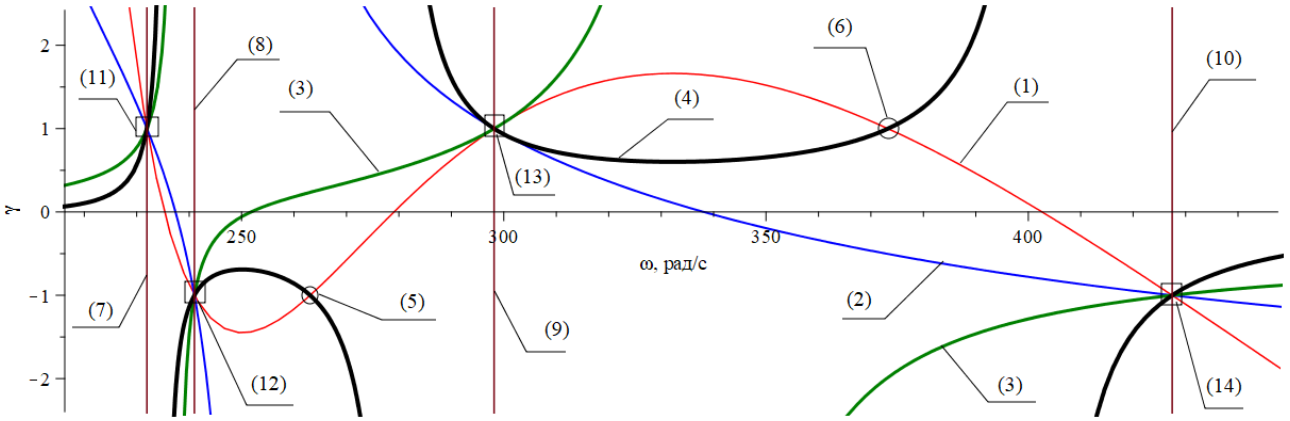


Рис. 5. Соотношение частот динамического гашения колебаний координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 *и коэффициента связности* γ

ординаты которых равны собственным частотам системы. Варьирование коэффициентов связности внешних возмущений позволяет изменять значения частот динамического гашения колебаний. В частности, возможен выбор коэффициента связности, обеспечивающего одновременный режим динамического гашения колебаний (рис. 5, т. 6) по двум координатам точек, в которых приложены связные внешние возмущения. С другой стороны, возможен выбор коэффициента связности, обеспечивающего предельное сближение частот динамического гашения колебаний координаты, выбранной в качестве объекта оценки, с собственными частотами системы, что может рассмотрено в качестве метода изменения актуального числа степеней свободы системы.

Заключение

Таким образом, разработана методологическая основа, позволяющая формировать совокупность специфических режимов работы вибрационных технологических систем, включая возможность реализации режимов одновременного динамического гашения по нескольким координатам. На основе разработанного подхода предложено усовершенствованное конструктивно-техническое решение виброиспытательного стенда с двумя вибрационными возбудителями инерционного типа, обладающего возможностями расширения испытательных программ за счет использования в качестве настроечного параметра коэффициента связности силовых возмущений вибрационных возбудителей.

Литература

1. *Блехман И. И.* Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. – СПб. : ИД «Руда и Металлы», 2013. – 640 с.

2. *Ганиев Р. Ф.* Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность / Р. Ф.Ганиев. – М. : Регулярная и хаотическая динамика, 2013. – 592 с.

3. *Миль М. Л., Некрасов А. В., Браверман А. С.* Вертолеты. Расчеты и проектирование. В 3-х кн. / под ред. М. Л. Миля. – М. : Машиностроение, 1967. – Кн. 2. Колебания и динамическая прочность. 1967. – 424 с.

4. *Пановко Г. Я.* Динамика вибрационных технологических процессов. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных технологий, 2006. – 176 с.

5. *Копылов Ю. Р.* Динамика процессов виброударного упрочнения: монография. – Воронеж : ИПЦ Научная книга, 2011. – 568 с.

6. *Eliseev A. V.* Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p. – https://doi.org/10.4018/978-1-6684-7237-8.

7. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики / А. И. Лурье. – Москва; Ленинград : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. – 432 с.

8. *Елисеев С. В., Ермошенко Ю. В.* Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем : монография. – Иркутск : ИрГУПС, 2012. – 156 с.

9. *Елисеев А. В.* Упругие связи в формировании структуры и динамики механических систем в условиях вибрационных нагружений силовой природы / А. В. Елисеев, Н. К. Кузнецов, А. С. Миронов // Труды МАИ. – 2024. – № 137.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ТОНКИХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНКАХ: ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Л. И. Мороз[1], А. Г. Масловская[2]

[1]Амурский государственный университет
[2]Университет Иннополис

Аннотация. В данной работе предлагается дробно-дифференциальная модификация модели Ландау — Гинзбурга — Девоншира — Халатникова для описания поляризационных откликов в тонких сегнетоэлектрических пленках. Математическая модель формализуется, как начально-краевая задача для полулинейного уравнения супердиффузии с дробной производной по времени Капуто Построена модифицированная неявная вычислительная схема, дополненная итерационной процедурой. Для компьютерной реализации модели была разработана программа с использованием программного обеспечения MATLAB. Представлены иллюстрации результатов вычислительных экспериментов при варьировании порядка дробной производной.
Ключевые слова: полулинейное уравнение супердиффузии, дробная производная Капуто, неявная конечно-разностная схема, вычислительный эксперимент.

Введение

В настоящее время дробно-дифференциальные уравнения нашли широкое применение в математическом моделировании динамических откликов сложноструктурированных сред. Процессы, описываемые дробно-дифференциальными уравнениями, относят к аномальным, поскольку они могут проявлять значительные градиентные изменения характеристик или очень длительное время ожидания последействия. Это означает, что система может «помнить» свои предыдущие состояние, что влияет на ее текущее поведение. Как правило, эффекты памяти формализуют с помощью дифференциальных уравнений с дробной производной по времени, в то время как уравнения с дробной производной по координате применяют для описания процессов в материалах с неоднородной структурой и многофазным составом. Примерами таких сред являются сегнетоэлектрики — класс полярных диэлектриков, обладающие фрактальными свойствами и эффектами памяти. Сегнетоэлектрические материалы, включая сегнетокерамику, используются для проектирования диэлектрических усилителей, модуляторов и других управляемых устройств, ячеек памяти, пьезо- и пироэлектрических преобразователей [1].

Один из подходов, позволяющих описать термодинамическое состояние системы, основан на теории Гинзбурга — Ландау. Феноменологическая теория Гинзбурга — Ландау может быть успешно применена для теоретического описания фазовых переходов и процессов переключения поляризации в сегнетоэлектриках. Ввиду сложного характера перестройки сегнетоэлектрических доменов и эффектов памяти рассмотрим дробно-дифференциальную модификацию модели Ландау — Гинзбурга — Девоншира — Халатникова. Многие авторы отмечают, что для тонких пленок, нанотрубок и наночастиц математическое описание характеристик переключения поляризации в сегнетоэлектрических материалах строится на основе волнового уравнения или уравнении супердиффузии. Например, волновое уравнение, основанное на теории среднего поля Ландау — Гинзбурга — Девоншира, было предложено в [2] для формализации распределения поляризации в сегнетоэлектриках. Кроме того, в исследовании [3] обсуждалось зависящее от времени нелинейное уравнение, описывающее распространение волн поляризации в тонких сегнетоэлектрических пленках.

Заметим, что поиск аналитического решения для дробно-дифференциальных уравнений во многих случаях встречает серьезные затруднения, поэтому на первый план выходят численные методы, в частности, метод конечных разностей.

Целью данной работы является построение и программная реализацию вычислительного алгоритма, предназначенного для компьютерного моделирования супердиффузионных процессов в приложении к исследования процессов переключения поляризации при вариации динамических режимов.

1. Математическая постановка задачи и вычислительная схема

Введем в рассмотрение дробно-дифференциальный аналог модели Ландау — Гинзбурга — Девоншира — Халатникова, представимого в виде начально-краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных нецелого порядка

$$\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p + bp^3 - cp^5 + \sigma e, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le \theta, \tag{1}$$

$$p\big|_{t=0} = p_0(x), \quad 0 < x < l, \frac{\partial p}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \tilde{p}_0(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=0} + qp\big|_{x=0} - g = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=l} + qp\big|_{x=l} - g = 0, \quad 0 < t \le \theta, \tag{3}$$

где $\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}$ — левосторонняя производная Капуто; α — порядок дробной производной по времени, $1 < \alpha \le 2$; l — толщина сегнетоэлектрической пленки; t — время процесса переключения поляризации; b, c, q, g — положительные параметры.

Дробную производную Капуто определим следующим образом:

$$\frac{\partial^\alpha p(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{p^{(m)}(\kappa)}{(t-\kappa)^{1+\alpha-m}} d\kappa, \; m-1 < \alpha < m.$$

Производная Капуто совпадает с определением производной целого порядка для $\alpha = m \in N$.

Пусть $\Omega_{\Delta x}^{\Delta t} = \{x_i = i\Delta x, i = \overline{0,N}, t^j = j\Delta t, j = \overline{0,M}\}$ — пространственно-временная сетка, покрывающая вычислительную область.

Тогда, согласно [4], аппроксимация производной Капуто для $0 < \alpha < 1$ может быть представлена в виде

$$\frac{\partial^\alpha p(x_i, t^{j+1})}{\partial t^\alpha} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j} \mu_k^\alpha \left(p_i^{j+1-k} - p_i^{j-k} \right) + O(\Delta t^{2-\alpha}). \tag{4}$$

Здесь Γ — гамма-функция, $\mu_k^\alpha = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$, $k = \overline{0,M}$.

Чтобы построить конечно-разностную схему для $1 < \alpha < 2$, введем следующую замену $\alpha = 1 + \beta$, $\beta < 1$.

Пусть $U(x,t) = \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = U, \\ \dfrac{\partial^\beta U}{\partial t^\beta} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p + bp^3 - cp^5 + \sigma e. \end{cases} \tag{5}$$

Разностную схему для уравнений системы (5) можно записать как [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{p_i^{j+1}-p_i^j}{\Delta t}=U_i^{j+1}, \\ \dfrac{\Delta t^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\displaystyle\sum_{k=0}^{j}\eta_k^\beta\left(U_i^{j-k+1}-U_i^{j-k}\right)=\dfrac{1}{\Delta x^2}\left(p_{i+1}^{j+1}-2p_i^{j+1}+p_{i-1}^{j+1}\right)+\varphi_i^{j+1}+\sigma e^{j+1}. \end{cases} \tag{6}$$

или

$$-\frac{1}{\Delta x^2}p_{i-1}^{j+1}+\left(\frac{\Delta t^{-1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\eta_0^\beta+\frac{2}{\Delta x^2}-1-b(p_i^j)^2+c(p_i^j)^4\right)p_i^{j+1}-\frac{1}{\Delta x^2}p_{i+1}^{j+1}=$$

$$=-\frac{\Delta t^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\left(\eta_k^\beta-\eta_{k+1}^\beta\right)U_i^{j-k}+\frac{\eta_0^\beta}{\Delta t}p_i^j+\eta_j^\beta U_i^0\right)+\sigma e^{j+1},$$

$$U_i^{j+1}=\frac{p_i^{j+1}-p_i^j}{\Delta t},\quad i=\overline{1,N-1},\quad j=\overline{0,M-1}.$$

Здесь η_k^β — веса, аналогичные μ_k^α. Нахождение решения уравнения (1) приводит к системе полулинейных уравнений на каждом временном слое. В этом случае было бы разумно объединить конечно-разностную схему с итеративной процедурой. Сформируем последовательность приближений $\{p_i^{(s)}\}$, сходящуюся к p_i^j для каждого момента времени t^j, $j=\overline{1,M}$, по формулам: $(p_i^{(s)})^3\approx(p_i^{(s-1)})^2P_i^{(s)}$, $(p_i^{(s)})^5\approx(p_i^{(s-1)})^4p_i^{(s)}$, где $s=1,2,\ldots$ — номер итерации. Исходя из значения предыдущего временного шага, итерационный алгоритм начинается с $p_i^{(0)}=p_i^{j-1}$. Таким образом, комбинируя метод конечных разностей с итерационной процедурой, можно сохранить порядок точности построенной вычислительной схемы [5].

Использование несимметричных формул конечных разностей второго порядка позволяет аппроксимировать граничные условия (3)

$$-\frac{-3p_0^j+4p_1^j-p_2^j}{2\Delta x}+qp_0^j-g=0,$$

$$\frac{3p_N^j-4p_{N-1}^j+p_{N-2}^j}{2\Delta x}+qp_N^j-g=0,$$

где $j=\overline{1,M}$.

Полученная вычислительная схема была реализована с использованием программной платформы MATLAB.

2. Вычислительный эксперимент

В качестве входных параметров выберем значения, характерные для тонких пленок титана бария: $b=4.0544$, $c=5.1946$, $q=0.3314$, $p_0=0$, $\tilde{p}_0=0$ [5]. На рис. 1 показаны результаты моделирования зависимостей поляризации от поля $p(e)$ при различных значениях порядка дробной производной по времени α. В серии вычислительных экспериментов α изменялась от 1 до 1.15 при фиксированном значении толщины пленки $l=1.37$.

В случае порядка $\alpha=1$ вычислительная схема строилась на основе классической неявной схемы для уравнения параболического типа. Для дифференциального уравнения с целой производной также применялась итерационная процедура. Увеличение порядка дробной производной ведет к расширению петли, а при $\alpha\geq1.3$ петля гистерезиса теряет свою характерную форму.

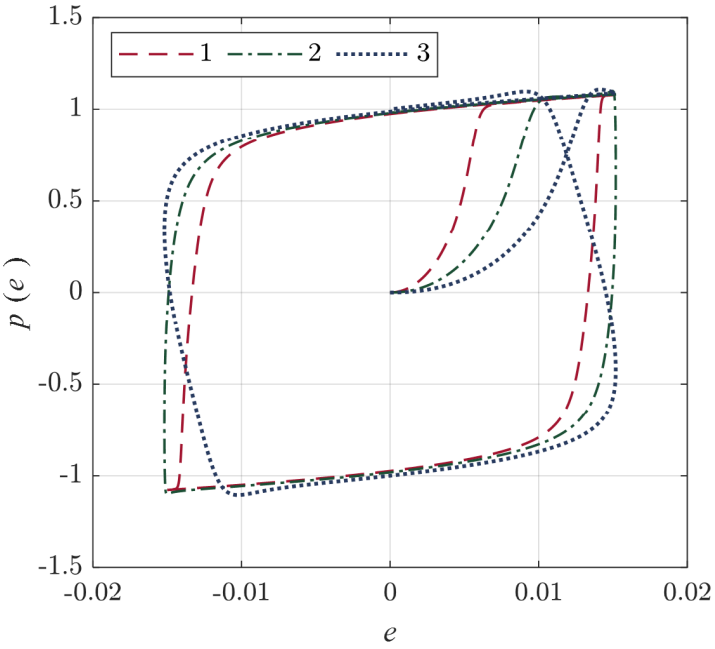


Рис. 1. Петля сегнетоэлектрического гистерезиса при $\alpha = 1-1,\ \alpha = 1.1-2,\ \alpha = 1.2-3$ *для* $l = 1.37$

Заключение

Таким образом, характерным управляющим параметром обобщенной модели становится порядок дробной производной по времени. Уравнение супердиффузии для тонких пленок сегнетоэлектриков позволяет описывать динамику поляризации в условиях, когда механизмы переключения поляризации становятся важными в контексте низкоразмерных систем. Полученные результаты позволяют предположить, что эффекты памяти проявляются в деформации петли, связанной с ее расширением. Переходные процессы супердиффузии, характеризующиеся деформацией петли, наблюдаются, начиная с $\alpha \geq 1.3$.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 122082400001-8.

Литература

1. Физика сегнетоэлектриков: современный взгляд / под ред. К. М. Рабе, Ч. Г. Анна, Ж.-М. Трискона; пер. с англ. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 440 с.

2. *Hubert M.* Solitons in thin-film ferroelectric materia / M. Hubert, M. Justin, N. Kudryashov, G. Betchewe, S. Doka // Physica Scripta. – 2018. – V. 93. – P. 75201.

3. *Souleymanou A.* Soliton solutions in different classes for the Kaup – Newell model equation / A. Souleymanou, A. Korkmaz, H. Rezazadeh, A. Bekir, S. Takougoum Mukam // Mod. Phys. Lett. B. – 2019. – V. 31. – P. 2050038.

4. *Liu F.* Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation / F. Liu, M. Meerschaert, R. McGough, P. Zhuang, Q. Liu // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2013. –V.16. – P. 9–25.

5. *Maslovskaya A.* Time-fractional Landau–Khalatnikov model applied to numerical simulation of polarization switching in ferroelectrics / A. Maslovskaya, L. Moroz // Nonlinear Dynamics. – 2022. – С. 1 – 23.

УДК 004.891

ПРИМЕНЕНИЕ КОНКУРЕНТНОГО КОЭВОЛЮЦИОННОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ СИМВОЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ РЕГУЛЯРНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Н. А. Морошкин

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В работе описан подход к оптимизации структуры регулярных выражений диалекта языка программирования Python модуля re. Этот подход реализован как алгоритм конкурентной коэволюции на основе символьной регрессии (GEP). Сравнительный анализ результатов запуска алгоритмов GEP в составе коэволюции и по отдельности демонстрирует эффективность использования коэволюции символьной регрессии в качестве инструмента оптимизации регулярных выражений.
Ключевые слова: регулярные выражения, символьная регрессия, оптимизация структуры регулярного выражения, коэволюционный алгоритм, конкурентная коэволюция, дерево выражений, популяционные алгоритмы.

В настоящее время, несмотря на развитие и усложнений технологий анализа данных, классические алгоритмы обработки строк остаются наиболее распространенными инструментами текстового анализа в самых различных сферах. Один из таких инструментов — регулярные выражения (РВ). РВ — это инструмент для поиска подстроки в строке. РВ используются во многих текстовых редакторах, различных мониторинговых системах и СУБД. Рост популярности задач текстовой аналитики спровоцировал рост числа диалектов РВ [1]. Из-за этого задача оптимизации регулярного выражения путем минимизации некоторых конечных автомат, задающихся РВ, становится неразрешимой.

Задача оптимизации РВ заключается в нахождении такого РВ, которое будет показывать наибольшую скорость работы на некотором множестве проверочных строк. Однако, при проведении оптимизации важно учитывать, что оптимизированное РВ должно показывать (с некоторым допущением) тот же уровень точности, как и исходное РВ. Отметим, что при подсчете результатов оптимизации запуск каждого РВ осуществлялся несколько раз. Данная операция необходимо для точного замера времени работы регулярного выражения, так как при различных запусках регулярного выражения затраченное время может отличаться. Причины таких различий обычно находятся в аппаратной части рассматриваемого ЭВМ. Пусть область причин для текущего примера ограничена работой языков программирования и использованием доступных аппаратных ресурсов, а именно ОЗУ. В некоторых случаях сборщики мусора используемых языков программирования могут влиять на время работы рассматриваемого РВ. Для минимизации влияния сторонних процессов замер следует производить заданное количество раз, считая среднее арифметическое время работы некоторого РВ или медиану, для избегания учета выбросов в замерах времени работы. Функция замера времени $p(\partial)$ осуществляет замер времени работы для некоторой операции. Необходимо выбирать функцию $p(\partial)$ таким образом, чтобы она наименее зависела от сторонних процессов и учитывала специфику работы программы на используемом языке программирования.

В связи с этим предлагается рассматривать РВ не просто как способ некоторого конечного автомата, а как модель «черный ящик». Тогда задача оптимизации РВ можно решить с помощью некоторого стохастического алгоритма. В данной работе рассматривается применение конкурентного коэволюционного алгоритма [2] на основе символьной регрессии [3] для оптимизации некоторого РВ.

Символьная регрессия относится к группе популяционных алгоритмов. При решении задачи оптимизации некоторой модели «черный ящик» популяционные алгоритмы обладают рядом преимуществ по сравнению с аналогами:

– решение через популяционные алгоритмы наиболее интерпретируемо;

– популяционные алгоритмы — это «легковесные» инструменты, что показывается в количество необходимых аппаратно-программных ресурсах;

– популяционные алгоритмы позволяют обрабатывать большое количество альтернативных решений.

В контексте решения задачи оптимизации регулярного выражения вектор решения или индивид в популяции представляется в виде дерева выражения (ДВ). Символьная регрессия — это тип регрессионного анализа [2], рассматривающая пространство ДВ, чтобы найти определенную ДВ, которое наилучшим образом соответствует заданному набору данных, то есть имеет наилучший показатель пригодности при заданных условиях. Наиболее часто символьная регрессия применяется для оптимизации математических выражений, представленных в иерархической структуре, то есть в виде некоторого ДВ. В данной работе рассматривается алгоритм программирования генетических выражений (GEP) [2], который является представителем семейства популяционных алгоритмов, решающих задачу символьной регрессии.

Пусть reg_0 — некоторое исходное РВ. Пусть t — некоторое множество терминалов $t_1, t_2, ..., t_r$, где r — это количество используемых терминалов в исходном РВ reg_0. Пусть f – множество функций принимающих множество терминалов t в качестве параметра, $f_1(t), f_2(t), ..., f_k(t)$, где k — это количество используемых функций в исходном РВ reg_0. Например, для РВ $ab?|c*.[0-2]$, множество терминалов $t = (a, b, c)$, а множество функций $f = (\&, |, ?, *)$. Также каждая функция $f_i \subset f$ характеризуется параметров арности θ, определяющим максимально возможное количество терминалов в качестве параметров для рассматриваемой функции. Тогда ДВ для исходного РВ reg_0 будет иметь вид $tree_0(f, t | reg_0)$. При работе с задачей символьной регрессии и алгоритмом программирования генетических выражений необходимо определить фенотип и генотип индивида. Исходная форма РВ представлена на рис. 1a. Генотипом индивида является K-выражение [2] (представлено на рис. 1b). Фенотипом является описанное выше ДВ (представлено на рис. 1c).

Для решения задачи оптимизации РВ необходимо:

– сгенерировать множество проверочных строк $S(g = \overline{1, G})$ множество сгенерированных строк, которые используются для проверки РВ на корректность и для подсчета качественных метрик;

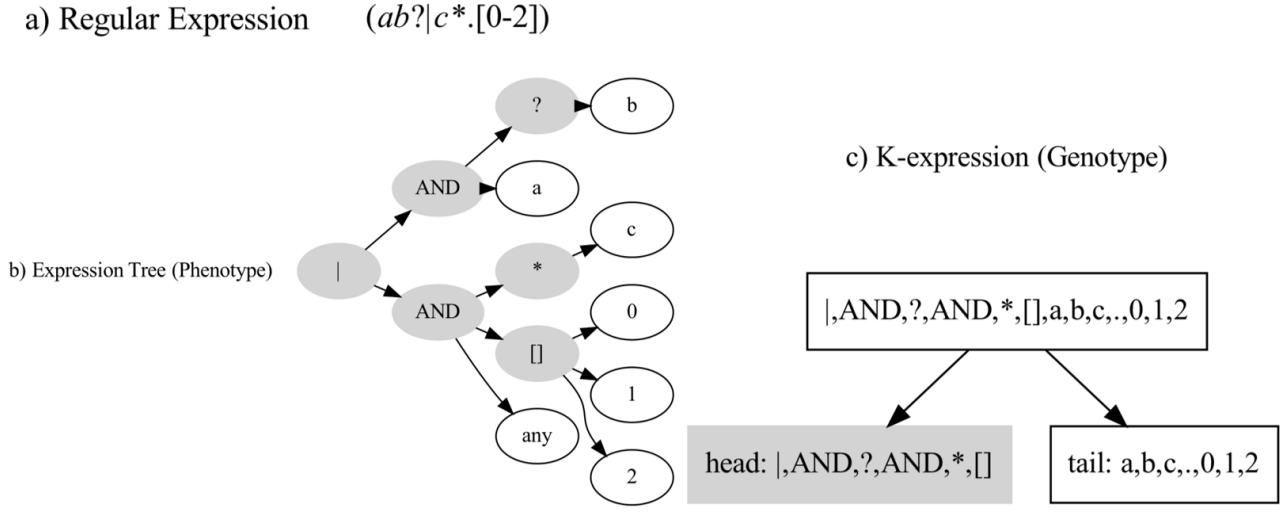


Рис. 1. Пример промежуточных представлений: a) вид исходного регулярного выражения; b) дерево выражений (фенотип); c) K-выражение (генотип)

– определить для некоторого РВ функцию прохода m для строки S_g через автомат РВ reg, возвращающая 1, если РВ reg полностью соответствует некоторому участку в строке S_g и 0 — в противном случае;

– определить функцию пригодности $Q(x)$ для индивида x.

В данной работе показана зависимость результатов оптимизации от разных функций пригодности. Функцию пригодности индивида $Q(x)$ можно определить на основе времени работы некоторого индивида x умноженное на точность РВ, полученного от некоторого индивида x. В качестве метрик качества предлагается использовать такие метрики, как accuracy, precision, recall и f-мера [4].

Конкурентная коэволюция — это способ организации коэволюционного алгоритма, когда алгоритмы «борются» за общедоступные ресурсы. В данном случае — это общее количество вычислений функции пригодности.

Коэволюционный алгоритм предлагается реализовать как конкурентную коэволюцию, основанную на сравнении индивидуальных алгоритмов по качеству каждой итерации (поколения). Основными параметрами коэволюционного алгоритма [2] можно считать общий ресурс $R \subset N$, длину интервала адаптации $T \subset N$, размер «социальной карты» M (процент от исходного размера популяции, позволяющий определить обязательный к сохранению минимальный размер популяции при её коррекции в процессе коэволюции) и размер штрафа для проигравшей популяции $P \subset R$ (процент индивидов, которые должны быть удалены из популяции).

В результате анализа результатов оптимизации и описательных статистик выборок (среднее, медиана, коэффициент вариации, среднеквадратичное отклонение, максимальное и минимальное значение) каждого запуска алгоритмов можно сделать вывод, что коэволюционный алгоритм лучше, чем «худший» из индивидуальных алгоритмов, и даже лучше, чем «средний» алгоритм, но не всегда лучше, чем «лучший» из алгоритмов.

Также можно отметить, что в процессе оптимизации было замечено, что некоторые индивиды не способы скомпилироваться в некоторое РВ. Обычно это было связано с внутренними ограничениями механизма регулярных выражений выбранного модуля или библиотеки. Количество таких «больных» индивидов при запуске индивидуальных алгоритмов не уменьшается и в среднем остается практически неизменным на протяжении всех итераций. Из-за наличия штрафов в алгоритмах коэволюции количество таких индививидов напротив сокращается с каждой итерацией.

В представленной работе оптимизация РВ осуществлялась с использованием коэволюционного алгоритма оптимизации на основе алгоритма GEP. Анализ результатов показал, что коэволюционный алгоритм способен решать задачу оптимизации РВ быстрее, чем это можно сделать при запуске отдельных индивидуальных алгоритмов. Отдельно следует отметить, что в будущих исследованиях будет проведен анализ результатов коэволюционного алгоритма при изменении значений таких параметров как, общий размер ресурса, размер штрафа, размер социальной карты и размер интервала адаптации.

Литература

1. *Moroshkin N.* Architecture of a regular expression translator with optimization of intermediate states / L. Demidova, N. Moroshkin // 2024 International Scientific Conference on Information Technologies (InfoTech). – 2024. – P. 1-4.

2. *Semenkin E.* Michigan and Pittsburgh methods combination for fuzzy classifier design with coevolutionary algorithm / R. Sergienko, E. Semenkin // 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation. – 2013. – P. 3252–3259.

3. *Cândida F.* Gene Expression Programming: A New Adaptive Algorithm for Solving Problems / F. Cândida // Complex Systems. – 2001. – № 13. – P. 87–129.

4. *Gorchakov A.* Analysis of Program Representations Based on Abstract Syntax Trees and Higher-Order Markov Chains for Source Code Classification Task / A. Gorchakov, L. Demidova, P. Sovietov // Future Internet. – 2023. – № 13. – P. 314.

УДК 519.654 : 519.676

БИЛОГИСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МОЩНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ КЛАСТЕРОВ НА ОГРАНИЧЕННЫХ НЕРАВНОМЕРНО ВЗВЕШЕННЫХ КВАДРАТНЫХ РЕШЕТКАХ С (1, 0)-ОКРЕСТНОСТЬЮ

П. В. Москалев[1,2], А. С. Мягков[1]

[1]Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
[2]Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Проводится анализ модели, используемой для аппроксимации функций мощности перколяционных кластеров на ограниченных квадратных решетках с (1, 0)-окрестностью, взвешенных бета-распределенными случайными величинами. Аппроксимация строится как произведение функции взвешивающего распределения и пары двухпараметрических логистических функций. Статистические оценки параметров моделей получены с помощью нелинейного метода наименьших квадратов. Показано, что апостериорные оценки сдвиговых параметров обеих логистических функций значимо отличаются от априорных оценок порога перколяции, что приводит к существенной асимметрии функции, аппроксимирующей мощность перколяционных кластеров на ограниченных квадратных решетках с (1, 0)-окрестностью.
Ключевые слова: порог перколяции, перколяция узлов, квадратная решетка, мощность перколяционного кластера, бета-распределение, логистическая функция.

Введение

Модели решеточной перколяции находят применение в различных областях, например, при исследовании процессов в пористых материалах, или при изучении фазовых переходов в физике твердого тела. Одной из задач, решаемых для перколяционных моделей, является выделение некоторого подмножества узлов (кластера), непрерывным образом связанного с другим (стартовым) подмножеством. Типичные модели решеточной перколяции основаны на структурах регулярных (однородных) графов [1, 2], вершины или ребра которых взвешиваются с помощью некоррелированной выборки значений случайной величины S с некоторым известным законом распределения. К особенностям таких моделей обычно относят: во-первых, их стохастичность, появляющуюся в виде взаимосвязи между глобальными характеристиками модели и законом распределения взвешивающей решетку случайной величины S; во-вторых, их связность, проявляющуюся во взаимосвязи глобальных характеристик кластеров с локальными характеристиками ε-окрестностей узлов в перколяционной решетки; в-третьих, критический характер процесса протекания, проявляющийся в наличии некоторых (пороговых) значений, в окрестности которых малые вариации локальных параметров приводят к существенно большим изменениям эффективных характеристик перколяционной модели.

Следуя логике нашего предыдущего исследования [3], в качестве параметров в задаче узлов для моделей решеточной перколяции выделим размер решетки x и долю ее достижимых узлов p, а также теоретическую функцию распределения $F_0(p)$ случайной величины S, взвешивающей узлы перколяционной решетки. Их значения и будут определять эффективные характеристики исследуемых моделей, в частности, функцию мощности перколяционных кластеров $P_\infty(p)$ и порог протекания, априорные оценки которого, как показано в [4], могут быть определены квантилями функций распределения $F_0(p)$, а апостериорные — аппроксимациями функций мощности перколяционных кластеров $P_\infty(p)$.

1. Модель перколяции узлов на квадратной неравномерно взвешенной решетке

В рамках поставленной задачи будем рассматривать модель перколяции узлов на ограниченной квадратной решетке с (1, 0)-окрестностью, взвешенную непрерывной случайной величиной S, имеющей бета-распределение $S \sim \mathbf{B}(s_1, s_2)$. Для этих моделей, следуя работам [3–5], будем исследовать статистику образования кластеров, стягивающих решетку в вертикальном направлении, то есть обладающих вертикальным размером, сопоставимым с размером перколяционной решетки.

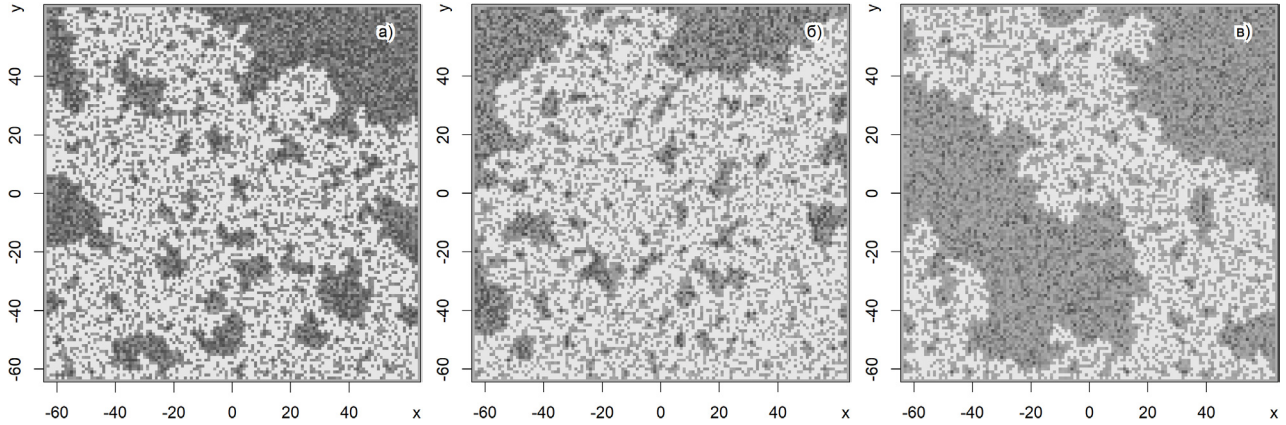


Рис. 1. Реализации стягивающих кластеров при критических значениях параметра $p \approx p_c$ для различных взвешивающих распределений S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$

Все реализации кластеров на рис. 1 строились нами для квадратной решетки размером $x = 129$ узлов с (1, 0)-окрестностью при критических значениях параметра $p \approx p_c$, соответствующих априорным оценкам порога перколяции [4] с различными взвешивающими распределениями S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$, $p = 0.3618$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$, $p = 0.5927$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$, $p = 0.7699$.

Стартовое подмножество узлов на рис. 1 формируется вдоль нижней границы перколяционной решетки, а целевое подмножество — вдоль ее верхней границы $X_{0|1} = \{(x_k, y_k)$: $x_k = -64, -63, \ldots, 64$; $y_k = \mp 64\}$. Светло-серым цветом на рис. 1 мы обозначили узлы с низкой вероятностью протекания, темно-серым цветом — узлы с высокой вероятностью протекания, а белым цветом — узлы кластера, стягивающего решетку по вертикали. Реализации строились с применением пакета "SPSL" для системы R [6]: а) "`ssi20(x = 129, p = 0.3618, shape = c(1, 2))`"; б) "`ssi20(x = 129, p = 0.5927, shape = c(1, 1))`"; в) "`ssi20(x = 129, p = 0.7699, shape = c(2, 1))`".

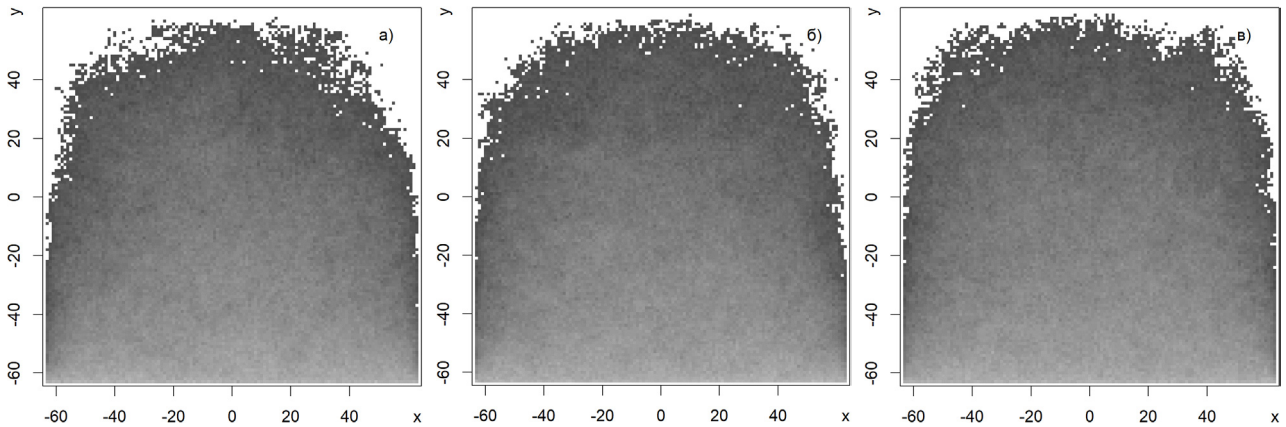


Рис. 2. Распределения относительных частот стягивающих кластеров для различных взвешивающих распределений S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$

На рис. 2 показаны распределения относительных частот узлов квадратных решеток для выборок объемом $n = 300$ кластеров узлов с (1, 0)-окрестностью при критических значениях параметра $p \approx p_c$, соответствующих априорным оценкам порога перколяции [4] для взвешивающих распределений S, идентичных ранее показанным на рис. 1.

Светло- и темно-серым цветом на рис. 2 показаны узлы перколяционной решетки с высокими и низкими частотами принадлежности к стягивающим кластерам, а все узлы с околонулевыми частотами условно не отображаются. По аналогии с рис. 1 все распределения на рис. 2 были построены с помощью пакета "SPSL" для системы R [6]: а) "`fssi20(n = 300, x = 129, p = 0.3618, shape = c(1, 2))`"; б) "`fssi20(n = 300, x = 129, p = 0.5927, shape = c(1, 1))`"; в) "`fssi20(n = 300, x = 129, p = 0.7699, shape = c(2, 1))`".

2. Аппроксимация функций мощности стягивающих кластеров на неравномерно взвешенных перколяционных решетках

В качестве оценок функции мощности перколяционных кластеров $\{P_{\infty,i}(p_i)\}$ примем усредненные по целевому подмножеству X_1 относительные частоты узлов решетки в стягивающих кластерах, примеры распределений которых показаны выше на рис. 2. В работе [4] было показано, что при убывании параметра $p \to 0+$ эти оценки близки к нулю $P_\infty(p) \to 0+$, а при его возрастании $p \to 1-$ сходятся к функции взвешивающего распределения $P_\infty(p) \to F_0(p)-$.

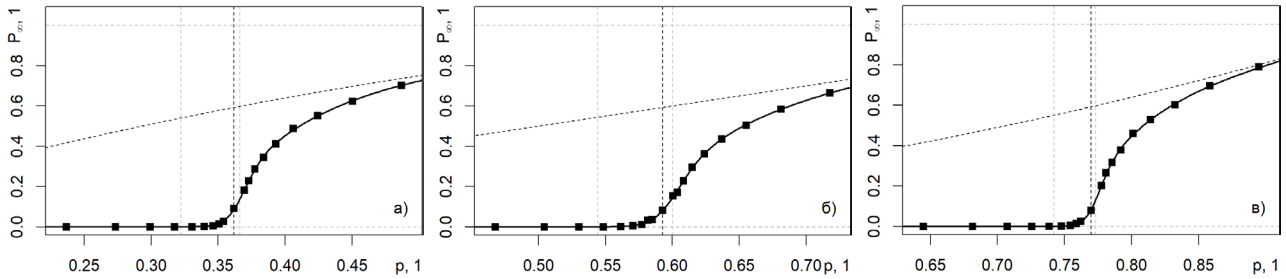


Рис. 3. Аппроксимация мощности стягивающих кластеров $P_\infty(p \mid S)$ для различных взвешивающих распределений S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$

На рис. 3 приведены зависимости статистических оценок мощности стягивающих кластеров от доли достижимых узлов $P_\infty(p)$ для неравномерно взвешенных квадратных решеток с линейным размером $x = 129$ узлов с (1, 0)-окрестностью для множества возможных значений долей достижимых узлов p в окрестности критической точки $p \approx p_c$. Символами «■» показаны статистические оценки $\{P_{\infty,i}(p_i)\}$. Вертикальные и горизонтальные штриховые линии серого и черного цветов на рис. 3 соответствуют характерным для данной задачи уровням долей достижимых узлов $p \approx p_c$ и предельных вероятностей $P_\infty = \{0,1\}$. Выпуклые вверх, вниз или прямые штриховые линии черного цвета соответствуют интегральным функциям бета-распределенной случайной величины S, на интервале $(p_c \pm 0.13)$. При этом мощность стягивающего кластера на интервале $0 < p < 1$ будет аппроксимироваться моделью вида:

$$P_\infty(p \mid s) = F_0(p \mid s)F(p), \tag{1}$$

где $F_0(p \mid s_1, s_2) = \mathbf{B}(p \mid s_1, s_2) / \mathbf{B}(s_1, s_2)$ — функция распределения взвешивающей узлы перколяционной решетки случайной величины S; $F(p) = F_1(p)F_2(p)$ — асимметричная билогистическая функция вида:

$$F(p) = \frac{2/[1 + \exp(-(p - a_2)/b_2)] - 1}{1 + \exp(-(p - a_1)/b_1)}, \tag{2}$$

где a_1, a_2 — параметры сдвига, определяющие абсциссы точек перегиба отдельных компонент $F_1(p)$ и $F_2(p)$ билогистической функции (2); b_1, b_2 — параметры масштаба, определяющие

радиусы асимметричного интервала значений параметра $p \in (p_c - \varepsilon_1, p_c + \varepsilon_2)$, в пределах которого функция (2) статистически значимо отличается от своих асимптот.

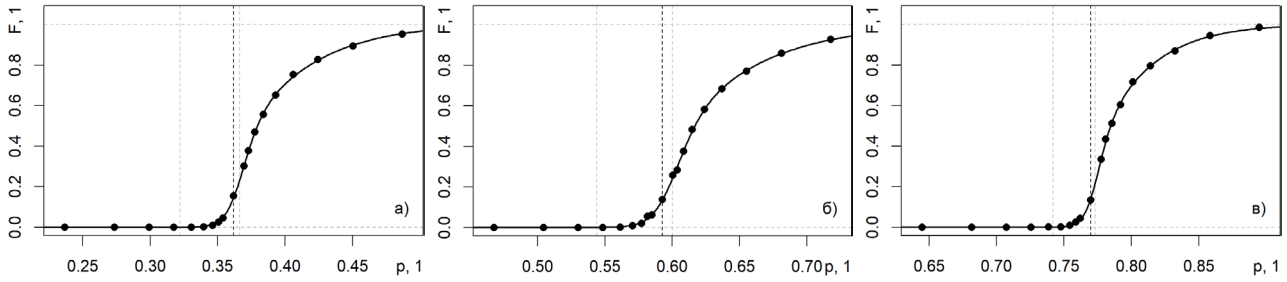


Рис. 4. Аппроксимация билогистических сигмоидных функций $F(p)$ для различных взвешивающих распределений S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$

На рис. 4 представлены примеры графиков асимметричных билогистических сигмоидных функций вида (2) со сдвиговыми и масштабными параметрами, идентичными принятым при построении аппроксимаций на рис. 3. Символами «●» показаны отношения оценок мощности стягивающих кластеров к соответствующим значениям функций распределения $\{P_{\infty,i}/F_0(p_i)\}$ взвешивающей узлы перколяционной решетки случайной величины S.

3. Результаты и обсуждение

При построении вышеуказанной аппроксимации в системе R была использована реализация нелинейного метода наименьших квадратов из пакета “gslnls” для системы R [7]. Основные результаты, полученные при аппроксимации в форме (1) для зависимости мощности стягивающих кластеров от доли достижимых узлов $\{P_{\infty,i}(p_i)\}$ при параметрах взвешивающего распределения $S \sim \mathbf{B}(1,1)$ приведена в листинге 1.

Листинг 1

Аппроксимация эмпирической зависимости $\{P_{\infty,i}(p_i)\}$ в форме (1)

```
> summary(fit)
Formula: Pinf ~ p * (2/(1 + exp(-(p - a2)/b2)) - 1)/(1 + exp(-(p - a1)/b1))
   Parameters:
       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
   a1 0.5989037  0.0003941 1519.65   <2e-16 ***
   a2 0.5447627  0.0019619  277.67   <2e-16 ***
   b1 0.0097962  0.0001619   60.52   <2e-16 ***
   b2 0.0532708  0.0009085   58.64   <2e-16 ***
   ---
   Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
   Residual standard error: 0.001864 on 22 degrees of freedom
   Number of iterations to convergence: 14
   Achieved convergence tolerance: 1.751e-16

> confint(fit)
         2.5 %     97.5 %
a1 0.598086392 0.59972104
a2 0.540693863 0.54883144
b1 0.009460513 0.01013191
b2 0.051386728 0.05515483
```

Как было показано в работе [3], при исследовании равномерно взвешенных перколяционных решеток малого размера удовлетворительную аппроксимацию для функции мощности стягивающих кластеров можно построить на базе произведения функции распределения и единичной логистической функции. Однако для неравномерно взвешенных решеток большего размера построение удовлетворительной аппроксимации вида (1) основано на использовании асимметричной билогистической функции вида (2), причем, если ориентироваться на остаточное стандартное отклонение (RSE), то можно заметить, что качество построенной аппроксимации выросло более чем пятикратно $\sigma_{\varepsilon 1}/\sigma_{\varepsilon 2} \approx 0.0097/0.0019 \approx 5.1$.

На рис. 3 вертикальными штриховыми линиями серого цвета показаны статистические оценки сдвиговых параметров модели (1), а вертикальными линиями черного цвета — априорные оценки порога перколяции на бета-взвешенных квадратных решетках с (1, 0)-окрестностью. Нетрудно заметить, что во всех рассмотренных случаях выполняются неравенства вида $a_2 < p_c < a_1$, причем радиусы левого и правого полуинтервалов различаются почти на порядок $p_c - a_1 < p_c - a_2$.

4. Заключение

Представленные результаты на взгляд авторов наглядно демонстрируют, что применение билогистических моделей позволяет получать удовлетворительные аппроксимации кластеров, стягивающих неравномерно взвешенные решетки для большего диапазона размеров решеток. С теоретической точки зрения интерес вызывает исследование природы возникновения асимметрии в зависимости функции мощности стягивающих кластеров от доли достижимых узлов. С практической точки зрения интерес вызывают корреляции параметров предлагаемых аппроксимаций от размера решетки и параметров взвешивающего распределения, а также применимость предлагаемых аппроксимаций на неравномерно взвешенных кубических решетках.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 23-21-00376).

Литература

1. *Тарасевич Ю. Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Ю. Ю. Тарасевич. – Москва: URSS, 2002. – 112 с. – URL: https://elibrary.ru/jkmbru (дата обращения: 29.10.2024).

2. *Москалев П. В.* Перколяционное моделирование пористых структур / П. В. Москалев. – Москва: URSS, 2018. – 240 с. – URL: https://elibrary.ru/zrjswd (дата обращения: 29.10.2024).

3. *Москалев П. В.* Об аппроксимации функций мощности перколяционных кластеров на равномерно взвешенных квадратных решетках с (1, 0)-окрестностью / П. В. Москалев, Л. С. Онищенко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2024. – С. 564–568. – URL: https://elibrary.ru/hvsmwr (дата обращения: 29.10.2024).

4. *Moskalev P. V.* Convergence of percolation probability functions to cumulative distribution functions on square lattices with (1, 0)-neighborhood / P. V. Moskalev // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2020. – V. 553. – P. 124657. –
URL: https://doi.org/10.1016/j. physa.2020.124657 (дата обращения: 29.10.2024).

5. *Москалев П. В.* Оценки порога и мощности перколяционных кластеров на квадрат-ных решетках с (1, π)-окрестностью / П. В. Москалев // Компьютерные исследования и модели-

рование. – 2014. – Т. 6, № 3. – С. 405–414. – URL: https://elibrary.ru/sitewx (дата обращения: 29.10.2024).

6. *Moskalev P. V.* SPSL: Site Percolation on Square Lattices. – R package version 0.1.9. – URL: https://cran.r-project.org/package=SPSL (дата обращения: 29.10.2024).

7. *Chau J.* gslnls: GSL Nonlinear Least-Squares Fitting. – R package version 1.1.2. – URL: https://cran.r-project.org/package=gslnls (дата обращения: 29.10.2024).

УДК 519.6

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА МВС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГИДРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АКТУАЛЬНОГО СЦЕНАРИЯ ВНЕЗАПНОЙ ДЕПРЕССИИ АКТИВНО РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВИДОВ ПЛАНКТОНА И ПРОМЫСЛОВЫХ РЫБ ПРИ ПОПАДАНИИ В МЕЛКОВОДНЫЙ ВОДОЕМ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ

А. В. Никитина[1,2], Т.В. Лященко[2]

[1]Донской государственный технический университет
[2]Южный федеральный университет

Аннотация. Работа посвящена исследованию актуального сценария внезапной депрессии активно распространяющихся видов фито- и зоопланктонных сообществ при загрязнении гидробиогеоценоза опасными, в том числе и токсичными, веществами. Изучение механизма влияния загрязнений мелководных систем на численность планктонных популяций реализовано на основе методов и средств математического моделирования и сценарного подхода. Разработана и численно реализована в виде программного комплекса, ориентированного на супер-ЭВМ, математическая модель распространения загрязняющих веществ, включая частицы нано- и микропластика, наиболее распространенных видов планктона и промысловых рыб в мелководном водоеме на примере Азовского моря.
Ключевые слова: гидробиологический процесс, математическая модель, алгоритм.

Введение

Цель исследования состояла в разработке, изучении и численной реализации математической модели гидробиологического процесса мелководного водоема. Одной из важных и актуальных задач является исследование на основе сценарного подхода, методов и средств математического моделирования активно распространяющихся видов фито- и зоопланктонных сообществ, являющихся основной пищей ценных и промысловых рыб. Попадание в гидробиогеоценоз загрязняющих веществ, включая частицы нано- и микропластика, со стоками рек и путем оседания из воздуха приводит к значительному ухудшению среды обитания. Пластиковые отходы и мусор образуют целые острова, ухудшают экологическое состояние многих уникальных водных экосистем, имеющих курортное значение.

1. Постановка задачи

Разработанная пространственно-трехмерная математическая модель водной ихтиологии — модель динамики промысловой рыбы основывается на литературных источниках, работах Тютюнова Ю. В. с соавторами [1], в ней учитывается конвективное и адвективное движение водной среды, микротурбулентная диффузия, температурный и кислородный режимы, соленость, гравитационное оседание субстанций, пищевой таксис, вылов. С помощью разработанной модели гидробиологии мелководного водоема можно изучать распределения наиболее распространенных в Азовском море в летний период видов планктона – диатомового фитопланктона и зоопланктона, загрязняющих биогенных веществ, пластика [2–4]. Модель включает систему нелинейных уравнений в частных производных с реактивными членами, имеет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial\left(uc\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(vc\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\left(w+w_{g\varphi}\right)c\right)}{\partial z}-\mu_c\Delta c+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_c\frac{\partial c}{\partial z}\right)=\psi_c,$$

$$c \in \{X, Z, S, M, N, P\},\ \psi_X = g_X(X, S) - (\delta_X Z + \sigma_X P + \varepsilon_X) X, \tag{1}$$

$$\psi_Z = g_Z(X, Z, N) - (\varepsilon_Z + \delta_Z) Z,\ \psi_S = -g_S(X, S) + B(S_P - S) + f_S,$$

$$\psi_M = f_M - g_M(M, P) - \varepsilon_M MN,\ \psi_N = \varepsilon_N MN - g_N(N, Z, P),\ \psi_P = g_P(X, M, N, P) - (\varepsilon_P + \delta_P) P,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial t} + div(\mathbf{U}_P \otimes \mathbf{u}_P) - \mu_u \Delta \mathbf{u}_P - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_u \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial z}\right) - k_M grad M - k_N grad N - k_X grad X + \alpha_u \mathbf{u}_P = 0,$$

где X, Z, S, M, N, P — концентрации водоросли *Coscinodiscus*, планктона *Copepoda*, биогенного вещества, микро- и нанопластика, промысловой рыбы *Abramis brama*; g_φ — трофические функции для субстанций $c \in \{X, Z, S, M, N, P\}$. Положим вначале: $g_X(X, S) = \gamma_X \alpha_S XS$, $g_Z(X, Z, N) = \gamma_Z \delta_X XZ - \beta_N NZ$, $g_S(X, S) = \alpha_S XS$, $g_M(M, P) = \beta_M MP$, $g_P(X, M, N, P) = \xi_P \sigma_X XP - \gamma_P(\beta_M M + \beta_N N) P$, γ_P, ξ_P — передаточные коэффициенты; γ_S — доля S, находящегося в биомассе X; ε_X — коэффициент, учитывающий смертность и метаболизм X; ε_M, ε_N — коэффициенты разложения микропластика на нанопластик и передаточный коэффициент поступления в водную среду нанопластика; $\varepsilon_Z, \varepsilon_P$ — коэффициенты элиминации (смертности) Z, P соответственно; δ_X — убыль X за счет выедания Z; δ_Z — убыль Z за счет выедания рыбами; δ_P — убыль P за счет выедания рыбами и вылова; $f_S = f_S(t, x, y, z)$, $f_M = f_M(t, x, y, z)$ — функции источника загрязнений; S_P — предельно возможная концентрация биогенного вещества; B — удельная скорость поступления загрязняющего вещества; β_N, β_M — скорости выедания нано- и микропластика рыбами; ε_M — коэффициент разложения микропластика на нанопластик; Δ — двумерный оператор Лапласа; μ_c, ν_c — диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях субстанции c соответственно; $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_{gc}$, $\mathbf{U}_P = \mathbf{u} + \mathbf{u}_P$ — скорости конвективного переноса вещества и P; w_{gc} — гидравлическая крупность или скорость осаждения субстанции c; $\mathbf{u} = (u, v, w)^\tau$ — поле скоростей водного потока; $\mathbf{u}_P$ — скорость движения рыбы относительно воды; μ_u, ν_u — коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющей диффузии скорости таксиса; α_u — коэффициент инерционного движения рыбы; k_N, k_M, k_X — коэффициенты таксиса; $\otimes$ — тензорное произведение; $\mathbf{u}_{0c}$ — скорость осаждения c-й субстанции под действием силы тяжести, $c \in \{X, Z, S, M\}$.

Расчетная область G представляет собой замкнутый бассейн, ограниченный цилиндрической боковой поверхностью σ, невозмущенной поверхностью водоема Σ_0, дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x, y)$. $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$ — кусочно-гладкая граница области G для $0 < t \le T_0$.

Пусть $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности, $\mathbf{U}_\mathbf{n}$ — нормальная по отношению к Σ составляющая вектора скорости водного потока.

Зададим начальные условия:

$$c(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z),\ \ c \in \{X, S, Z, M, N, P\}, (x, y, z) \in \bar{G}, t = 0. \tag{2}$$

Граничные условия зададим в следующем виде:

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на } \sigma, \text{ если } \mathbf{U}_\mathbf{n} < 0;\ \mu_c \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = -\mathbf{U}_\mathbf{n} c \text{ на } \sigma, \text{ если } U_\mathbf{n} \ge 0;$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_0;\ \nu_c \frac{\partial c}{\partial z} = -w_{gc} c \quad \text{на } \Sigma_H, c \in \{X, S, Z, M, N, P\}, \tag{3}$$

ε_1, ε_3, ε_5 — учитывают опускание планктона и рыб на дно и их затопление; ε_2, ε_4, ε_6 — учитывают поглощение загрязняющих веществ донными отложениями.

2. Описание метода решения задачи

Опишем уравнение типа диффузии-конвекции, к которому может быть сведено каждое уравнение системы (1)–(3) после линеаризации

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = \left(\mu c'_x\right)'_x + \left(\mu c'_y\right)'_y + f \tag{4}$$

с граничными условиями:

$$c'_n(x, y, t) = \alpha_n c + \beta_n, \tag{5}$$

где u, v — компоненты вектора скорости, μ — коэффициент турбулентного обмена, f — функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

2.1. Дискретизация задачи биологической кинетики

Для численной реализации поместим расчетную область в прямоугольник, введем равномерную расчетную сетку [5, 6]:

$$w_h = \left\{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y;\ \ n = \overline{0, N_t}, i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y};\ \ N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\right\},$$

где τ — шаг по времени, h_x, h_y — шаги по пространству, N_t — верхняя граница по времени, N_x, N_y — границы по пространству.

Аппроксимация однородного уравнения (4) реализуется с помощью схемы расщепления [7–10]:

$$\frac{c^{n+1/2} - c^n}{\tau} + u\left(c^n\right)'_x = \left(\mu\left(c^n\right)'_x\right)'_x, \tag{6}$$

$$\frac{c^{n+1} - c^{n+1/2}}{\tau} + v\left(c^{n+1/2}\right)'_y = \left(\mu\left(c^{n+1/2}\right)'_y\right)'_y. \tag{7}$$

Для аппроксимации системы уравнений (6), (7) используется схема, полученная как результат линейной комбинации схемы «кабаре» и «крест», с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно. Данные коэффициенты рассчитаны путем минимизации порядка погрешности аппроксимации, которая для рассматриваемой задачи позволяет более точно описать поведение решения при достаточно больших сеточных числах Пекле [11–14]. Алгоритм решения задачи базируется на использовании функции заполненности расчетных ячеек [15, 16]:

$$\frac{2q_{2,i,j} + q_{0,i,j}}{3}\frac{c^{n+1/2}_{i,j} - c^n_{i,j}}{\tau} + 5u_{i-1/2,j}q_{2,i,j}\frac{c^n_{i,j} - c^n_{i-1,j}}{3h_x} + u_{i+1/2,j}\min\left(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}\right)\frac{c^n_{i+1,j} - c^n_{i,j}}{3h_x} +$$
$$+ \frac{2\Delta_x c^n_{i-1,j}q_{2,i,j} + \Delta_x c^n_{i,j}q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j}q_{1,i,j}\frac{c^n_{i+1,j} - c^n_{i,j}}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j}q_{2,i,j}\frac{c^n_{i,j} - c^n_{i-1,j}}{h_x^2} -$$
$$-\left|q_{1,i,j} - q_{2,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x},\ \text{в случае, если } u_{i,j} \geq 0; \tag{8}$$

$$\frac{2q_{1,i,j} + q_{0,i,j}}{3}\frac{c^{n+1}_{i,j} - c^n_{i,j}}{\tau} + 5u_{i+1/2,j}q_{1,i,j}\frac{c^n_{i+1,j} - c^n_{i,j}}{3h_x} + u_{i-1/2,j}\min\left(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}\right)\frac{c^n_{i,j} - c^n_{i-1,j}}{3h_x} +$$
$$+ \frac{2\Delta_x c^n_{i+1,j}q_{1,i,j} + \Delta_x c^n_{i,j}q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j}q_{1,i,j}\frac{c^n_{i+1,j} - c^n_{i,j}}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j}q_{2,i,j}\frac{c^n_{i,j} - c^n_{i-1,j}}{h_x^2} -$$
$$-\left|q_{1,i,j} - q_{2,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x},\ u_{i,j} < 0,\ \text{где } \Delta_x c^n_{i,j} = \frac{c^{n-1/2}_{i,j} - c^{n-1}_{i,j}}{\tau};$$

$$\frac{2q_{4,i,j}+q_{0,i,j}}{3}\frac{c_{i,j}^{n+1}-c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau}+5v_{i,j-1/2}q_{4,i,j}\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y}+v_{i,j+1/2}\min\left(q_{3,i,j},q_{4,i,j}\right)\frac{c_{i,j+1}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y}+$$

$$+\frac{2\Delta_y c_{i,j-1}^{n}q_{4,i,j}+\Delta_y c_{i,j}^{n}q_{0,i,j}}{3}=2\mu_{i,j+1/2}q_{3,i,j}\frac{c_{i,j+1}^{n}-c_{i,j}^{n}}{h_y^2}-2\mu_{i,j-1/2}q_{4,i,j}\frac{c_{i,j}^{n}-c_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}-$$

$$-\left|q_{3,i,j}-q_{4,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_y c_{i,j}+\beta_y}{h_y},\ v_{i,j}\geq 0; \qquad (9)$$

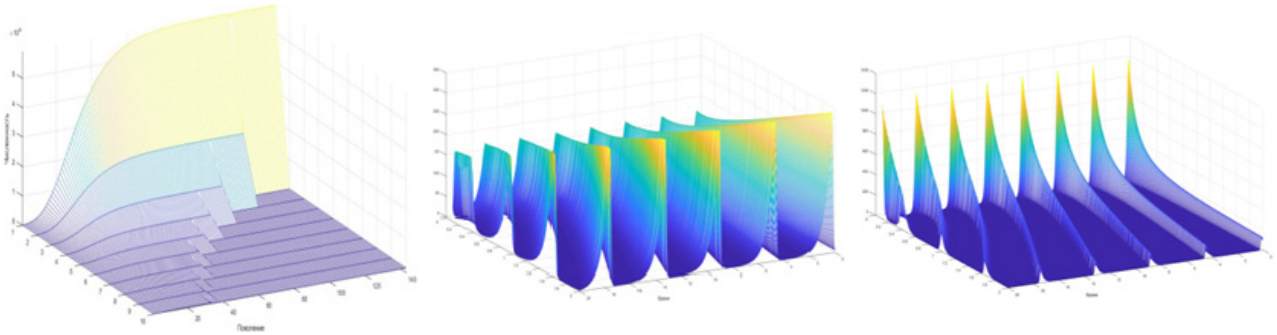
$$\frac{2q_{3,i,j}+q_{0,i,j}}{3}\frac{c_{i,j}^{n+1}-c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau}+5v_{i,j+1/2}q_{3,i,j}\frac{c_{i,j+1}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y}+v_{i,j-1/2}\min\left(q_{3,i,j},q_{4,i,j}\right)\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y}+$$

$$+\frac{2\Delta_y c_{i,j+1}^{n+1/2}q_{3,i,j}+\Delta_y c_{i,j}^{n+1/2}q_{0,i,j}}{3}=2\mu_{i,j+1/2}q_{3,i,j}\frac{c_{i,j+1}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n+1/2}}{h_y^2}-2\mu_{i,j-1/2}q_{4,i,j}\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_y^2}-$$

$$-\left|q_{3,i,j}-q_{4,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_y c_{i,j}+\beta_y}{h_y},\ \text{в случае, если } v_{i,j}<0,\ \text{где } \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2}=\frac{c_{i,j}^{n}-c_{i,j}^{n-1/2}}{\tau}.$$

3. Результаты численного эксперимента

На рис. 1 представлены результаты работы программного комплекса, ориентированного на многопроцессорную вычислительную систему, при этом разработаны параллельные алгоритмы расчетов для решения рассматриваемой задачи гидробиологии мелководного водоема.



а) *б)* *в)*

Рис. 1. Результаты численного эксперимента: а) колебания численности популяции фитопланктона от характера эволюции в модельной области правильной формы; б), в) колебания численности фитопланктона и биогенного вещества, $f=0{,}1...2{,}0$; временной промежуток $T=20$

На рис. 2, 3 представлены результаты численного эксперимента для задачи гидробиологии Азовского моря (1)–(3).

При создании баз входных данных использовались экспедиционные исследования [17], литературные источники, электронный атлас, подготовленный ЮНЦ РАН, Экологический атлас Черного и Азовского морей.

Заключение

Разработана и численно реализована математическая модель распространения загрязняющих веществ, в том числе и микрочастиц пластиковых отходов, базовые виды планктона в мелководном водоеме на примере мелководного водоема. Снижение погрешности решения

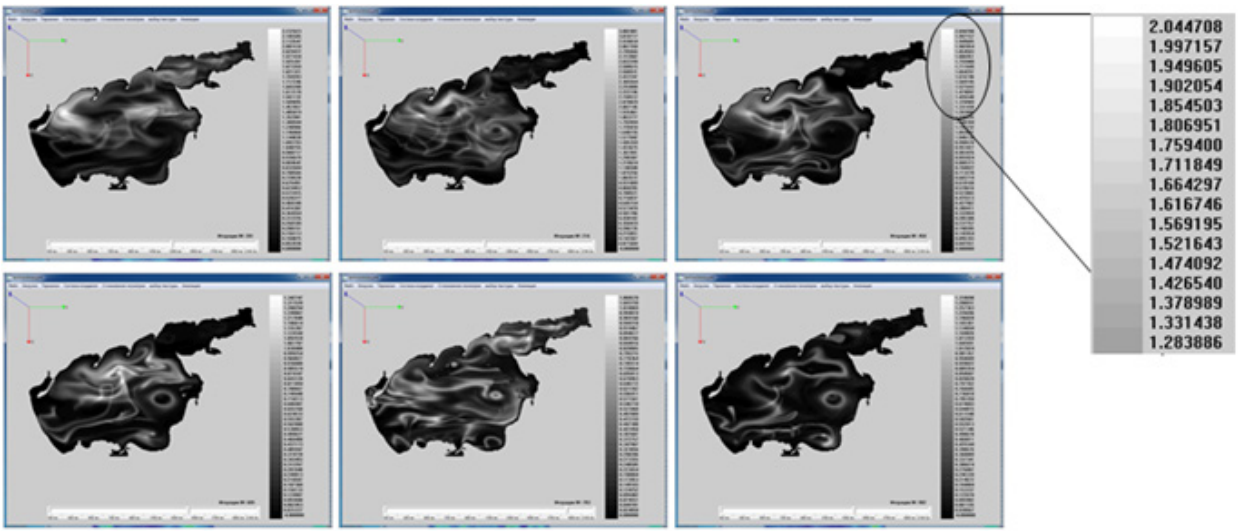


Рис. 2. Распределение концентрации фитопланктона

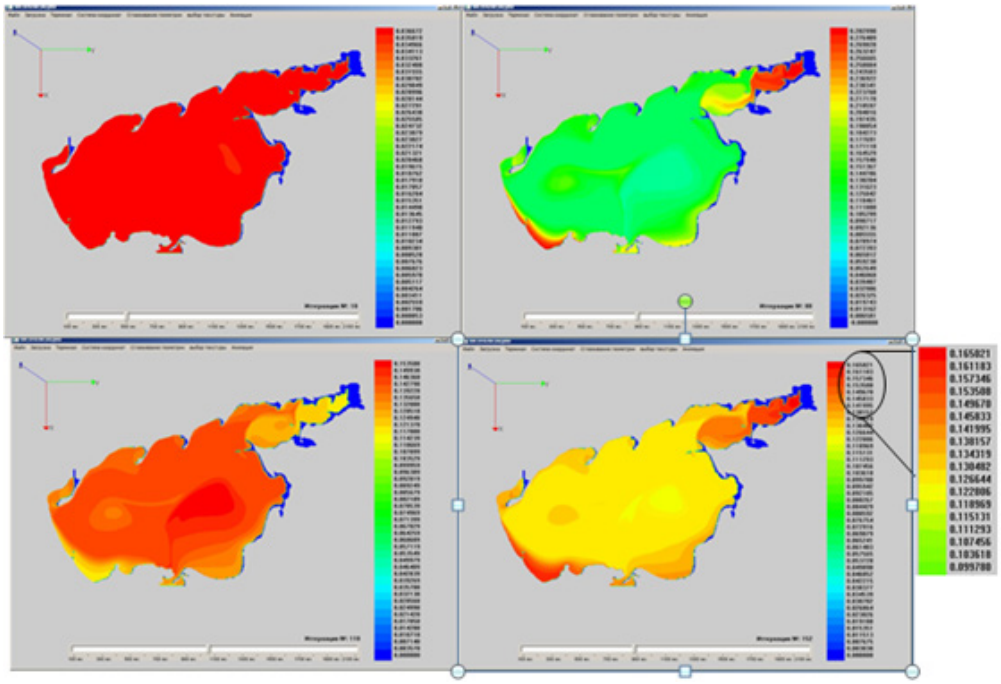


Рис. 3. Распределение концентрации загрязняющего вещества

поставленной задачи в расчетной области сложной формы удалось добиться при ее дискретизации на основе метода частичной заполненности расчетных ячеек и комбинации разностных схем «крест» и «кабаре». Использование этих схем при дискретизации модели позволило существенно повысить точность моделирования.

Программно-аналитические исследования, проведенные с использованием предложенной и численно реализованной задачи транспорта загрязняющих веществ с учетом внезапной депрессии наиболее активно распространяющихся видов планктона и промысловых рыб показали адекватность и работоспособность построенной в данной работе математической модели, интегрированной в программный комплекс, что позволяет использовать его при планировании прогностических расчетов определения качества вод в различные периоды времени. Разработка эффективных параллельных алгоритмов численной реализации поставленной задачи биологической кинетики позволила изучать биологическую кинетику планктонных популяций, а также строить краткосрочные и долгосрочные прогнозы устойчивого развития

гидробиоценозов водоемов при загрязнении их токсичными веществами и пластиковым мусором. Разработанное экспериментальное программное обеспечение ориентировано на многопроцессорные вычислительные системы, что позволяет выполнять прогностические расчеты возможных сценариев развития эвтрофированных водоемов при возникновении в них опасных природных и техногенных явлений в ускоренном режиме времени.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-71-20050)

Литература

1. *Тютюнов Ю. В.* Микромасштабная пятнистость распределения веслоногих рачков как результат трофически-обусловленных миграций / Ю. В.Тютюнов, А. Д. Загребнева, Ф. А. Сурков, А. И. Азовский // Океанология. – 2010. – Т. 50, № 1. – С. 72–81.

2. *Белова Ю. В.* Применение методов усвоения данных наблюдений для моделирования распространения загрязняющих веществ в водоеме и управления устойчивым развитием / Ю. В. Белова, А. В. Никитина // Безопасность техногенных и природных систем. – 2024. – Т. 8, № 3. – С. 39–48.

3. *Четверушкин Б. Н.* Кинетические модели для решения задач механики сплошной среды на суперкомпьютерах / Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 5. – С. 65–79.

4. *Сухинов А. И.* Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, И. Ю. Кузнецова, А. М. Атаян, А. В. Никитина // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 2. – С 85–100.

5. *Белоцерковский О. М.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. М. Белоцерковский, В. А. Гущин, В. В. Щенников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 197–207.

6. *Chistyakov A. E.* Investigation of the Approximation Error of the Difference Scheme for the Mathematical Model of Hydrodynamics / A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, I. Y. Kuznetsova, E. O. Rakhimbaeva, M. V. Porksheyan // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, No 5. – P. 1839–1846.

7. *Sukhinov A. I.* Mathematical modeling of eutrophication processes in shallow waters on multiprocessor computer system / A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, A. E. Chistyakov, I. S. Semenov, A. A. Semenyakina, D. S. Khachunts // В сборнике: PCT 2016 Parallel Computing Technologies. Proceedings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies. – 2016. – С. 320–333.

8. *Sukhinov A.* Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the dynamics of biogeochemical cycles in coastal systems problem / A. Sukhinov, Y. Belova, A. Nikitina, V. Sidoryakina // Mathematics. – 2022. – Т. 10, № 12.

9. *Chistyakov A. E.* A differential game model of preventing fish kills in shallow waterbodies / A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, G. A. Ougolnitsky, M.V. Puchkin, I.S. Semenov, A. I. Sukhinov, A. B. Usov // Game Theory and Applications. – 2015. – Т. 17. – С. 37-48.

10. *Sukhinov A.* Complex of models, high-resolution schemes and programs for the predictive modeling of suffocation in shallow waters / A. Sukhinov, A. Chistyakov, A. Isayev, A. Nikitina, V. Sumbaev, A. Semenyakina // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Т. 753. – С. 169–185.

11. *Сухинов А. И.* Обработка данных натурных измерений экспедиционных исследований для математического моделирования гидродинамических процессов Азовского моря / А. И. Сухинов, А. М. Атаян, Ю. В. Белова, В. Н. Литвинов, А. В. Никитина, А. Е. Чистяков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13, № 2. – С. 161–174.

12. *Сухинов А. И.* Математическое моделирование процессов эвтрофикации в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе / А. И. Сухинов, А. В. Никитина, А. Е. Чистяков, И. С. Семенов, А. А. Семенякина, Д. С. Хачунц // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2016. – Т. 5, № 3. – С. 36–53.

13. *Sukhinov A. I.* The use of supercomputer technologies for predictive modeling of pollutant transport in boundary layers of the atmosphere and water bodies / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, T. V. Lyashchenko, A. A. Filina, V. N. Litvinov // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Т. 1063. – С. 225–241.

14. *Самарский А. А.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : URSS, 2009. – 248 с.

15. *Вабищевич П. Н.* Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции / П. Н. Вабищевич, М. В. Васильева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 359–369.

16. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – Москва : Наука, 1978. – 592 с.

17. *Литвинов В. Н.* Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе / В. Н. Литвинов, А. Е. Чистяков, А. В. Никитина, А. М. Атаян, И. Ю. Кузнецова // Компьютерные исследования и моделирование. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 647–672.

УДК 624.154.5

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАТЕРИАЛОВ ПРИМЕНЯЕМЫХ В МОСТОСТРОИТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА ДИАПАЗОНЕ РАБОЧИХ ТЕМПЕРАТУР

Ю. О. Носов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Аннотация. В рамках работы проведено экспериментальное и численное исследование набора функциональных материалов применяемых в мостостроительной деятельности. Для построения качественного аналога реальной конструкции необходимо основательно подходить к описанию математических моделей материалов, которые могут зависеть от различных параметров. В рамках исследования создана численная процедура, которая в автоматизированном режиме описывает поведение антифрикционных полимерных материалов и смазок. Для описания полимеров выбрано тело Максвелла на основе рядов Прони. Представленная модель позволяет описать термовязкоупругое поведение материала, что позволяет проводить численное исследование конструкции на широком диапазоне рабочих температур. Для описания математической модели набора смазочных материалов используется модель Ананд. В отличии от рядов Прони, представленная модель позволяет дополнительно учесть пластическое поведение материала. Выполнена верификация выбранных математических моделей с экспериментальным исследованием, получены качественные и количественные закономерности поведения материалов.
Ключевые слова: антифрикционный полимерный материал, смазочный материал, температура, ряды Прони, модель Ананд, вязкоупругость, вязкоупругопластичность.

Введение

Транспортно-логистические системы являются важной отраслью современной инфраструктуры РФ. При этом активное развитие общества приводит к увеличению на мостовые сооружения, что в свою очередь приводит к снижению долговечности работы конструкции а в последствии увеличение затрат на ее обслуживание [1]. Согласно [2] срок службы элементов мостового сооружения должны составлять не менее 25 лет, с учетом переменной температурной и механической нагрузки. Опорные части пролетных строений мостов [3] относятся к ответственным элементам мостовых сооружений и воспринимают вертикальные и горизонтальные нагрузки от мостового пролета, а так же поглощают тепловое расширение и сжатие. При этом выход из строя элемента приведет к значительным временным и экономическим затратам. Следовательно, к материалам, применяемых в опорных частях мостовых сооружения, предъявляют повышенные требования по качеству, долговечности и прочности. Среди таких материалов встречаются: сверхвысокомалекеулярные полиэтилены [4], фторопласты и их модификации и др [5]. При этом в настоящее время активно развивается область материаловедения и создания новых типов материалов, что может привести к модернизации конструкции, а в следствии к увеличению ее долговечности. Но процесс модификации конструкции является экономически невыгодным, вследствие чего многие производители отказываются от модернизации собственных продуктов.

Для минимизации экономических и временных затрат активно применяются методы компьютерного инжиниринга [6, 7]. Итогом, работы которого, является качественный численный аналог конструкции, на котором можно проводить эксперименты, и проводить модификацию конструкции не создавая ее реального прототипа, вследствие чего, можно получить качественные закономерности поведения элемента сооружения и уже на этапе проектирования

принять решение по использованию нового вида материала в конструкции. Но для создания численного аналога конструкции необходимо основательно подходить к описанию математических моделей поведения материалов, для минимизации погрешности с реальным объектом. Качественное описание материалов позволяет предсказать поведение элемента конструкции не только на малом временном диапазоне, но и на всем жизненном цикле, а так же при различных термоцикловых воздействиях.

В рамках работы представлены основные этапы идентификации математических моделей поведения набора материалов, применяемых в мостостроительных сооружениях в целом и опорной части в частности. Реализация программного комплекса выполнена на языке APDL в ANSYS Mechanical с использованием итерационных алгоритмов идентификации на основе Python.

1. Экспериментальное исследование

В рамках работы проведено экспериментальное исследование на базе лаборатории пластмасс ФГАОУ ВО ПНИПУ [8]. В качестве объекта исследования среди полимерных материалов выбран гамма-модифицированный фторопласт-4, который обладает увеличенными антифрикционными свойствами по сравнению с аналогами. Для определения вязкоупругих характеристик был проведен эксперимент Dynamic Mechanical Analysis (DMA) на анализаторе TA Instruments Q800. Эксперимент проводился на диапазоне рабочих температур от –40 до +80 градусов с шагом охлаждения 2 градуса в минуту и частотой воздействия 2 Гц. На рис. 1. Представлена зависимость компонент модуля упругости для гамма-модифицированного фторолпаста-4.

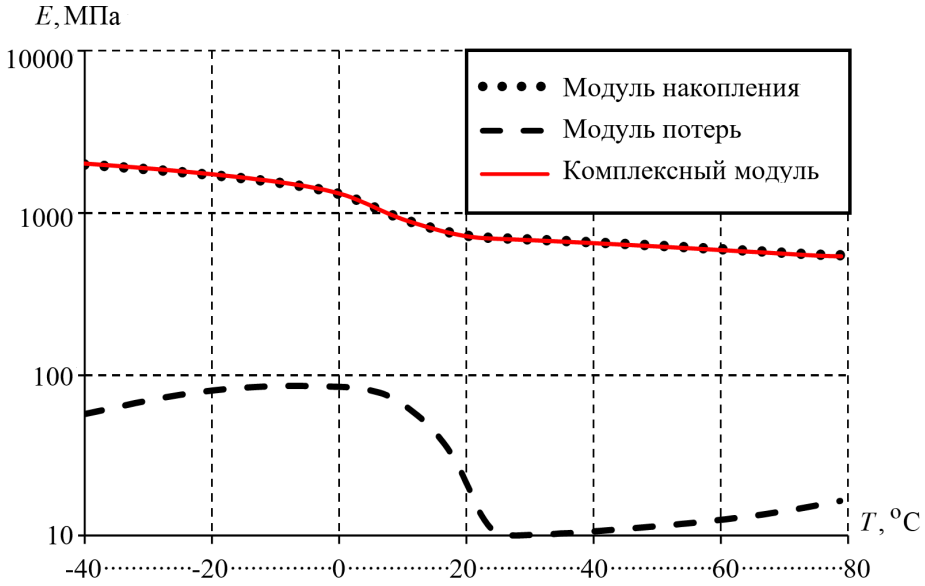


Рис. 1. Распределение компонент модуля упругости модифицированного фторопласта-4

Модуль потерь имеет незначительный уровень по сравнению с модулем накопления, следовательно, вязкая составляющая материала незначительна, по сравнению с упругой. Следовательно, полимерный материал можно описывать рядами Прони.

Вторым объектом исследования является смазочный материал. Смазочный материал обладает характеристиками как твердого так и жидкого тела. Поэтому на первом этапе исследования необходимо оценить в рамках, какой теории можно описывать материал. Для этого на ротационном вискозиметре Discovery HR2 проведено экспериментальное исследование компонент модуля сдвига для смазочных материалов ЦИАТИМ-221 (рис. 2а) и ЦИАТИМ-221F (рис. 2б), которые широко используются в мостостроительной деятельности.

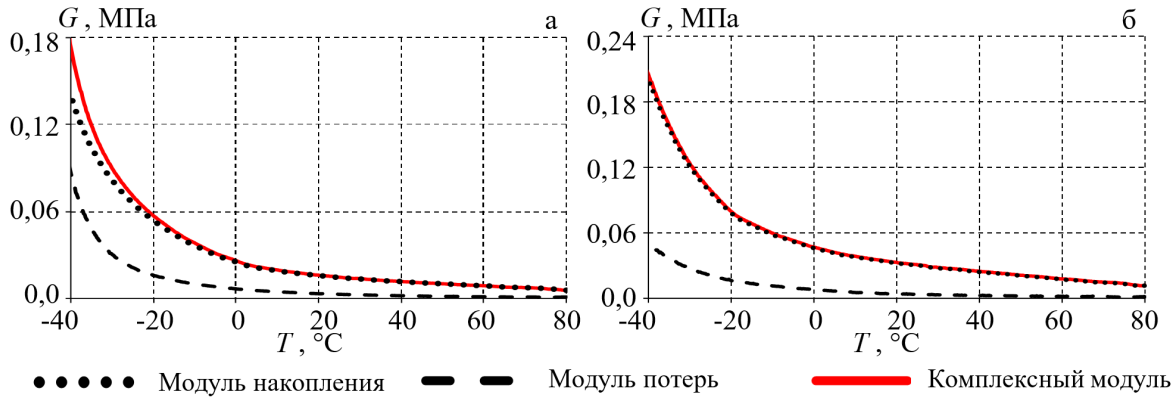


Рис. 2. Распределение компонент модуля сдвига набора смазочных материалов: а) ЦИАТИМ-221; б) ЦИАТИМ-221F

Согласно [9] если модуль потерь на всем диапазоне температур ниже модуля накопления, стоит описывать материал в рамках механики деформируемого твердого тела. Следовательно, для дальнейшего описания математической модели поведения смазочных материалов будем использовать математические модели для твердых тел, например модель Ананд.

2. Идентификации математических моделей поведения материалов

Для описания поведения смазочного материала выбрана вязкоупругая модель Максвелла, которая реализуется с помощью рядов Prony [10]:

$$\sigma(t)=\int_0^t 2\left[G_\infty+G_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\exp\left(-\frac{t-\tau}{\beta_i'}\right)\right]d\varepsilon(\tau), \tag{1}$$

где G_0 — модуль сдвига при $t=0$; n — количество рядов Prony; τ — время релаксации; α_i — коэффициенты сдвигового модуля; $\beta_i'=\dfrac{\beta_i}{A(t)}$ — приведенное время; $A(t)$ — функция сдвига.

Для описания зависимости времени от температуры модели используется температурно-временная аналогия:

$$A(t)=\frac{C_1(T-T_r)}{C_2+(T-T_r)}, \tag{2}$$

где T — текущая температура, T_r — постоянная базовая температура, C_1, C_2 — эмпирические постоянные для материала.

Зависимость сдвигового модуля от времени релаксации при использовании модели Prony:

$$G(t)=G_0\left[\alpha_\infty+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\exp\left(-\frac{t}{\beta_i'}\right)\right]. \tag{3}$$

Неизвестные коэффициенты:

$$\overline{x}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_N,C_1,C_2,C_3\}. \tag{4}$$

Для описания набора смазок используется модель Ананд, которая ранее использовалась для описания течения расплавов металлов, но со временем многие ученые [11, 12] начали использовать модель для описания вязкоупругопластического поведения полимеров, смазок и др.

Связь деформации и напряжения данной модели имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_v=A\exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)\left[\sinh\left(\frac{\sigma\xi}{S}\right)\right]^{\frac{1}{m}}, \tag{5}$$

где A, ξ, m — константы для материала; Q — энергия активации материала; R — универсальная газовая постоянная; S — сопротивление деформации материала. При этом модель включает в себя эволюционное уравнения для сопротивления деформации:

$$\dot{S} = \left\{ h_0 \left(|B| \right)^a \frac{B}{|B|} \right\} \dot{\varepsilon}_v, \tag{6}$$

где h_0 — константа размягчения; $B = 1 - S/S^*$, S^* — коэффициент сопротивления деформации; a — скорость чувствительности сопротивления деформации. Неизвестные коэффициенты для модели Ананд имеют вид:

$$\overline{x} = \left\{ A, \frac{Q}{R}, \xi, S_0, h_0, S^*, n, m, a \right\}. \tag{7}$$

Поиск неизвестных выполняется при помощи многопараметрической оптимизации методом Нелдера-Мида. Функционал нелинейной оптимизации:

$$\Phi\left(X\right) = \left\| \frac{K'_g - K'_f\left(\overline{x}\right)}{K'_g} \right\| \to \min, \tag{8}$$

где K'_g — экспериментальные данные; $K'_f(\overline{x})$ — численные данные.

В качестве примеры работы процедуры на рис. 3 представлено распределение коэффициентов сдвигового модуля от времен релаксации для модифицированного фторопласта.

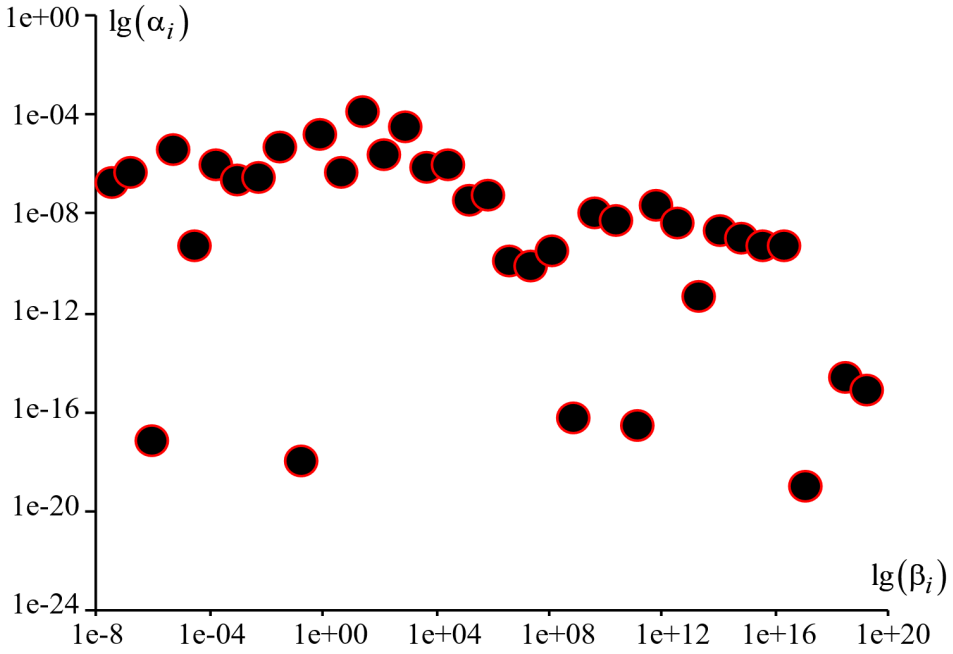


Рис. 3. Параметры ряда Prony для модифицированного фторопласта

Численная процедура [13] проводит поиск неизвестных параметров и останавливается при достижении погрешности менее 5 %. Что позволяет качественно и количественно описать широкий набор материалов.

Заключение

В рамках работы приведено экспериментальное исследование и построены математические модели поведения полимерного материала и набора смазок. Так же установлено:

– вязкоупругое поведение рассмотренного полимерного материала необходимо описывать рядами Прони;

– вязкоупругопластическое поведение набора смазочных материалов необходимо описывать моделью Ананд;

Получены качественные и количественные закономерности погрешности между натурным экспериментов и численной реализацией.

Благодарности

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0007).

Литература

1. *Blinkin M., Koncheva E.* Transport Systems of Russian Cities: Ongoing Transformations. – Switzerland : Springer, 2016. – 299 p.

2. СП 46.13330.2012 Мосты и трубы. Актуализированная редакция СНиП 3.06.04-91 (с изменением № 1): утвержден приказом Министерства регионального развития Российской Федерации (Минрегион России) от 29 декабря 2011 г. N 635 и введен в действие с 01 января 2013 г. Зарегистрирован Федеральным агентством по техническому регулированию и метрологии (Росстандарт). Пересмотр СП 46.13330.2010 «СНиП 3.06.04-91 Мосты и трубы».

3. *Bogdanova A. P., Kamenskikh A. A., Nosov Y. O.* The Geometric Configuration of Lubricant Recesses of the Polymer Sliding Layer of the Bearing // Designs. – 2023. – V.7, No 144. https://doi.org/10.3390/designs7060144.

4. *Шидловский Т. Д., Цыганков М. М., Зимарев И. В.* Методы обработки полимерных поверхностей для повышения адгезионной прочности // Современные тенденции развития химической технологии, промышленной экологии и экологической безопасности : Материалы V Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 190-летию Д. И. Менделеева, Санкт-Петербург, 11–12 апреля 2024 года. – С. 148–150.

5. *Адамов А. А., Носов Ю. О., Каменских А. А.* Идентификация математической модели поведения антифрикционных полимерных материалов // Научно-технический вестник Поволжья. – 2018. – № 12. – С. 49–51.

6. Проектирование CAD-моделей для расчета значений термического напряжения / Н. В. Трапезников, А. А. Шумков, Е. В. Матыгуллина, Т. Р. Абляз // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2018. – Т. 20, № 2. – С. 55–61.

7. *Лесникова Ю. И., Каменских А. А.* Анализ влияния характера сопряжения оптического волокна и полимерного покрытия на работоспособность системы волокно-катушка // Научно-технический вестник Поволжья. – 2023. – № 11. – С. 99–102.

8. *Корелин А. А., Труфанова Н. М.* Анализ влияния кинетических и теплофизических характеристик полиэтилена при моделировании процесса пероксидной сшивки изоляции // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2024. – № 50. – С. 5–22.

9. *Barnes A. H.* A Handbook of Elementary Rheology. University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2000. – 200 p.

10. *Сметанников О. Ю., Самусев И. В.* Экспериментальная идентификация параметров определяющих соотношений для фотополимерного композита // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 105–116.

11. *Gharaibeh M. A., Feisst M., Wilde J.* Anand constitutive modeling of multilayer Silver-Tin transient liquid phase foils using tensile and creep testing // Soldering & Surface Mount Technology. – 2024. – Vol. 36(2). – P. 132–143. – https://doi.org/10.1108/SSMT-10-2023-0061.

12. *Xu Y., Wang X., Wang X. [et al.]* The prediction method for the saturation stress of materials used in the Anand model parameters identification // J Mech Sci Technol 3. – 2024. – Vol. 8. – P. 1775–1787. – https://doi.org/10.1007/s12206-024-0312-9.

13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023618695 Российская Федерация. Идентификация математической модели вязкоупругого поведения тела Максвелла на основе рядов Прони: № 2023617843: заявл. 27.04.2023: опубл. 27.04.2023 / А. А. Каменских, Ю. О. Носов; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

УДК 51

ОЦЕНКА ИЗМЕНЧИВОСТИ МОДУЛЯ ДЕФОРМАЦИИ ГРУНТА НА ОСНОВЕ ДАННЫХ CPT

Нуне Тигабу Абера

Университет Вачемо, Осанна, Эфиопия
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Аннотация. Деформация почвы была решающим фактором при проектировании и строительстве инфраструктуры. Это оказало существенное влияние на устойчивость и работоспособность конструкций. Особое внимание было уделено использованию описательной статистики при анализе данных CPT, особенно для характеристики изменчивости *qc* и других свойств почвы. Изменения *qc* и *E* глубиной, отражающие изменения плотности почвы, ее слоистости и уровня стресса. Точная оценка изменчивости деформации грунта была необходима для обеспечения безопасности и надежности грунта.
Ключевые слова: статистическое распределение, проверка гипотез, критерий Хи-Квадрат, данные CPT.

Введение

Проектирование инженерно-геологических проектов, основанное на надежности, требует глубокого понимания изменчивости грунта, которую можно смоделировать как случайное поле, характеризующееся функцией плотности вероятности (PDF) с ее статистикой (среднее и стандартное отклонение) [1].

Точная оценка изменчивости деформаций грунта имела важное значение для обеспечения безопасности и надежности. Одним из подходов к оценке деформации почвы было использование данных конусного пенетрационного тестирования (CPT), которые предоставляют информацию о физических свойствах почвы и должны были сделать вывод о ее характеристиках деформации [3].

Испытание на проникновение конуса (CPT) было широко используемым методом полевых исследований, который обеспечивает непрерывный профиль физических свойств почвы, таких как сопротивление наконечника, трение втулки и давление поровой воды. Целью этих измерений была оценка прочности, жесткости и сжимаемости грунта, которые являются ключевыми параметрами для определения его деформационного поведения [4].

Понимание изменения сопротивления конуса qc и E с глубиной имело решающее значение в геотехнической инженерии, поскольку оно дает представление о прочности и жесткости грунта. Проверка гипотез предлагает статистическую основу для оценки наличия статистически значимой связи между qc и E глубиной и глубиной, указывающей на наличие неоднородности в профиле почвы [5]. Статистическая проверка гипотез представляла собой формальную проверку гипотез, которая сравнивала статистические свойства (например, среднее значение, стандартное отклонение) данных CPT из разных слоев почвы или мест для оценки потенциальных различий и неоднородности. Модель распределения Вейбулла может помочь понять диапазон значений, ожидаемых на разных глубинах, и дать представление о неопределенности, связанной с характеристиками почвы [6].

Изменения, зависящие от глубины

Ожидаемые изменения qc и E с глубиной, отражающей изменения плотности почвы, ее слоистости и уровней напряжения. Изменения Fs и u может свидетельствовать об изменениях в структуре почвы, состоянии грунтовых вод и их влиянии на деформации.

Описательная статистика

Проведите статистический анализ для количественной оценки изменчивости параметров деформации грунта в пределах каждого сегмента глубины. Рассчитайте описательные статистические данные, такие как среднее значение, стандартное отклонение и меры формы распределения (асимметрия, эксцесс), чтобы понять распределение данных на различной глубине. Понимание статистического распределения этих коэффициентов имеет решающее значение для интерпретации поведения и изменчивости случайного процесса.

Таблица 1

Толщина (мм)	5	10	15	20	25	30	--	4958	4963	4968
Среднее	1,92	2,14	2,30	2,43	2,54	2,60	----	2,47	2,467	2.469
St.D	2,9	3,1	3,2	3,3	3,47	3.54	----	0,36	0,37	0,37

Стандартное отклонение обеспечивает меру изменчивости значений qcвокруг среднего значения, а более высокое стандартное отклонение указывает на большую изменчивость прочности грунта. В приведенном выше расчете мы увидели стандартное отклонение для разных интервалов глубины в данных CPT, чтобы понять, как изменчивость прочности грунта меняется с глубиной.

Данные визуализации

Визуализация пространственного распределения модуля деформации может помочь определить области с высокими или низкими значениями модуля деформации и визуально продемонстрировать статистическую неоднородность по исследуемой территории. Пространственное распределение и изменчивость свойств почвы по данным CPT

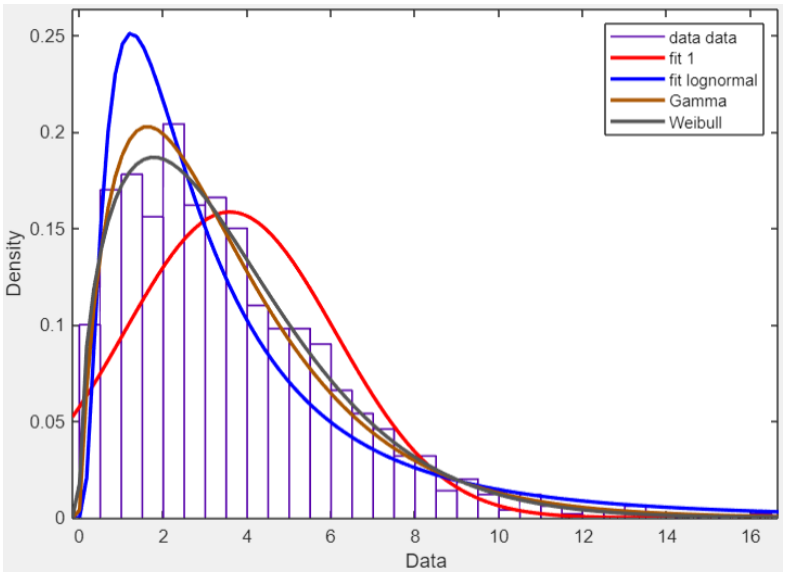


Рис. 1. Гистограмма и график плотности: визуально оцените, напоминают ли данные колоколообразную кривую. На каждой глубине (мм)

Мы видим на рис. 1, что распределение Вейбулла соответствует данным, а на рис. 2 точки лежат преимущественно вдоль прямой диагональной линии с небольшими отклонениями вдоль каждого из хвостов. На основании этих графиков был сделан вывод, что этот набор данных был распределен по Вейбуллу.

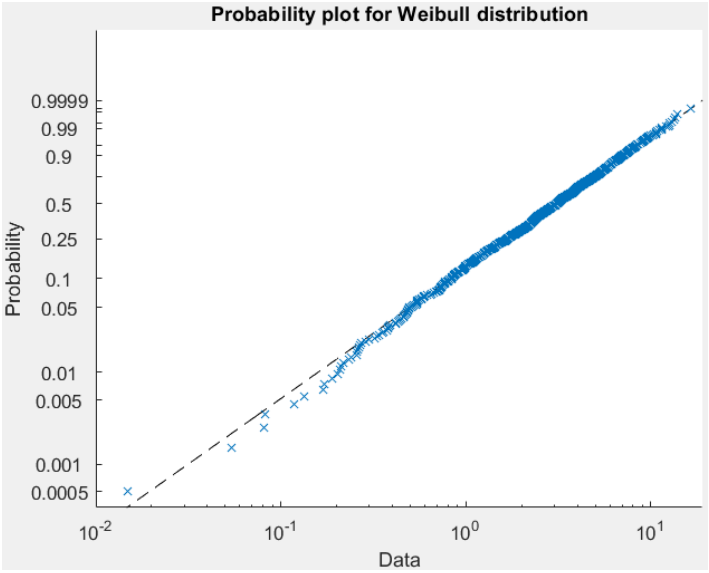


Рис. 2. Вероятность распределения Вейбулла

Распределение Вейбулла

Остановимся подробнее на распределении Вейбулла, которое в настоящее время широко используется при моделировании различных объектов промышленного машиностроения, теории надежности, гидрологии и так далее. Плотность распределения Вейбулла была трехпараметрической.

$$f(x)=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^{\beta}\right\};x\geq\mu;\beta,\alpha>0 \qquad (1)$$

где $\beta=0.8442765144662296$ — параметр формы, $\alpha=2.3967200567202163$ — параметр масштаба, $\mu=0$ — параметр сдвига (положения).

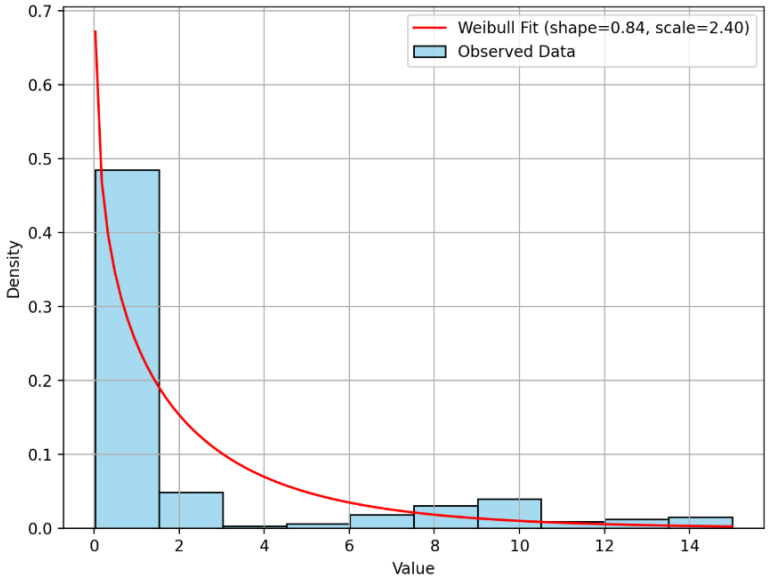


Рис. 3. Плотность Вейбулла в зависимости от значения данных

Используя эту таблицу, отклоните нулевую гипотезу. Имелись существенные доказательства различий между средствами. Делаем вывод, что они имеют астатическую разницу в данных. Использование программного обеспечения Python. Если значение p теста было меньше

Таблица 2

Результаты проверки гипотез

Толщина(м)-(слои)	Статистика результатов, Т-тест:
(0,5 м)	Статистика: -3,30, значение *P*: 0,001.
(1м)	Статистика: -3,488, значение *P*: 0,001.
(1,5 м)	Статистика: 4,750, значение *P*: 0,000.
(2м)	Статистика: 2,284, значение *P*: 0,023.
(2,5 м)	Статистика: 2560, П- значение: 0,011
(3м)	Статистика: 3,244, значение *P*: 0,001.
(3,5 м)	Статистика: -2,00, значение *P*: 0,046.
4(м)	Статистика: 0,630, значение *P*: 0,025.
(4,5 м)	Статистика: 2,560, значение *P*: 0,011.
(5м)	Статистика: 1,060, значение *P*: 0,290.

определенного уровня значимости (например, $\alpha = 0.05$), то у вас есть достаточно доказательств, чтобы сказать, что данные не были распределены нормально. Используя эти три теста, мы пришли к выводу, что модуль деформации меняется с увеличением глубины при постоянной нагрузке.

Статистика данных хи-квадрат

Статистика хи-квадрат обычно использовалась для оценки соответствия модели или распределения набору наблюдаемых данных. В контексте сравнения соответствия двух моделей распределения, таких как распределение Вейбулла и логнормальное распределение, мы можем вычислить статистику хи-квадрат следующим образом:

$$x^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (2)$$

где O_i — наблюдаемое значение и E_i — ожидаемое значение. Поэтому, используя код Jupiter notebook Python, можно сравнить их соответствие данным.

Статистика хи-квадрат: 452048,05439786875, значение P: 0,0012, степени свободы: 227997. Отклонить нулевую гипотезу. Между переменными существует статистически значимая связь.

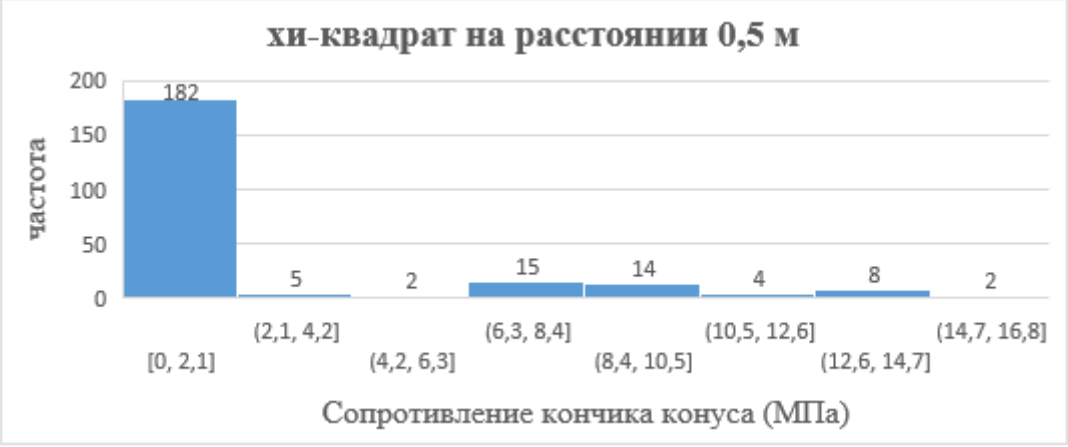


Рис. 4. Гистограмма распределения частот по хи-квадрату при толщине 0,5 м

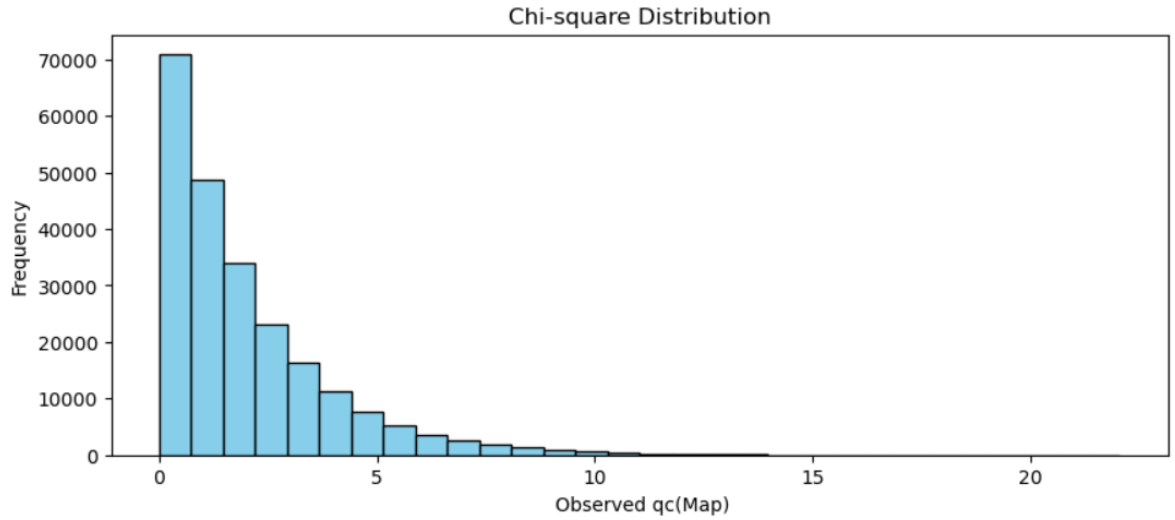


Рис. 5. Гистограмма распределения частот хи-квадрат толщиной 5 м

Заключение

На модуль деформации повлияла неоднородность деформации грунта в каждом слое. Связь между характеристиками деформации грунта и глубиной. Оцените неопределенность, связанную с расчетными значениями модуля грунта и пространственными закономерностями, выявленными в результате анализа.

Оценка надежности прогноза модуля деформации на основе модели распределения Вейбулла, полученные на основе гетерогенных данных CPT- зондирования, имели решающее значение для точного геотехнического проектирования и анализа. Когда слои увеличивают деформацию, модуль уменьшается, что означает низкую деформацию и почти нормальное распределение.

Литература

1. *Фунг К. К., Хуанг С.* Критический обзор анализа надежности инженерно-геологических задач // Компьютеры и геотехническая инженерия. – 2008. – 35(6). P. 828–848.

2. *Ванмарк Э. Х.* Случайные поля: анализ и синтез. – Кембридж, Массачусетс : MIT Press, 1983.

3. Профессор, доктор ир. Абдул Хаким, MT Практика анализа белков. 2020. – P. 16–23 https://www.researchgate.net/publication/344000193

4. *Чжан Дж., Литтон Р. Л.* Геостатистический анализ пространственной изменчивости свойств почв // Канадский журнал геотехнической инженерии. – 2003. – 40 (3). – P. 517–531.

5. *Фентон Джорджия, и Гриффитс Д. В.* Вероятностные методы геотехнического проектирования. Тейлор и Фрэнсис. – 2003.

УДК 62-1/-9

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ФЛАНЦЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ ВЫСОКОВАКУУМНЫХ СИСТЕМ

О. В. Опалихина, М. А. Желавский

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Аннотация. В работе представлена методика расчета на прочность и жесткость фланцевых соединений, входящих в состав высоковакуумных систем. Приводятся результаты моделирования изменения технического состояния системы при внезапном изменении условий нагружения и нарушении целостности вакуумного уплотнения при наличии неравномерного распределения температуры и монтажных напряжений. Даны рекомендации по использованию материалов уплотнения, расчету и конструированию фланцев и элементов креплений с учетом возможного частичного раскрытия соединения.
Ключевые слова: геометрическое подобие, числа подобия, высоковакуумная система, прочность, жесткость, модель пластины, вакуумное уплотнение.

Введение

Высоковакуумные системы различного типа нашли широкое применение в аэрокосмической, энергетической и машиностроительной отраслях, в ускорительной технике и ядерной медицине. Особенностью высоковакуумных систем являются повышенные требования к надежности соединения деталей и узлов. В высоковакуумной технике часто используются фланцевые соединения. Методы расчета и конструирования фланцевых соединений основаны на теории подобия [1]. В этом случае подробный расчет на прочность по теории упругости не выполняется. Такой подход к расчету и конструированию фланцевых соединений требует сравнительного анализа большого объема данных, полученных при испытаниях новой техники. Оценка результатов измерений в кратчайший срок не всегда представляется возможной. Часто бывает необходимо конструировать нестандартные фланцы, форма и размеры которых задаются разработчиком. Результаты испытаний показали, что основными проблемами, возникающими при работе изделия, являются частичное раскрытие фланцевого соединения при внезапном изменении условий нагружения и нарушении целостности вакуумного уплотнения. Цель работы заключается в моделировании изменения технического состояния высоковакуумной системы при внезапном изменении условий нагружения и нарушении целостности вакуумного уплотнения. При моделировании учитываются неравномерность распределения температуры и монтажные напряжения, возникающие в элементах фланцевого соединения.

1. Постановка задачи

В высоковакуумных системах используются разъемные фланцевые соединения с приварными встык фланцами, с плоскими приварными фланцами (рис. 1), а также со свободными фланцами, содержащими свободные кольца [1]. К сварному шву предъявляют особые требования, учитывающие режим работы изделия [2]. Существующая нормативно-техническая документация в полной мере позволяет рассчитать сварные соединения на прочность и выполнить сварку.

Рис. 1. Сварное соединение

Разъемные фланцевые соединения высоковакуумных систем включают в себя, помимо стыкуемых деталей, вакуумное уплотнение. Такое уплотнение обычно изготавливается из подготовленной резины и устанавливается в расточенную канавку на сопрягаемой детали. Для более точного выравнивания одного узла системы относительно другого применяются уплотнения с внутренним центрирующим кольцом, изготавливаемым из сталей, сплавов цветных металлов или полимерных пластмасс с учетом необходимости электрической изоляции одного узла системы относительно другого. Такие уплотнения могут закрепляться с помощью фланцевых (рис. 2) и бугельных (рис. 3) соединений [1].

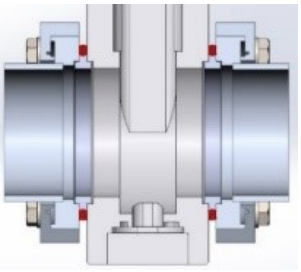


Рис. 2. Подключение вакуумного затвора в системе с резиновым уплотнением с центрирующим кольцом

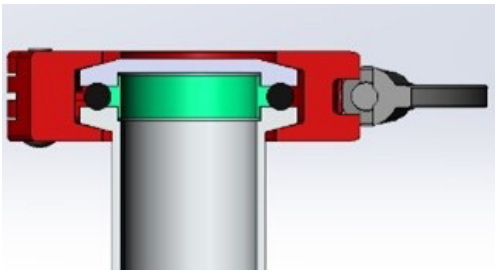


Рис. 3. Бугельное соединение патрубка и глухого фланца типа ISO-KF с центрирующим уплотнением

Фланцевые соединения применяют в высоковакуумных системах различных диаметров. Бугельные соединения используют в высоковакуумных системах малых диаметров (от 10 до 63 мм) [1]. В работе рассматривается фланцевое соединение среднего диаметра (внутренний проход 63 мм). Регламентом технического обслуживания изделия не предусмотрены частые разборки его узлов. Поэтому выбирается соединение, передающее всю нагрузку болтов на вакуумное уплотнение. Конструктивно соединение выполняется цельным либо с плоскими приварными фланцами [2]. Фланцевые соединения со свободными кольцами при работе в высоковакуумной среде имеют меньшую прочность [1, 3]. Подробные расчеты на прочность, жесткость и герметичность фланцевых соединений приведены в нормативно-технической документации [2, 4]. Причины возникновения монтажных напряжений при наличии технологических погрешностей и локальных дефектов поверхности, а также перепады температур в полной мере не рассмотрены. В нормативно-технической документации не описана работа фланцевых соединений при внезапных изменениях условий нагружения. Акцент делается на статическое и опасное малоцикловое нагружение. В то же время указанные факторы могут повлиять на изменение углового положения элементов фланцевого соединения и привести к его частичному раскрытию. В работе исследуются причины, приводящие к частичному раскрытию фланцевого соединения и нарушению целостности вакуумного уплотнения.

2. Работа в высоком вакууме

Высоковакуумная среда характеризуется давлением до 10^{-9} Торр $\approx 1.3332 \cdot 10^{-7}$ Па. При расчете фланцевых соединений учитываются следующие виды нагрузки: внутреннее или наружное давление, усилие затяжки болтов, внешняя осевая сила, а также внешний изгибающий момент [2]. Будем считать, что в условиях эксплуатации усилиями, сдвигающими элементы соединения в стыке, болтовое соединение не нагружено.

Рассчитаем равнодействующую нагрузку $Q_д$ от давления рабочей среды p на площадь, ограниченную средним диаметром эффективной площади вакуумного уплотнения

$$Q_д \approx 0,785 D_{сп}^2 p, \qquad (1)$$

где $D_{сп}$ — средний диаметр эффективной площади вакуумного уплотнения, мм, p, МПа; $Q_д$, Н.

В формулу (1) входит диаметр $D_{\text{сп}}$, рассчитываемый как

$$D_{\text{сп}} \approx D_{\text{к}}^{\text{внутр}} + \frac{h}{2}, \quad h = 1,2b, \tag{2}$$

где $D_{\text{к}}^{\text{внутр}}$ — внутренний диаметр уплотнительного кольца, мм; h — ширина уплотнительной канавки; b — толщина уплотнительного кольца.

Герметичность фланцевого соединения зависит от усилий $Q_{\text{гп}}$, действующих на вакуумное уплотнение в рабочем режиме:

$$Q_{\text{гп}} \approx \pi D_{\text{сп}} h_{\text{э}} m p, \tag{3}$$

где $h_{\text{э}}$ — эффективная ширина вакуумного уплотнения, мм; m — поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения давления; $Q_{\text{гп}}$, Н. Формула (3) справедлива при действии внутреннего давления рабочей среды p. При действии внешнего давления $Q_{\text{гп}} = 0$.

Расчетная нагрузка на болты при затяжке фланцевого соединения $Q_{\text{зб}}$ определяется как

$$Q_{\text{зб}} = \max\left\{Q_{\text{б1}},\ Q_{\text{б2}}\right\}, Q_{\text{б1}} = \max\left\{\begin{array}{l}\alpha\left(Q_{\text{д}} + P\right) + Q_{\text{гп}} + \dfrac{4\alpha_{\text{м}}\left|M\right|}{D_{\text{сп}}}, \\ \alpha\left(Q_{\text{д}} + P\right) + Q_{\text{гп}} + \dfrac{4\alpha_{\text{м}}\left|M\right|}{D_{\text{сп}}} - Q_t\end{array}\right\}, Q_{\text{б2}} = \max\left\{Q_{\text{обж}},\ 0.4S_{\text{б}}\left[\sigma\right]_0^{\text{б}}\right\}, \tag{4}$$

где P, M — внешняя осевая сила, Н и внешний изгибающий момент, Н·мм, соответственно; $\alpha, \alpha_{\text{М}}$ — коэффициенты жесткости фланцевого соединения, нагруженного внешней осевой силой (или внутренним давлением) и внешним изгибающим моментом соответственно; Q_t —нагрузка на болты, вызванная стесненностью температурных деформаций, Н; $Q_{\text{обж}}$ — усилие, необходимое для смятия вакуумного уплотнения при затяжке болта, Н, $Q_{\text{обж}} \approx 0.5\pi D_{\text{сп}} h_{\text{э}} q_{\text{обж}}$, $q_{\text{обж}}$ — удельное давление обжатия прокладки (вакуумного уплотнения), МПа.

Расчетная нагрузка на болты в условиях эксплуатации $Q_{\text{эб}}$ равна

$$Q_{\text{эб}} = Q_{\text{зб}} + \left(1-\alpha\right)\left(Q_{\text{д}} + P\right) + \frac{4\left(1-\alpha_{\text{м}}\right)\left|M\right|}{D_{\text{сп}}} + Q_t. \tag{5}$$

С учетом формул (1)–(5), обобщенная формула для расчета нагрузки Q на болты фланцевого соединения в условиях эксплуатации примет вид

$$Q = Q_{\text{эб}} + Q_{\text{обж}} + Q_{\text{м}} + Q_{\Delta} + Q_{\text{п}} + Q_{\Delta t} + Q_{\text{мн}}, \tag{6}$$

где $Q_{\text{м}}$ — часть нагрузки болтов, расходуемая на создание внутренних сил, уравновешивающих внешний изгибающий момент M и внешнюю осевую силу P; Q_{Δ} — часть нагрузки болтов, расходуемая на уплотнение затвора с упруго-искривленными уплотнительными поверхностями; $Q_{\text{п}}$ — часть нагрузки болтов, необходимая для их повторной затяжки с целью сохранения плотности их соединения при нарастании прогибов фланцев в области ползучести; $Q_{\Delta t}$ — дополнительная нагрузка на болтовое соединение, определяемая неравномерным распределением температуры; $Q_{\text{мн}}$ — дополнительная нагрузка на болтовое соединение, определяемая монтажными напряжениями, вызванными технологическими погрешностями изготовления и сборки, а также локальными дефектами поверхности; Q, Н.

Дополнительная нагрузка на болтовое соединение $Q_{\Delta t}$, входящая в формулу (6), равна

$$Q_{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}, \tag{7}$$

где $\Delta l = \Delta t \cdot (\alpha_{\text{ф}} - \alpha_{\text{б}}) \cdot l_{\text{б}}$ — разность теплового удлинения фланца и болта, мм, определяемая исходя из табличных данных (табл. 1) или экспериментально; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — коэффициенты податливости прокладки, болта и фланца соответственно; $\alpha_{\text{ф}}, \alpha_{\text{б}}$ коэффициенты линейного расширения материалов фланца и болта соответственно.

Таблица 1

Разность средних температур Δt элементов фланцевых соединений, выраженная в % от температуры рабочей среды ($t_{\text{пред}} = \pm 60°\text{C}$)

Части фланцевого соединения	Неразъемные фланцы	Свободные фланцы	Δl неразъемного фланца, мм	Δl свободного фланца, мм
Болт–окружающая среда	7	11	–	–
Кольцо цельного фланца болт	2	–	0,336	–
Прокладка–болт	3	7	0,338	0,345
Бурт–болт	6	7	0,343	0,345
Кольцо свободного фланца–болт	–	1	–	0,334

Учитывая формулы (4)–(6), условия прочности болтов при затяжке и в условиях эксплуатации:

$$\sigma_{\text{зб}} \le [\sigma]_{\text{зб}}, \quad \sigma_{\text{эб}} \le [\sigma]_{\text{эб}}, \tag{8}$$

где $\sigma_{\text{зб}}, \sigma_{\text{эб}}$ — расчетные напряжения в болтах при затяжке и в условиях эксплуатации соответственно, МПа; $[\sigma]_{\text{зб}}$, $[\sigma]_{\text{эб}}$ — допускаемые напряжения для болтов при затяжке и в условиях эксплуатации соответственно, МПа; $\sigma_{\text{зб}} = \dfrac{Q_{\text{зб}}}{S_1}$, $\sigma_{\text{эб}} = \dfrac{Q_{\text{эб}}}{S_1}$, S_1 — суммарная площадь сечения болтов по внутреннему диаметру d_1. Считается, что нагрузка болтов фланцевого соединения статическая [1, 2]. В элементах болтового соединения возникают пластические деформации. При $d \ge 30$ мм (что соответствует выбранной модели фланцевого соединения) болт рассчитывается на растяжение с кручением. Коэффициент запаса прочности болтов $n_{\text{б}}$ выбираем по четвертой теории прочности, соответствующей пластическим деформациям $n_{\text{б}} = \dfrac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{\sigma_{\text{р}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2}}$. Здесь $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести материала; $\sigma_{\text{р}}$ — растягивающее напряжение; $\tau_{\text{кр}}$ — напряжение кручения (болт затянут, внешняя нагрузка отсутствует).

Учтем, что в месте стыка конической втулки с кольцом могут возникать опасные напряжения. Расчетный изгибающий момент, действующий на фланец при затяжке, равен

$$M_{\text{зб}} = C_F Q_{\text{зб}} b, \tag{9}$$

где b — плечо от действия усилия $Q_{\text{зб}}$; C_F — табличный коэффициент, учитывающий изгиб кольца фланца между болтами, мм.

Учтем смещение болта, вызванное погрешностью сборки. Тогда расчетный изгибающий момент, действующий на фланец в условиях эксплуатации $M_{\text{зб}}$, равен

$$M_{\text{эб}} = C_F \left\{ \left(Q_{\text{эб}} (b + a) + \left(Q_{\text{д}} + Q_{PM} \right) (e + a) \right), \left| Q_{\text{д}} + Q_{PM} \right| (e + a) \right\}, \tag{10}$$

где e — плечо усилия от действия давления внутри фланца, мм; a — смещение болта, мм; Q_{PM} — приведенная нагрузка, вызванная действием внешней осевой силы и внешнего изгибающего момента, Н.

Условие статической прочности фланцев при затяжке болта:

$$\max \left\{ \left| \sigma_1^M + \sigma_R^M \right|; \left| \sigma_1^M + \sigma_S^M \right| \right\} \le K_T [\sigma]_M, \tag{11}$$

где σ_1^M — меридиональное изгибное напряжение в конической втулке фланца в месте стыка с кольцом при затяжке болта, МПа; σ_R^M — радиальное напряжение в кольце фланца при затяжке болта, МПа; σ_S^M — окружное напряжение в кольце фланца при затяжке болта, МПа; K_T — коэффициент, учитывающий стесненность температурных деформаций; $[\sigma]_M$ — допускаемое значение общих мембранных и изгибных напряжений, МПа.

Условие статической прочности фланцев в условиях эксплуатации:

$$\max\left\{\left|\sigma_1^{\text{э}}-\sigma_{1\text{м.м}}^{\text{э}}+\sigma_R^{\text{э}}\right|;\left|\sigma_1^{\text{э}}-\sigma_{1\text{м.м}}^{\text{э}}+\sigma_S^{\text{э}}\right|;\left|\sigma_1^{\text{э}}+\sigma_{1\text{м.м}}^{\text{э}}\right|\right\}\le K_T[\sigma]_M, \tag{12}$$

где $\sigma_1^{\text{э}}$ — меридиональное изгибное напряжение в месте стыка конической втулки фланца с кольцом, МПа; $\sigma_{1\text{м.м}}^{\text{э}}$ — меридиональные мембранные напряжения в условиях эксплуатации, МПа; $\sigma_R^{\text{э}}$ — радиальное напряжение в кольце фланца в условиях эксплуатации; $\sigma_S^{\text{э}}$ — окружное напряжение в кольце фланца в условиях эксплуатации.

Плотность соединения может нарушить прогиб колец фланцев между болтами. Поэтому для фланцевых соединений высоковакуумных систем, помимо расчета на прочность болтовых соединений, большое значение придается расчету деформации изгиба внешними моментами M и выбору шага болтов. В качестве расчетной модели кольца фланца, на котором закрепляются болты, рассматривается тонкая кольцевая пластина с радиусом R и толщиной h (рис. 4).

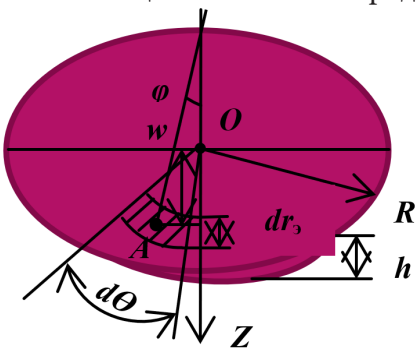


Рис. 4. Расчетная модель кольцевой пластины

Внутренние изгибающие моменты $M_{r\text{э}}$, M_θ выразим через нормальные напряжения:

$$M_{r\text{э}}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_{r\text{э}}\cdot z\cdot dz\cdot 1,\ M_\theta=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_\theta\cdot z\cdot dz\cdot 1,$$

где 1 — единичная длина; z — расстояние от напряженной точки $A(r_{\text{э}},z)$ до нейтрального слоя; $\sigma_{r\text{э}},\sigma_\theta$ — нормальные напряжения.

Ослабим элемент кольцевой пластины отверстием. Данную модель можно рассматривать как статически неопределимую систему, в которой могут возникнуть температурные и монтажные напряжения. Рассчитаем диаметр кольцевой пластины $D_{\text{к}}$. Диаметр $D_{\text{к}}$ соответствует расчетному диаметру кольца фланца и учитывает снижение жесткости кольца отверстиями для болтов:

$$D_{\text{к}}=D_{\text{нк}}\frac{4D_1^2-nd_0^2}{4D_1^2+nd_0^2},\ R=\frac{D_{\text{к}}}{2}, \tag{13}$$

где $D_{\text{нк}}$ — наружный диаметр кольца фланца; D_1 — диаметр окружности расположения центров отверстий для болтов; d_0 — диаметр отверстий для болтов; n — число болтов.

Максимальное напряжение в пластине $\sigma_{\max}$ с учетом разности средних температур Δt элементов фланцевых соединений (табл. 1) равно

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho}=\frac{M}{D(1+\mu)}=\frac{(\alpha_{\text{ф}}-\alpha_{\text{б}})\Delta t}{h},D=\frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)},\\ \sigma_{\max}=\frac{6M}{h^2}=\frac{6(\alpha_{\text{ф}}-\alpha_{\text{б}})\Delta tD(1+\mu)}{h^3}=\frac{(\alpha_{\text{ф}}-\alpha_{\text{б}})\Delta tE}{2(1-\mu)},\end{gathered} \tag{14}$$

где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя; D — жесткость пластины (кольца фланца); μ — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга первого рода.

Уравнения прогиба пластины *w*, определяющего жесткость элементов соединения, имеют вид

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right)=0,\ -\frac{dw}{dr}=\varphi=\frac{C_1 r}{2}+\frac{C_2}{r},\ w=-C_1\frac{r^2}{4}-C_2\ln\frac{r}{a}+C_3, \tag{15}$$

где r — радиальное расстояние точки A, находящейся в срединной плоскости; φ — максимальный угол наклона изогнутой поверхности в точке A (рис. 4); C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

При динамическом действии нагрузок, к которым можно отнести циклические нагрузки, удары и колебания, разрушение элементов фланцевого соединения происходит вследствие потери сопротивления усталости. В зонах концентрации напряжений появляются трещины. Трещины развиваются постепенно. Малоцикловое нагружение основано на эффекте Баушингера [5, 6]. Материал проявляет неупругость в зоне перехода к упругопластическим деформациям. Данный вид нагружения рассмотрен в нормативно-технической документации подробно. Учтем внезапные изменения условий нагружения, к которым могут привести изгибные удары и колебания, возникающие в системе при нарушении условий равновесия. Условия прочности дополним коэффициентами динамичности $k_{\text{д}} : \sigma_{\text{эб}} \le k_{\text{д}}[\sigma]_{\text{эб}}$.

Свободные поперечные колебания, которые могут возникнуть во фланцевом соединении при действии динамических нагрузок, описывает дифференциальное уравнение

$$D = \Delta\Delta w_0 - \lambda w_0 = 0, \tag{16}$$

где λ — характеристический параметр, $\lambda = p^2 m$, m — масса площадки, кг; $w = w_0 \cos(pt)$ — прогиб; t — время, с.

Расчет фланцевого соединения высоковакуумной системы выполняется по формулам (1)–(16). Методика расчета, основанная на теории подобия, дополняется вычислением нагрузок, вызываемых погрешностями сборки и перепадами температур.

3. Моделирование изменения технического состояния высоковакуумной системы

Моделирование изменения технического состояния высоковакуумной системы вследствие частичного раскрытия фланцевого соединения основано на создании модели геометрического подобия. В качестве инвариантов (чисел подобия) рассмотрим расчетные $D_{\text{сп}}$ и эталонные $D_{\text{спэ}}$ средние диаметры эффективной площади вакуумного уплотнения. Эталонные данные были получены в процессе многократных испытаний изделий.

Учитывая формулы (1)–(3), запишем уравнение геометрического подобия

$$f(D_{\text{сп}}, D_{\text{спэ1}},\ \ldots, D_{\text{спэ}n}) = 0.$$

Модели геометрического подобия соответствует физическая модель, связывающая давление рабочей среды p со средней длиной свободного пробега молекул λ. Запишем уравнение физического подобия

$$f(\lambda_1, \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n) = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n$ — числа подобия, полученные в процессе многократных испытаний изделий, $\lambda = \frac{k}{p}$; k — коэффициент, определяемый газовой средой.

Скорость протекания газа через вакуумное уплотнение определяется как

$$v = \frac{k_0 \pi D_{\text{сп}}}{h_0} b_0 \left(1-\varepsilon\right)^2 \Delta p, \tag{17}$$

где k_0 — проницаемость резины; b_0 — начальная толщина вакуумного уплотнения, мм; h_0 — начальная ширина контактной площадки вакуумного уплотнения, $h_0 \approx h_{\text{э}}$, мм; ε — относительное сжатие вакуумного уплотнения, $\varepsilon \le 0.25$; Δp — разность давлений, МПа. Формула

(17) позволяет учесть диффузионные свойства газообразной среды и проницаемость резины при сжатии вакуумного уплотнения. Свяжем формулу (17) с эффективной шириной вакуумного уплотнения $h_э$: $h_э = \frac{k_0 \pi D_{сп}}{v} b_0 (1-\varepsilon)^2 \Delta p$.

При моделировании изменения технического состояния высоковакуумной системы

необходимо учесть возникновение в элементах фланцевого соединения пластичности, влияющей на его плотность. Согласно четвертой и третьей теориям прочности предельный изгибающий момент $M_{пред}$ равен [1, 3, 7, 8]

$$M_{пред} = 1,27\pi r^2 \sqrt{(\sigma_т s)^2 - (0,75rp)^2},\ M_{пред} = 1,27\left[\sigma_т - \frac{rp}{s}\right]W, \qquad (18)$$

где $\sigma_т$ — предел текучести материала, МПа; r — средний радиус поперечного сечения, мм; s — толщина стенки в вершине конической втулки, мм; W — момент сопротивления поперечного сечения основания втулки, отнесенный к единице длины средней окружности основания. Формулы (18) связывают предельный изгибающий момент $M_{пред}$ с давлением рабочей среды p, МПа.

При моделировании также следует учесть дополнительный крутящий момент $M_{крд}$, возникающий при неосесимметричном кручении кольца, сопровождающим изгиб фланцевого соединения: $M_{крд} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mR_{ср} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha = \frac{mR_{ср}}{2}$. Здесь m — крутящая пара; α — центральный угол; $R_{ср}$ — радиус кольца на средней линии, мм.

Модели частично раскрытого фланцевого соединения соответствует нагружение стыка соединения переменным усилием $P_э(t)$, раскрывающим стык деталей. К одному болту будет приложено усилие $P_э^1(t) = \frac{P_э(t)}{n}$. Дополнительное растяжение болта Δ пропорционально уменьшению затяжки стыка $(1-\zeta)P_э^1$ и податливости фланца λ_2: $\Delta = (1-\varsigma)P_э^1\lambda_2$. В то же время дополнительное растяжение Δ пропорционально податливости болта λ_1, определяемой его удлинением при единичной нагрузке: $\Delta = \varsigma P_э^1\lambda_1$. Тогда приращение дополнительной нагрузки на болт $P_э^1$ равно

$$P_{эб}^1(t) = \xi P_э^1(t),\ \xi = \frac{\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)},\ P_{эб}^1(t) \le [P_{эб}^1]. \qquad (19)$$

Значение коэффициента ς получено в процессе многократных испытаний изделия. Формула (19) позволяет определить нагрузку, соответствующую частичному раскрытию фланцевого соединения (рис. 5). Коэффициенты податливости λ_1 и λ_2 выбраны с учетом разности теплового удлинения Δl (табл. 1, (7)). *Условием нераскрытия стыка* будет:

$$Q_{зб} - (1-\varsigma)P_э^1 > 0. \qquad (20)$$

а) *б)*

Рис. 5. Изменение технического состояния фланцевого соединения: а) целостность вакуумного уплотнения не нарушена; б) фланцевое соединение частично раскрыто

Результаты моделирования в компьютерной среде Wolfram Mathematica иллюстрирует рис. 6. На графике раскрывающее стык переменное усилие обозначено P1(t), а приращение дополнительной нагрузки на один болт — P2(t). Усилия P1(t) и P2(t) изменяются по одному

гармоническому закону. Приращение дополнительной нагрузки на один болт уменьшается при уменьшении коэффициента ς.

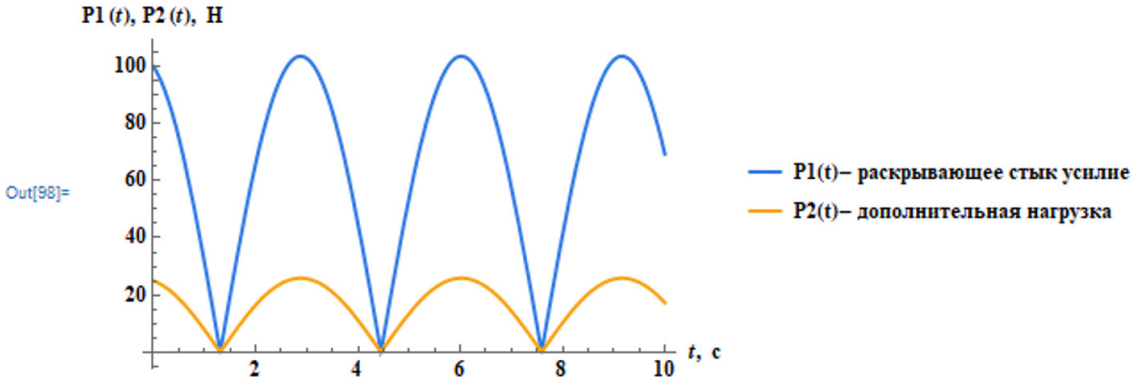


Рис. 6. Моделирование изменения условий нагружения

Заключение

Результаты моделирования изменения технического состояния высоковакуумной системы показали, что температурные напряжения, вызванные неравномерностью распределения температуры между деталями и окружающей средой, а также монтажные напряжения создают в элементах фланцевого соединения дополнительные динамические нагрузки. Внезапное изменение условий нагружения в сочетании с нарушением целостности вакуумного уплотнения приводит к частичному раскрытию фланцевого соединения, что в большей мере характерно для соединений, работающих при отрицательных температурах. Раскрытие фланцевого соединения связано с нагружением его стыка переменным усилием $P_э(t)$. К внезапному отказу изделия может привести приращение дополнительной нагрузки на один болт, приближающееся к критическому значению переменного усилия $P_э(t)$. Формула (20) позволяет сделать вывод, что нераскрытие стыка элементов фланцевого соединения и его герметичность обеспечивается затяжкой болтов и упругостью вакуумного уплотнения. Результаты моделирования и испытаний подтвердили, что при любых условиях нагружения и параметрах рабочей среды могут работать только цельные соединения и соединения с плоскими приварными фланцами. В работе исследовалось влияние погрешностей сборки на частичное раскрытие фланцевого соединения. В дальнейшем предполагается исследовать внезапные отказы изделий при наличии скрытых локальных дефектов материала.

Литература

1. *Волошин А. А.* Расчет и конструирование фланцевых соединений / А. А. Волошин, Г. Т. Григорьев. – Ленинград : Машиностроение, 1979. – 125 с.

2. ГОСТ Р 52857.4-2007. Расчет на прочность и герметичность фланцевых соединений. Общие требования и правила составления: национальный стандарт Российской Федерации: дата введения 2008-03-31/ Федеральное агентство по техническому регулированию. – Изд. официальное. – Москва : Стандартинформ, 2009. – 37 с.

3. *Рот А.* Вакуумные уплотнения / А. Рот. – Москва : Энергия, 1971. – 464 с.

4. ГОСТ Р 52857.6-2007. Нормы и методы расчета на прочность. Расчет на прочность при малоцикловых нагрузках. Общие требования и правила составления: национальный стандарт Российской Федерации: дата введения 2008-03-31/ Федеральное агентство по техническому регулированию. – Изд. официальное. – Москва: Стандартинформ, 2009. – 17 с.

5. *Тимошенко С. П.* Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва : Наука, 1966. – 636 с.

6. *Виноградов Ю. И.* Фундаментальная система функции Коши — Крылова решения дифференциальных уравнений механики деформирования пологой сферической оболочки / Ю. И. Виноградов // Российская академия наук, Государственная корпорация по космической деятельности «Роскосмос», Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, МГТУ им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский ун-т). – 2022. – Т. 4. – С. 457– 462.

7. *Opalikhina O.V.* Research of the stable equilibrium position of a dissipative system / O. V. Opalikhina, M. A. Zhelavskiy // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2373, 2373 072019. – P. 1–10. DOI: 10.1088/1742-6596/2373/7/072019

8. Податливость затянутого резьбового соединения / Б. В. Букеткин, В. М. Зябликов, И. Е. Семенов-Ежов, А. А. Ширшов // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2019. – вып. 3. – http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-3-1855

УДК 004.032.26

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ УСТРАНЕНИЯ АВТОКОРРЕЛИРОВАННОГО ШУМА В ИЗОБРАЖЕНИЯХ ПЕРЕД ОБУЧЕНИЕМ АВТОЭНКОДЕРОВ

И. Н. Осипенко, О. В. Лукин

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В данной работе предлагается исследование влияния модифицированного фильтра Калмана, использующего расширенный вектор состояния, на качество обучения автоэнкодеров при обработке изображений с автокоррелированным шумом. Основная цель исследования — определить, насколько данный подход может оказаться более эффективным по сравнению с традиционными методами фильтрации, такими как медианный фильтр и фильтр Гаусса, для предварительной обработки изображений. Для моделирования реальных условий предполагается использовать изображения с искусственно добавленным автокоррелированным шумом.

Методика эксперимента будет включать настройку параметров модифицированного фильтра Калмана для оптимального подавления автокоррелированного шума, а также тестирование медианного и Гауссова фильтров для проведения сравнительного анализа. Оценка качества фильтрации запланирована с использованием метрик SSIM (индекс структурного сходства) и PSNR (пиковое отношение сигнал/шум).

Ожидается, что результаты эксперимента подтвердят, что предложенный модифицированный фильтр Калмана с расширенным вектором состояния эффективно снижает уровень автокоррелированного шума, улучшая качество изображений и повышая точность обучения автоэнкодеров. Это исследование подчёркивает важность выбора подходящих методов фильтрации для повышения эффективности нейронных сетей в условиях автокоррелированного шума.

Ключевые слова: фильтр Калмана, автокоррелированный шум, обработка изображений, автоэнкодеры, предварительная обработка данных, медианный фильтр, фильтр Гаусса, качество изображений, машинное обучение, фильтрация шума.

Введение

В настоящее время обработка изображений играет ключевую роль в таких областях, как компьютерное зрение, медицинская диагностика и автономные системы [1]. Однако эта задача усложняется воздействием внешних факторов и присутствием различных типов шума. Шумы, такие как гауссовский, импульсный и автокоррелированный, могут существенно снижать качество изображений, что затрудняет их дальнейшую обработку и анализ [2].

Шумовые искажения могут возникать на разных этапах — от получения изображения до его передачи и хранения, что приводит к деградации данных и снижению точности выполнения таких задач, как распознавание объектов, сегментация и диагностика. Особенно трудным для обработки является автокоррелированный шум, так как он влияет на большие участки изображения, что усложняет его устранение с помощью традиционных методов фильтрации [3, 4].

Цель данной работы — оценить эффективность модифицированного фильтра Калмана с расширенным вектором состояния для устранения автокоррелированного шума в изображениях перед обучением автоэнкодеров. Предполагается, что исследование позволит выяснить, насколько данный подход способен улучшить качество изображений и повысить точность обучения автоэнкодеров в условиях автокоррелированного шума. Ожидается, что полученные результаты внесут значительный вклад в разработку более эффективных методов обработки изображений и расширят их применение в различных областях [5].

1. Теоретические основы

Автокоррелированный шум представляет собой один из наиболее сложных типов искажений, с которыми сталкиваются при обработке изображений. Такие искажения могут появляться на различных этапах работы с изображением — от момента его получения до передачи или хранения, что приводит к ухудшению качества визуальных данных и затрудняет решение задач, таких как сегментация или распознавание объектов.

В отличие от гауссовского или импульсного шума, автокоррелированный шум проявляется как систематические искажения, влияющие на соседние пиксели. Вместо случайного распределения он создает взаимосвязанные области, где соседние значения шума оказывают влияние друг на друга. Это приводит к образованию крупных зон искажений, которые сложно обработать традиционными методами фильтрации, такими как медианный фильтр или фильтр Гаусса. Эти методы зачастую оказываются недостаточно эффективными, так как рассчитаны на устранение случайных локальных искажений.

Для эффективного подавления автокоррелированного шума требуются методы, способные учитывать взаимосвязь значений шума в соседних областях изображения. Такие подходы должны не только устранять искажения, но и сохранять ключевые визуальные особенности, что является критически важным для последующей обработки и анализа данных.

2. Математическая модель

Для устранения автокоррелированного шума в изображениях перед обучением автоэнкодеров планируется использовать модифицированный фильтр Калмана, построенный на основе подхода с расширенным вектором состояния [6]. В данной модели предполагается расширение вектора состояния для учёта динамики изменения изображения и параметров автокоррелированного шума. Это позволит фильтру Калмана учитывать сложные зависимости между соседними пикселями, возникающие из-за шума, что, как ожидается, повысит точность фильтрации.

Модель состояния

Пусть изображение представлено в виде вектора состояния x_k, где каждый элемент вектора соответствует отдельному пикселю изображения. Динамика изменения состояния изображения описывается следующим уравнением:

$$x_k = Ax_{k-1} + w_k,$$

где x_k — вектор состояния изображения на шаге k, A — матрица перехода состояния, описывающая изменения изображения во времени, w_k — шум процесса, который моделирует случайные изменения изображения.

Для моделирования автокоррелированного шума v_k, который влияет на изображение, используется следующая модель:

$$v_k = \alpha v_{k-1} + n_k,$$

где α — коэффициент автокорреляции, описывающий степень зависимости текущего шума от предыдущего, n_k — случайный шум, добавляемый на каждом шаге.

Расширенный вектор состояния

Для корректного учёта автокоррелированного шума расширим вектор состояния. Новый вектор состояния φ_k включает как само изображение x_k, так и параметры автокоррелированного шума v_k, что позволяет фильтру учитывать влияние шума на большие области изображения. Расширенный вектор состояния записывается как:

$$\varphi_k = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix}.$$

Размерность вектора состояния p складывается из количества пикселей изображения n и параметров автокоррелированного шума:

$$p = n + L * q,$$

где n — количество пикселей в изображении, L — количество шагов автокорреляции, q — размерность вектора шума.

Расширенные матрицы перехода и наблюдений

Для описания динамики системы с учётом автокоррелированного шума применяются следующие матрицы:

• Матрица перехода состояния для расширенного вектора состояния A_r:

$$A_r = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

где A — матрица перехода для изображения, I — единичная матрица для описания динамики автокоррелированного шума.

• Матрица наблюдений C_r используется для того, чтобы извлекать состояние изображения:

$$C_r = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица наблюдений C_r измеряет только состояние изображения, а шум не включён в процесс наблюдения.

Ковариационные матрицы

Ковариационная матрица процесса для расширенного вектора состояния Q_r также расширяется за счёт описания автокоррелированного шума:

$$Q_r = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_v \end{bmatrix},$$

где Q — ковариационная матрица процесса для изображения, Q_v — ковариационная матрица автокоррелированного шума.

Шаги предсказания и обновления

• Шаг предсказания:

На этапе предсказания оценка расширенного вектор состояния $\hat{\phi}_k$ прогнозируется через матрицу перехода A_r:

$$\hat{\phi}_{k|k-1} = A_r \hat{\phi}_{k-1}.$$

Ковариационная матрица ошибок предсказания обновляется:

$$P_{k|k-1} = A_r P_{k-1} A_r^T + Q_r.$$

• Шаг обновления:

Используя наблюдения (зашумленное изображение y_k), вычисляется коэффициент Калмана:

$$K_k = P_{k|k-1} C_r^T \left(C_r P_{k|k-1} C_r^T \right)^{-1},$$

где R_k — ковариационная матрица шума наблюдений.

После вычисления коэффициента Калмана обновляется состояние:

$$\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{k|k-1} + K_k \left(y_k - C_r \hat{\phi}_{k|k-1} \right).$$

Ковариационная матрица ошибок обновляется следующим образом:

$$P_k = P_{k|k-1} - K_k C_r P_{k|k-1} C_r^T.$$

Оценка вектора состояния:

$$\hat{x}_k = \left(I_n \, 0 \right) \hat{\phi}_k.$$

Результатом работы алгоритма является оценка вектора состояния x_k как части расширенного вектора состояния ϕ_k, участвующего в уравнениях.

3. Методика вычислительного эксперимента

Цель предстоящего вычислительного эксперимента — оценить эффективность применения модифицированного фильтра Калмана с расширенным вектором состояния для подавления автокоррелированного шума в изображениях перед обучением автоэнкодеров. Методика эксперимента включает подготовку изображений, генерацию автокоррелированного шума, предварительную фильтрацию с использованием модифицированного фильтра Калмана и традиционных методов фильтрации, а также оценку результатов по метрикам качества. В качестве данных планируется использовать изображения из датасета CIFAR-10 размером 32×32 пикселя с тремя цветовыми каналами (RGB).

Подготовка данных

Для эксперимента предполагается отобрать изображения из CIFAR-10, поскольку они имеют достаточно низкое разрешение, что упрощает процесс фильтрации и анализа. Исходные изображения x_k будут нормализованы, чтобы значения пикселей находились в диапазоне [0, 1], что соответствует требованиям автоэнкодера и фильтра Калмана.

Генерация автокоррелированного шума

Для моделирования автокоррелированного шума, который сложен для удаления из-за его корреляционной структуры, в планируемом эксперименте предполагается следующий подход:

• устанавливается автокорреляционный коэффициент α который контролирует степень зависимости текущих значений шума от предыдущих;

• для каждого изображения будет генерироваться базовый шум n_k с гауссовым распределением (среднее значение 0 и стандартное отклонение 1);

• автокоррелированный шум v_k предполагается вычислять рекурсивно, используя предыдущее значение шума:

$$v_k = \alpha v_{k-1} + n_k,$$

где коэффициент α определяет степень корреляции.

Каждое изображение будет искажено добавлением к нему автокоррелированного шума, что приведёт к зашумленному изображению y_k, предназначенному для фильтрации.

На рис. 1 представлен пример изображения с добавленным автокоррелированным шумом при коэффициенте автокорреляции $\alpha = 0,8$.

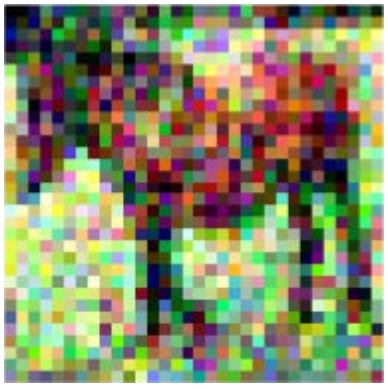


Рис. 1. Пример зашумленного изображения с автокоррелированным шумом

Как видно, шум затрагивает значительные области изображения, что усложняет его обработку традиционными методами фильтрации.

Методы фильтрации шума

Для сравнения эффективности планируется использовать три метода фильтрации:

• Модифицированный фильтр Калмана: основной метод исследования, разработанный для учёта автокоррелированного шума посредством применения расширенного вектора состояния [7].

• Медианный фильтр: классический метод фильтрации, работающий на основе локальной медианы и часто используемый для подавления импульсного шума [8].

• Фильтр Гаусса: метод сглаживания, применяющийся для уменьшения гауссовского шума в изображениях [9].

Для количественной оценки эффективности каждого метода фильтрации планируется использовать две метрики:

Пиковое отношение сигнал/шум (PSNR): метрика, измеряющая разницу между исходным и отфильтрованным изображением. Чем выше значение PSNR, тем лучше качество восстановленного изображения.

$$PSNR = 10 * \log_{10}\left(\frac{MAX^2}{MSE}\right),$$

где MAX — определяет степень корреляции, максимальное возможное значение пикселя изображения (1.0 для нормализованных изображений), а MSE — среднеквадратичная ошибка между исходным и отфильтрованным изображением.

Индекс структурного сходства (SSIM): метрика, оценивающая структурное сходство между исходным и восстановленным изображением. SSIM учитывает такие характеристики, как яркость, контраст и структуру, и принимает значения от 0 до 1, где 1 соответствует полному сходству.

$$SSIM\left(x, y\right) = \frac{\left(\mu_x\mu_y + C_1\right)\left(2\sigma_{xy} + C_2\right)}{\left(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1\right)\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C2\right)},$$

где μ_x и μ_y — средние значения изображений, σ_x и σ_y — дисперсии, а σ_{xy} — ковариации между изображениями. Константы C_1 и C_2 применяются для стабилизации метрики.

Процесс планируемого эксперимента

1. Для каждого изображения из набора данных будет создана зашумленная версия с добавлением автокоррелированного шума.

2. Полученные зашумленные изображения предполагается поочередно обрабатывать каждым из трёх методов фильтрации.

3. Фильтрованные изображения будут оцениваться по метрикам PSNR и SSIM относительно исходного изображения.

4. Для каждого метода планируется вычислить средние значения PSNR и SSIM по всему набору изображений, чтобы провести объективное сравнение их эффективности.

Ожидаемые результаты позволят оценить, насколько каждый из методов успешно удаляет автокоррелированный шум. Повышенные значения PSNR и SSIM для метода, использующего модифицированный фильтр Калмана, будут свидетельствовать о его способности восстанавливать исходные характеристики изображения, несмотря на присутствие автокоррелированного шума.

Заключение

В данной работе представлен подход к устранению автокоррелированного шума в изображениях с использованием модифицированного фильтра Калмана перед обучением автоэнкодеров. Актуальность исследования обусловлена тем, что автокоррелированный шум, влияя на целые области изображения, затрудняет его эффективное устранение традиционными методами фильтрации и снижает качество данных для последующей обработки. Предполагается, что модифицированный фильтр Калмана, адаптированный для учёта динамики шума, обеспечит более точную и стабильную фильтрацию по сравнению с медианным и Гауссовым фильтрами [6].

Планируемый вычислительный эксперимент предполагает сравнение модифицированного фильтра Калмана с традиционными методами фильтрации по метрикам SSIM и PSNR, что позволит объективно оценить качество восстановления исходного изображения. Ожидается, что фильтр Калмана продемонстрирует высокую эффективность, сохраняя ключевые структурные характеристики изображения и минимизируя влияние автокоррелированного шума [10]. Эти прогнозируемые результаты могут способствовать улучшению точности и стабильности работы автоэнкодеров и других алгоритмов машинного обучения, в которых требуется предварительная очистка изображений.

Литература

1. *Heaton J., Goodfellow I., Bengio Y., Courville A*. Deep learning // Genetic Programming and Evolvable Machines. – 2018. – Vol. 19. – P. 305–307.

2. *Topaloglu I.* Deep Learning Based Convolutional Neural Network Structured New Image Classification Approach for Eye Disease Identification // Scientia Iranica. – 2023. – Vol. 30, No 5. – P. 1731–742. – DOI: 10.24200/SCI.2022.58049.5537.

3. *Kao M. H., Eller D. H.* Multiconfiguration Kalman Filter Design for High-Performance GPS Navigation // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1983. – Vol. 28, No 3. – P. 304–314. – DOI: 10.1109/TAC.1983.1103167.

4. *Kundu R., Chakrabarti A., Lenka P.* A Novel Technique for Image Denoising using Non-local Means and Genetic Algorithm // National Academy Science Letters. – 2022. – Vol. 45, No 1. – P. 61–7. DOI: 10.1007/s40009-021-01052-z.

5. *Gonzalez R. C., Woods R. E.* Digital Image Processing. Pearson Publ., 2018. – 1020 p.

6. *Liu W., Shi P., Zhang H.* Kalman Filtering with Finite-Step Autocorrelated Measurement Noise // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2022. – Vol. 408, Article 114138. – DOI: 10.1016/j.cam.2022.114138.

7. Coarse-to-Fine CNN for Image Super-Resolution / C. Tian, Y. Xu, W. Zuo, B. Zhang, L. Fei, C.-W. Lin // IEEE Transactions on Multimedia. – 2020. – Vol. 23. – P. 1489–1502. – DOI: 10.1109/TMM.2020.2999182.

8. *Grabowski S., Bieniecki W.* A Two-Pass Median-Like Filter for Impulse Noise Removal in Multi-Channel Images // Proc. 3rd Polish Conf. on Computer Pattern Recognition Systems (KOSYR) 2003. – P. 195–200.

9. *Peters R. A.* A New Algorithm for Image Noise Reduction Using Mathematical Morphology // IEEE Transactions on Image Processing. – 1995. – Vol. 4, No 5. – P. 554–568.

10. *Pizurica A., Zlokolica V., Philips W.* Noise Reduction in Video Sequences Using Wavelet-Domain and Temporal Filtering // Proc. SPIE, Wavelet Applicators in Industrial Processing. – 2004. – Vol. 5266. – DOI:10.1117/12.516069.

УДК 004, 519.86, 331.108

ФОРМИРОВАНИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ КАНДИДАТОВ ДЛЯ ПРОЦЕДУРЫ ПОДБОРА ПЕРСОНАЛА В IT-ПРОЕКТ

Ю. В. Бондаренко, С. А. Палкина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена разработке модели оценивания кандидатов в IT-проект, что является одной из приоритетных задач HR-служб IT-компаний. Предлагаемая модель основана на применении метода многокритериальной оптимизации — методе анализа иерархий. Такой выбор позволяет работать как с количественными, так и качественными характеристиками, в которых обычно описываются требования к кандидатам. Практическая значимость модели оценивается потребностью рынка труда в совершенствовании процедур подбора кандидатов. При этом она учитывает, накопленный HR-компаниями опыт и удовлетворяет возможностью «масштабирования» на будущие проекты компаний.
Ключевые слова: подбор персонала, мультипроект, профессиональные компетенции, метод анализа иерархии.

Введение

Существование множества методов подбора персонала для IT-компаний не делает эту проблему решенной. Трудность задачи формирования команд IT-проектов связана как с ограничениями проектов (требуемые от кандидатов навыки, знания и опыт), так и с ограничениями по выбору кандидатов (запросы кандидатов на зарплату, наличие знаний и опыта). Дополнительными ограничениями также следует считать неопределенность проектов в процессе реализации. В ходе реализации проектов требования к участникам команды могут измениться, а времени на «пересборку» команды может не оказаться. В связи с этим, уже в модели будущего кандидата должна закладываться некоторая избыточность по ряду параметров. Идеальный кандидат для большинства IT-компаний это специалист, который может качественно вести, в том числе, одновременно и несколько проектов. С позиции реализации процедур подбора персонала это требует доработки существующих методов. Это и делает тему работы актуальной.

В работе поставлена цель: разработать модель оценки кандидата для отбора в команды проектов IT-компаний, которая позволит учитывать профессиональные, личностные и социальные характеристики, определяющие потенциал работы при совмещении участия в нескольких проектах, в том числе, мультипроектах.

Постановка задачи

Ставится задача, найти идеального кандидата в IT-проект, который сможет качественно вести, в том числе, одновременно и несколько, проектов и будет перспективным для работы в данном направлении в дальнейшем. Это значит, что он должен иметь функциональность по нескольким ролям в команде, обладать всей основной функциональностью (знаниями, умениями и навыками) по специфике проектов компании и ряд личностных характеристик, которые определяют способность работы, в условиях многозадачности и большой загрузки. В работе рассматриваются мультипроекты, так как их доля в отрасли информационных технологий постоянно растет. Мультипроект определяется как совокупность нескольких монопроектов, которые выполняются одной или несколькими организациями или командами в рамках одной программы или портфеля. В данной работе, рассматривается ситуация, когда подбирается кандидат для работы по проектам, реализуемым одной организацией. Мультипроект рассма-

тривается как аналог работы по нескольким проектам одновременно. При этом эффективность мультипроекта рассматривается аналогично эффективности обычного (моно) проекта. Под эффективностью понимается достижение высоких результатов с наименьшими затратами, в том числе, и по времени. Рассмотрение именно мультипроектов делает возможность заложить в модель требуемую избыточность по профессиональным компетенциям сотрудника.

Обзор существующих моделей, основанных на методе анализа иерархий

Одним из базовых подходов к оценке кандидата в проект является подход, основанный на методе анализа иерархий. В рамках его применения строится модель оценки кандидата в проект. Модель оценки ложится в основу «видения» идеального кандидата. Видение позволяет ранжировать критерии отбора, которые важны при выборе кандидата. В качестве критериев выступают характеристики кандидатов, в качестве альтернатив выбора рассматриваются сами кандидаты. Типовая модель оценки кандидата для IT-проекта приведена на рис. 1. Она позволяет подобрать кандидата на конкретный функционал проекта, что заложено в требованиях к вакансии. Функционал, на который берется сотрудник, определяет ожидаемые компетенции и качества кандидата. Требуемые профессиональные компетенции на вакансию определяются на основе анализа бизнес-процессов организации и иерархической структуры работ по проекту. В ходе этого анализа выявляются ключевые задачи и функции, которые должен выполнять сотрудник, а также необходимые знания, умения и навыки для успешного выполнения этих задач. При этом модель не учитывается особенности проектной работы.

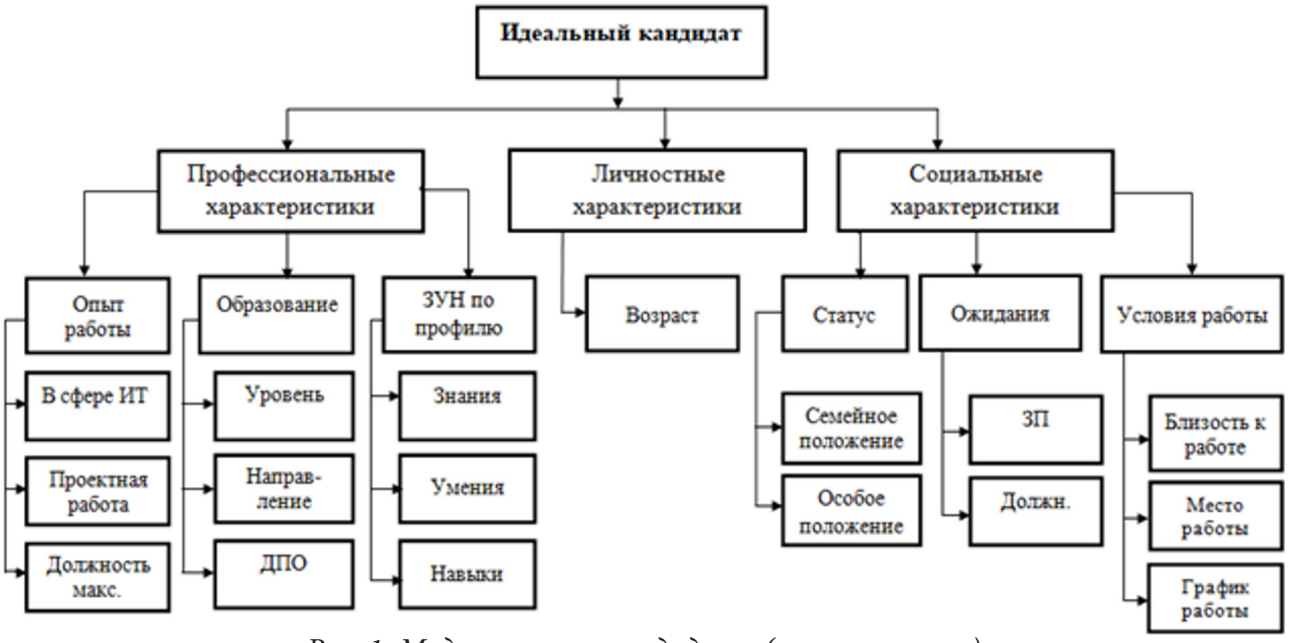


Рис. 1. Модель оценки кандидата (универсальная)

На рис. 2 представлена модель, которая учитывает необходимость оценивания кандидатов по компетенциям, важным для проектной работы, а также дает возможность заложить избыточность по профессиональным компетенциям. В ней учитываются профессиональные, личностные и социальные характеристики. Профессиональные характеристики заложены отдельным блоком и, в зависимости от функциональных обязанностей участника проекта, могут быть любыми. Они учитывают образование, опыт работы, знания, умения и навыки (ЗУН) по специфике проекта, из универсальной модели. В модели учитываются критерии, которые позволяют HR-специалистам составить представление о работоспособности кандидата, возможности совмещать задачи по разным проектам, как в плане трудовых функций,

так и личностных способностей. Для IT-сферы выделяют такие группы характеристик как Hard skills, Soft skills, Meta skills и Self skills. Hard skills — «жесткие» или профессиональные навыки. Soft skills — «мягкие» навыки, личностные характеристики, которые не закрепляются за одной профессиональной областью. Meta skills — базовые качества личности, которые считаются врожденными, на основе которых складываются остальные навыки. Self skills или self management — это навыки самоуправления, саморегулирования, организации себя, планирования, контроля и мотивация, навыки ориентированные на умение управлять собой. Self skills в ряде случаев могут стать решающими при отборе кандидатов. Блок «ЗУН по профилю» заменен на блок «Компетенции (Skills)». Блок «Черты характера» удален, т. к. он учитывается в блоке «Компетенции (Skills)». Блок «Meta skills» в модели не сформирован по двум причинам: качества трудно выявляемы тестами, базовые качества личности проявляются в других навыках, более легко выявляемых.

Универсальность модели заключается и в том, что при формировании команды мультипроекта руководителю не обязательно формировать «видение» для каждой позиции проекта. Достаточно сформировать единожды и далее изменять оценку только по уровню элементов, которые разнятся для разных позиций (например, по блоку «Hard-skills»).

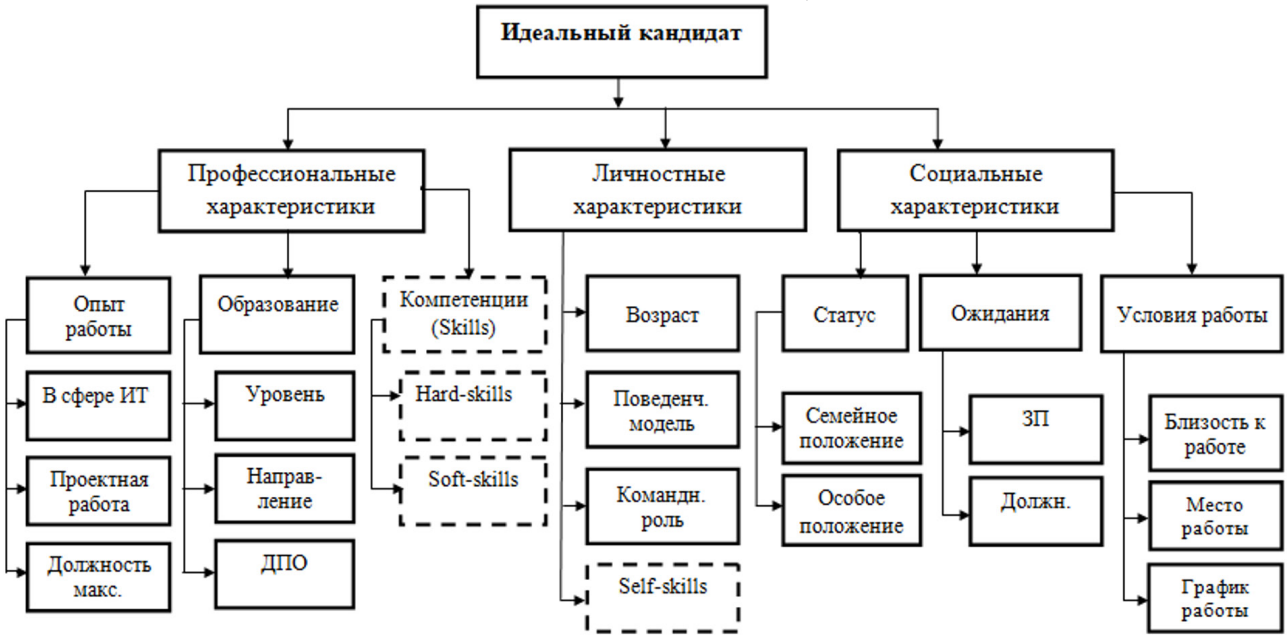


Рис. 2. Модель оценки кандидата в мультипроект

Формирование команды с использованием модели оценки кандидата

Процесс поиска «идеального « кандидата в IT-проект с использованием предложенной модели следующий.

Шаг 1. Формирование руководителем проекта «видения» идеального кандидата. Заключается в расстановке приоритетов критериев в рамках каждого уровня.

Шаг 2. Расчет весовых коэффициентов согласно методу иерархии по каждому уровню (локальных и глобальных).

Шаг 3. Ранжирование анкет соискателей с учетом весовых характеристик нижнего уровня модели оценки.

В случае одинакового веса анкеты, сравнение характеристик анкет более весомого критерия вышестоящего уровня. В отличие от классического алгоритма метода анализа иерархии, веса критериев уровней задаются через пересчет приоритетов, а не за счет применения матриц парных сравнений.

Заключение

Предложенная модель может использоваться для формирования команд мультипроектов, а также монопроектов и стартап-проектов в IT-сфере. Метод анализа иерархий хорошо зарекомендовал себя в схожих задач, является несложным для программной реализации. В свою очередь, данное решение является перспективным для реализации.

Литература

1. *Азарнова Т. В.* Модели и методы принятия решений / Т. В. Азарнова, Ю. В. Бондаренко, Н. Б. Баева, Е. С. Дашкова, В. В. Ухлова; Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. – 310 с.

2. *Бондаренко Ю. В.* Экспертно-тестовый механизм комплексной оценки кандидатов при подборе персонала / Ю. В. Бондаренко, И. В. Горошко, Е. В. Васильчикова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2020. – Т. 20, № 1. – С. 100–110.

3. *Джабраилова З. Г.* Моделирование процесса выбора кандидатов на вакантные должности с применением нечеткой логики / З. Г. Джабраилова, С. Р. Нобари // Искусственный интеллект: сб. статей. – Баку, 2009. – С. 254–259.

4. *Жуков, Ю. М., Журавлёв А. В., Павлова Е. Н.* Технологии командообразования: учеб. пособие для студ. вузов Москва : Аспект Пресс, 2008. – 320 с.

5. *Игнатенко А. Н.* Современные технологии подбора персонала / А. Н. Игнатенко // Инновационная наука. – 2016. – №1–3. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/v/sovremennye–tehnologii–podbora–personala (Дата обращения: 29.08.2023).

6. *Казанцева В. А.* К вопросу о проблемах подбора персонала в сфере информационных технологий в России в современных условиях // Экономика России: глобальные вызовы и перспективы инновационного развития. Материалы всероссийской научной студенческой конференции. Омский государственный технический университет. – 2017. – 245 с.

7. *Кибанов А. Я.* Управление персоналом организации: стратегия, маркетинг, интернационализация: учеб. пособие / А. Я. Кибанов, И. Б. Дуракова. – Москва : Инфра-М, 2009. – 301 с.

8. *Махмудова И. Н.* Подбор персонала: организация бизнес–процесса / И. Н. Махмудова, Р. И. Климетьев // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. – 2017. – № 2. – С. 59–62.

9. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – Москва : Радио и связь, 1993. – 278 с.

10. *Ухлова В. В.* Применение системного подхода в процедурах формирования команд стартапов ИТ-проектов / Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / В. В. Ухлова, С. А. Палкина // Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13–15 декабря 2021 г. – Воронеж, 2022. – С. 791–796.

11. *Палкина С. А.* Один из подходов формирования эффективных команд стартап-проектов / С. А. Палкина, А. Э. Потемкина // Математика, информационные технологии, приложения : сборник трудов Межвузовской научной конференции молодых ученых и студентов, Воронеж, 26 апреля 2023 г. – Воронеж : Научная книга, 2023. – С. 334–337.

УДК 502.001.573(075.8)

АНАЛИЗ ОБРАЗОВАНИЯ И ГОРЕНИЯ ГАЗОВЫХ ОБЛАКОВ В АТМОСФЕРЕ ПРИ АВАРИЙНЫХ ВЫБРОСАХ

И. Н. Пантелеев

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Показана возможность анализа характера истечения при разгерметизации емкостей со сжатым газом и определение наиболее вероятной конфигурации пламени при возгорании выброса. Предложенный подход может использоваться для оценки опасности химических производств, построении карт риска, экспертных оценках последствий аварий на трубопроводах и хранилищах сжатых газов.
Ключевые слова: математическое моделирование, загрязнение атмосферы, экологический ущерб, анализ рисков.

Введение

Кратковременные выбросы в атмосферу загрязняющих веществ большой концентрации возникают при взрывах боеприпасов, емкостей с горючими материалами, запусках ракет и т. д. Особую опасность представляют техногенные чрезвычайные ситуации на объектах хранения и транспортировки сжиженных газов, в результате которых происходит образование облаков взрывоопасных или токсических газов [1–4]. В рассмотренных выше случаях за короткий промежуток времени в атмосферу поступает большое количество газообразных и твердых загрязняющих веществ, которые затем мигрируют вместе с потоками воздуха, вступают между собой в реакции, образуя опасные химические соединения, осаждаются на различные поверхности, загрязняя растительность, почву, воду.

Кроме того результаты различных физических явлений природного и техногенного происхождения могут быть охарактеризованы как выбросы инородного вещества в окружающую атмосферу и иметь серьезные последствия с точки зрения экологии и безопасности [5–7].

Результаты исследований

Рассмотрим горючий газ, истекающий в атмосферу через круглое отверстие диаметром D со скоростью U_0 в течение времени t_r. Смешение выбрасываемого газа с окружающим воздухом может быть охарактеризовано некоторым характерным временем t_{mix}. Если выброс происходит практически мгновенно (за время $t_r \le t_{mix}$), в атмосфере возникает переобогащенное топливом облако, сгорающее при зажигании в диффузионном режиме в виде огненного шара. Напротив, если продолжительность выброса значительно превосходит характерное время турбулентного смешения газа с окружающим воздухом t_{mix}, в атмосфере сформируется квазистационарная струя, зажигание которой ведет к образованию горящего факела.

Чтобы получить количественный критерий, позволяющий классифицировать выбросы конечной продолжительности, рассмотрим два типичных вида выброса при разгерметизации газовых емкостей — облако конечной массы, выпущенное с направленным начальным импульсом, и развивающуюся нестационарную струю, возникающую при резком включении источника массы и импульса. В каждом случае в качестве характерного времени смешения принимается время, за которое объемная концентрация выброшенного газа падает до верхнего концентрационного предела горения (ВКП), что дает временной масштаб процессов перемешивания, делающих газовую смесь горючей. Отметим, что используется не нижний (НКП),

а верхний предел горения, поскольку целью является описание переобогащенного топливом облака, которое при зажигании горит в диффузионном режиме. Расчет линий уровня концентрации, соответствующих НКП, обычно производят для оценки количества газа, находящегося в пределах горения, который может в случае зажигания сгорать во взрывном режиме или детонировать. Движение газа считается осесимметричным, кроме того, принимается, что время установления автомодельных распределений скорости и концентрации намного меньше характерного времени разбавления газа до ВКП. Это обусловлено тем, что при струйном истечении автомодельные распределения устанавливаются на расстояниях порядка нескольких диаметров выходного отверстия, тогда как разбавление газа до ВКП происходит на значительно больших расстояниях. Следовательно, основная часть времени разбавления приходится на автомодельную стадию. Эволюция облака мгновенного выброса может быть описана интегральной моделью.

Облако аппроксимируется конусом, размеры которого возрастают по мере движения из-за смешения с окружающим воздухом. Динамика движения облака и изменение его объема находятся интегрированием законов сохранения массы, энергии и количества движения.

Коэффициент вовлечения $\alpha C,$ равный среднему тангенсу угла расширения облака, находится в диапазоне от 0,16 до 0,58, причем большой разброс данных обусловлен внутренне присущей нерегулярностью турбулентного облака. Ниже используется наиболее типичное значение коэффициента вовлечения, принятое в литературе $\alpha C \approx 0,25.$ Увеличение объема облака за счет смешения с воздухом вполне удовлетворительно описывается формулой

$$\frac{V}{V_0} - \left(8\alpha_c \frac{\rho_r}{\rho_a} \cdot \frac{U_0 t}{D} \right)^{3/4} \approx \left(2 \frac{\rho_r}{\rho_a} \cdot \frac{U_0 t}{D} \right)^{3/4}, \qquad (1)$$

где V — текущий, V_0 — начальный объемы облака, ρ — плотность газа, индексы a и r здесь и ниже относятся к окружающему воз духу и газу на уровне выходного отверстия соответственно.

Поскольку общая масса горючего газа в облаке есть величина постоянная, его средняя объемная концентрация падает с увеличением объема как $c = \rho_b V_0 m_a / \rho_a V m_g$ (где m_a и m_g — молекулярные массы воздуха и газа), отсюда время, необходимое для разбавления газа до ВКП оценивается как

$$t_c = \frac{D}{2U_0} \cdot \left(\frac{\rho_r}{\rho_0} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{m_a}{m_g} \right)^{4/3} \cdot C_{UFL}^{-4/3}, \qquad (2)$$

где C_{UFL} — объемная концентрация, соответствующая ВКП.

Процесс смешения газа с воздухом в нестационарной (развивающейся) струе при резком включении источника может быть описан следующим образом. Как показывают эксперименты, развивающаяся струя состоит из головной части и следующей за ней конической части, которая подобна установившейся напорной струе. Аппроксимируем распределение концентрации в развивающейся струе модельным, заменив головную часть резким фронтом, находящимся на расстоянии H_j от виртуального источника, причем перед фронтом будем считать концентрацию нулевой, а за фронтом будем использовать поле концентрации в стационарной осесимметричной струе с гиперболическим законом затухания осевой концентрации и гауссовым законом распределения концентрации в радиальном направлении при $z \le H_j$:

$$C(z,r) = C_{ax}(z) \exp\left(-(r / a_j z)^2 \right),$$

$$C_{ax}(z) = B_j \frac{D}{z} \left(\frac{\rho_r}{\rho_a} \right)^{1/2} \left(\frac{m_a}{m_g} \right), \qquad (3)$$

где C_{ax} — осевая объемная концентрация, B_j — эмпирическая константа, значение которой по данным различных экспериментов находится в диапазоне от 4,0 до 5,9.

Заключение

Подводя итог проведенному анализу можно заключить, что предложенный подход позволяет правильно определять тип выброса, исходя только из геометрических параметров D, V_0, физико-химических свойств вещества C_{UFL}, m_g и начального давления P_0. Критерий представлен в виде связи (1)–(3) между безразмерными параметрами δ и ξ, что придает ему весьма широкую общность. Конечно, более детальные экспериментальные исследования с использованием различных веществ и условий истечения необходимы для всесторонней оценки точности и границ применимости данного критерия, однако уже приведенные выше сопоставления позволяют заключить, что критерий дает вполне разумные результаты.

Литература

1. *Пантелеев И. Н., Пантелеев А. И.* Математическое моделирование распространения облаков тяжелых газов при техногенных авариях // Сб. трудов VI межд. конф. ПМТУКТ-2013. – Воронеж : изд-во ВГУ, 2013. – С. 184–185.

2. *Пантелеев И. Н., Пантелеев А. И.* Моделирование распространения облаков тяжелых газов при техногенных авариях // Сб.ст. VIII Междунар. научн.-техн. конф. АЧМ-2013. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – С. 184–188.

3. *Пантелеев И. Н., Пантелеев А. И.* Анализ взрывоопасности облаков газовоздушных смесей после техногенных аварий // Материалы IX Межд. научно-практ. конф. «Обеспечение безопасности в ЧС». – Воронеж : ВГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 78–83.

4. *Пантелеев И. Н., Пантелеев А. И.* Моделирование аварийного разрушения сосудов с газом под давлением // В сб. «Материалы XIII международного семинара ФММС». – Воронеж, 2015. – Ч. 2. – С. 123–128.

5. *Пантелеев И. Н.* Математическое моделирование экологического ущерба при выбросе загрязняющих веществ в атмосферу // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». – Воронеж : Изд-во «Научная книга», 2016. – С. 261–264.

6. *Пантелеев И. Н.* Стохастический анализ загрязнений воды примесями с поверхности речного бассейна // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». – Воронеж : Изд-во «Научная книга», 2016. – С. 264–265.

7. *Пантелеев И. Н.* Механизмы распространения загрязняющих веществ после аварийных выбросов на промышленных объектах // Современные технологии обеспечения гражданской обороны и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций: сб. ст. по материалам VIII Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. уч. 2017 г. – ФГБУ ВПО Воронежский институт ГПС МЧС России. – Воронеж, 2017. – № 1(2). – С. 428–430.

УДК 004.94

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ОБРАБОТКИ АНАЛИЗА ВИДЕОРЯДА ДИНАМИКИ ТРОПИЧЕСКОГО ЦИКЛОНА

А. А. Парамонов[1], А. В. Калач[1,2], К.А. Кузнецова[2]

[1]МИРЭА – Российский технологический университет
[2]Воронежский институт ФСИН России

Аннотация. В рамках сферы техносферной безопасности до сих пор является актуальной задача прогнозирования появления и развития природных явлений, являющихся ключевыми при создании ЧС, которые вызывают сопутствующие риски для жизни людей и разрушения объектов результата человеческого труда.

В результате работы алгоритма были выявлены характерные почти периодические значения облачной структуры тропического циклона. Полученные результаты анализа динамики развития циклона позволяют на основе выявленных значений почти периодов на ранних стадиях формирования, делать прогнозные оценки о поведении развития зон покрытия представленной динамической природной системы.

Ключевые слова: почти период, анализ данных, обработка изображений, техносферная безопасность, чрезвычайная ситуация, стихийные явления, тайфуны, тропические циклоны, динамические системы, данные с упорядоченным аргументом.

Введение

В статье [1] представлено математическое и численное моделирование течения газа в придонной части торнадо и тропического циклона. Моделирование позволяет рассчитать кинетическую энергию вихря. В работе представлен математический метод определения газодинамических параметров, разработан численный метод определения газодинамических параметров потока и кинетической энергии для различных типов торнадо по шкале Фуджиты. Реализованы эффективные алгоритмы нахождения радиуса втекания и кинетической энергии восходящих вихревых потоков. Проведен ряд вычислительных экспериментов по моделированию стационарного течения газа в придонной части потока, формирующегося у поверхности Земли. Для представленных вычислительных экспериментов рассчитана кинетическая энергия вихря. Значения кинетической энергии потока могут быть использованы для борьбы с опасными природными явлениями.

За последние пять лет в работе [2] приводятся результаты исследования тропических циклонов северо-западной части Тихого океана с акцентом на те явления, которые повлияли на погоду Дальнего Востока России. Подробно рассмотрен тайфун Лайонрок из-за его уникальной и нестандартной траектории перемещения, заметно затруднённую для прогнозирования. Было проведено моделирование пространственно-временного распределения ключевых метеорологических величин тайфуна Лайонрок с использованием мезомасштабной модели WRF-ARW. По итогам проделанной работы сделан вывод, о достаточно точной воспроизводимости моделью основных метеорологических величин изучаемого тропического циклона как в пространстве, так и во времени.

Приводятся результаты исследования тропических циклонов северо-западной части Тихого океана в [3]. Особое внимание уделяется петляющим тропическим циклонам, которые имеют нехарактерную траекторию перемещения. Исследовано влияние рассматриваемых тропических циклонов друг на друга при их взаимодействии, которое отмечалось как с помощью спутникового анализа, так и путем математического моделирования. В результате проведенного исследования удалось сделать вывод о том, что применяемая численная модель WRF-ARW

достаточно точно воспроизводит основные изучаемые метеорологические величины исследуемых тропических циклонов в пространстве и во времени, благодаря чему можно говорить о действительном взаимном влиянии природных явлений друг на друга.

В работе [4] автор показывает зависимость влияния тропической конвекции на формирование тропического циклона. Сжатие тропической конвекции задерживает и уменьшает образование тропического циклона. Это сокращение укорачивает сезоны тропических циклонов, поскольку задерживает миграцию межтропической зоны конвергенции в направлении полюсов. В сезонные пики активности циклонов экваториальные и внеэкваториальные компоненты этого сжатия связаны с изменениями окружающей среды, препятствующими образованию вихрей.

В работе [5] стоит цель продемонстрировать возможности почти периодического анализа при помощи реализованных алгоритмов, основанных на классе сдвиговых функций. Данный подход к анализу эффективен и при анализе больших объёмов данных, которые возникают, в частности, при накоплении данных о погоде.

В данной статье в качестве объекта анализа был взят тропический циклон «Нанмандол», обрушившийся на юго-западный берег Японии. Тайфун «Нанмадол» (Джози) образовался к востоку от Японии в сентябре 2022 года. Возмущение достигло стадии тропического шторма 15 сентября, а 16 сентября стадии супертайфуна. Минимальное давление в урагане составило 910 гПа — самое низкое в сезоне 2022 года. 18 сентября, находясь в фазе перехода с пиковой формы развития к стадии расформирования, тайфун «Нанмадол» обрушился на юг Японии на остров Кюсю. Тайфун вызвал большое количество осадков, повлекших за собой затопление улиц, разрушение стен зданий и ЛЭП. Метеорологической службой Японии было опубликовано, что порывы ветра в эпицентре тайфуна достигали 195 км/ч (55 м/с). Согласно официальной статистики урона от шторма в Японии, по меньшей мере, 2 человека погибли, еще 70 человек получили ранения. Без электричества остались более 200 тысяч человек. В Южной Корее ветры и дождь, вызванные тайфуном, также нанесли значительный урон. Согласно данным из открытых источников, пострадал один человек, более 700 человек были эвакуированы из своих домов, а некоторые населенные пункты страны остались без электричества [6].

1. Материалы и методы

Динамика тайфуна представлена видеорядом данных с момента формирования циклона, 15 сентября, до фазы начала разрушения структуры, 18 сентября, утром 19 сентября циклон уже потерял свою структуру. Видеозаписи проводились с рассвета до заката, пока спутниковая камера позволяла визуально фиксировать изменения в атмосфере при солнечном свете. Данные получены из открытого источника спутниковых данных [7].

Алгоритм обработки изображений включает кадрирование видеоряда; обработку и перевод изображения в изображения в чёрно-белый формат и определение центра тропического циклона; преобразование в полярные координаты; обработку обобщённой сдвигово функцией значений радиус-векторов при фиксированных полярных углах; отображение найденных почти периодов на исходных данных.

В ходе обработки значений радиус-векторов при фиксированных углах, получаем результаты закономерностей, выявленные почти периодическим анализом, результаты которого отображаются на исходных данных, представленные кадрами видеоряда. Почти периодический анализ основывается на обобщённой сдвиговой функции:

$$a(\tau,\Delta t)=\frac{1}{n-\tau-2\Delta t}\cdot\sum_{t=1}^{n-\tau-2\Delta t}\left|\ln\left(\frac{y_{t-\Delta t+\tau}\cdot y_{t+\Delta t-\tau}}{y_{t+\tau}^2}\right)-\ln\left(\frac{y_{t-\Delta t}\cdot y_{t+\Delta t}}{y_t^2}\right)\right|, \quad (1)$$

где n — общее число отсчётов функции $y(t)$;

t — целые положительные и отрицательные числа, включая ноль;

Δt — целое положительное число, сдвиг по аргументу;

τ — целое положительное число, значения почти периодов.

Применение данной функции даст возможность определить характерные почти периодические составляющие структуры исследуемого ряда с упорядоченным аргументом [8]. На основе выявленных значений почти-периодов на изображении возможно отобразить соответствующие области с выявленными радиус-векторами.

2. Результаты и обсуждение

В качестве данных для обработки выступили спутниковые видеозаписи динамики тропического тайфуна «Нинмандол». Количество анализируемых видеозаписей равно четырём. Видеозаписи проводились с момента рассвета до захода солнца, после чего, в ночное время, визуальная съёмка не проводилась. Первый шаг алгоритма обработки изображений представляет собой кадрирование исследуемого видеоряда. Пример результата обработки, представлен на рис. 1, в виде кадра с начальной структурой тайфуна.

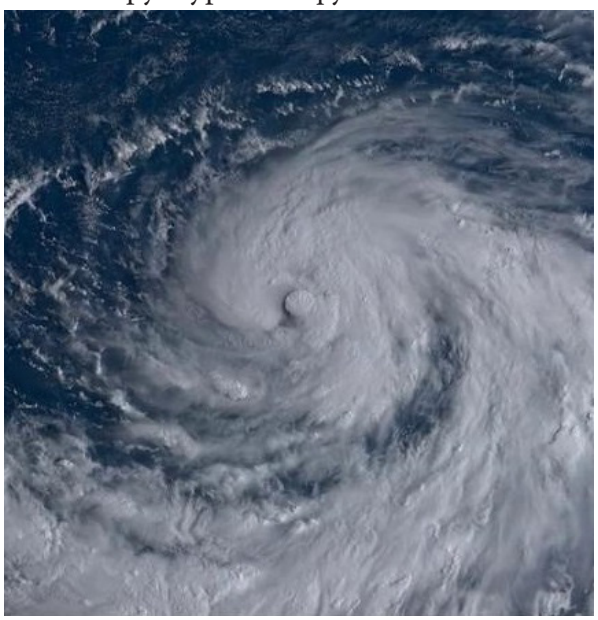


Рис. 1. Кадр из обработанного видеоряда

Следующим шагом была произведена обработка изображения по переводу его в чёрно-белый формат с размеченным центром урагана (рис. 2). Следующим шагом для анализа, являлся перевод изображения в полярные координаты (рис. 3), для возможности анализа структуры изменения значений радиус-векторов критических зон структуры тайфунов при фиксированных значениях полярных углов.

Четвёртым этапом алгоритма является обработка вектора значений при фиксированном полярном угле. Пример результата расчёта сдвиговой функции для значений радиус-векторов при фиксированном сдвиге Δt представлен на рис. 4. По полученным результатам можно заметить набор характерных минимумов, подозрительных на почти периоды. В качестве демонстрации реализации полученных почти периодов проведём отображение найденных значений кратных радиус-векторов.

Окружности, с радиусами, кратными ярко выраженному почти периоду 62, представлены на рис. 4. Как можно заметить первые два кольца от центра, выделяют наиболее плотные облачные зоны циклона. Третье кольцо характеризуется свободной зоной изменения облаков, за которым дальше тянется остальной «хвост» спирали, образованной после этого кольца тропического циклона.

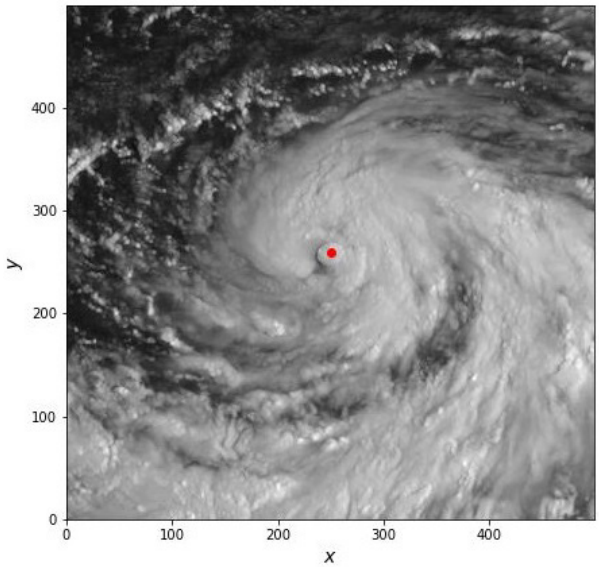


Рис. 2. Перевод изображения в чёрно-белый формат и определение центра тайфуна

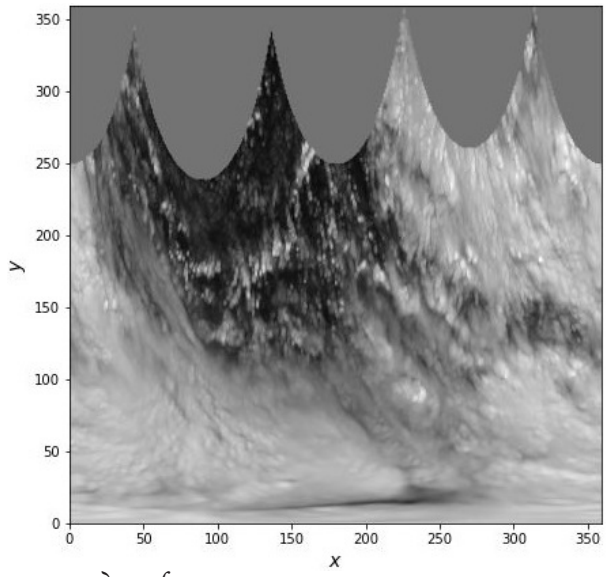


Рис. 3. Начальная стадия формирования циклона в полярных координатах

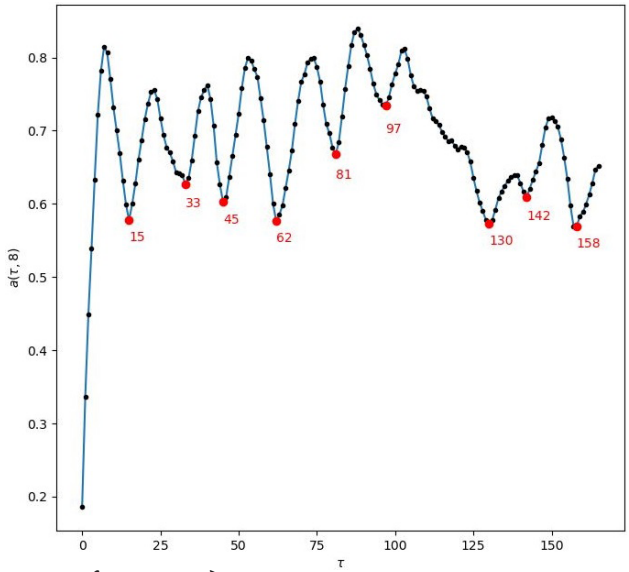


Рис. 4. Сдвиговая функция для вектора значений при угле 135 градусов

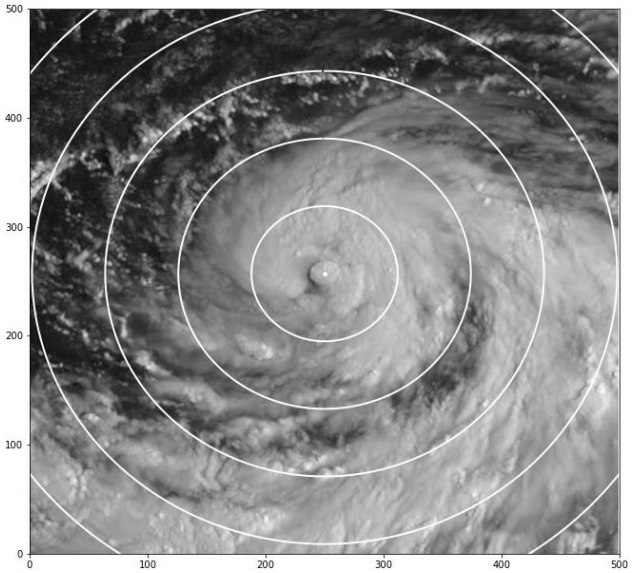


Рис. 5. Отображение кратных, почти периоду 62, радиусов на структуре тайфуна

Таким образом, выявляемые почти периодические значения радиусов зон тропического циклона в ходе анализа результатов сдвиговых функций, позволяют разделить анализируемую структуру циклона на разные зоны активности, на основе анализа облачных структур.

В ходе дальнейшего анализа представленных видео данных получены почти периоды порядка 62, 52 и 75, последние из которых представлены на рис. 6 и рис. 7.

В результате применения представленного алгоритма были обработаны четыре видео ряда с динамикой развития тропического циклона «Нанмандол» и выявлены характерные почти периодические значения, которые структурно разделяют зоны облачной активности. Наличие найденных значений почти периодов было показано на исходных данных при помощи разделения зон от центра активности тайфуна окружностями, радиусы которых кратны почти периодам.

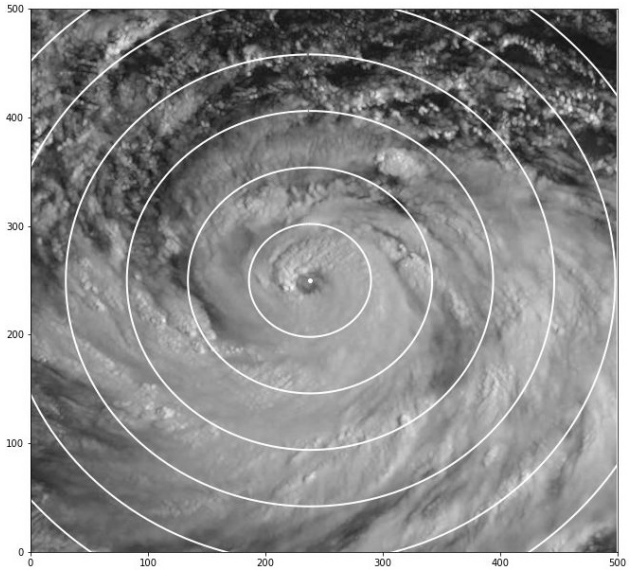


Рис. 6. Отображение кратных, почти периоду 52, радиусов на структуре тайфуна, на второй день наблюдений

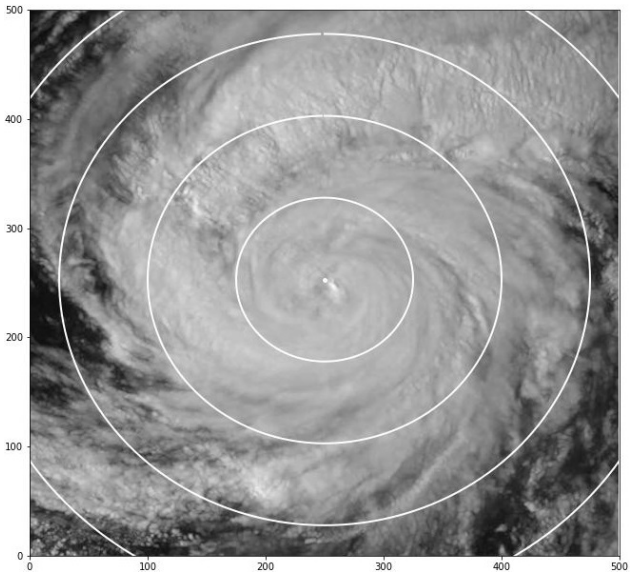


Рис. 7. Отображение кратных, почти периоду 75, радиусов на структуре тайфуна, на четвёртый день наблюдений

Заключение

Таким образом, в результате работы были выявлены характерные почти периодические значения облачной структуры тропического циклона, продолжавшегося четверо суток. Почти периодический анализ на основе сдвиговых функций показал возможности выявления критических уровней структуры тропических циклонов, результаты проиллюстрированы отрисовкой кратных почти периодам радиусов на исходном изображении. Примечательными почти периодическими радиусами на структуре тайфунов стали значения порядка 52, 62 и 75. Представленный алгоритм обработки видеоряда тропических циклонов с целью анализа структуры динамического природного явления и выявления в нём характерных почти периодических зависимостей, по полученным результатам исследования показал свою работоспособность и эффективность. Полученные результаты анализа динамики развития циклона позволяют на основе выявленных значений почти периодов на ранних стадиях формирования, делать прогнозные оценки о поведении развития зон покрытия представленной динамической природной системы.

Литература

1. *Opryshko O. V.* Numerical Simulation of Nea-Bottom Parts Of A Tornado And A Tropical Cyclone In A Stationary Case // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2023. – Vol. 10, No 1. – P. 30–43. – DOI 10.14529/jcem230104.

2. *Озерова Н. А.* Исследования тропических циклонов северо-западной части Тихого океана // Современные тенденции и перспективы развития гидрометеорологии в России: Материалы V Всероссийской научно-практической конференции, Иркутск, 23–25 ноября 2022 года / Отв. редактор Е.Н. Сутырина. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2023. – С. 253–257.

3. *Озерова Н. А.* Исследование особенностей эволюции тропических циклонов, влияющих на погоду Дальнего Востока России // European Journal of Natural History. – 2023. – № 1. – С. 29–34.

4. *Zhang G.* Warming-induced contraction of tropical convection delays and reduces tropical cyclone formation // Nature Communications. – 2023. – Vol. 14, No. 1. – P. 6274. – DOI 10.1038/s41467-023-41911-5.

5. *Парамонов А. А.* Современные аспекты анализа больших данных с упорядоченным аргументом / А. А. Парамонов, Т. Е. Смоленцева, А. В. Калач // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года. – Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 609–613.

6. Аэрокосмос [Электронный ресурс]. – URL: http://www.aerocosmos.info/news/detail.php?ELEMENT_ID=6199 (дата обращения: 02.10.2024).

7. Himawari-8 in real time [Электронный ресурс]. – URL: https://himawari8.nict.go.jp/ (дата обращения: 02.10.2024).

8. *Крынецкий Б. А., Данилова В. А., Парамонов А. А., Смоленцева Т. Е., Калач А. В.* «Программа для определения почти-периодов в эмпирических данных с упорядоченным аргументом на основе сдвиговой функции» – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024663550 Российская Федерация. Сдвиговая функция на основе мультипроцессорной обработки: № 2024663550: заявл. 21.05.2024: опубл. 07.06.2024; заявитель Федеральное казенное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский институт Федеральной службы исполнения наказаний».

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО РАЗРЕШЕНИЮ СИГНАЛОВ В НЕРЕГУЛЯРНОМ ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ ГОЛОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

С. А. Переселков[1], В. М. Кузькин[2], И. М. Косенко[1], А. С. Переселков[1]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук

Аннотация. Представлены результаты численного эксперимента по разрешению сигналов источников в случайно-неоднородной океанической среде голографическим методом. Описан голографический метод разрешения сигналов от различных источников. В рамках численного эксперимента показано, что результирующая голограмма сигналов нескольких источников представляет собой сумму голограмм сигналов, формирующихся невозмущёнными и возмущёнными полями. Результаты численного моделирования представлены для случая двух источников в присутствии интенсивных внутренних волн, вызывающих горизонтальную рефракцию мод звукового поля. Продемонстрирован метод очищения голограммы от возмущённых полей. Предложены критерии разрешения сигналов.
Ключевые слова: голографическая обработка, неоднородная среда, спектральная плотность, разрешение сигналов, интенсивные внутренние волны.

Введение

Одна из актуальных, но слабо изученных проблем в обработке гидроакустических сигналов связана с обеспечением высокой устойчивости к помехам в условиях, когда свойства среды изменяются как в пространстве, так и во времени. Дополнительной сложностью является необходимость адаптации методов к изменяющимся условиям распространения звуковых волн. Применяемые в гидроакустике подходы не учитывают устойчивую структуру интерференционной картины, создаваемой широкополосными источниками. Недавние теоретические исследования, а также натурные и численные эксперименты показали, что эффективным решением может стать использование голографических подходов обработки гидроакустических сигналов [1–3]. Этот подход позволяет сосредоточить спектральную плотность сигнала в ограниченной области голограммы, что существенно снижает влияние помех и повышает общую устойчивость метода. Голографический метод открывает новые возможности в анализе сигналов малошумных источников, опираясь на особенности интерференции. Разработанные методы продемонстрировали свою эффективность при работе в неоднородных волноводах, где пространственно-временные возмущения, такие как интенсивные внутренние волны, существенно влияют на распространение звукового поля [4–8]. Ключевая особенность голографического подхода заключается в разделении на голограмме областей, соответствующих невозмущённым и возмущённым компонентам поля. Это позволяет устранить или минимизировать искажения, связанные с нерегулярностью. Такой эффект впервые был зафиксирован в эксперименте SWARM-95 [4, 5], где внутренняя волновая активность вызывала горизонтальную рефракцию и взаимодействие мод акустического поля.

Голографическая обработка гидроакустических сигналов предоставляет эффективные инструменты для решения важных задач, таких как обнаружение слабошумных источников [9–11], определение их местоположения и пеленга [12–17]. Кроме того, модовая голография [18–20] обеспечивает возможность выделения отдельных мод звукового поля.

Одним из значимых приложений голографического подхода является разрешение нескольких шумовых сигналов с использованием одного приёмного устройства. Впервые решение

этой задачи было предложено в [21] на основе численного моделирования, выполненного для регулярного волновода с интенсивными помехами, маскирующими сигналы.

В данной работе представлены результаты численного эксперимента по разрешению сигналов от нескольких источников в условиях нестабильной океанической среды с использованием голографического метода. Предложен алгоритм, позволяющий эффективно восстанавливать сигналы с минимальными искажениями на фоне неоднородностей среды. Разработаны критерии разрешения сигналов при использовании одного приёмника. Представленные результаты численного моделирования демонстрируют разрешение двух шумовых сигналов при наличии внутренних волн, вызывающих горизонтальную рефракцию мод звукового поля, а также оценены параметры движущихся источников.

1. Голографический метод разрешения голограмм сигналов

На голограмме спектральные плотности шумовых сигналов, обусловленные невозмущенным и возмущенным волновыми полями, локализованы в разных областях, которые практически не пересекаются. В результате появляется возможность получения голограмм незначительно искаженных шумовых сигналов при наличии неконтролируемых неоднородностей среды. Очищение голограммы от возмущений среды основано на вырезании спектральной плотности на временном интервале $2\delta\tau = 2/\Delta f$ вдоль оси частоты ν. Метод очистки не требует предварительного знания о характере возмущения и сигналов. Если теперь к очищенной голограмме применить двумерное обратное преобразование Фурье, то восстановленная интерферограмма преимущественно будет представлять собой муаровую картину из локализованных полос отдельных сигналов, сформированных невозмущенным полем. Очищенную от возмущения голограмму можно использовать для разрешения шумовых сигналов, мало искаженных неоднородностями среды. Под разрешением сигналов понимается их раздельное обнаружение и определение параметров источников. В качестве критерия разрешающей способности принимается точность, с которой параметры (пеленг, радиальная скорость, удаление, глубина) каждого источника определяются при наличии других источников. Механизм разрешения сигналов основан на том, что результирующая голограмма приближенно рассматривается как линейная суперпозиция голограмм отдельных сигналов.

Разрешение сигналов осуществляется следующим образом. Вначале на голограмме выделяется область локализации спектральной плотности наиболее мощного сигнала. Она вырезается и по отношению к очищенной голограмме применяется обратное двумерное преобразование Фурье по восстановлению интерферограммы. Выделяя последовательно на голограмме области локализации отдельных сигналов и вырезая их, будем получать голограммы и интерферограммы менее интенсивных сигналов. Возможности очистки ограничены входным отношением с/п. С каждым шагом очистки восстанавливаемая голограмма сигнала будет все больше отличаться от оригинала его голограммы в отсутствие возмущения среды. Это обусловлено тем, что при вырезании локализованной области одного из сигналов частично могут вырезаться и спектральные плотности других, менее интенсивных сигналов. Эффект преимущественно будет проявляться в областях расположения малых номеров фокальных пятен, т. е. будут ослабляться и искажаться низкочастотные компоненты. Механизм очистки может приводить к искажению голограммы и соответственно к повышению погрешности определения параметров источников при увеличении шага очистки. Так как вырезание изменяет только распределение спектральной плотности, то оно должно незначительно влиять на положение максимумов фокальных пятен и форму интерферограммы. Для повышения точности восстановления параметров источников следует использовать фокальные пятна высших номеров. В качестве критерия разрешения сигналов положим требование, чтобы их спектральные плотности на голограмме не пересекались. Для выполнения этого условия достаточно потребовать

не пересечения спектральных плотностей их первых фокальных пятен. Если спектральные плотности сигналов расположены в разных квадрантах голограммы (радиальные скорости источников имеют разные знаки), то возможности разделения сигналов улучшаются.

2. Численный эксперимент

В рамках численного моделирования рассмотрим разрешение двух шумовых сигналов с применением одиночного приемника на фоне интенсивных внутренних волн (ИВВ), вызывающих горизонтальную рефракцию мод звукового поля. Распределение скорости звука по глубине приведено на рис. 1. Диапазон частот $\Delta f = 100 - 120$ *Гц*. Параметры жидкого поглощающего дна: отношение плотности грунта и воды $\rho = 1.8$, комплексный показатель преломления $n = 0.84(1 + 0.03i)$. Поле формируется $M = 4$ модами. Постоянные распространения мод $h_m(f_0)$ и их производные по частоте $dh_m(f_0)/df$ на средней частоте спектра $f_0 = 110$ *Гц* приведены в табл. 1.

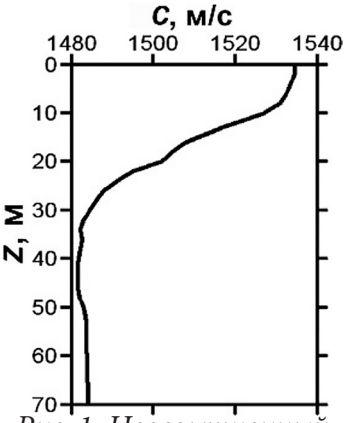


Рис. 1. Невозмущенный профиль скорости звука

Таблица 1

Параметры мод при частоте $f_0 = 110$ *Гц*

Номера мод, m	1	2	3	4
h_m, $м^{-1}$	0.4635	0.4557	0.4450	0.4310
$(dh_m/df)/10^{-3}$, $с/м$	2.4015	2.4177	2.4504	2.5172

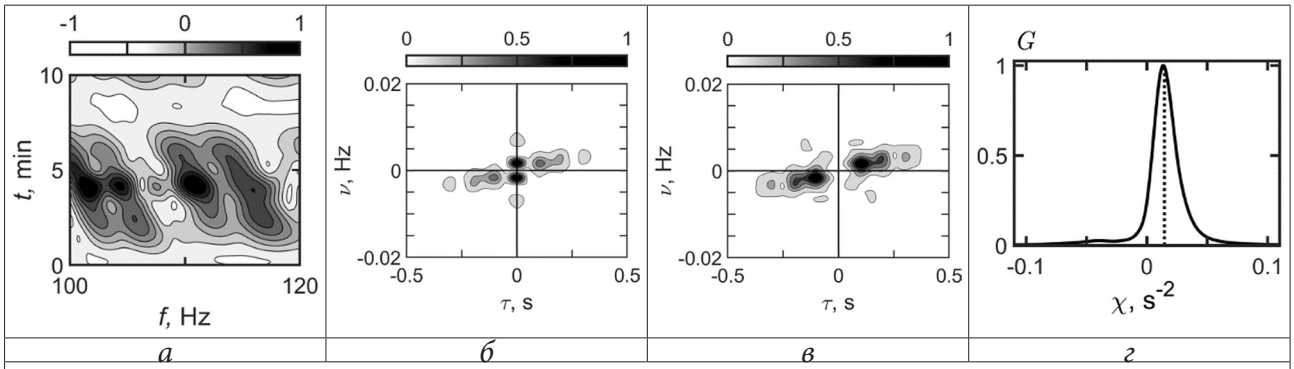
В начальный момент времени $t_0 = 0$ расстояние между источниками и приемником $r_{0(1,2)} = 12$ *км*. Радиальные скорости источников: $w_{(1)} = -1$ *м/с*, $w_{(2)} = -4$ *м/с*. Источники расположены на глубине $z_{(1,2)} = 15$ *м*, одиночный приемник — на глубине $z_q = 65$ *м*. Равномерный спектр шумоизлучения, интенсивность одинаковая. Шумовые реализации длительностью $T = 4$ *с* звукового давления регистрируются с периодичностью $T_* = 5$ *с*. Модель возмущения: цуг ИВВ, состоящий из трех одинаковых солитонов. Параметры солитона: амплитуда $A = 20$ *м*, ширина $\eta = 200$ *м*, скорость $u = 0.7$ *м/с*. Период между солитонами $\Lambda = 250$ *м*. Ширина фронта возмущения превышает длину трассы. Время наблюдения $\Delta t = 10$ *мин*.

Результаты голографической обработки в отсутствие ИВВ по сигналам отдельных источников и суммарному сигналу двух источников представлены на рис. 2–4. Угловые коэффициенты наклона интерференционных полос: $\delta f_{(1)}/\delta t_{(1)} = -0.015\,c^{-2}$ (рис. 2а); $\delta f_{(2)}/\delta t_{(2)} = -0.062\,c^{-2}$ (рис. 3а). Координаты пиков первых фокальных пятен: $\tau_{1(1)} = 0.075$ *с*, $\nu_{1(1)} = 0.0019$ *Гц* (рис. 2б); $\tau_{1(2)} = 0.077$ *с*, $\nu_{1(2)} = 0.0068$ *Гц* (рис. 3б). Восстановленные параметры источников: $w_{(1)} = -1.12$ *м/с*, $r_{0(1)} = 12.21$ *км*; $w_{(2)} = -3.93$ *м/с*, $r_{0(2)} = 12.53$ *км*. Положения максимумов функций обнаружения: $\varepsilon_{(1)} = 0.015$ c^{-2} (рис. 2в); $\varepsilon_{(2)} = 0.062$ c^{-2} (рис. 3в). Ширина полосы функции обнаружения на уровне 0.5 от максимума: $\Delta\chi_{(1)} = 0.018$ c^{-2}; $\Delta\chi_{(2)} = 0.037$ c^{-2}.

На интерферограмме суммарного поля (рис. 4а) прослеживаются перекрывающиеся интерференционные полосы сигналов двух источников, т.е. сигналы источников не интерферируют между собой. На голограмме (рис. 4б) спектральные плотности сигналов практически не накладываются друг на друга, поэтому координаты фокальных пятен, определяющие коорди-

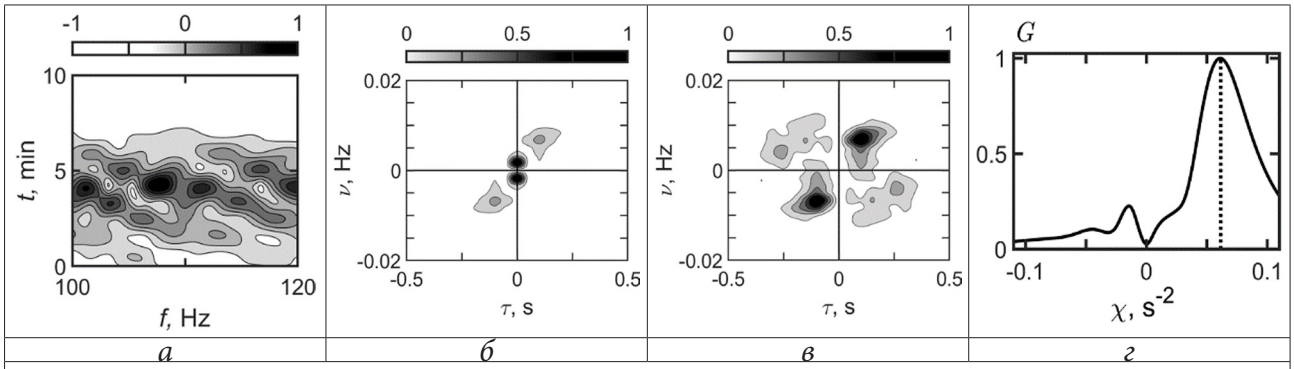
наты источников, не изменяются. Максимумы функций обнаружения (рис. 4в) приходятся на значения угловых коэффициентов, отвечающих отдельным сигналам. При равной мощности излучения, как видно из рис. 4в, максимум функции обнаружения, отвечающий первому сигналу, в 1.93 раза превышает максимум, второго сигнала. Это различие связано с увеличением ширины полосы функции обнаружения. Таким образом, в отсутствие ИВВ сигналы двух источников разрешаются.

Результаты голографической обработки при наличии ИВВ показаны на рис. 2–4. ИВВ вызывают размытие интерференционных полос отдельных сигналов. Угловые коэффициенты наклона локализованных полос $\delta f_{(1)} / \delta t_{(1)} = -0.014\, c^{-2}$ (рис. 2а); $\delta f_{(2)} / \delta t_{(2)} = -0.063\, c^{-2}$ (рис. 3а).



а *б* *в* *г*

Рис. 2. Нормированные интерферограмма (а), модуль неочищенной голограммы (б), модуль голограммы после очистки (в) и функция обнаружения очищенной голограммы (г) в присутствии ИВВ. Источник двигается с радиальной скоростью $w_{(1)} = -1$ *м/с*



а *б* *в* *г*

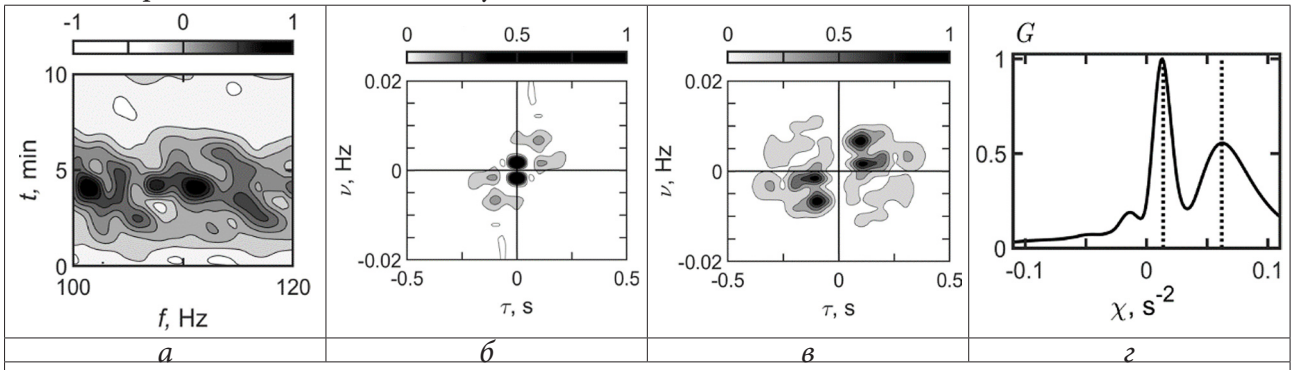
Рис. 3. Нормированные интерферограмма (а), модуль неочищенной голограммы (б), модуль голограммы после очистки (в) и функция обнаружения очищенной голограммы (г) в присутствии ИВВ. Источник двигается с радиальной скоростью $w_{(2)} = -4$ *м/с*

Изменение угла наклона интерференционных полос по сравнению со случаем отсутствия ИВВ не заметно. На оси частоты неочищенных голограммах (рис. 2б, 3б) наблюдаются спектральные плотности в форме фокальных пятен, обусловленных интерференцией волн возмущенного поля. Интенсивность этих спектральных пятен существенно превышает интенсивность фокальных пятен невозмущенных сигналов, что обусловлено большим временем наблюдения. Очищенные от ИВВ спектральные плотности голограмм вдоль оси частоты представлены на рис. 2в, 3в. Координаты пика первых фокальных пятен: $\tau_{1(1)} = 0.077\, c, \nu_{1(1)} = 0.0017$ *Гц* (рис. 2в); $\tau_{1(2)} = 0.077$ *c*, $\nu_{1(2)} = 0.0070$ *Гц* (рис. 3в). Восстановленные параметры источников: $w_{(1)} = -0.96$ *м/с*, $r_{0(1)} = 12.53$ *км*; $w_{(2)} = -4.06$ *м/с*, $r_{0(2)} = 12.53$ *км*.

Как видно, при очистке голограмм ИВВ практически не влияют на восстановленные параметры отдельных источников. Положения максимумов функций обнаружения: $\varepsilon_{(1)} = 0.015\, c^{-2}$ (рис. 2г); $\varepsilon_{(2)} = 0.061\, c^{-2}$ (рис. 3г). Ширина полосы функции обнаружения на уровне 0.5 от мак-

симума: $\Delta\chi_{(1)} = 0.020\ c^{-2};\ \Delta\chi_{(2)} = 0.051\ c^{-2}$. В области отрицательных значений χ для второго сигнала наблюдается незначительный максимум функции обнаружения, отвечающий интерференции невозмущенных и возмущенных волновых полей источника. Максимум в 4.14 раза меньше пика невозмущенного сигнала.

Интерферограмма суммарного поля (рис. 4а) представляет собой совокупность фокальных пятен на фоне размытой интерференционной картины. На неочищенной голограмме (рис. 4б), как и в случае отдельных сигналов источников (рис. 2б, 3б), на оси частоты регистрируются фокальные пятна возмущенного поля, которые по интенсивности намного превышают интенсивность фокальных пятен невозмущенных сигналов.



а *б* *в* *г*

Рис. 4. Нормированные интерферограмма (а), модуль неочищенной голограммы (б), модуль голограммы после очистки (в) и функция обнаружения очищенной голограммы (г) в присутствии ИВВ, сформированные сигналами двух источников

На очищенной голограмме (рис. 4в) координаты пиков первых фокальных пятен совпадают с координатами пиков фокальных пятен отдельных сигналов. Восстановленные параметры источников идентичны параметрам отдельных источников. Положения максимумов функции обнаружения сигналов: $\varepsilon_{(1)} = 0.015\ c^{-2},\ \varepsilon_{(2)} = 0.063\ c^{-2}$ (рис. 4г). Максимум первого сигнала в 1.81 раз превышает максимум второго сигнала. Максимум, обусловленный интерференцией невозмущенных и возмущенных полей источников, лежащий в области отрицательных значений χ, в 2.91 раза меньше максимума второго сигнала. Сигналы двух источников разрешаются, восстанавливаемые параметры источников обнаруживают весьма слабую чувствительность к присутствию ИВВ при большом времени наблюдения.

Заключение

Представлены результаты численного эксперимента по разрешению сигналов источников в случайно-неоднородной океанической среде голографическим методом. Описан голографический метод разрешения сигналов от различных источников. В рамках численного эксперимента показано, что в условиях пространственно-временной изменчивости океанической среды голограмма, созданная несколькими шумовыми сигналами, представляет собой совокупность голограмм отдельных сигналов, формирующихся за счёт невозмущённых и возмущённых полей. Голограммы каждого источника формируются компонентами невозмущённого и возмущённого поля с чётко выраженными фокусировками, расположенными в разных областях итоговой голограммы. Кроме того, на голограмме присутствует слабоконтрастный размазанный фон, образуемый интерференцией этих двух полей. На голограмме спектральная плотность сигналов, обусловленная возмущённым полем, концентрируется в узкой полосе вдоль оси частот, ширина которой определяется частотным диапазоном. В то же время спектральная плотность сигналов, вызванная невозмущённым полем, локализуется в узких полосах, ширина которых зависит от времени наблюдения, а наклон определяется параметрами

движения источников. Такая конфигурация спектральных плотностей позволяет с высокой точностью фиксировать голограммы отдельных сигналов и на их основе восстанавливать радиальные скорости и расстояния до источников.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/.

Литература

1. *Переселков С. А.* Голографическая обработка широкополосных гидроакустических сигналов / С. А. Переселков, В. М. Кузькин. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. – 183 с.

2. *Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization / S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, № 2. – P. 666–676.

3. *Ehrhardt M.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water / M. Ehrhardt, S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin, I. Kaznacheev, P. Rybyanets // J. Sound Vibr. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

4. *Kuz'kin V. M.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, V. G. Zvyagin, Yu. A. Malykhin, D. Yu. Prosovetskiy // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 160–167.

5. *Badiey M.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 4. – P. 313–319.

6. *Kaznacheeva E. S.* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves / E. S. Kaznacheeva, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Phys. Wave Phenom. – 2021. – Vol. 29, № 3. – P. 278–284.

7. *Pereselkov S.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, M. Ehrhardt, S. Tkachenko, P. Rybyanets, N. Ladykin // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11, № 10. – P. 1922.

8. *Kuz'kin V. M.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, M. Badiey, N. V. Ladykin, A. Yu. Malykhin, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 346–354.

9. *Казначеев И. В.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником / И. В. Казначеев, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1 – С. 33–45.

10. *Кузькин В. М.* Обнаружение источника в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344

11. *Kuz'kin V. M.* Range of detection of underwater sound source / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, S. A. Tkachenko, Yu. V. Matvienko, Yu. A. Khvorostov // Phys. Wave Phenom. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 339–345.

12. *Кузнецов Г. Н.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

13. *Kuznetsov G. N.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, I. V. Kaznacheev, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2017. – Vol. 25, № 4. – P. 299–306.

14. *Kuz'kin V. M.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, I. V. Kaznacheev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – 26, № 1. – P. 63–73.

15. *Kuznetsov G. N.* finding of a noise sound source / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy// Phys. Wave Phenom. – 2019. – T. 27, № 3. – P. 237–241.

16. *Кузькин В. М.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 197–204.

17. *Кузькин В. М.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, Н. В. Ладыкин, М. В. Куцов // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – Т.15, № 3. – С. 317-326.

18. *Kuz'kin V. M.* Mode selection in oceanic waveguides / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskii, E. S. Kaznacheeva // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, № 2. – P. 111–118.

19. *Kuz'kin V. M.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, E. S. Kaznacheeva, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2022. –Vol. 30, № 5. – P. 314–320.

20. *Кузькин В. М.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. –Т.14, № 3. – С. 279–286.

21. *Kuz'kin V. M.* Resolving power of the interferometric method of source localization / V. M. Kuz'kin, G. N. Kuznetsov, S. A. Pereselkov, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

УДК 519.635.1

СРАВНЕНИЕ НЕЯВНЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ

М. И. Попов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе сравниваются два подхода к построению неявных конечно-разностных схем для неоднородного бигармонического уравнения в задаче об изгибе прямоугольной пластины, защемленной по контуру. В первом, производные аппроксимируются центральными разностями, со вторым порядком погрешности, образуя 13-точечный шаблон. Во втором, посредством введения приведенного момента, бигармоническое уравнение распадается на систему двух уравнений Пуассона. Производные в каждом из уравнений заменяются центральными разностями, со вторым порядком погрешности, образуя 5-точечный крест. На тестовом примере сравниваются абсолютные погрешности обеих схем.

Ключевые слова: изгиб пластины, бигармоническое уравнение, уравнение Пуассона, конечно-разностная схема, аппроксимация производной.

Введение

Неоднородное бигармоническое уравнение возникает при моделировании изгиба пластин, а также свободной конвекции ньютоновской жидкости в кондуктивно-ламинарном режиме [1]. Существуют аналитические решения в виде рядов для некоторых постановок. Плохая сходимость тригонометрических рядов заставляет учитывать большое количество членов ряда для приемлемой точности. Поскольку в выражения для коэффициентов ряда входят тригонометрические и гиперболические функции, в расчетах требуются сотни десятичных разрядов. Эти два обстоятельства существенным образом увеличивают время расчета. В связи с этим для решения подобных задач становится актуальным использование численных методов [2, 3].

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую жесткую прямоугольную пластину. На каждой границе пластина защемлена, а во внутренних точках действует сила $q(x,y)$ (рис. 1). Прогиб пластины $w(x,y)$ в данных условиях, как известно, описывается уравнением Софи-Жермен. Таким образом, получаем следующую краевую задачу в области $\Omega = [0;a]\times[0;b]$ [4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2} = \frac{q(x,y)}{D}. \tag{1}$$

$$w(0,y) = w(a,y) = w(x,0) = w(x,b) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w(0,y)}{\partial x} = \frac{\partial w(a,y)}{\partial x} = \frac{\partial w(x,0)}{\partial y} = \frac{\partial w(x,b)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость.

Уравнение (1) содержит 3 производные 4 порядка. Для обеспечения 2 порядка точности, четвертые производные по x и y необходимо аппроксимировать, используя как минимум 5 точечный шаблон, смешанную производную — 9 точечный. Это несколько усложняет конечно-разностную схему, так как приходится решать систему линейных уравнений с более плотной матрицей. Для упрощения схемы понизим порядок уравнения. Представим уравнение (1) в виде:

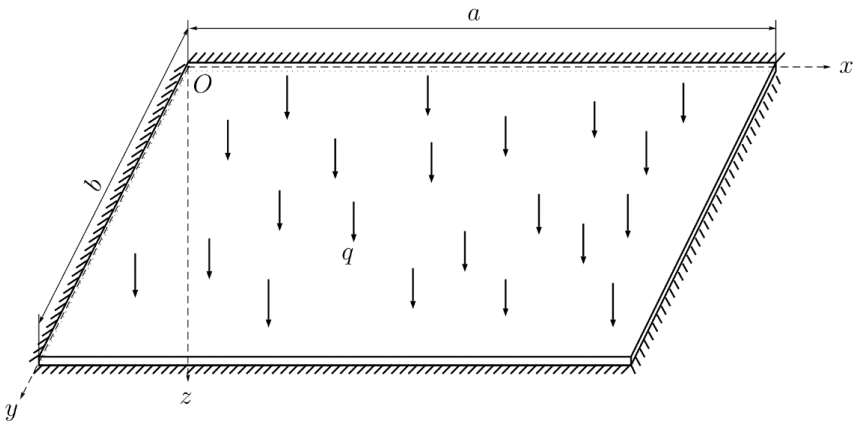


Рис. 1. Изгибаемая пластина

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\frac{q}{D}. \tag{4}$$

Определим приведенный момент M [5]:

$$M=\frac{M_x+M_y}{1+\nu}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

где M_x, M_y — изгибающие моменты.

Подставив приведенный момент в уравнение (4), получим:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}=-q.$$

Таким образом, уравнение (1) эквивалентно системе 2 уравнений Пуассона:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\dfrac{M}{D},\\[2ex] \dfrac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 M}{\partial y^2}=-q.\end{cases} \tag{5}$$

2. Разностная схема для бигармонического уравнения

Составим конечно-разностную схему 2 порядка точности для краевой задачи (1)–(3). Для этого непрерывную область Ω, заменим сеткой с шагами Δx, Δy, $\grave{U}_{\Delta x,\Delta y}=\{(x_i,y_j)=(i\Delta x, j\Delta y)\}$, $i=0,..,n$, $j=0,..,m$. Конечно-разностный аналог частной производной четвертого порядка $\partial^4 u/\partial x^4$ получим с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа построенного в узлах $w_{i+2,j}$, $w_{i+1,j}$, $w_{i,j}$, $w_{i-1,j}$, $w_{i-2,j}$ [6]:

$$\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_{i,j}=\frac{w_{i+2,j}-w_{i+1,j}+6w_{i,j}-4w_{i-1,j}+w_{i-2,j}}{\Delta x^4}+O\left(\Delta x^2\right).$$

Аналогично получим разностное выражение для $\partial^4 u/\partial y^4$:

$$\left.\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right|_{i,j}=\frac{w_{i,j+2}-w_{i,j+1}+6w_{i,j}-4w_{i,j-1}+w_{i,j-2}}{\Delta y^4}+O\left(\Delta y^2\right).$$

Применив центральные разности дважды по соответствующим переменным, составим разностное выражение для смешанной производной:

$$\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2}\Big(w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} + 4w_{i,j} - 2w_{i,j-1} +$$

$$+ w_{i-1,j+1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}\Big) + O\left(\Delta x^2, \Delta y^2\right).$$

Подставив в уравнение (1) аппроксимации производных и отбросив слагаемые второго порядка малости, получим разностное уравнение:

$$\frac{w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{\Delta x^4} + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2}\Big(w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} +$$

$$+4w_{i,j} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j+1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}\Big) + \frac{w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{\Delta y^4} = \frac{q_{i,j}}{D}. \quad (6)$$

Граничные условия отсутствия прогибов на границе (2), накладываемые на искомую функцию приобретут вид:

$$w_{0,j} = w_{n,j} = w_{i,0} = w_{i,m} = 0. \quad (7)$$

Граничное условие (3) аппроксимируем левосторонней и правосторонней разностями второго порядка [7]:

$$\frac{-3w_{0,j} + 4w_{1,j} - w_{2,j}}{2\Delta x} = \frac{3w_{n,j} - 4w_{n-1,j} + w_{n-2,j}}{2\Delta x} =$$

$$= \frac{-3w_{i,0} + 4w_{i,1} - w_{i,2}}{2\Delta y} = \frac{3w_{i,m} - 4w_{i,m-1} + w_{i,m-2}}{2\Delta y} = 0.$$

Откуда

$$w_{i,2} = 4w_{i,1},\ w_{i,m-2} = 4w_{i,m-1},\ w_{2,j} = 4w_{1,j},\ w_{n-2,j} = 4w_{n-1,j}. \quad (8)$$

Таким образом, непрерывная краевая задача (1)–(3) свелась к конечно-разностной схеме (6)–(8). Для удобства назовем ее схема 1. Построенная схема имеет неявный характер, поэтому абсолютно устойчива.

3. Разностная схема для системы уравнений с приведенным моментом

Для краевой задачи (5), (2), (3) также составим конечно-разностную схему 2 порядка точности. Аппроксимацию вторых производных прогиба и приведенного момента получим, применив центральные разности второго порядка:

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right),\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O\left(\Delta y^2\right),$$

$$\left.\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{M_{i+1,j} - 2M_{i,j} + M_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right),\ \left.\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{M_{i,j+1} - 2M_{i,j} + M_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O\left(\Delta y^2\right).$$

Подставив эти выражения в систему (5) и отбросив слагаемые второго порядка малости, получим систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \dfrac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -\dfrac{M_{i.j}}{D}, \\ \dfrac{M_{i+1,j} - 2M_{i,j} + M_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \dfrac{M_{i,j+1} - 2M_{i,j} + M_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -q_{i,j}. \end{cases} \quad (9)$$

Граничные условия на прогибы выражаются равенствами (7) и (8). Граничные условия на приведенный момент отсутствуют, что компенсируется двумя граничными условиями на прогибы пластины. Схему (9), (8), (7) для удобства назовем схемой 2.

4. Решение тестовых задач

Для сравнения разностных схем проведем численные эксперименты. Для простоты рассмотрим безразмерную квадратную пластину. В области $\Omega = [0;1]\times[0;1]$ введем равномерную сетку с шагами $\Delta x = \Delta y = h$.

На рис. 2 изображены расчетные шаблоны для схем 1 и 2. Желтые круги — узлы разностного уравнения. Розовые — узлы граничного условия равенства нулю производных. Цифры внутри кругов — весовые коэффициенты.

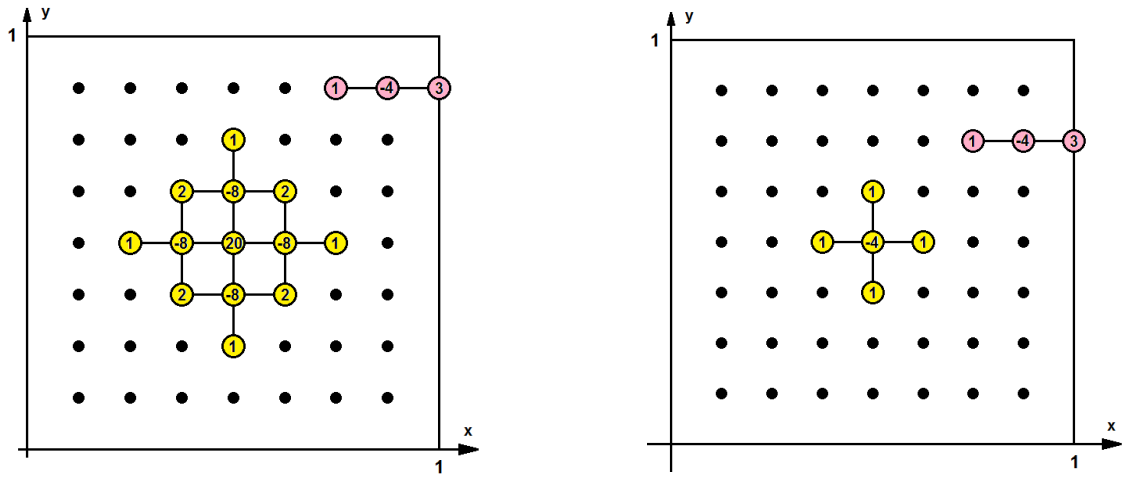


Рис. 2. Расчетные шаблоны: слева для схемы 1, справа для схемы 2

В качестве тестовой функции для прогибов рассмотрим синусоидальную $w(x,y) = \frac{1}{32}\sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)$ функцию. Нетрудно увидеть, что она удовлетворяют граничным условиям, а также условиям, при которых пластину можно считать тонкой и жесткой. Данная функция имеет единственный максимум в центре квадрата.

Сравнивать разностные схемы будем по двум параметрам: максимальная абсолютная погрешность и время расчета. Максимальная абсолютная погрешность достигается в центре квадрата. В табл. 1 приведены максимальные абсолютные погрешности и время расчета обеих схем для различных значений шага сетки.

Таблица 1

Расчет прогибов для тестовой функции

Шаг сетки	Максимальная абсолютная погрешность		Время выполнения программы, с	
	Схема 1	Схема 2	Схема 1	Схема 2
1/10	9,18E-4	9,18E-4	2	4
1/20	3,76E-4	3,76E-4	3	13
1/30	1,88E-4	1,88E-4	14	47
1/40	1,11E-4	1,11E-4	98	225
1/50	7,34E-5	7,34E-5	174	398
1/60	5,2E-5	5,2E-5	369	884
1/70	3,87E-5	3,87E-5	818	1675
1/80	3E-5	3E-5	1552	3003
1/90	2,39E-5	2,39E-5	3123	5108
1/100	1,95E-5	1,94E-5	5156	8341

Согласно табл. 1 обе схемы имеют одинаковую погрешность в центральной точке и отличаются лишь временем расчета. Лучшую скорость показывает 1 схема. Относительная погрешность в центральной точке составляет всего лишь 0,06 % при значении шага сетки 0,01. Столь малая погрешность свидетельствует об эффективности применяемых для решения задачи конечно-разностных схем.

Заключение

В тестовых расчетах оба подхода показали одинаковую погрешность вычисления. Размерность системы линейных уравнений в схеме с понижением порядка в 2 раза больше, но матрица системы более разряжена. Удвоенная размерность матрицы, несмотря на разряженность, в среднем в 2 раза увеличивает время расчета. Учитывая очень малую погрешность расчетов, рассмотренные подходы можно успешно использовать для решения задач об изгибе прямоугольных пластин.

Литература

1. *Попов М. И.* Приближенное аналитическое решение внутренней задачи кондуктивно-ламинарной свободной конвекции / М. И. Попов, Е. А. Соболева // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2016. – № 4(70). – С. 78–84. – DOI 10.20914/2310-1202-2016-4-78-84. – EDN XWESHF.

2. *Ряжских В. И.* О численном интегрировании нестационарного неоднородного бигармонического уравнения в задачах кондуктивной свободной конвекции / В. И. Ряжских, М. И. Попов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2014. – Т. 10, № 1. – С. 56–62. – EDN RWUBRH.

3. *Попов М. И.* Интегрирование бигармонического уравнения по неявной схеме / М. И. Попов // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2018. – Т. 80, № 2(76). – С. 114–118. – DOI 10.20914/2310-1202-2018-2-114-118. – EDN YBECBV.

4. *Ермоленко А. В.* К решению неоднородного бигармонического уравнения / А. В. Ермоленко, Н. В. Кожагельдиев // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 3(44). – С. 64–78. – DOI 10.34130/1992-2752_2022_3_64. – EDN LUGCEY.

5. *Монахов В. А.* Теория пластин и оболочек: учеб. пособие по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» / В. А. Монахов. – Пенза : ПГУАС, 2016. – 252 с.

6. *Куксенко С. П.* Электромагнитная совместимость: численные методы решения задач электростатики: учеб. пособие для студентов техн. направлений подготовки / С. П. Куксенко. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2020. – 268 с.

7. Численные методы решения задач об изгибе квадратной пластины / М. Ю. Смирнов, М. И. Попов, А. В. Скрыпников [и др.] // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Материалы. Конструкции. Технологии. – 2021. – № 3. – С. 111–124. – DOI 10.25686/2542-114X.2021.3.111. – EDN TAHDBL.

УДК 004.932

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ОДНОВРЕМЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ И КАРТОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ СИМУЛЯЦИИ GAZEBO ДЛЯ РОБОТА ROIN RTS 100

Н. С. Пугачев

Воронежский государственный университет

Аннотация. Во многих случаях задача автономного вождения может быть решена путем составления карты местности с последующей локализацией робота на этой карте. Это позволяет роботу принимать решения о движении, учитывая предыдущий опыт. Однако процесс составления карты местности и локализации представляет собой слаженную работу нескольких программных комплексов, отвечающих за перемещение робота, его восприятие окружающей среды через показания сенсоров и последующее агрегирование этих данных. В этой статье приведен опыт разработки подобной системы.
Ключевые слова: компьютерное зрение, автономное вождение, робот, SLAM, Gazebo, ROS 2, камеры глубины, облака точек, RTAB-MAP.

Введение

В процессе движения современный робот может собирать достаточно большое количество информации о среде в которой он перемещается. Это могут быть как команды оператора, так и, например, показания акселерометра и гироскопа, отображающие то насколько эффективно эти команды были исполнены. Кроме того, если робот оснащен инфракрасными камерами глубины (которые находят все большее применение не только в сфере робототехники, но и в современных смартфонах), появляется не только возможность оценивать расстояние до объектов и выделять семантическое содержание сцены, но и обрабатывать эту информацию с помощью алгоритмов одновременной локализации и картографии. Результатом работы этих алгоритмов является карта местности, позволяющая роботу затем использовать ее для принятия решений во время автономного движения.

Целью этой работы является разработка программного комплекса, позволяющего применять методы локализации и картографии для робота ROIN RTS 100, просматривать результаты работы этих методов, вычислять визуальную одометрию и сохранять полученные карты.

1. Симуляция Gazebo

В предыдущей публикации [1] был рассмотрен процесс построения цифрового двойника ROIN RTS 100, на основе системы ROS 2 [2] и симуляции Gazebo [3] (рис. 1). В настоящей работе рассмотрена агрегация данных полученных во время работы симуляции.

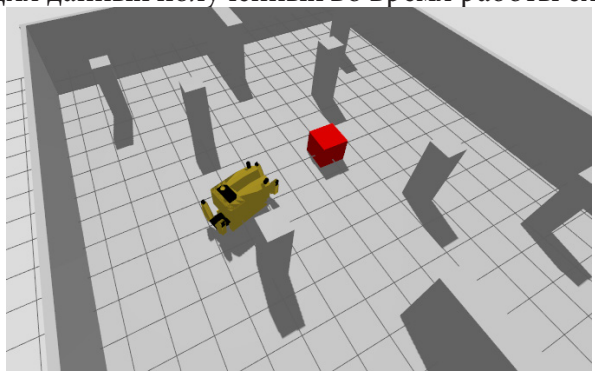


Рис. 1. Робот Roin RTS 100 в среде симуляции Gazebo

1.1. Одометрия

В робототехнике *одометрией* называется метод оценки положения робота на основе данных о движении его приводов. Помимо этого, поскольку одометрия не является точным положением робота, а только его оценкой, для улучшения точности этой оценки учитывают данные получаемые с IMU сенсора. *IMU-сенсор* представляет собой комбинацию из акселерометра (для определения ускорения по осям), гироскопа(для измерения поворота объекта вокруг собственных осей), барометра (определение высоты подъема). Кроме того, существуют и другой метод вычисления одометрии на основе визуальных признаков, извлекаемых из последовательности изображений, снятых с камер установленных на роботе. В среде симуляции Gazebo был настроен сбор данных показаний IMU датчика, так же была настроена публикация данных одометрии.

1.2. Камера глубины

В среде симуляции Gazebo есть возможность эмулировать камеры глубины. Благодаря камерам глубины можно получать изображение в формате RGB D, где D — расстояние до объекта, соответствующего каждому пикселю изображения. Зная информацию о глубине изображения, положение и ориентацию камеры в пространстве можно рассчитать положение каждого пикселя относительно начала координат, таким образом получив трехмерный скан. Такой скан в трехмерной системе координат называется *облаком точек* (рис. 2).

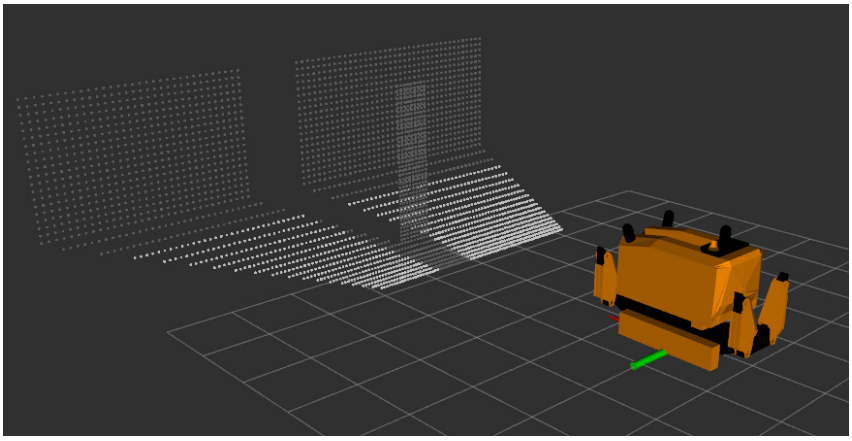


Рис. 2. Визуализация облака точек в системе Rviz, вычисленного на основе снятых камерой глубины изображений и информации о положении робота в пространстве

2. Одновременная картография и локализация

2.1. Алгоритм Rtab-map для картографии и визуальной одометрии

Как только налажен сбор данных, можно приступать к их агрегации. Целью агрегации данных является построение трехмерной карты местности. Семейство алгоритмов выполняющих эту задачу называется SLAM (одновременная локализация и построение карты). В качестве программной реализации SLAM был выбран подход из библиотеки RTAB-map[4]. RTAB-map представляет из себя набор алгоритмов решения задачи SLAM, с поддержкой камер глубины, стерео камер и лидаров. Rtab-map использует алгоритм Bag of words для сопоставления новых визуальных признаков с уже имеющимися в базе, что позволяет запоминать облака точек в каждый заданный момент времени, сопоставлять их между собой, составляя карту местности. Помимо этого, Rtab-map позволяет извлекать из признаков, полученных во время считывания

изображений и карт глубины, информацию о визуальной одометрии, что крайне полезно, как дополнительный источник уточнения оценки позиционирования робота.

2.2. Решение проблемы совместимости

Хотя библиотека Rtab-map совместима с системой ROS 2, рассчитана она на получение данных с реальных устройств, в нашем же случае используется симуляция. Специфика симуляции Gazebo состоит в том что она имеет свою, отдельную систему описания робота и среды в которую он помещен. Фактически библиотека Rtab-map не поддерживает форматы данных Gazebo, даже при учете их перевода в ROS 2 формат. Было выявлены следующие причины такого поведения:

1. Для создания экземпляра робота его оригинальное описание переводится из формата URDF в формат SDF, при этом меняются как оригинальные названия составных частей, так и сама структура этого описания;

2. Система координат симуляции и система координат используемая при описании робота в системе ROS 2 отличаются;

3. При инициализации датчиков в системе Gazebo создаются дополнительные составные части, которые из-за специфики именования не могут быть автоматически сопоставлены с первоначальными частями робота из формата URDF

4. В Gazebo при инициализации сенсоров и датчиков создаются отдельные составная части.

Таким образом создается два древовидных описания робота, одно в Gazebo, а другое в ROS 2. Из чего следует, что необходимо не только наладить мост, передающий данные из симуляции в ROS 2, но и провести дополнительные корректировки направленные на сопоставление двух моделей.

Для решения проблемы правильной локализации и корректного отображения данных полученных из симуляции необходимо на стадии запуска двух систем добавить в ROS 2 дополнительные ноды, обеспечивающие трансформацию координат датчиков созданных в Gazebo относительно соответствующих частей робота описанного в формате URDF. Для этого можно воспользоваться инструментом *tf2_tools*.

2.3. Построение карты местности

Так как проблема совместимости систем решена, можно осуществить передачу данных, полученных из симуляции Gazebo, в алгорит Rtab-map для их последующей агрегации. Полная схема потока данных выглядит следующим представлена ниже (рис. 3). На ней представлены следующие ключевые ноды (отдельные элементы публикующие и обрабатывающие данные):

1. */camera_left_depth, /imu и /roin_model* — данные с камеры глубины и данные о позиции робота в симуляции;

2. */ros_gz_bridge* — программный комплекс передачи данных из Gazebo в ROS 2;

3. */rtab_map и /rtab_map_viz* — ноды отвечающие за обработку облаков точек, полученных из показаний камеры глубины и нода визуализации составленной карты местности.

Разработанный программный комплекс имеет визуальный интерфейс представлен на рис. 4.

В процессе работы Rtab-map осуществляет запоминание облаков точек в форме графа, в затем проводит сравнение новых данных с уже имеющимися в графе для его оптимизации и обновления составленной карты. Обновление происходит на основе визуальных признаков, извлекаемых из RGB изображения, таким образом не только обновляется карта в соответствии с изменением окружающей среды, но и происходит постоянно уточнение вычисленной на основе визуальных признаков одометрии. Визуализацию работы Rtab-map можно увидеть на рис. 5.

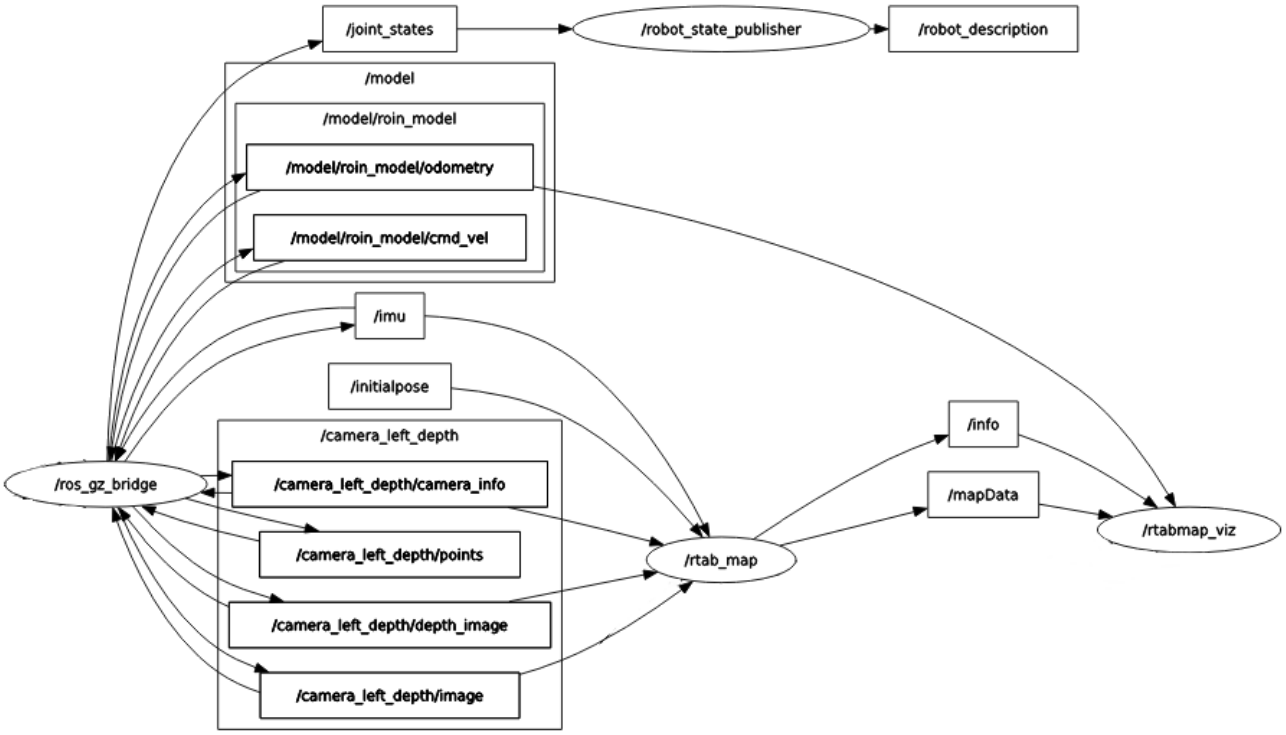


Рис. 3. Визуализация связи данных в разработанной системе

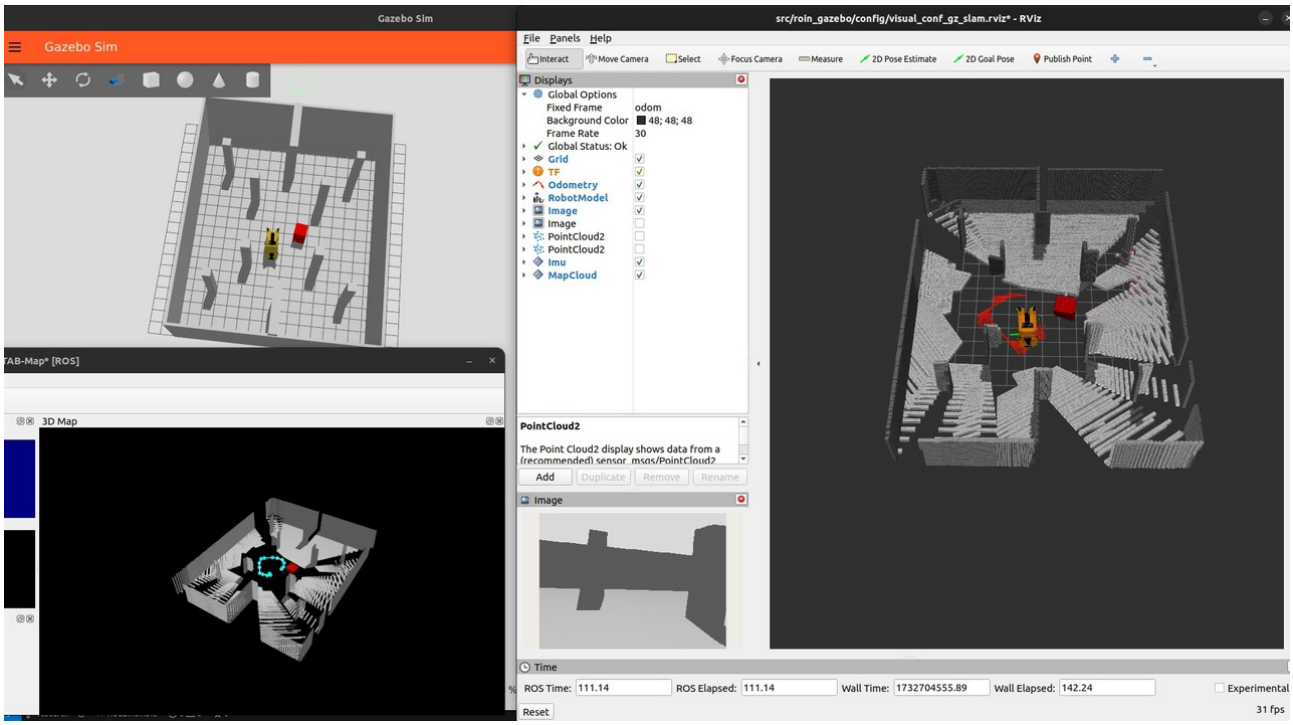


Рис. 4. Интерфейс системы. Слева сверху симуляция робота в Gazebo. Слева снизу агрегированное облако точек и визуальная одометрия полученные с помощью алгоритма Rtab-map. Справа визуализация всех полученных системой ROS 2 данных, включающая в себя данные одометрии, карту местности, положение робота и всех его составных частей

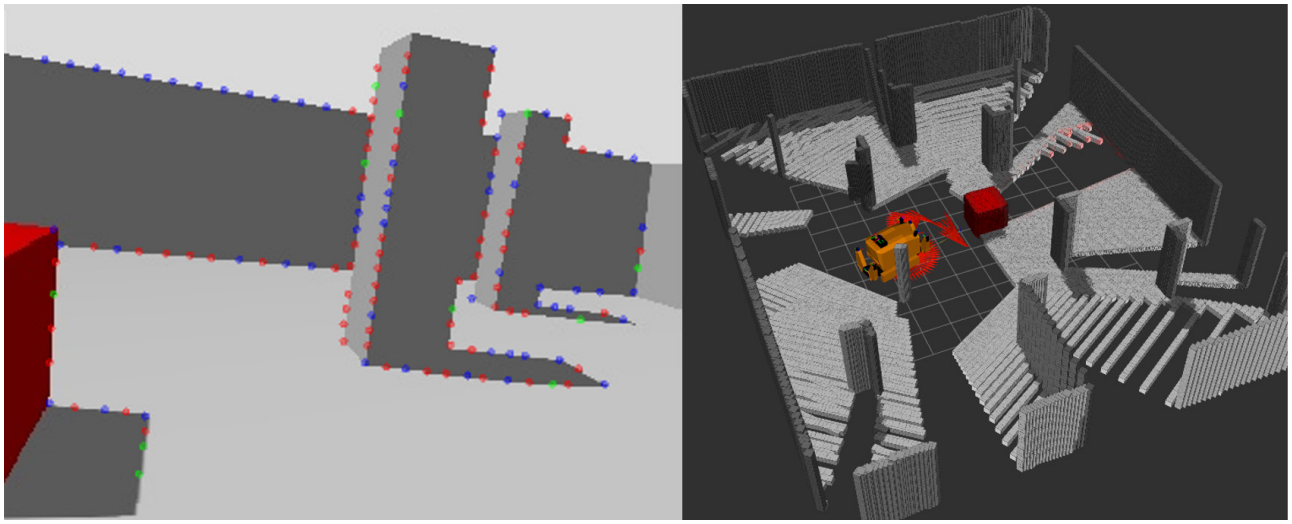


Рис. 5. Слева извлеченные визуальные признаки, где зеленым отмечены те признаки которые удалось сопоставить с уже имеющимися в базе данных, а красные новые. Справа изображение составленной карты местности, сделанное с помощью системы визуализации Rviz

Полученное во время проведения эксперимента представление карты и визуальной одометрии в формате графа, так как измерения происходят стабильно с определенной частотой, можно представить этот граф в табличном виде и сохранить его в формате базы данных. Далее полученный файл может быть визуализирован (рис. 6) как в режиме реального времени, так и после окончания эксперимента. Кроме того, при старте системы можно загрузить карту из этого файла, для дальнейшей работы с ней.

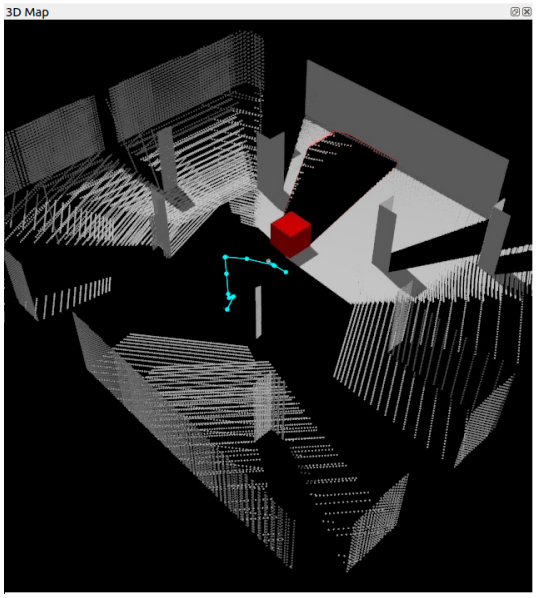


Рис. 6. Визуализация сохраненной карты местности и визуальной одометрии с помощью системы RTAB-map

Заключение

В ходе проделанной работы был реализован функционал работы с камерами глубины, налажены корректный импорт и визуализация облаков точек в системе ROS 2. Кроме того, была рассмотрена библиотека RTAB-map как практическая реализация SLAM-алгоритма. Таким образом, получено решение задачи картографии и локализации. Стоит отметить, что

данная библиотека совместима с системой ROS 2 и при определенных манипуляциях может использовать данные, полученные из симуляции, что позволяет осуществлять локализацию и картографирование, не выходят за пределы системы ROS 2. Это преимущество позволит в дальнейшем использовать SLAM от RTAB-map вместе с модулем навигации NAV 2[5], что даст возможность использовать модули установки целевых локаций, подключения GPS системы и планирования оптимальных траекторий перемещения.

Более того, дополнительный функционал, такой как визуальная одометрия, алгоритмы калибровки камер глубины и лидаров и сохранение карт в формате баз данных с возможностью их загрузки, позволит собирать датасеты карт, обрабатывать их модулем навигации и проводить тестирование различных конфигураций робота при выборе навесного оборудования.

Литература

1. *Пугачев Н. С.* Построение цифрового двойника робота ROIN-RTS-100 / Н. С. Пугачев // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Межвузовской научной конференции молодых ученых и студентов (Воронеж, 24–25 апреля 2024 г.) – Воронеж : Научная книга, 2024. – 738 с.

2. Оффициальная документация ROS 2: https://docs.ros.org/en/iron/index.html. – (Дата обращения: 01.06.2024).

3. Оффициальный сайт Gazebo: https://gazebosim.org/home. – (Дата обращения: 15.05.2024).

4. RTAB-Map as an Open-Source Lidar and Visual SLAM Library for Large-Scale and Long-Term Online Operation https://arxiv.org/pdf/2403.06341. – (Дата обращения: 15.10.2024).

5. Оффициальная документация NAV 2: https://docs.nav2.org/index.html. – (Дата обращения: 01.08.2024).

УДК 681.5.075; 004.942

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОКАРДИОСТИМУЛЯТОРОМ

Р. И. Рахимова

Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова

Аннотация. В работе рассмотрена задача математического и компьютерного моделирования системы управления кардиостимулятором. Построена дискретная стохастическая модель в пространстве состояний. Исследованы свойства полной управляемости и полной наблюдаемости модели в зависимости от модельного параметра. Для ускорения и автоматизации расчетов разработан скрипт на языке Maple 2022, который позволяет получить символьное представление матриц модели, а также матриц управляемости и наблюдаемости. Компьютерная модель разработана на языке Python.
Ключевые слова: система управления кардиостимулятором, дискретная модель в пространстве состояний, управляемость, наблюдаемость, компьютерная модель.

Введение

В настоящее время одной из важных задач является вопрос о правильной интерпретации данных ЭКГ пациентов, которым имплантированы постоянные электрокардиостимуляторы, которые являются миниатюрными компьютеризированными системами с большим количеством программируемых параметров и стимуляционных алгоритмов.

При разработке новых моделей кардиостимуляторов целесообразно проводить предварительные исследования с помощью математических моделей с целью выявления преимуществ и недостатков разрабатываемого программного обеспечения.

Целью данной работы является построение дискретной стохастической системы управления кардиостимулятором, представленной разностными уравнениями в пространстве состояний, исследовании свойств полной управляемости и наблюдаемости полученной модели, а также в разработке и программной реализации соответствующей компьютерной модели на языке Python.

В качестве исходных данных рассмотрим замкнутую динамическую систему, включающую в себя кардиостимулятор и датчик частоты сердечных сокращений [1, стр. 300].

1. Построение дискретной математической модели управления электрокардиостимулятором

1.1. Переход к непрерывной модели в пространстве состояний к дискретной модели

В работе [2] решена задача построения математической модели системы управления кардиостимулятором в пространстве состояний и в непрерывном времени. Непрерывная модель в форме стандартной наблюдаемой модели (СНМ) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12K & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \tag{2}$$

где $z(t)$ — действительная частота сердечных сокращений, $u(t)$ — заданная частота сердечных сокращений, $d(t)$ — внешнее возмущение, K — настраиваемый параметр модели. Вы-

полним переход от модели СНМ в непрерывном времени к дискретной модели, представленной разностными уравнениями в пространстве состояний.

Запишем общий вид линейного разностного матричного уравнения состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$ [3] с учетом постоянных матриц F и B:

$$x(t_i) = \Phi(\tau)x(t_{i-1}) + B_d(\tau)u(t_{i-1}), x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

где $\Phi(\tau)$ — переходная матрица состояния, которая может быть найдена согласно выражению

$$\Phi(\tau) \div \Phi(s) = (Is - F)^{-1}, \tag{4}$$

Для перехода к дискретной модели найдем $\Phi(\tau)$, где $\tau = t_{i+1} - t_i$. Из выражения (1) вычислим

$$(Is - F)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+12}{s^2+12K+12s} & \dfrac{1}{s^2+12K+12s} \\ \dfrac{-12K}{s^2+12K+12s} & \dfrac{s}{s^2+12K+12s} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

Обратное преобразование Лапласа для элементов матрицы (5) найдем с помощью специально разработанного скрипта в интерактивной среде Maple 2022. Для удобства введем обозначения для элементов матрицы $\Phi(\tau)$:

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\tau) & \varphi_{12}(\tau) \\ \varphi_{21}(\tau) & \varphi_{22}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Для удобства в решении заменим $A := \sqrt{9-3K}$.

Запишем найденные значения элементов матрицы (7):

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{e^{-6\tau}\left(\cosh(2\tau A)A + 3\sinh(2\tau A)\right)}{A}$$

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\frac{e^{-6\tau}\sinh(2\tau A)}{A}$$

$$\varphi_{21}(\tau) = \frac{-6Ke^{-6\tau}\sinh(2\tau A)}{A}$$

$$\varphi_{22}(\tau) = \frac{e^{-6\tau}\left(\cosh(2\tau A)A + 3\sinh(2\tau A)\right)}{A}.$$

Далее вычислим значения матрицы $B_d(\tau)$. Общий вид выражения для вычисления этой матрицы будет следующий:

$$B_d(\tau) = \int_0^\tau \Phi(\tau - t)Bdt.$$

Для удобства обозначим элементы матрицы B_d как

$$\hat{\mathbf{A}}_d(\tau) = \begin{bmatrix} Bd_{11}(\tau) & Bd_{12}(\tau) \\ Bd_{21}(\tau) & Bd_{22}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

С помощью разработанного скрипта найдем и запишем полученные значения для элементов матрицы (7):

$$Bd_{11}(\tau) = -\frac{1}{2}\frac{-2A + Ae^{2A\tau-6\tau} + 3e^{2A\tau-6\tau} + Ae^{-2\tau(A+3)} - 3e^{-2\tau(A+3)}}{A}$$

$$Bd_{12}(\tau) = -\frac{1}{4}\frac{-4A - Ke^{2A\tau-6\tau} + 2Ae^{2A\tau-6\tau} + 6e^{2A\tau-6\tau} + Ke^{-2(A+3)} + 2Ae^{-2\tau(A+3)} - 6e^{-2\tau(A+3)}}{KA}$$

$$Bd_{21}(\tau)=\frac{3K\left(e^{4\tau A}-1\right)e^{-2\tau(A+3)}}{A}$$

$$Bd_{22}(\tau)=\frac{1}{2}\frac{-2A+Ae^{2A\tau-6\tau}+Ae^{-2\tau(A+3)}+3e^{2A\tau-6\tau}-3e^{-2\tau(A+3)}}{A}$$

Утверждение 1. *Дискретная модель электрокардиостимулятора, представленная линейными разностными уравнениями в пространстве состояний, имеет следующий вид:*

$$x(t_i)=\Phi(\tau)x(t_{i-1})+B_d(t_{i-1})u(t_{i-1}),x(t_0)=x_0, \tag{8}$$

$$z(t_i)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t_i), \tag{9}$$

в которой матрицы $\Phi(\tau)$ *и* $B_d(\tau)$ *есть (7) и (8). Отдельно рассмотрим случай, когда* $K=3$.

С помощью специально разработанного скрипта в интерактивной среде Maple 2022, найдем значения элементов матрицы $\Phi(\tau)$ из выражения (6):

$$\Phi(\tau)=\begin{bmatrix}e^{-6\tau} & 0\\ 0 & e^{-6\tau}\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Далее вычислим значения матрицы $\mathrm{B}_d(\tau)$. Из выражения (3):

$$\mathrm{B}_d(\tau)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6}-\frac{e^{-6\tau}}{6}\\ 6-6e^{-6\tau} & 0\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Из (10) видно, что компоненты вектора состояния при $K=3$ являются независимыми.

1.2. Анализ свойств полной управляемости и наблюдаемости для построенной дискретной модели

Исследуем свойства управляемости и наблюдаемости построенной дискретной модели.

1) Анализ свойства полной управляемости дискретной модели (9), (10) при $K\neq 3$.

Матрица управляемости имеет вид:

$$W_{DTI}=\left[B_d\middle|\Phi\cdot B_d\right]. \tag{12}$$

Ввиду громоздкости выражения вычисленную матрицу W_{DTI} здесь не приводим.

Утверждение 2. *Дискретная модель (8), (9) полностью управляемая при любом* $K\neq 0$ *и* $K\neq 3$.

Доказательство. Поскольку для любого $K\neq 0$ и $K\neq 3$ $rank\ W_{DTI}=2,$ то по критерию полной управляемости модель (8), (9) является полностью управляемой □

2) Анализ свойства полной управляемости дискретной модели (8), (9) при $K=3$.

Вычислим матрицу управляемости вида (12):

$$W_{DTI}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6}-\frac{e^{-6\tau}}{6} & 0 & \frac{e^{-6\tau}\left(-1+e^{-6\tau}\right)}{6}\\ 6-6e^{-6\tau} & 0 & -6e^{-6\tau}\left(-1+e^{-6\tau}\right) & 0\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Утверждение 3. При $K=3$ дискретная модель (8), (9) является полностью управляемой.

Доказательство. Поскольку при $K=3$ $rank\ W_{DTI}=2,$ то по критерию полной управляемости дискретная модель (8), (9) является полностью управляемой □

3) Анализ свойства полной наблюдаемости дискретной модели при $K\neq 3$.

Матрица наблюдаемости имеет вид: $\mathrm{M}_{DTI}=\begin{bmatrix}\mathrm{H}\\ \mathrm{H}\cdot\Phi\end{bmatrix}$ Найдем матрицу M_{DTI}:

$$\mathrm{M}_{DTI}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{e^{-6\tau}\left(\cosh\left(2\tau A\right)A+3\sinh\left(2\tau A\right)\right)}{A} & \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-6\tau}\left(\sinh\left(2\tau A\right)\right)}{A} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Утверждение 4. *Дискретная модель (8), (9) полностью наблюдаема при любом* $K \neq 3$.

Доказательство. Поскольку для любого $K \neq 3$ $rank\ \mathrm{M}_{DTI}=2,$ то по критерию полной наблюдаемости модель (8), (9) является полностью наблюдаемой □

3) Анализ свойства полной наблюдаемости дискретной модели при $K=3$.

Матрица наблюдаемости имеет вид:

$$\mathrm{M}_{DTI}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{-6\tau} & 0 \end{bmatrix}.$$

Утверждение 5. *Дискретная модель (8), (9) не является полностью наблюдаемой при* $K=3$.

Доказательство. Поскольку $rank\ \mathrm{M}_{DTI}=1,$ то по критерию полной наблюдаемости модель (9), (10) не является полностью наблюдаемой □

Утверждение 6. При $K \neq 3$ дискретная модель (8), (9) является полностью управляемой и полностью наблюдаемой.

Утверждение 7. При $K=3$ дискретная модель (8), (9) является полностью управляемой, но не полностью наблюдаемой.

1.3. Построение дискретной линейной стохастической модели

Перепишем непрерывную СНМ в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12K & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 12K \end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}d(t), \tag{15}$$

$$z(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x(t). \tag{16}$$

Будем считать, что $u(t)$ — управление есть детерминированная функция времени, а $d(t)$ — возмущение, которое является гауссовским белым шумом (ГБШ) с дисперсией q.

Добавим к уравнению (16) аддитивную погрешность измерений и перепишем в дискретном времени:

$$z(t_i)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x(t_i)+\nu(t_i), \tag{17}$$

где $i=1,...,K$ и $\nu(t_i)$ — ДГБШ с нулевым средним и дисперсией R.

Обозначим $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 12K \end{bmatrix}$ и $G=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Найдем дискретные аналоги этих матриц.

Запишем полученную матрицу $\mathrm{B}_d(\tau)$:

$$B_d(\tau)=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(-2e^{2A\tau+6\tau}A+Ae^{4\tau\mathrm{A}}+3e^{4\tau A}+A-3\right)e^{-2A\tau-6\tau}}{A} \\ \dfrac{3K\left(e^{4\tau\mathrm{A}}-1\right)e^{-2A\tau-6\tau}}{A} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Далее вычислим значения матрицы ковариации Q_d дискретного шума $w_d(t_i)$. Общее выражение имеет следующий вид:

$$Q_d(\tau)=\int_0^{\tau}\Phi(\tau-t)GqG^T\Phi^T(\tau-t)dt, \tag{19}$$

Для удобства обозначим элементы матрицы Q_d как

$$Q_d(\tau)=\begin{bmatrix} Qd_{11}(\tau) & Qd_{12}(\tau) \\ Qd_{21}(\tau) & Qd_{22}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

С помощью разработанного скрипта найдем и запишем полученные значения для элементов матрицы (20):

$$Qd_{11}(\tau)=\frac{1}{48}\frac{q\left(2K^2e^{4\tau(A+3)}+18Ke^{4\tau(A+3)}-72e^{4\tau(A+3)}-KAe^{8\tau A}-9Ke^{8\tau A}+12Ae^{8\tau A}+36e^{8\tau A}-2K^2e^{4\tau A}+KA-9K-12A+36\right)e^{-4\tau(A+3)}}{K(-3+K)}$$

$$Qd_{12}(\tau)=-\frac{1}{8}\frac{q\left(4Ke^{4\tau(A+3)}-12e^{4\tau(A+3)}-Ke^{8\tau A}+2Ae^{8\tau A}+6e^{8\tau A}-2Ke^{4\tau A}-K-2A+6\right)e^{-4\tau(A+3)}}{-3+K}$$

$$Qd_{21}(\tau)=-\frac{1}{8}\frac{q\left(4Ke^{4\tau(A+3)}-12e^{4\tau(A+3)}-Ke^{8\tau A}+2Ae^{8\tau A}+6e^{8\tau A}-2Ke^{4\tau A}-K-2A+6\right)e^{-4\tau(A+3)}}{-3+K}$$

$$Qd_{22}(\tau)=\frac{1}{4}\frac{Kq\left(2Ke^{4\tau(A+3)}-6e^{4\tau(A+3)}+Ae^{8\tau A}+3e^{8\tau A}-2Ke^{4\tau A}-A+3\right)e^{-4\tau(A+3)}}{-3+K}$$

Утверждение 8. *Дискретная стохастическая модель электрокардиостимулятора, с параметром* $K\neq 3$, *представленная линейными разностными уравнениями в пространстве состояний, имеет следующий вид:*

$$x(t_i)=\Phi(\tau)x(t_{i-1})+B_d(t_{i-1})u(t_{i-1})+w_d(t_{i-1}),x(t_0)=x_0, \tag{21}$$

$$z(t_i)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t_i)+\nu(t_i), \tag{22}$$

для которой матрицы $\Phi(\tau)$, $B_d(\tau)$ и $Q_d(\tau)$ есть (6), (18) и (20).

2. Компьютерное моделирование дискретной стохастической модели

Все компьютерные модели разработаны на языке Python. Для вычисления оценки вектора состояния с целью снижения влияния помех в модели (21), (22) был реализован алгоритм дискретной фильтрации Калмана [4].

Проведем компьютерное моделирование на основе построенной дискретной стохастической модели сначала при $K=3$. Результаты представлены на рис. 1–3.

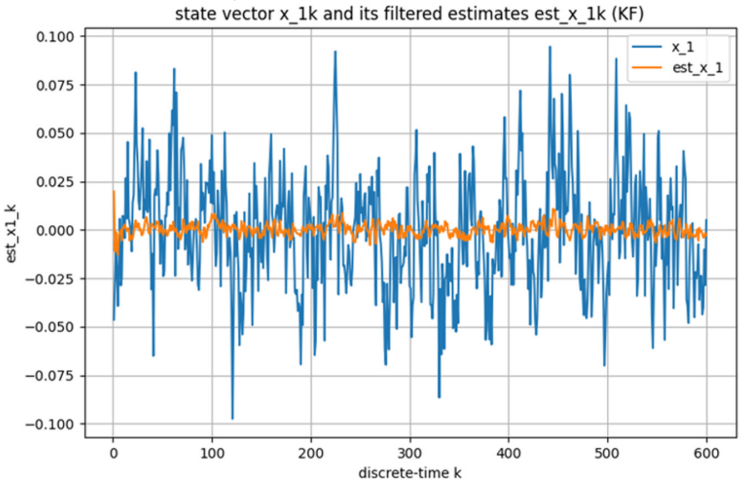


Рис. 1. Дискретная стохастическая модель при $K=3$

На рис. 3 отображено качество процесса дискретной фильтрации. Хотя дисперсия ошибки фильтрации стремится к 0, при параметре $K=3$ мы не получаем желаемый результат, а именно переход x1 с одной заданной частоты на другую.

Теперь проведем компьютерное моделирование на основе дискретной стохастической модели при $K<3$. Результаты представлены на рис. 4–6.

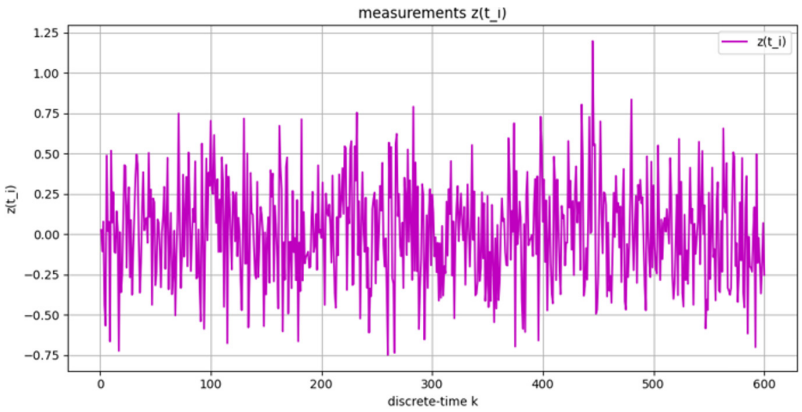


Рис. 2. Дискретная стохастическая модель. Измерения выходного сигнала с помехой

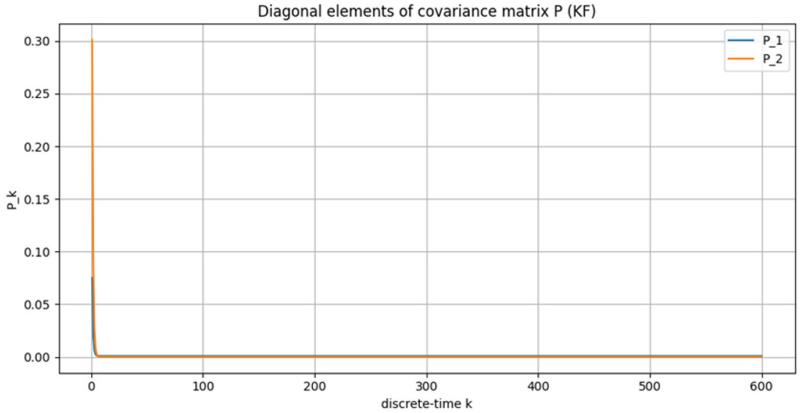


Рис. 3. Дискретная стохастическая модель. Качество работы алгоритма фильтрации

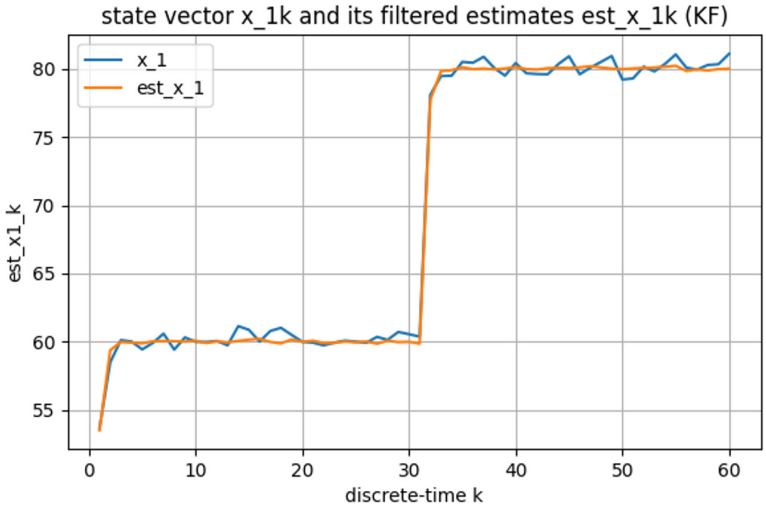


Рис. 4. Дискретная стохастическая модель при $K < 3$

Проанализировав получившийся график (см. рис. 4), можно сделать вывод о том, что при изменении входного сигнала происходит переход на желаемую частоту сердечных сокращений примерно в течение одной минуты, что с медицинской точки зрения является приемлемым результатом.

На рис. 5 видно, что частота сильно изменяется во времени за счет шума, следовательно, необходимо применять алгоритм дискретной фильтрации, чтобы устранить нежелательные помехи.

На рис. 6 отображено качество процесса дискретной фильтрации. Видно, что дисперсия ошибки фильтрации меньше 1.

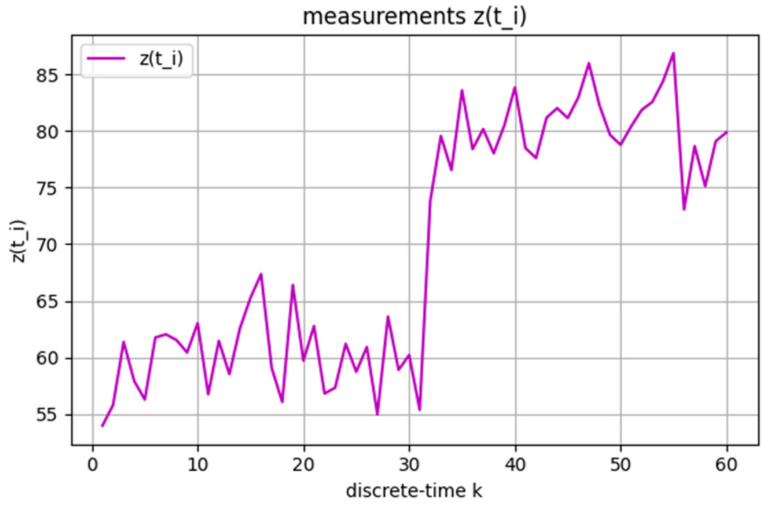


Рис. 5. Дискретная стохастическая модель при $K < 3$. Измерения выходного сигнала с помехой

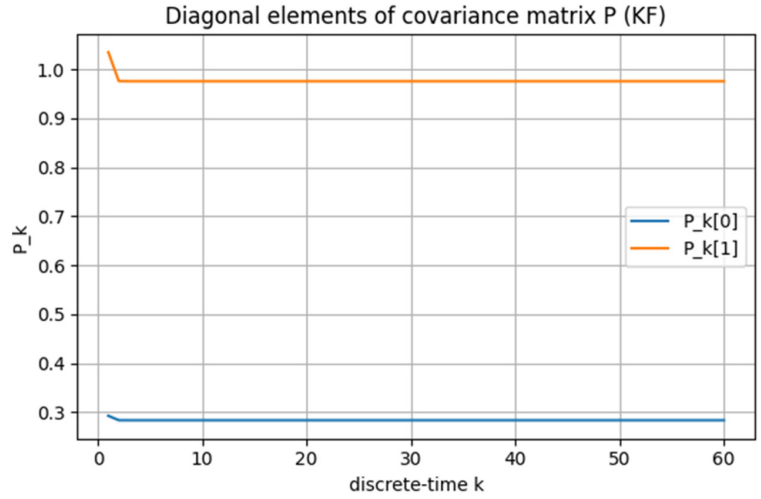


Рис. 6. Дискретная стохастическая модель при $K < 3$. Качество фильтрации

Заключение

В работе рассмотрена задача математического и компьютерного моделирования системы управления кардиостимулятором. Построена дискретная стохастическая модель в пространстве состояний. Исследованы свойства полной управляемости и полной наблюдаемости модели в зависимости от модельного параметра K. Для ускорения и автоматизации расчетов разработан скрипт на языке Maple 2022, который позволяет получить символьное представление матриц модели, а также матриц управляемости и наблюдаемости. Компьютерная модель разработана на языке Python.

Результаты проведенных численных экспериментов показали, что алгоритм дискретной фильтрации Калмана позволяет существенно снизить влияние помех на моделируемую частоту сердечных сокращений.

Литература

1. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. Пер. с англ. Б. И. Копылова. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002.

2. *Рахимова Р. И., Цыганова Ю. В.* О математической модели системы управления электрокардиостимулятором // Научные исследования и разработки молодых ученых: материалы Все-

российской научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта, Ульяновск, 21 января 2024 года. – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2024. – С. 70–74.

3. *Семушин И. В., Цыганова Ю. В.* Детерминистские модели динамических систем. Методическое пособие. – Ульяновск : УлГТУ, 2007.

4. *Grewal M. S.* Kalman filtering: Theory and Practice MATLAB / M. S. Grewal, A. P. Andrews. – New Jersey : Prentice Hall, 2001.

УДК 536.2

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

И. Ю. Савельева, И. В. Кутузов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация. С уменьшением характерного размера рассматриваемых тел реальные результаты теплопередачи все сильнее отклоняются от теоретических, которые основаны на гипотезе Био — Фурье. Классическая теория не учитывает влияния от более далеких частиц и эффекта запаздывания на изменение теплового потока и температуры, которые возникают в микро- и наномасштабе и называются нелокальными эффектами. В связи с этим возникает задача по созданию и исследованию макроскопических математических моделей, учитывающих нелокальность на микроуровне.
Ключевые слова: температура, нелокальность, математическая модель, микро- и наномасштаб, DPL.

Введение

Осознание в необходимости применения нелокальной термодинамики в физических науках и технике восходит к середине прошлого века и связана с попытками описать экспериментальные эффекты, не предсказанные гипотезой Био — Фурье. В связи с этим были предложены математические модели неклассической теплопроводности, такие как модель термомассы [1], двухпараметрическая нелокальная модель (dual phase lag — DPL) [2], теория температурных волн, основанная на теории инерционной энтропии [3], модель процесса стационарной и нестационарной теплопроводности [4, 5], модель теплопроводности для материалов с зернистой структурой [6] и многие другие [7, 8]. За счет введения двух тепловых задержек модель DPL дает простую и удобную макроскопическую формулировку теплопередачи на микроскопических уровнях. При рассмотрении данной модели вместо соотношения Био — Фурье тепловой поток можно представить как [2]:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t+\tau_q) = -\lambda \nabla T(\mathbf{x}, t+\tau_T),$$

где $\mathbf{q}$ — вектор плотности теплового потока, $\mathbf{x}$ — вектор пространственных координат, τ_q и τ_T — времена релаксации вектора теплового потока и градиента температуры ∇T соответственно, λ — коэффициент теплопроводности. Времена релаксации можно определить экспериментально [9] и теоретически [10].

Учету пространственной нелокальности в процессах теплообмена посвящено меньше исследований. Тепловой поток в данной точке пространства и в данный момент времени может существенно зависеть от ближайшего окружения (так называемой зоной нелокальности) и градиента температуры [11]. Например, модели учитывающие только пространственную нелокальность рассмотрены в работах [4, 5]. В работе [12] для вектора плотности теплового потока предложено следующее соотношение:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}' \mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t') \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}', t'),$$

где $\mathbf{K}(\mathbf{x}', t')$ — ядро свертки, которое полностью содержит пространственно-временную память теплового потока относительно градиента температуры. В более компактном виде модель, содержащую ядро нелокальности, можно представить как следующую связь между тепловым потоком и градиентом температуры:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}+\lambda_q, t+\tau_q) = -\lambda \nabla T(\mathbf{x}, t),$$

где λ_q — радиус нелокальности.

В данной работе рассмотрен вариант объединения модели DPL с моделью, содержащей ядро нелокалькости, при котором для вектора плотности теплового потока рассмотрим следующее соотношение

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}+\lambda_q, t+\tau_q) = -\lambda^{(T)}\nabla T(\mathbf{x}, t+\tau_T). \tag{1}$$

1. Одномерная математическая модель

Для определения поля температуры с учетом пространственной и временной нелокальностями в качестве рассматриваемого тела выберем полосу ширины l, расположенную в полуплоскости $x_1 > 0$. Для упрощения данной задачи воспользуемся предположением о том, что из-за неограниченности полосы вдоль оси Ox_2, функция распределения температуры будет одинаковой вне зависимости от сечения $x_2 = \text{const}$. В итоге вместо двумерной области рассмотрим одномерный случай.

Преобразуем соотношение (1), в котором разложим тепловой поток и градиент температуры по каждой переменной в ряд Тейлора до членов первого порядка и получим:

$$q(x,t) + \lambda_q \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} + \tau_q \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = -\lambda^{(T)} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \lambda^{(T)}\tau_T \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x \partial t}. \tag{2}$$

Объединим полученное уравнение (2) с одномерным уравнением теплопроводности и получим систему, учитывающую пространственную и временную нелокальности в одномерном случае

$$\begin{cases} c_V \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial q(x,t)}{\partial x}, \\ q(x,t) + \lambda_q \dfrac{\partial q(x,t)}{\partial x} + \tau_q \dfrac{\partial q(x,t)}{\partial t} = -\lambda^{(T)} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \lambda^{(T)}\tau_T \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x \partial t}, \end{cases} \tag{3}$$

где c_V — объемная теплоемкость.

В качестве начальных и граничных условий выберем следующие:

$$T(x,t)|_{t=0} = T_0, \quad q(x,t)|_{t=0} = 0, \quad q(x,t)|_{x=0} = MAt^m \exp(-mt/\tau_T), \quad T(x,t)|_{x=l} = T_0, \tag{4}$$

где функция плотности теплового потока соответствует импульсному нагреву, $M = m^m/(m-1)!$, A — размерный коэффициент, который может иметь разные значения для различных материалов [13]. Такой вид записи начального условия на тепловой поток обеспечивает его максимум при $\overline{t} = 1$, $m \geq 1$. В данном случае выберем $m = 2$.

Для дальнейшего удобства при решении и более компактной записи уравнений введем безразмерные параметры и переменные

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{a\tau_T}}, \quad \overline{t} = \frac{t}{\tau_T}, \quad a = \frac{\lambda^{(T)}}{c_V}, \quad D_\lambda^2 = \frac{\lambda_q}{\sqrt{a\tau_T}}, \quad D_\tau^2 = \frac{\tau_q}{\tau_T},$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T^*}, \quad T^* = \frac{A\tau_T^2\sqrt{a\tau_T}}{\lambda^{(T)}}, \quad \eta = \frac{q}{\lambda^{(T)}T^*/\sqrt{a\tau_T}}.$$

Тогда система уравнений (3) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \overline{t}} = -\dfrac{\partial \eta}{\partial \xi}, \\ \eta + D_\lambda^2 \dfrac{\partial \eta}{\partial \xi} + D_\tau^2 \dfrac{\partial \eta}{\partial \overline{t}} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} - \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \overline{t}}, \end{cases} \tag{5}$$

а краевые условия (4) будут выглядеть следующим образом

$$\theta(\xi,\bar{t})|_{\bar{t}=0}=0,\quad \eta(\xi,\bar{t})|_{\bar{t}=0}=0,\quad \eta(\xi,\bar{t})|_{x=0}=M\bar{t}^{\,2}\exp(-2\bar{t}),\quad \theta(\xi,\bar{t})|_{x=L}=0. \tag{6}$$

где $L=l/\sqrt{a\tau_T}$.

Система (5) с краевыми условиями (6) представляет собой одномерную математическую модель нелокальной теплопроводности.

2. Численный алгоритм решения задачи

Одним из способов сведения дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению является дискретизация пространства методом конечных разностей, оставляя при этом в уравнении все производные по времени. Этот подход позволяет в результате получить набор связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены с помощью хорошо разработанных решателей со встроенными критериями сходимости, обеспечивающими численно устойчивые решения.

При решении данной задачи воспользуемся дискретизацией пространства методом конечных разностей. Для этого разобьем пространственную область на n узлов, причем первый $(i=1)$ и последний $(i=n)$ узлы будут располагаться на левой $(\xi=0)$ и правой $(\xi=L)$ границах соответственно. Индексом i обозначим пространственный узел, расположенный в точке $\xi_i=(i-1)\Delta\xi$, где $\Delta\xi=L/(n-1)$.

Для узлов с индексами $i=2,3,\ldots,n-1$ частную производную по пространству заменим на центральную производную. Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta_i}{d\bar{t}}=-\dfrac{\eta_{i+1}-\eta_{i-1}}{2\Delta\xi},\\[2ex] \eta_i+D_\lambda^2\dfrac{\eta_{i+1}-\eta_{i-1}}{2\Delta\xi}+D_\tau^2\dfrac{d\eta_i}{d\bar{t}}=-\dfrac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2\Delta\xi}-\dfrac{1}{2\Delta\xi}\left(\dfrac{d\theta_{i+1}}{d\bar{t}}-\dfrac{d\theta_{i-1}}{d\bar{t}}\right).\end{cases} \tag{7}$$

Для аппроксимации производной по пространству на левой и правой границах, чтобы учесть граничные условия, выберем правую и левую односторонние производные соответственно. Тогда для левой границы система (5) будет выглядеть как

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta_1}{d\bar{t}}=-\dfrac{\eta_2-\eta_1}{\Delta\xi},\\[2ex] \eta_1+D_\lambda^2\dfrac{\eta_2-\eta_1}{\Delta\xi}+D_\tau^2\dfrac{d\eta_1}{d\bar{t}}=-\dfrac{\theta_2-\theta_1}{\Delta\xi}-\dfrac{1}{\Delta\xi}\left(\dfrac{d\theta_2}{d\bar{t}}-\dfrac{d\theta_1}{d\bar{t}}\right),\end{cases}$$

где $\eta_1=4\bar{t}^{\,2}\exp(-2\bar{t})$, а для правой примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta_n}{d\bar{t}}=-\dfrac{\eta_n-\eta_{n-1}}{\Delta\xi},\\[2ex] \eta_n+D_\lambda^2\dfrac{\eta_n-\eta_{n-1}}{\Delta\xi}+D_\tau^2\dfrac{d\eta_n}{d\bar{t}}=-\dfrac{\theta_n-\theta_{n-1}}{\Delta\xi}-\dfrac{1}{\Delta\xi}\left(\dfrac{d\theta_n}{d\bar{t}}-\dfrac{d\theta_{n-1}}{d\bar{t}}\right),\end{cases}$$

где $\theta_n=0$.

Решение нелокального случая будем сравнивать с решение локальной постановки, соответствующей классической теплопроводности

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial\bar{t}}=-\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi},\\[2ex] \eta=-\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi},\end{cases}$$

с краевыми условиями (6).

3. Анализ результатов

На рис. 1 изображено действие импульсного нагрева в качестве безразмерного теплового потока η на левой границе рассматриваемого тела в зависимости от времени. На данном графике хорошо видно, что из-за подбора параметра M, максимум интенсивности действия теплового потока достигается в момент времени $\bar{t} = 1$.

На рис. 2 представлено распределение безразмерной температуры θ на левом конце с течение времени. Из данного графика видно, что при всех рассмотренных значениях параметров D_λ^2 и D_τ^2 наибольшие отклонения от локального случая (кривая отмечена красными точками) происходят в начальные моменты времени; с течением времени отклонения от классического решения исчезают. Также можно заметить, что наибольшее отклонение значений температуры от классического решения (при прочих равных) соответствует меньшему значению коэф-

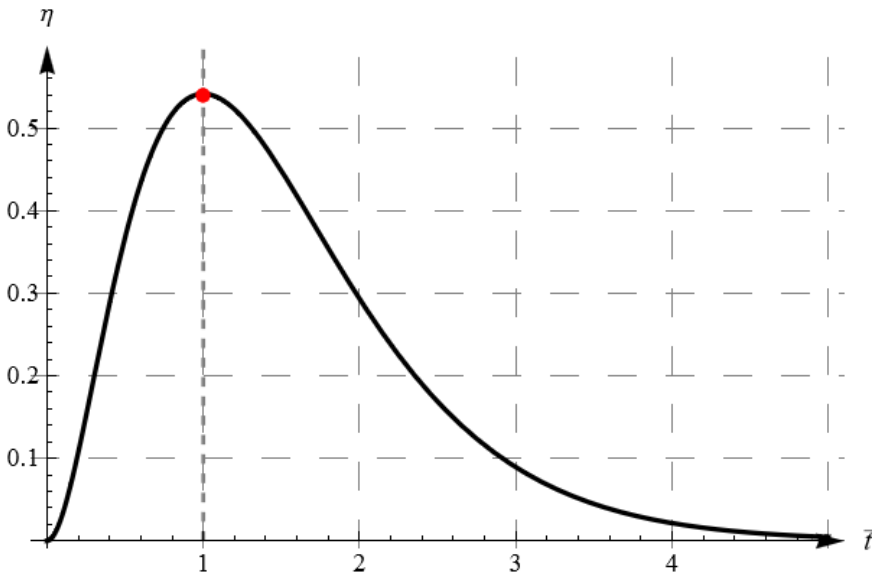


Рис. 1. График действия теплового потока η в зависимости от времени при $\xi = 0$

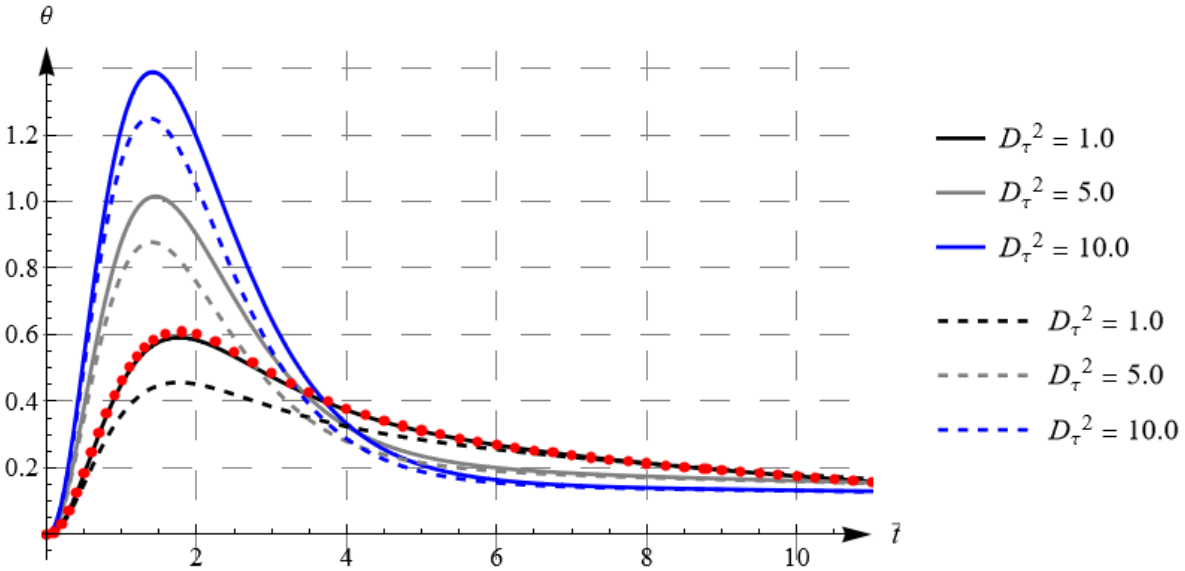


Рис. 2. График распределения безразмерной температуры θ на левом конце рассматриваемого тела; сплошные линии — $D_\lambda^2 = 0.1$; пунктирные линии — $D_\lambda^2 = 1.0$; точками отмечено решение локального случая

фициента D_λ^2, который отвечает за пространственную нелокальность. Обратную зависимость решения можно наблюдать при изменении коэффициента D_τ^2, который обратно пропорционален скорости распространения теплоты. Наибольшему отклонению значений температуры от классического решения соответствует наибольшее значение D_τ^2.

На рис. 3 и на рис. 4 представлены распределения безразмерной температуры θ в зависимости от пространственной переменной ξ для двух моментов времени $\bar{t} = 0.5$ и $\bar{t} = 2.0$ соответственно. На данных графиках видно, что при меньшем значении коэффициента большее количество тепловой энергии концентрируется около левого конца, где происходит импульсный нагрев. Для коэффициента D_τ^2 снова противоположная. Чем меньше значение D_τ^2 при неизменном значении D_λ^2, тем больше тепловой энергии проникает вглубь тела и тем меньше ее концентрации в области, близкой к точке нагрева.

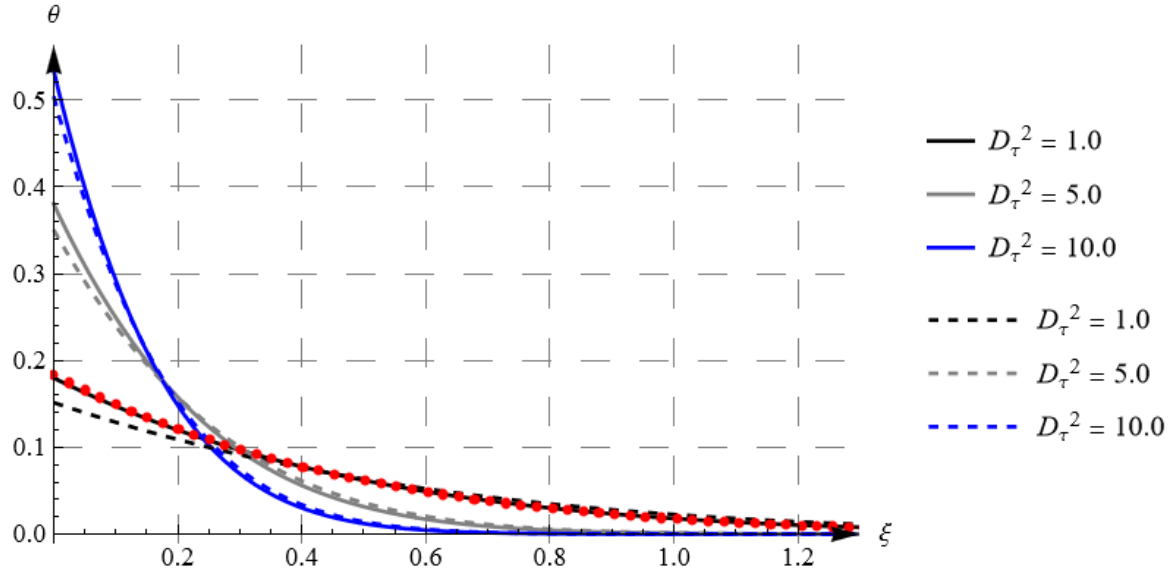


Рис. 3. График распределения безразмерной температуры θ по длине тела при $\bar{t} = 0.5$; сплошные линии — $D_\lambda^2 = 0.1$; пунктирные линии — $D_\lambda^2 = 1.0$; точками отмечено решение локального случая

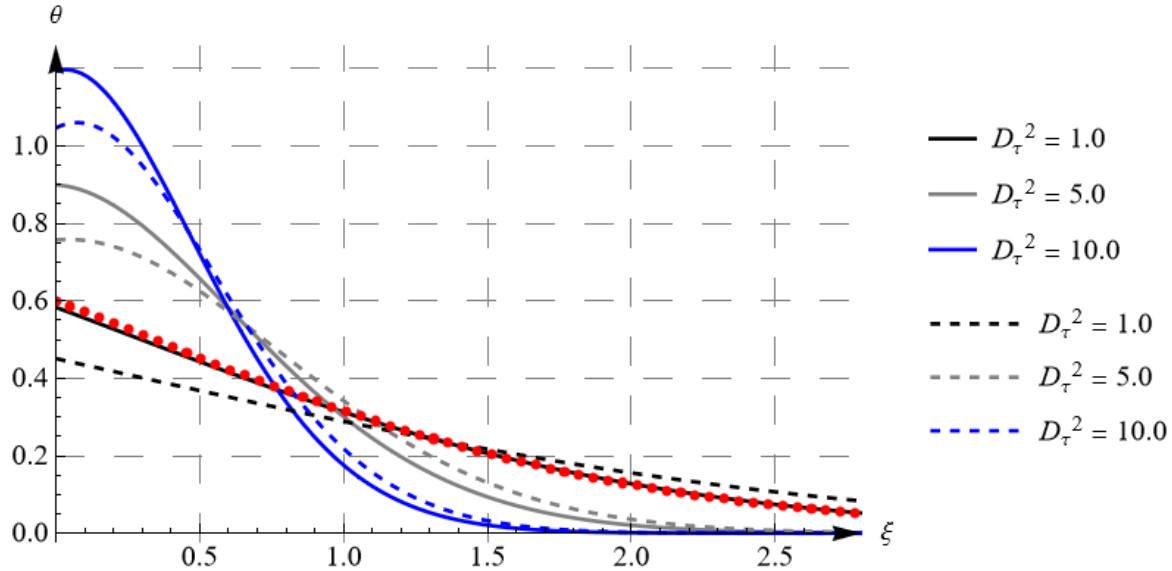


Рис. 4. График распределения безразмерной температуры θ по длине тела при $\bar{t} = 2.0$; сплошные линии — $D_\lambda^2 = 0.1$; пунктирные линии — $D_\lambda^2 = 1.0$; точками отмечено решение локального случая

Заключение

В данной работе рассмотрена модель для теплопроводности, учитывающая вклад от нелокальных эффектов по времени и пространству. Получено численное решение для одномерной задачи. Проведено сравнение с локальным случаем. Проанализировано влияние параметров, отвечающих за нелокальные эффекты, на поле температуры.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFN-2024-0004).

Литература

1. *Cao B. Y., Guo Z. Y.* Equation of motion of a phonon gas and non-Fourier heat conduction // Journal of Applied Physics. – 2007. – V. 102. – Article 053503.

2. *Tzou D. Y.* The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1995. – V. 38. – P. 3231–3240.

3. *Kuang Z. B.* Discussions on the temperature wave equation // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – V. 71. – P. 424–430.

4. *Савельева И. Ю.* Вариационная формулировка математической модели процесса стационарной теплопроводности с учетом пространственной нелокальности // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». – 2022. – № 2(101). – С. 68–86.

5. *Kuvyrkin G. N., Savel'eva I. Yu., Kuvshinnikova D. A.* Nonstationary heat conduction in a curvilinear plate with account of spatial nonlocality // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2019. – V. 92. – P. 603–613.

6. *Kuvyrkin G. N., Savel'eva I. Yu., Kuvshinnikova D. A.* One mathematical model of heat conduction in nonlocal medium // AIP Conference Proceedings. – 2019. – DOI: 10.1063/1.5114388

7. *Sobolev S. L.* Nonlocal two-temperature model: Application to heart transport in metals irradiated by ultrashort laser pulses // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2016. – V. 94. – P. 138–144.

8. *Chengyun Hua Lucas Lindsay*. Space-time dependent thermal conductivity in nonlocal thermal transport // Physical Review B. – 2020. – DOI: 10.1103/PhysRevB.102.104310

9. *Roetzel W., Putra N., Das S. K.* Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure // International Journal of Thermal Sciences. – 2003. – V. 42. – P. 541–552.

10. *Basirat Tabrizi H., Andarwa S.* A method to measure time lag constants of heat conduction equations // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2009. – V. 36. – P. 186–191.

11. *Mahan G. D., Claro F.* Nonlocal theory of thermal conductivity // Physical Review B. – 1988. – V. 38 (3). – P. 1963–1969.

12. *Vermeersch B., Shakouri A.* Nonlocality in microscale heat conduction. – URL: https://arxiv.org/abs/1412.6555 (дата обращения 16.06.2024)

13. *Кувыркин Г. Н.* Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. – М. : Изд-во МГТУ, 1993. – 142 с.

УДК 536.21

СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СОСТАВНОМ КОЛЬЦЕВОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

И. Ю. Савельева, А. А. Соколов, М. М. Евсеева

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация. В данной статье рассмотрен стационарный режим теплопроводности с учетом эффекта пространственной нелокальности в составном кольцевом слое. Моделирование процесса теплопроводности в специфических областях даже в рамках классической теории требует тщательного анализа геометрии. При рассмотрении неклассических теорий, учитывающих эффекты нелокальных взаимодействий, исследование температурного поля в зависимости от геометрических особенностей области играет решающую роль для получения адекватных и полезных с практической точки зрения моделей. В данной работе было исследовано распределение температуры в кольцевом сплошном и составном слоях, произведено сравнение классической теплопроводности и неклассической с учетом эффекта пространственной нелокальности на примере задачи Дирихле.
Ключевые слова: стационарная теплопроводность, неклассическая модель, пространственная нелокальность, составной кольцевой слой, симметрия, задача Дирихле.

Введение

Моделирование теплопроводности актуально для высокотехнологичных инженерных приложений [1]. Востребованным в современной науке направлением является моделирование композитов — многокомпонентных материалов, обладающих улучшенными физическими характеристиками по сравнению с характеристиками отдельных их составляющих. Особое место в таких моделях занимают нанокомпозиты. Например, используемые в современных микро- и наноэлектромеханических системах (NEMS/MEMS) нанокомпозитные материалы должны обладать особенными физическими свойствами, необходимыми для корректной работы этих систем [2, 3].

В последние годы нанокомпозиты привлекли к себе значительное внимание именно благодаря своей настраиваемой структуре [1, 4]. Интеграция различного рода включений в матрицы материалов стала значимой областью исследований. Одними из широко используемых типов нанокомпозитных материалов являются слоистые материалы с нанопокрытиями [4]. В качестве модели для описания таких объектов удобно рассматривать составные, в том числе кольцевые, слои.

Моделирование теплопроводности в моделях малого масштаба или, например, в многомасштабных моделях [5] на таких специфических составных геометриях требует особого подхода к учёту физических свойств материалов и взаимодействий между их частями. Экспериментальные наблюдения за температурным полем на границах разделов материалов дали основание для развития и применения теорий нелокальной термодинамики [6], описывающих в моделях макромасштаба явления, происходящие на микро- и наноуровнях за счет учета нелокализованных по пространству взаимодействий между частицами материала.

В данной статье рассмотрена неклассическая математическая модель теплопроводности в составном кольцевом слое с учётом эффекта пространственной нелокальности на примере задачи Дирихле.

1. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричный составной кольцевой слой с двумя концентрическими частями (рис. 1), выполненными из различных однородных изотропных теплопроводящих материалов с коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_2. Области внутреннего и внешнего материалов ограничены радиусами R_1 и R_2 соответственно, толщина слоя $h = R_2 - R_1$. На границе раздела материалов (по радиусу R') предполагаем выполнение условий идеального теплового контакта.

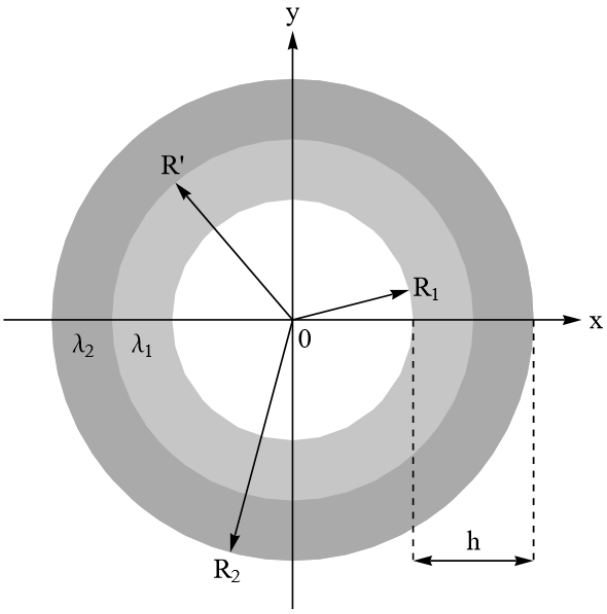


Рис. 1. Составной кольцевой слой

В замкнутой области $S \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂S стационарное уравнение теплопроводности без внутренних источников или стоков теплоты имеет вид [7]:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} = 0, \tag{1}$$

где $\nabla_{\mathbf{x}} = \partial / \partial x_i \, \mathbf{e}_i$ — дифференциальный оператор набла; $\mathbf{e}_i, i = \overline{1,2}$ — единичные орты координатных осей; $x_i, i = \overline{1,2}$ — компоненты вектора $\mathbf{x}$; $\mathbf{q}$ — вектор плотности теплового потока.

Для учета эффекта пространственной нелокальности используем следующую гипотезу о виде вектора плотности теплового потока [8–10]:

$$\mathbf{q} = -\lambda \left(p_1 \nabla_{\mathbf{x}} T + p_2 \iint\limits_{S'(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} T dS'(\mathbf{x}) \right), \tag{2}$$

где λ — коэффициент теплопроводности; $T = T(\mathbf{x})$ — температура; $p_1 > 0$ и $p_2 \geq 0$ — весовые доли локальных и нелокальных составляющих соответственно, такие, что $p_1 + p_2 = 1$; $S'(\mathbf{x})$ — область нелокального влияния, характеризуемая радиусом нелокальности r_{nl}; φ — нормированная положительная в области $S'(\mathbf{x})$ функция нелокального влияния, обладающая свойством монотонного убывания относительно центра области $S'(\mathbf{x})$.

В выражении (2) первое слагаемое отвечает классическому представлению о процессе теплопроводности согласно гипотезе Био — Фурье [7], причем модель допускает непосредственное рассмотрение классической постановки в случае $p_1 = 1$, $p_2 = 0$. Интегральное слагаемое реализует учет нелокального воздействия точек пространства $\mathbf{x}' \in S'(\mathbf{x})$ на рассматриваемую точку $\mathbf{x} \in S$.

Дальнейшие соотношения для удобства будем рассматривать в полярной системе координат $(r, \tilde{\varphi})$. Отметим, что для анализа эффекта пространственной нелокальности на установив-

шееся распределение температуры в кольцевом слое целесообразно обезразмерить основные расчетные параметры модели [10]. Будем считать, что:

$$r = \tilde{r}/R,\ T = \tilde{T}/T_0,\ \lambda = \tilde{\lambda}/\lambda_0,$$

где $\tilde{r}$, $\tilde{T}$, $\tilde{\lambda}$ — размерные параметры некоторой исходной модели, $[\tilde{r}] = $ м, $[\tilde{T}] = $ К, $[\tilde{\lambda}] = $ Вт/(м·К); R — характерный размер области, $[R] = $ м; T_0 — нормирующий множитель для температуры, $[T_0] = $ К; λ_0 — нормирующий множитель для коэффициента теплопроводности, $[\lambda_0] = $ Вт/(м·К). Аналогичную операцию обезразмеривания применим к параметрам каждого из материалов. Остальные величины, фигурирующие в задаче, получим путем комбинации приведенных безразмерных параметров. Вид уравнения (1) при этом не изменится.

Зададим граничные условия Дирихле на внутренней и внешней границах рассматриваемой области. Тогда полная постановка с учетом уравнения (1) и условия идеального теплового контакта материалов примет вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{q}_1 = 0, \quad R_1 \le r \le R', \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_2 = 0, \quad R' \le r \le R_2, \\ T_1\big|_{r=R_1} = \theta_1, \\ T_2\big|_{r=R_2} = \theta_2, \\ T_1\big|_{r=R'} = T_2\big|_{r=R'}, \\ \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}\big|_{r=R'} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}\big|_{r=R'}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ — векторы плотности тепловых потоков во внутреннем и внешнем материалах соответственно, заданные в виде (2); T_1, T_2 — функции, описывающие соответствующие материалам температурные поля; θ_1, θ_2 — заданные температуры на границах; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контакта материалов.

2. Результаты расчетов

Численное решение задачи получено с использованием программного комплекса NonLocFEM [11], в котором реализован нелокальный метод конечных элементов.

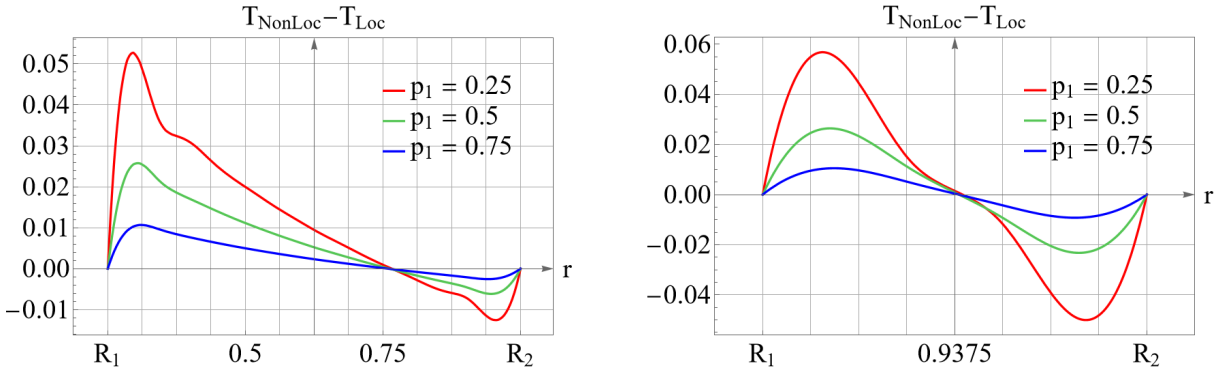
2.1. Случай сплошного кольцевого слоя

Рассмотрим случай, когда R' совпадает с одной из границ R_1 или R_2, т. е. материал кольцевого слоя является однородным: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Система уравнений (3) может быть упрощена, классическое решение (при $p_1 = 1$) в данном случае имеет вид:

$$T(r) = \theta_1 + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{\ln\left(R_2/R_1\right)} \ln\left(r/R_1\right), \quad R_1 \le r \le R_2.$$

Расчет проведен при следующих параметрах: $R_2 = 1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1$. Толщину кольцевого слоя посредством выбора R_1 и параметры нелокальной модели будем варьировать. Влияние эффекта пространственной нелокальности на распределение температуры в слое можно проследить по разности нелокального и классического решений $\Delta T = T_{NonLoc} - T_{Loc}$ в зависимости от радиальной координаты r при различных значениях весового параметра p_1 (рис. 2).

Как и в классической постановке задачи, распределение температуры в случае присутствия нелокальных эффектов одинаково во всем угловым сечениям и симметрично по отношению к осям симметрии рассматриваемого кольцевого слоя. По графикам, представленным на рис. 2, видно, что при увеличении веса локальной составляющей p_1 решение приближается к классическому, что соответствует физическому смыслу весовых параметров p_1 и p_2.



а) *б)*

Рис. 2. Графики отклонения нелокального решения относительно классического в сечении кольцевого слоя при различных значениях весового параметра p_1; параметры моделей: а) $h = 0.75$, $r_{nl} = 0.1$; б) $h = 0.125$, $r_{nl} = 0.05$

Можно заметить, что по мере уменьшения толщины кольцевого слоя распределение ΔT симметризуется относительно среднего радиуса $r = (R_2 + R_1)/2$. Для анализа данного эффекта введем центрированную и нормированную радиальную координату: $\rho = (r - R_1)/h$, $\rho \in [0,1]$, в качестве модельных параметров примем $r_{nl} = 0.05$, $p_1 = 0.5$. На рис. 3 продемонстрированы графики отклонений нелокального решения относительно классического в зависимости от координаты ρ при различных толщинах кольцевого слоя.

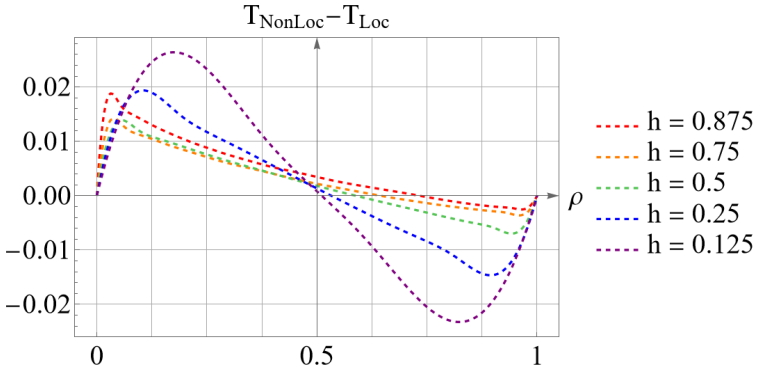


Рис. 3. Графики отклонения нелокального решения относительно классического в зависимости от нормированной и центрированной координаты при различных толщинах слоя

По мере уменьшения внутреннего радиуса R_1 кольцевого слоя, при фиксированном значении внешнего радиуса R_2 и радиуса нелокальности r_{nl}, асимметрия решения становится более заметной. Она проявляется в виде увеличенных отклонений нелокальных решений относительно классических в окрестности внутреннего радиуса, что характеризует выраженный кромочный эффект [8]. Также можно наблюдать смещение вправо находящейся внутри слоя точки совпадения решений.

Симметричное распределение разности решений наблюдается в случае прямоугольной пластины [8]. Можно отметить, что присутствие симметрии при достаточно больших внутренних радиусах объяснимо приближением геометрии кольцевого слоя к прямоугольной: при увеличении внутреннего радиуса R_1 и фиксированном внешнем радиусе R_2 кривизны в каждой промежуточной точке рассматриваемого кольцевого слоя становятся близкими по величине, а в прямоугольной пластине кривизна в каждой точке постоянна. Таким образом, эффекты от кривизны области при уменьшении толщины слоя нивелируются, а сама кривизна играет существенную роль в распределении поля температуры при учете нелокальных эффектов.

С другой стороны, можно отметить увеличение отклонения относительно классического решения при уменьшении толщины кольцевого слоя. Это можно объяснить усилением нелокальных взаимодействий за счет пересечения областей влияния точек друг на друга.

2.2. Случай составного кольцевого слоя

Рассмотрим случай составного кольцевого слоя. Из системы уравнений (3) классическое решение (при $p_1 = 1$) может быть получено аналитически в виде:

$$T(r) = \begin{cases} \theta_1 + \dfrac{\lambda_2(\theta_2 - \theta_1)}{\lambda_1 \ln(R_2/R') + \lambda_2 \ln(R'/R_1)} \ln(r/R_1), & R_1 \le r \le R', \\ \theta_2 + \dfrac{\lambda_1(\theta_2 - \theta_1)}{\lambda_1 \ln(R_2/R') + \lambda_2 \ln(R'/R_1)} \ln(r/R_2), & R' \le r \le R_2. \end{cases}$$

Зададим геометрические параметры и граничные условия: $R_1 = 0.5$, $R' = 0.75$, $R_2 = 1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1$, примем $r_{nl} = 0.1$. Физические свойства материалов и веса в нелокальной модели будем варьировать. Результаты численного моделирования продемонстрированы на рис. 4.

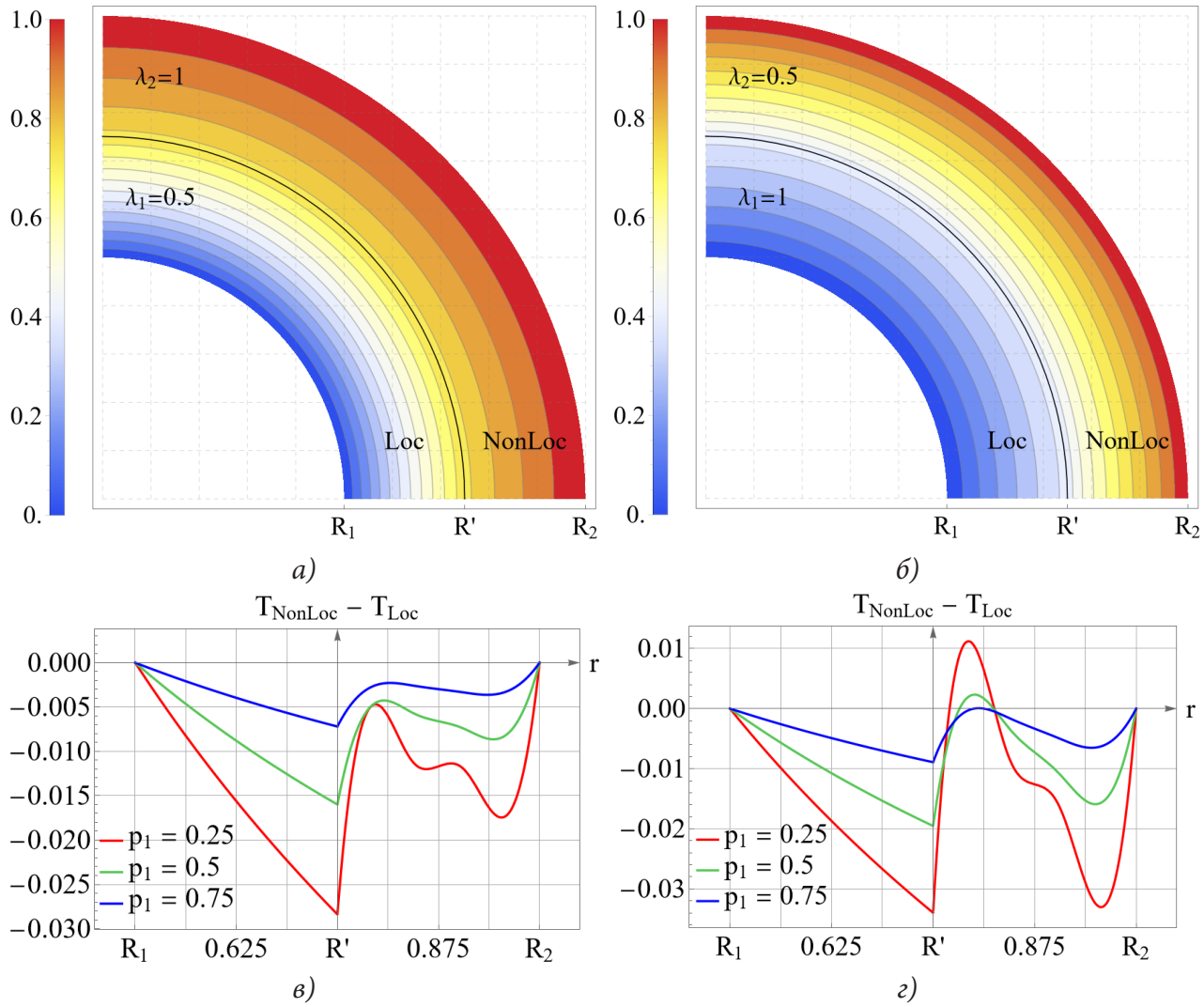


Рис. 4. Изотермические линии в четверти кольцевого слоя при значении весового параметра $p_1 = 0.5$ и графики отклонения нелокального решения относительно классического в сечении слоя при различных значениях весового параметра p_1; а), в) $\lambda_1 < \lambda_2$; б), г) $\lambda_1 > \lambda_2$

По графикам, представленным на рис. 4, в данной модели составного кольцевого слоя на границе раздела материалов характерно уменьшение температуры по сравнению с классическим решением. Отметим также, что по рис. 4 можно проследить похожую на случай сплошного кольцевого слоя симметризацию разности решений в области материала, обладающего пространственной нелокальностью.

Заключение

В рамках исследования стационарной теплопроводности в составном кольцевом слое с учетом пространственной нелокальности проведено сравнение аналитического решения в классической постановке задачи и полученных в результате численного моделирования решений в нелокальной постановке. Расчеты демонстрируют, что нелокальная модель стационарной теплопроводности для кольцевого слоя имеет ряд особенностей, связанных с геометрией: проявляются различного рода асимметрии, обусловленные кривизной области, а также можно отметить выраженное усиление нелокальных эффектов в окрестности внутреннего радиуса.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFN-2024-0004)

Литература

1. *Bouthaina El Aoud, Saad Althobaiti, A.F. Aljohani, Mahmoud M. Selim, Mohamed Boujelbene, Sherain M.Y. Mohamed, Ibrahim Mahariq*. Micromechanical modeling of thermal conductivities of unidirectional carbon fiber/epoxy composites containing carbon nanotube/graphene hybrids // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2024. – Vol. 157. – Art. 107726.

2. *Berman D., Krim J.* Surface science, MEMS and NEMS: Progress and opportunities for surface science research performed on, or by, microdevices // Progress in Surface Science. – 2013. – Vol. 88, No 2. – P. 171–211.

3. *Yang W. D., Kang W. B., Wang X.* Thermal and surface effects on the pull-in characteristics of circular nanoplate NEMS actuator based on nonlocal elasticity theory // Applied Mathematical Modelling. – 2017. – Vol. 43. – P. 321–336.

4. *Huang H., Song K.* Modulation of heat flux and thermal stress at the double interface by nanocoating thickness // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. – 2024. – Vol. 75, No 20.

5. *Nieminen R. M.* From atomistic simulation towards multiscale modelling of materials // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2002. – Vol. 14, No 11. – P. 2859–2876.

6. *Luo P., Li X., Tian X.* Nonlocal thermoelasticity and its application in thermoelastic problem with temperature-dependent thermal conductivity // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2021. – Vol. 87. – Art. 104204.

7. *Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. – 512 с.

8. *Савельева И. Ю.* Разработка и анализ математических моделей термомеханики структурно-чувствительных материалов: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 1.2.2 / Савельева Инга Юрьевна; Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет). Москва, 2023. 375 с.

9. *Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю., Кувшинникова Д. А.* Нестационарная теплопроводность в криволинейной пластине с учетом пространственной нелокальности // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 3. – С. 631.

10. *Kuvyrkin G. N., Savelyeva I. Y., Safronov Y. A., Sokolov A. A.* Mathematical modeling of insulating coating of thermal conductivity including body's own radiation and non-local spatial effects // Journal of Physics: Conference Series. – 2024. – Vol. 2817, No 1. – P. 12–28.

11. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. NonLocFEM / Соколов А. А.; Соколов А. А., Савельева И. Ю. № 2021661966; заявл. 20.07.2021; опубл. 22.09.2022, РД040930 (Рос. Федерация).

УДК 519.6

АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ЦВЕТОВЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ШУМОПОДАВЛЕНИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

И. А. Седых, А. Е. Харитонов

Липецкий государственный технический университет

Аннотация. В статье рассматривается эффективность работы цветовых пространств RGB, HSV, HSL, YCbCr, Lab при шумоподавлении изображения. Работа выполнена при помощи скрипта, написанного на языке Python. Скрипт позволяет получить такие метрики для сравнения изобрадений, как среднеквадратическая ошибка (MSE), пиковое отношение сигнал-шум (PSNR), индекс структурного сходства (SSIM), а также размер полученных файлов. Представлены результаты исследования с помощью метрик в табличном виде и сделан вывод о проделанной работе.

Ключевые слова: цветовые пространства, шум, шумоподавление, размытие по Гауссу, медианный фильтр, билатериальный фильтр, компьютерная графика, обработка изображений, среднеквадратическая ошибка, индекс структурного сходства, пиковое отношение сигнал-шум.

Введение

Технический прогресс зашел очень далеко, и большое количество информации представлено визуально, например, с помощью различных изображений или видео (прямоугольная матрица, состоящая из пикселей) [1]. Когда речь заходит про обработку изображений, то под словом «обработка» может подразумеваться изменение разрешения, кадрирование, замена цвета, удаление объектов, наложение нескольких изображений друг на друга и прочее.

Одним из способов обработки изображений является шумоподавление. Очень часто «шум» может проявляться в изображениях, полученных в условиях низкой освещенности, из-за чего, в основном, в темных участках появляются заметные артефакты. Очистка изображения от шума является крайне важным способом обработки: в некоторых ситуациях использование дополнительных источников освещения является невозможным, или может быть допущена ошибка при выставлении настроек в камере, или же этот способ может оказаться проще и быстрее в определенных условиях съёмки.

На сегодняшний день замена цветового пространства при обработке используется, например, при распознавании лиц на видео или для подготовки изображения к печати, однако применение данного способа при работе с шумоподавлением не рассматривалось. Актуальность данной работы обусловливается тем, что при переходе в другое цветовое пространство изображение считывается и воспринимается системой иначе, чем в привычном RGB пространстве, а значит и результат работы при шумоподавлении в ином пространстве может кардинально отличаться.

Целью работы является исследование и реализация методов классического шумоподавления при работе в разных цветовых пространствах, таких как RGB, HSV, HSL, YCbCr [2] и Lab [3], их влияние на обработку изображений и приведен анализ полученных метрик в результате работы программного обеспечения, а также будет произведено сравнение размера полученных файлов.

1. Шум и методы шумоподавления

1.1. Шум

Под шумом в изображении подразумевается искажение передачи сигнала с матрицы камеры, что приводит к появлению на картинке пикселей, отличающихся по цвету и интенсивно-

сти света. Присутствие шума наиболее заметно в темных участках изображения, например, когда вместо однотонного черного цвета мы наблюдаем цветные вкрапления.

Операция шумоподавления направлена на то, чтобы убрать полученные цифровые артефакты и привести изображение в более аккуратный, точный или реалистичный вид. Рассмотрим такие классические методы шумоподавления, как размытие по Гауссу, медианная фильтрация и билатериальный фильтр.

В области компьютерной графики использование размытия в изображении играет большую роль, а функционал для применения крайне разнообразен. Например, это может быть использовано для улучшения визуальной картинки путём удаления шумов, царапин или других незначительных дефектов, выделение объекта, для привлечения большего к нему внимания, или наоборот, если нужно скрыть объект из соображений цензуры. Кроме того, размытие может применяться и для устранения излишних деталей, что часто применяют при ретуши портрета, когда возникает необходимость скрыть дефекты кожи.

1.2. Размытие по Гауссу

Размытие по Гауссу — это линейный фильтр, который преобразует пиксели, используя функцию нормального распределения. Данная функция будет иметь вид:

$$G_{\sigma_s}[m,n] = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} e^{-\frac{(m^2+n^2)}{2\sigma_s^2}},$$

где G_{σ_s} — полученное изображение, m и n — координаты пикселя, σ_s^2 — пространственный коэффициент размытия.

Применяя данный фильтр для изображения, функция перераспределяет «вес» пикселей, за что отвечает параметр σ. Чем больше значение σ, тем большая площадь захватывается для перераспределения значений, что в свою очередь отражается на большей степени размытия. Визуальное представление функции Гаусса (рис. 1)

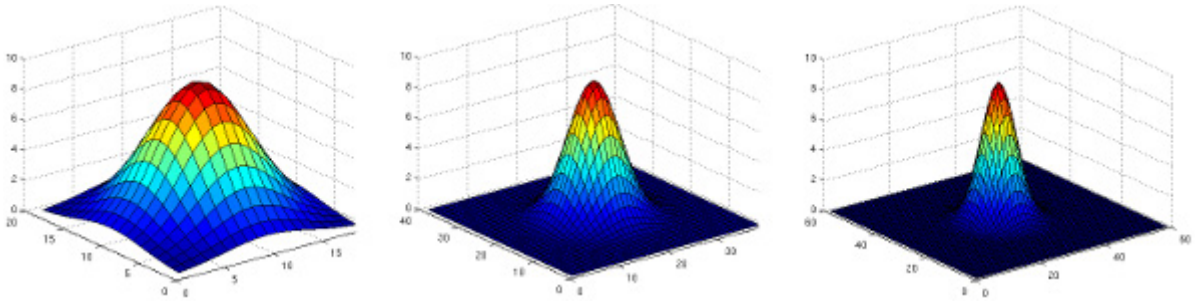


Рис. 1. Функция Гаусса для $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

1.3. Медианный фильтр

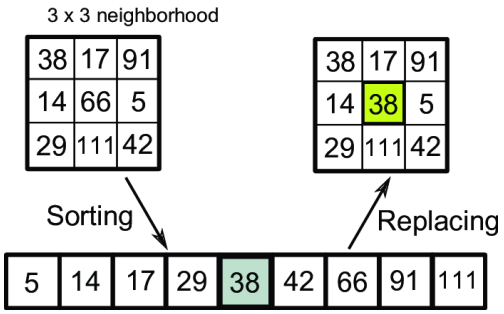


Рис. 2. Принцип работы медианного фильтра

Еще одним методом шумоподавления является медианная фильтрация [4]. Принцип работы такого фильтра заключается в том, что для каждого пикселя рассматривается значения соседних, сортируются в порядке возрастания и результирующим будет медианное значение (рис. 2).

Важно обратить внимание на то, что данный фильтр является нелинейным, где значение выходного пикселя не является средней величиной суммы всех остальных. Преимущество данного метода, в сравнении с размытием по Гауссу заключается в том, что данный фильтр менее чувствителен к сильным перепадам в числовых значениях. Данный метод помогает сохранить некоторую резкость в изображении и позволяет различить границы между объектами изображения.

1.4. Билатериальный фильтр

Принцип работы билатериального фильтра очень похож на размытие по Гауссу, где выбирается некоторое среднее значение, однако отличие заключается в том, что билатериальный фильтр тоже позволяет сохранить границы объектов, учитывая расстояние между значениями взятой области для фильтрации. Функция имеет следующий вид:

$$W_{sr}[m,n] = \sum_{m}^{1}\sum_{n}^{1} f\left[m,n\right] n_{\sigma_s}\left[i-m, j-n\right] n_{\sigma_r}\left(f\left[m,n\right]-f\left[i,j\right]\right),$$

$$n_{\sigma_s}\left[m,n\right] = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} e^{-\frac{\left(m^2+n^2\right)}{2\sigma_s^2}},$$

$$n_{\sigma_r}\left[k\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} e^{-\frac{k^2}{2\sigma_r^2}}.$$

Визуально работу билатериального фильтра можно представить на рис. 3

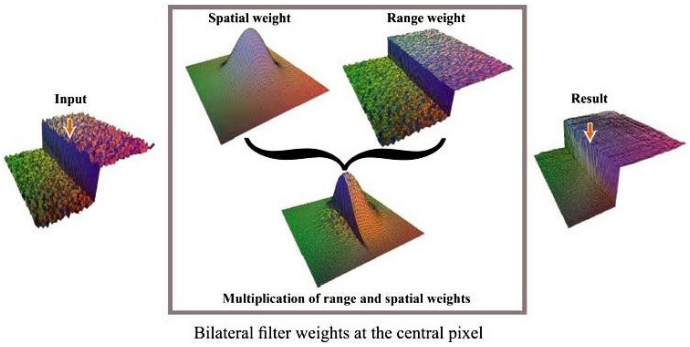


Рис. 3. Принцип работы билатериального фильтра

2. Метрики сравнения изображений

Для проведения сравнения изображений используется скрипт, реализованный на языке Python, который позволяет переконвертировать их в другое цветовое пространство, произвести работу шумоподавление, и получить метрики для сравнения результатов. Критериями оценки будут являться такие величины, как среднеквадратическая ошибка (Mean Square Error или MSE), пиковое отношение сигнал-шум (Peak Signal to Noise Ratio или PSNR) [1] и индекс структурного сходства (Structure Similarity или SSIM) [5], также будут сравниваться размеры полученных файлов.

Формулы метрик имеют следующий вид:

$$MSE = \frac{1}{mn}\sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{n-1}\left|I\left(x,y\right)-K\left(x,y\right)\right|^2,$$

$$PSNR = 20\ln\left(\frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}}\right),$$

$$SSIM(x,y)=\frac{(2\mu_x\mu_y+c_1)(2\sigma_{xy}+c_2)}{(\mu_x^2\mu_y^2+c_1)(\sigma_x^2+\sigma_y^2+c_2)},$$

где m, n — длины сторон изображения; x, y — координаты пикселя; $I(x,y)$, $K(x,y)$ — исходное и полученное изображения; MAX_I — максимальное значение, принимаемое пикселем (для 8 бит $MAX_I = 255$); μ_x, μ_y — средние значения по x и y; σ_x, σ_y — дисперсии x и y; σ_{xy} — ковариация x и y; c_1, c_2 — константы.

3. Результаты работы

Для работы были выбраны реальные фотографии размером 1500×1000 пикселей, сделанные самостоятельно. Пример одной из фотографий приведен на рис. 4.

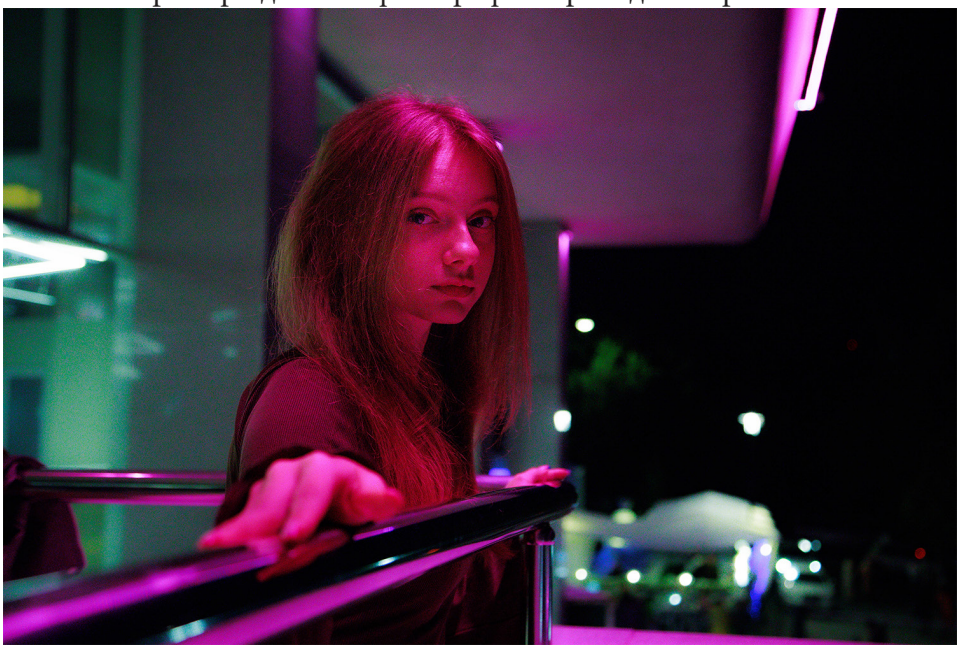


Рис. 4. Пример фотографии до обработки

Для проведения анализа работы шумоподавления в разных цветовых пространствах была составлена таблица со значениями всех необходимых метрик. Сравнение происходило между неким эталонным вариантом после обработки через Adobe Lightroom и результатом работы скрипта. Результаты приведены в табл. 1–5.

Таблица 1

Значения метрик после обработки изображений в пространстве HSV

Color Space	Method	Metrics	Image 1	Image 2	Image 3	Image 4	Image 5	Image 6
HSV	Gaussian Blur	PSNR	25,986	24,572	27,566	17,991	34,610	31,105
		SSIM	0,752	0,764	0,787	0,476	0,947	0,918
		MSE	491,581	680,655	341,633	3097,59	67,477	151,242
		Size (bites)	318186	412837	434665	799701	286576	352334
	Median Filter	PSNR	29,721	28,583	28,042	36,877	34,284	31,291
		SSIM	0,885	0,890	0,793	0,982	0,943	0,935
		MSE	208,02	270,291	306,153	40,032	72,739	144,901
		Size (bites)	261278	324492	401550	244414	260593	308338

	Bilaterial Filter	PSNR	31,314	27,668	28,699	25,095	34,780	31,718
		SSIM	0,900	0,853	0,833	0,908	0,948	0,942
		MSE	144,130	333,722	263,165	603,535	64,883	131,325
		Size (bites)	279823	381797	475761	417107	224951	277873

Таблица 2

Значения метрик после обработки изображений в пространстве HSL

Color Space	**Method**	**Metrics**	**Image 1**	**Image 2**	**Image 3**	**Image 4**	**Image 5**	**Image 6**
HSL	Gaussian Blur	PSNR	25,733	24,636	27,566	17,991	34,610	31,105
		SSIM	0,748	0,757	0,787	0,476	0,947	0,918
		MSE	521,075	670,748	341,633	3097,590	67,477	151,242
		Size (bites)	321669	414404	434665	799701	286576	352334
	Median Filter	PSNR	29,572	28,404	28,042	36,877	34,284	31,291
		SSIM	0,882	0,880	0,793	0,982	0,943	0,935
		MSE	215,255	281,663	306,153	40,032	72,739	144,901
		Size (bites)	263594	321736	401550	244414	260593	308338
	Bilaterial Filter	PSNR	30,516	27,330	28,699	25,095	34,780	31,718
		SSIM	0,891	0,840	0,833	0,908	0,948	0,942
		MSE	173,189	360,692	263,165	603,535	64,883	131,325
		Size (bites)	284687	385710	475761	417107	224951	277873

Таблица 3

Значения метрик после обработки изображений в пространстве YCbCr

Color Space	**Method**	**Metrics**	**Image 1**	**Image 2**	**Image 3**	**Image 4**	**Image 5**	**Image 6**
YCbCr	Gaussian Blur	PSNR	31,882	29,981	28,765	37,995	35,626	33,398
		SSIM	0,943	0,903	0,840	0,988	0,956	0,956
		MSE	126,470	195,930	259,220	30,949	53,406	89,208
		Size (bites)	212886	280539	393460	223535	271755	318210
	Median Filter	PSNR	30,389	29,896	28,025	37,551	34,269	31,309
		SSIM	0,929	0,913	0,792	0,989	0,943	0,936
		MSE	178,325	199,764	307,400	34,279	72,995	144,297
		Size (bites)	206485	257965	395079	198495	253848	302311
	Bilaterial Filter	PSNR	32,352	30,245	28,158	37,606	34,077	31,070
		SSIM	0,93	0,911	0,807	0,988	0,944	0,939
		MSE	113,494	184,352	298,130	33,850	76,293	152,470
		Size (bites)	170924	205944	313106	152122	190302	229722

В ходе анализа метрик можно сделать вывод, что лучшим пространством при обработке является RGB с использованием билатериального фильтра. На втором месте находится пространство YCbCr, так как оно уступает по MSE, PSNR и SSIM, однако размер полученных файлов после работы в YCbCr меньше, чем для всех других пространств. Хуже всего себя показали пространства HSV и HSL в сочетании с размытием по Гауссу и медианным фильтром: на изображениях присутствует заметный брак в виде цветных пятен, то есть обработка происходит некорректно и изображения непригодны для дальнейшего использования (рис. 5). При обработке с билатериальным фильтром данной проблемы замечено не было.

Таблица 4

Значения метрик после обработки изображений в пространстве Lab

Lab	Gaussian Blur	PSNR	31,609	29,451	28,464	37,533	35,489	33,363
		SSIM	0,905	0,903	0,830	0,985	0,953	0,955
		MSE	134,681	221,332	277,790	34,421	55,119	89,930
		Size (bites)	217227	275248	392056	233209	276945	321777
	Median Filter	PSNR	30,244	29,345	28,016	37,162	34,190	31,290
		SSIM	0,892	0,908	0,787	0,984	0,940	0,935
		MSE	184,407	226,832	307,971	37,493	74,320	144,914
		Size (bites)	219292	278575	400091	228046	263425	308628
	Bilaterial Filter	PSNR	32,535	29,584	27,909	37,564	33,938	31,102
		SSIM	0,903	0,913	0,799	0,985	0,942	0,939
		MSE	108,808	214,678	315,672	34,177	78,771	151,341
		Size (bites)	185042	215554	317684	174144	200779	240491

Таблица 5

Значения метрик после обработки изображений в пространстве RGB

RGB	Gaussian Blur	PSNR	31,893	30,008	28,777	38,061	35,665	33,440
		SSIM	0,944	0,906	0,842	0,988	0,956	0,956
		MSE	126,132	194,679	258,475	30,480	52,921	88,336
		Size (bites)	214042	282472	393973	225720	272658	319357
	Median Filter	PSNR	30,498	29,974	28,062	37,616	34,312	31,338
		SSIM	0,930	0,916	0,793	0,990	0,944	0,937
		MSE	173,915	196,235	304,772	33,768	72,265	143,340
		Size (bites)	206878	266872	390005	204326	252070	298098
	Bilaterial Filter	PSNR	34,918	30,562	30,015	38,037	36,118	34,017
		SSIM	0,950	0,918	0,866	0,988	0,955	0,960
		MSE	62,856	171,374	194,368	30,653	47,680	77,345
		Size (bites)	194860	232448	422174	158158	212980	277494

Рис. 5. Результат после работы в пространстве HSV с размытием по Гауссу и билатериальным фильтром

Заключение

В ходе работы было рассмотрено влияние смены цветового пространства на очистку изображения от шумов. Для данного исследования был реализован скрипт на языке Python, который позволяет вычислить необходимые метрики для сравнения обработанного изображения с эталонным вариантом. Для обработки были использованы три базовых метода шумоподавления для пяти разных цветовых пространств, применяемых к шести фотографиям.

Исходя из полученных метрик можно сказать, что пространство RGB занимает первое место. Хуже всего себя показывают пространства HSV и HSL, так как кроме метрик было замечено сильное проявление артефактов в виде цветных пятен и вкраплений. Однако, кроме пространства RGB, интерес вызывает и пространство YCbCr. Для каждого изображения наименьший вес файла получается добиться именно при применении цветового пространства YCbCr и билатериального фильтра, что в некоторых ситауациях может быть критично, например, для скорости передачи файла между устройствами или для хранения большого количества файлов.

Литература

1. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – Москва : Техносфера, 2006. – 1072 с.

2. Understanding Color Models : A Review / N. A. Ibraheem, M. M. Hasan, R. Z. Khan, P. K. Mishra. – Text : immediate // India : ARPN Journal of Science, Technology. ‑ 2012. ‑ Vol. 2, № 3. ‑ С. 265‑275.

3. *Маргулис Д.* Photoshop для профессионалов : классическое руководство по цветокоррекции / Д. Маргулис ; перевод с английского. –5-е изд. – Москва : Интелбук, 2007. – 656 с.

4. *Hussein T. D. H.* A study on image noise and various image denoising techniques / T. D. H. Hussein, H. K. Omar, K. H. Jihad. – Iraq : ResearchJet Journal of Analysis and Inventions, 2021. – Vol. 2. – 42 p.

5. *Umme S.* Image Quality Assessment through FSIM / S. Umme, A. Morium, S. U. Mohammad. – Text : immediate // SSIM, MSE and PSNR-A Comparative Study. – 2019. – 240 с.

УДК 004.021

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМОВ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

А. В. Семенов, Т. М. Леденева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются алгоритмы поиска кратчайшего пути Дейкстры и A*. Производится сравнение данных алгоритмов, а также поиска в ширину на случайно сгенерированных лабиринтах разной размерности. Исследование включает анализ времени работы, количества посещённых вершин и длины маршрута. Особое внимание уделяется эвристическому подходу алгоритма A*, который демонстрирует лучшие показатели по числу обработанных вершин и адаптивности.
Ключевые слова: взвешенный орграф, кратчайший путь, поиск в ширину.

Введение

Алгоритмы поиска пути — это методы компьютерной обработки данных, используемые для построения оптимального маршрута между двумя или несколькими точками в графе, матрице или пространстве.

Тема построения пути является одной из актуальных проблем современного программирования и находит свое применения во многих аспектах современного мира. К виду графа или матрицы можно привести множество практических задач, благодаря чему алгоритмы поиска пути находят свое применение в городской инфраструктуре при построении маршрутов движения общественного транспорта, проложении новых дорог, в контексте систем GPS, в бизнесе для решения проблем логистики, при разведке. С помощью алгоритмов поиска пути производится разведка и построение карт местности, они могут быть использованы при поисково-спасательных операциях. Также алгоритмы активно используются в сфере компьютерных игр и робототехнике.

Наиболее известным алгоритмом поиска кратчайшего пути является алгоритм Дейкстры [1]. Долгое время рассматривались варианты оптимизации алгоритма возникали новые итерации. Ученым Нильсом Нильсеном для создания робота, способного самостоятельно прокладывать маршрут, была предложена возможность использования эвристики, чтобы учитывать примерное расстояние от рассматриваемой точки до конечной. Затем Бертрамом Рафаэлем была предложена модификация, учитывающая помимо расстояния от рассматриваемой точки до конечной также расстояние от начальной точки до текущей. Таким образом, в 1968 году появился алгоритм, названный A* [2]. Он сохраняет основную идею алгоритма Дейкстры, однако оптимизирует процесс выбора точек, используя эвристический подход, за счет чего алгоритм изначально старается двигаться к целевой точке, благодаря чему просматривается меньшее количество вершин. В данной статье будет рассмотрено насколько велика разница между алгоритмами, путем сравнения времени их работы, подсчета количества посещаемых вершин и длины найденного пути.

1. Поиск в ширину

Алгоритм поиска в ширину является одним из простейших алгоритмов поиска кратчайшего пути. Работает по принципу последовательного обхода всех вершин графа по «уровням» («уровнем» в данном контексте называется удаленность или глубина вершины от источника).

Алгоритм можно расписать по следующим шагам:

1. Поместить в очередь начальную вершину;

2. Извлечь из очереди первую вершину, пометив ее как рассмотренную;

3. Если последняя извлеченная вершина является целью – вернуть результат;

4. Если последняя извлеченная вершина не является целью – добавить в очередь все смежные с ней непомеченные вершины;

5. Перейти к пункту 2.

В случае невзвешенного графа поиск в ширину всегда находит кратчайший путь, однако, если граф взвешенный — поиск в ширину найдет путь, проходящий через наименьшее количество вершин, не обязательно кратчайший.

Алгоритм имеет сложность $O(V + E)$, где V — количество вершин, E — количество ребер.

2. Алгоритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры можно описать следующим образом:

1. Для всех вершин графа выставить метку расстояния равной бесконечности;

2. Поместить в очередь начальную вершину, пометив расстояние до нее как 0;

3. Извлечь из очереди первый элемент;

4. Рассмотреть все смежные с извлеченной вершины, обновляя их метки расстояний как $l(w) = l(v) + c(v, w)$, где $l(v)$ — расстояние от начала до извлеченной вершины, а $c(v, w)$ — расстояние от извлеченной вершины до смежной);

5. Если новая метка расстояния $l(w)$ до смежной вершины меньше известной, присвоить ей новое значение метки, а вершину добавить в очередь, если ее там нет;

6. Повторять пункт 3 если очередь не пуста.

В случае поиска пути до конкретной вершины, алгоритм необходимо слегка модифицировать:

- Если извлекаемая в пункте 3 вершина является целью — необходимо запомнить расстояние до нее;
- В пункте 5, если расстояние до конечной вершины известно — добавлять новую в очередь только если ее новая метка меньше предыдущей И меньше расстояния до конечного вершины.

Таким образом, алгоритм Дейкстры позволяет для любого графа гарантированно находить кратчайший путь (при условии отсутствия переходов с отрицательным значением).

Временная сложность алгоритма зависит от реализации. При использовании матрицы смежности это $O(V^2)$, при использовании списка смежности $O(V^2 + E)$, при использовании кучи $O((V + E)\log(V))$.

3. Алгоритм A*

Алгоритм A* является модификацией алгоритма Дейкстры. При вычислении меток расстояний A* берет во внимание расстояния от рассматриваемой вершины до целевой, из-за чего движение в противоположном от искомой вершины направлении становится менее выгодным. Коэффициент расстояния зачастую называется потенциалом.

Для реализации алгоритма существует два распространенных подхода:

- Пересчитать все вершины графа, беря во внимание потенциалы, а затем использовать алгоритм Дейкстры на новом графе;
- При расчете новой метки алгоритмом Дейкстры, также добавить потенциал, рассчитываемый на основе эвристики.

Рассмотрим алгоритм A* с пересчетом меток на ходу:

1. Для всех вершин графа выставить метку расстояния равной бесконечности.

2. Для всех вершин графа выставить значение эвристической функции (потенциал) равным оценке расстояния от текущей вершины до целевой.

3. Поместить в очередь начальную вершину, пометив расстояние до нее как 0.

4. Извлечь из очереди первый элемент (вершину с наименьшим значением суммы метки расстояния и потенциала).

5. Рассмотреть все смежные с извлеченной вершины, пересчитывая их метки расстояний как (расстояние до извлеченной вершины + расстояние от извлеченной вершины до добавляемой).

6. Если новая метка расстояния до смежной вершины меньше известной, присвоить ей новое значение метки и добавить вершину в очередь если ее там нет.

7. Повторять пункт 4, если очередь не пуста.

8. Если извлеченная вершина является целевой, завершить алгоритм, сохранив путь и общее расстояние.

Сложность алгоритма зависит от эвристики. При использовании матрицы смежности имеет временную сложность $O(V^2)$, списка смежности $O(V^2 + E)$, при использовании кучи $O((V + E)\log(V))$. В худшем случае сложность совпадает со сложность алгоритма Дейкстры, однако в среднем случае A* выигрывает.

4. Вычислительный эксперимент

Для сравнения алгоритмов был проведен вычислительный эксперимент, для чего была написана реализация алгоритмов поиска в ширину, Дейкстры, A* на языке python [3]. Алгоритмы тестировались на случайно сгенерированных лабиринтах, которые затем приводятся к формату графа. Сначала в лабиринте генерируются стартовая и конечная точки, затем по периметру ставятся стены. Далее каждая из клеток лабиринта с вероятностью 30 % может стать стеной. Чтобы лабиринт гарантированно имел решение, от начальной точки строится проход в случайном направлении, пока не будет встречена конечная точка. Пример лабиринта, генерируемого программой изображен на рис. 1.

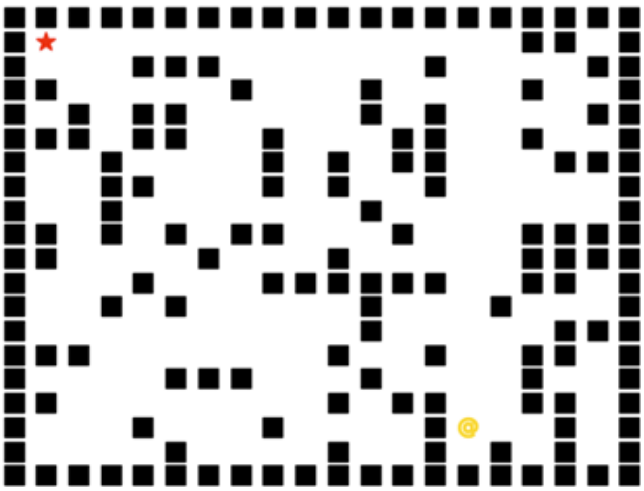


Рис. 1. Сгенерированный программой лабиринт 20×20

Сравнение каждого из алгоритмов проводилось на случайных лабиринтах размерами 20, 50 и 100. Для каждого размера было сгенерировано 100 разных лабиринтов, на каждом из которых все алгоритмы отрабатывали по 100 раз, для уменьшения погрешности, после чего высчитывались средние значения времени вычисления маршрута, длины маршрута и количества посещенных вершин. Результаты сравнения приведены в табл. 1– 3.

Таблица 1

Результаты работы алгоритмов для лабиринтов размерности 20×20

Алгоритм	Среднее время итерации (с.)	Среднее кол-во посещенных вершин	Средняя длина маршрута
A*	0.0002569088700001885	23.68	10.48
Дейкстры	0.0003562788099998215	80.55	10.48
Поиск в ширину	0.00012813708999974554	80.55	10.48

Таблица 2

Результаты работы алгоритмов для лабиринтов размерности 50×50

Алгоритм	Среднее время итерации (с.)	Среднее кол-во посещенных вершин	Средняя длина маршрута
A*	0.0017921239899995273	125.53	31.58
Дейкстры	0.003355799680000201	641.34	31.58
Поиск в ширину	0.0013166593300001294	641.34	31.58

Таблица 3

Результаты работы алгоритмов для лабиринтов размерности 100×100

Алгоритм	Среднее время итерации (с.)	Среднее кол-во посещенных вершин	Средняя длина маршрута
A*	0.007102044859999838	339.31	60.96
Дейкстры	0.01842518159999964	2733.49	60.96
Поиск в ширину	0.008042552770000204	2733.49	60.96

Ориентируясь на результаты исследования, можно сделать вывод, что каждый из рассмотренных алгоритмов справляется с задачей поиска кратчайшего пути. При этом количество посещенных вершин для алгоритмов Дейкстры и поиска в ширину совпадает, а A* в среднем посещает на 80 % меньше вершин. При этом с увеличением размерности задачи, разница увеличивается в пользу A*. По времени работы Алгоритм A* в среднем отработал на 45 % быстрее алгоритма Дейкстры и на 27 % быстрее поиска в ширину на лабиринтах размерности 100×100, однако на 36 % и 100 % медленнее для задач размерности 50×50 и 20×20 соответственно.

Чтобы выяснить тенденцию для задач большей размерности, было проведено более точное сравнение для лабиринтов размерности 1000×1000. Каждый из алгоритмов отработал по 200, итераций для уменьшения погрешности, на 500 разных лабиринтах. Результаты сравнения приведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты работы алгоритмов для лабиринтов размерности 1000x1000

Алгоритм	Среднее время итерации (с.)	Среднее кол-во посещенных вершин	Средняя длина маршрута
A*	1.3230792510008906	16586.4	576.1
Дейкстры	6.849309896001358	280887.9	576.1
Поиск в ширину	3.0817570329993034	280887.9	576.1

На задачах большей размерности все алгоритмы также находят оптимальный маршрут. Количество посещенных вершин алгоритмом A* на 90 % меньше относительно Дейкстры и Поиска в ширину. При этом A* отрабатывает на 57 % быстрее поиска в ширину и на 80 % быстрее алгоритма Дейкстры.

Заключение

Алгоритмы поиска и построения кратчайшего пути широко применяются в современном мире: от навигационных систем и логистики до игровой индустрии и виртуальной реальности. При выборе алгоритма важно учитывать специфику задачи и особенности данных.

Алгоритм A* превосходит алгоритм Дейкстры в том, что он использует эвристику для более целенаправленного поиска, что позволяет сокращать количество обрабатываемых вершин. Однако при сравнении A* с поиском в ширину важно учитывать, что оба алгоритма имеют схожую временную сложность ($O(b^d)$, где b — фактор ветвления, а d — глубина решения) и пространственную сложность. A* потребляет больше памяти из-за необходимости хранения дополнительной информации, связанной с эвристикой. В среднем A* отрабатывает быстрее на задачах большего масштаба.

Несмотря на это, A* обладает рядом ключевых преимуществ. Во-первых, он гарантирует нахождение оптимального решения (при использовании допустимой эвристики). Во-вторых, A* учитывает уже рассчитанные значения и может адаптироваться под изменяющиеся условия системы, пересчитывая метки вершин. Это делает его особенно полезным в динамических системах. Поиск в ширину не имеет таких возможностей и не гарантирует оптимальности решения.

Литература

1. *Бабичев С. Л.* Лекции по алгоритмам и структурам данных учебное пособие / С. Л. Бабичев. – Москва : МАКС Пресс, 2019. – 342.

2. A* Search Algorithm // Geeks For Geeks URL: https://www.geeksforgeeks.org/a-search-algorithm/?ref=gcse_outind (дата обращения: 15.10.2024)

3. Python 3.13.0 documentation // Python URL: https://docs.python.org/3/index.html (дата обращения: 20.10.2024)

УДК 517.956.3, 517.955, 517.954, 517.958, 539.3(1)

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УПРУГОЙ ДИНАМИКИ НА РАЗРЫВНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЯХ

Ю. И. Скалько[1], С. Ю. Гриднев[2,1] Н. В. Минаева[3]

[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
[2]Воронежский государственный технический университет
[3]Воронежский государственный университет

Аннотация. Численное моделирование распространения упругих волн в неоднородных средах с точечными источниками действующих сил, при наличии внутренних границ, на которых свойства среды или некоторые переменные математической модели могут претерпевать разрывы приводят к необходимости аппроксимации решения кусочно-гладкими базисными функциями. При построении вычислительных алгоритмов на кусочно-гладких базисных функция ключевым моментом является решение обобщённой задачи Римана с условиями на внутренних и внешних границах. В работе приведено решение обобщённой задачи Римана на внутренних и внешних границах для системы уравнений упругой динамики в случае многих пространственных переменных.
Ключевые слова: кусочно-гладкие базисные функции, обобщенные функции, обобщенная задача Римана с условиями на границе, фундаментальное решение оператора задачи, матрица-функция Грина.

Введение

Ряд актуальных прикладных задач приводят к математическим моделям, которые являются начально-краевыми задачами для системы уравнений упругой динамики. Численные алгоритмы решения таких начально-краевых задач должны обладать рядом специальных свойств. Они должны быть применимыми для ситуаций, когда в среде, где распространяется упругая волна, имеются внутренние границы, на которых свойства среды скачкообразно меняются или на этих границах соприкасающиеся части среды проскальзывают друг относительно друга. В таких случаях отдельные компоненты решения также могут претерпевать разрывы на этих внутренних границах. Также эти алгоритмы должны позволять рассчитывать ситуации, когда часть действующих внешних сил являются точечными. Должна быть возможность решения указанных начально краевых задач с различными условиями на внешних границах. Если решаются задачи с постоянно действующими источниками внешних сил, то должна быть возможность моделировать неотражающие граничные условия и численно решать задачи с такого рода условиями.

Авторами разрабатываются численные методы, обладающие указанными выше свойствами [6–12]. Эти методы основаны на построении системы уравнений в обобщённых функциях, эквивалентной исходной начально-краевой задаче. И дальнейшем приближённом решении этой системы уравнений. При этом решение системы уравнений в обобщённых функциях аппроксимируется кусочно-гладким базисными функциями.

Такой подход оказался эффективным при решении ряда прикладных задач. При этом ключевым моментом является решение обобщённой задачи Римана с условиями на внутренней или внешней границе. В случае одной пространственной переменной предложен ряд методов решения задачи Римана [1, 2]. По сути, все эти методы связаны с наличием у гиперболических систем характеристик. В случае многих пространственных переменных методы, основанные на наличии характеристик, уже не работают. И задача Римана, чаще всего, решается в предпо-

ложении, что вблизи границы решение представляет собой плоскую волну, которая движется вдоль нормали к поверхности границы [1–3, 5].

В работе будет приведено решение обобщенной задачи Римана на внешних и внутренних границах для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_n}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in R^N \tag{1}$$

В дальнейшем будем полагать, что каждая из матриц $\mathbf{A}_n$ имеет полный набор левых собственных векторов и, следовательно, представима в виде

$$\mathbf{A}_n=\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda}_n\mathbf{\Omega}_n, \tag{2}$$

$\mathbf{\Lambda}_n$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_n$, упорядоченных по не убыванию, $\mathbf{\Omega}_n$ — матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_n$, соответствующие собственным числам $\mathbf{\Lambda}_n$, $\mathbf{R}_n=\mathbf{\Omega}_n^{-1}$ — матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_n$.

Система уравнений, описывающей распространение упругих волн для случая двух пространственных переменных приведена в[3] и может быть представлена в виде (1). При этом будут выполнены соотношения (2).

1. Фундаментальное решение

Обобщенным решением для системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\sum_{i}^{N}\mathbf{A}_n\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_n}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{3}$$

будем называть обобщенную функцию $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\in \mathtt{D}'$, удовлетворяющую этому уравнению в обобщенном смысле, т. е. для произвольной основной функции $\varphi(t,\mathbf{x})\in \mathtt{D}$ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t},\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x})\right)+\sum_{n}^{N}\left(\mathbf{A}_n\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_n},\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x})\right)=\left(\mathbf{f}(t,\mathbf{x}),\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x})\right)$$

Фундаментальным решением оператора задачи (3) или матрицей-функцией Грина называется обобщенная матрица-функция, $\mathbf{G}(t,\mathbf{x})\in \mathtt{D}'$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}+\sum_{n}^{N}\mathbf{A}_n\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_n}=\mathbf{I}\delta(t,\mathbf{x}) \tag{4}$$

$\mathbf{I}$ — единичная диагональная матрица $(M\times M)$.

Выполнив преобразование Фурье уравнений (4) по пространственным переменным, для обобщенной функции $\mathbf{V}(t,\boldsymbol{\xi})=F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}-i\sum_{n}^{N}\xi_n\mathbf{A}_n\mathbf{V}=\mathbf{I}\delta(t).$$

Решение этого уравнения

$$\mathbf{V}(t,\boldsymbol{\xi})=\theta(t)\exp\left(i\sum_{n=1}^{N}\xi_n\mathbf{A}_n t\right), \tag{5}$$

Лемма. *Для произвольных квадратных матриц* $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_N$ *справедливо представление*

$$e^{i\xi_1\mathbf{A}_1t+\ldots+i\xi_N\mathbf{A}_Nt}=\prod_{n=1}^{N}e^{i\xi_n\mathbf{A}_nt}+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|>\alpha_1,|\boldsymbol{\alpha}|\geq 2}t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\prod_{n=1}^{N}(i\xi_n)^{\alpha_n}\,e^{i\xi_n\mathbf{A}_nt}\mathbf{Z}_{|\boldsymbol{\alpha}|},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ *— целочисленный вектор с неотрицательными составляющими* α_n *(мультииндекс),* $|\boldsymbol{\alpha}| = (\alpha_1 + ... + \alpha_N)$, $\mathbf{Z}_{|\boldsymbol{\alpha}|}$ *— однородный полином степени* $|\boldsymbol{\alpha}|$ *матриц* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_N$.

Ввиду ограниченности статьи, доказательство Леммы здесь не приводится. Следует только отметить, что доказательство опирается на формулу Цассенхауза [4].

Учтём (2), тогда

$$\exp\left(i\xi_n \mathbf{A}_n t\right) = \mathbf{R}_n \exp\left(i\xi_n \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n.$$

Следовательно на основании приведённой выше Леммы

$$\exp\left(i\sum_{n=1}^{N}\xi_n \mathbf{A}_n t\right) = \prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \exp\left(i\xi_n \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|>\alpha_1, |\boldsymbol{\alpha}|\geq 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \left(i\xi_n\right)^{\alpha_n} \exp\left(i\xi_n \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Подставляя это равенство в (5) и выполняя обратное преобразование Фурье, получим матрицу-функцию Грина

$$\mathbf{G}\left(t, \mathbf{x}\right) = \theta\left(t\right)\left(\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|>\alpha_1, |\boldsymbol{\alpha}|\geq 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \frac{\partial^{\alpha_n}\boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)}{\partial x_n^{\alpha_n}}\boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}\right).$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)$ — диагональные матрицы, нумеруемые индексом n, в k-й строке которых стоит обобщенная функция $\delta(x_n - \lambda_{n,k} t)$, $\lambda_{n,k}$ — k-е собственное число матрицы $\mathbf{A}_n$.

Обозначим через $\mathbf{D}_k$ — квадратную матрицу размера $M \times M$, все элементы которой равны 0, кроме k-го элемента главной диагонали, равного 1. Тогда

$$\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n = \prod_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\mathbf{C}_{n,k}\delta\left(x_n - \lambda_{n,k} t\right),$$

где $\mathbf{C}_{n,k} = \mathbf{R}_n \mathbf{D}_k \boldsymbol{\Omega}_n$.

Если определить: $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_N)$ — мультииндекс, целочисленный вектор с составляющими $k_n = 1 : M$, $\mathbf{C}_{\mathbf{k}} = \mathbf{C}_{1,k_1} \cdots \mathbf{C}_{N,k_N}$ — многоиндексный массив матриц, $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}} = (\lambda_{1,k_1}, \lambda_{2,k_2}, ..., \lambda_{N,k_N})$ — многоиндексный массив векторов, то

$$\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n = \sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}} t\right),$$

тогда

$$\mathbf{G}\left(t, \mathbf{x}\right) = \theta\left(t\right)\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}} t\right) + \theta\left(t\right)\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|>\alpha_1, |\boldsymbol{\alpha}|\geq 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}\mathbf{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} D_{\boldsymbol{\alpha}}\delta\left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}} t\right), \tag{6}$$

где $D_{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}$ — оператор дифференцирования по пространственным переменным.

2. Задача Римана на внутренних границах

Необходимо найти решение начально-краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \mathbf{u}\left(t, \mathbf{x}\right)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n \frac{\partial \mathbf{u}\left(t, \mathbf{x}\right)}{\partial x_n} = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}\right), \quad t \in \left[0, T\right], \mathbf{x} \in R^N \tag{7}$$

с начальными данными

$$\mathbf{u}\left(t = 0, \mathbf{x}\right) = \mathbf{u}_{init}\left(\mathbf{x}\right), \tag{8}$$

которые всюду непрерывны, кроме гиперплоскости $\Gamma : x_1 = 0$. При этом должны выполняться заданные соотношения (условия сопряжения), связывающие значения переменных по обе стороны гиперплоскости

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{u}\left(t,x_1=-0,x_2,...,x_N\right),\mathbf{u}\left(t,x_1=+0,x_2,...,x_N\right)\right)=\mathbf{0}. \quad (9)$$

Условия сопряжения отражают физические условия, которые необходимо выполнять на границе Г. Коэффициенты системы уравнений (7) слева и справа от гиперплоскости Г задаются, соответственно, матрицами $\mathbf{A}_n^-$ и $\mathbf{A}_n^+$, которые могут различаться между собой.

В качестве примера соотношений, связывающих значения переменных по разные стороны гиперплоскости, в случае системы уравнений упругой динамики можно рассмотреть «условия полного слипания», состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость $x_1=0$ непрерывны компоненты вектора смещений и непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты тензора напряжений. Или «условия проскальзывания без трения», состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты вектора смещений, непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты тензора напряжений, тангенциальные компоненты сил, действующих по обе стороны гиперплоскости, равны 0.

Определим функции

$$\Pi^-(\mathbf{x}) = \begin{cases}1, \textit{если } x_1\le 0\\ 0, \textit{при остальных } \mathbf{x}\end{cases}; \quad \Pi^+(\mathbf{x}) = \begin{cases}1, \textit{если } x_1\ge 0\\ 0, \textit{при остальных } \mathbf{x}\end{cases}.$$

Пусть $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ решение рассматриваемой обобщённой задачи Римана с условиями на внутренней границе. Разобъем временной интервал $[0,T]$ узлами t_j, $j=0,1,\ldots,J$ на J временных отрезков $[t_{j-1},t_j]$, $j=1,\ldots,J$. Определим для $j=1,\ldots,J$ функции $\mathbf{u}_j(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_j(t,\mathbf{x})$, которые для $t_{j-1}\le t\le t_j$, $j=1,\ldots,J$ совпадают, соответственно, с функциями $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ и равны $\mathbf{0}$ при остальных $t,\mathbf{x}$. И функцию $\mathbf{u}_0(t,\mathbf{x})$, совпадающую с $\mathbf{u}_{init}(\mathbf{x})$ для $t\le t_0$ и равную нулю для $t>t_0$.

Также определим функции:

$$\mathbf{u}_j^-(t,\mathbf{x})=\theta(t)\Pi^-(\mathbf{x})\mathbf{u}_j(t,\mathbf{x}); \quad \mathbf{u}_j^+(t,\mathbf{x})=\theta(t)\Pi^+(\mathbf{x})\mathbf{u}_j(t,\mathbf{x});$$
$$\mathbf{u}_0^-(t,\mathbf{x})=\Pi^-(\mathbf{x})\mathbf{u}_{init}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{u}_0^+(t,\mathbf{x})=\Pi^+(\mathbf{x})\mathbf{u}_{init}(\mathbf{x});$$
$$\mathbf{v}_j^-(t,\mathbf{x})=\mathbf{u}_j^-(t,x_1=0,x_2,...,x_N); \quad \mathbf{v}_j^+(t,\mathbf{x})=\mathbf{u}_j^+(t,x_1=0,x_2,...,x_N);$$
$$\mathbf{f}_j^-(t,\mathbf{x})=\Pi^-(\mathbf{x})\mathbf{f}_j(t,\mathbf{x}); \quad \mathbf{f}_j^+(t,\mathbf{x})=\Pi^+(\mathbf{x})\mathbf{f}_j(t,\mathbf{x}).$$

Обобщенные функции $\mathbf{u}_j^-(t,x)$ удовлетворяют последовательности систем дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial\mathbf{u}_j^-}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n^-\frac{\partial\mathbf{u}_j^-}{\partial x_n}=\mathbf{f}_j^-+\mathbf{u}_{j-1}^-\delta_{t=t_{j-1}}-\mathbf{u}_j^-\delta_{t=t_j}-\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}_j^-\delta_{x_1=0}; \quad j=1,\ldots,J \quad (10)$$

Аналогично обобщенные функции $\mathbf{u}_j^+(t,x)$ удовлетворяют последовательности систем дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial\mathbf{u}_j^+}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n^+\frac{\partial\mathbf{u}_j^+}{\partial x_n}=\mathbf{f}_j^++\mathbf{u}_{j-1}^+\delta_{t=t_{j-1}}-\mathbf{u}_j^+\delta_{t=t_j}+\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}_j^+\delta_{x_1=0} \quad j=1,\ldots,N \quad (11)$$

Решение j-го уравнения системы (10) можно выписать в виде свертки фундаментального решения оператора задачи (6) с правой частью этого уравнения

$$\mathbf{u}_j^-\left(t,\mathbf{x}\right)=\mathbf{G}^-*\left(\mathbf{f}_j^-+\mathbf{u}_{j-1}^-\delta_{t=t_{j-1}}-\mathbf{u}_j^-\delta_{t=t_j}-\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}_j^-\delta_{x_1=0}\right).$$

Выполнив указанные свёртки, получаем равенства

$$\sum_{k_1:\lambda_{k_1}^-\ge 0}\mathbf{C}_{1,k_1}^-\mathbf{v}_j^-\left(t,\mathbf{x}\right)=\sum_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^-\ge 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^-\mathbf{u}_{j-1}^-\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^-\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{b}_j^-.$$

После умножения этого равенства на $\mathbf{l}_{k_1}^-$ — левые собственные вектора матрицы $\mathbf{A}_1^-$, которые соответствуют неотрицательным собственным числам получим систему равенств

$$\mathbf{l}_{k_1}^{-}\mathbf{v}_j^{-}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{-}\sum_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{-}\geq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{-}\mathbf{u}_{j-1}^{-}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{-}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{l}_{k_1}^{-}\mathbf{b}_j^{-},\qquad \lambda_{k_1}^{-}\geq 0. \tag{12}$$

Аналогично сказанному выше, решение j-го уравнения системы (11) можно выписать в виде свертки фундаментального решения оператора задачи (11) с правой частью этого уравнения

$$\mathbf{u}_j^{+}(t,\mathbf{x})=\mathbf{G}^{+}*\left(\mathbf{f}_j^{+}+\mathbf{u}_{j-1}^{+}\delta_{t=t_{j-1}}-\mathbf{u}_j^{+}\delta_{t=t_j}+\mathbf{A}_1^{-}\mathbf{v}_j^{+}\delta_{x_1=0}\right).$$

Вычисляя указанные свёртки, получаем

$$\sum_{k_1:\lambda_{k_1}^{+}\leq 0}\mathbf{C}_{1,k_1}^{+}\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{+}\leq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{+}\mathbf{u}_{j-1}^{+}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{+}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{b}_j^{+}.$$

После умножения этих равенства на $\mathbf{l}_{k_1}^{+}$ — левые собственные вектора-строки матрицы $\mathbf{A}_1^{+}$ получим

$$\mathbf{l}_{k_1}^{+}\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{+}\sum_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{+}\leq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{+}\mathbf{u}_{j-1}^{+}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{+}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{l}_{k_1}^{+}\mathbf{b}_j^{+},\qquad \lambda_{k_1}^{+}\leq 0. \tag{13}$$

Прибавим к равенства (12) и (13) условия (9), получим СЛАУ для $\mathbf{v}_j^{-}(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})$

$$\begin{cases}\mathbf{l}_{k_1}^{-}\mathbf{v}_j^{-}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{-}\sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{-}\geq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{-}\mathbf{u}_{j-1}^{-}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{-}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{l}_{k_1}^{-}\mathbf{b}_j^{-},\lambda_{k_1}^{-}\geq 0\\ \mathbf{l}_{k_1}^{+}\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{+}\sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{+}\leq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{+}\mathbf{u}_{j-1}^{+}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{+}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{l}_{k_1}^{+}\mathbf{b}_j^{+},\lambda_{k_1}^{+}\leq 0.\\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}_j^{-}(t,\mathbf{x}),\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})\right)=\mathbf{0}\end{cases} \tag{14}$$

Для однозначного решения рассматриваемой обобщенной задачи Римана на внутренней границе необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (14) имела единственное решение. В случае системы уравнений упругой динамики, если на внутренней границе поставлены «условия полного слипания» или «условия проскальзывания без трения», матрица СЛАУ (14) не вырождена и эта СЛАУ имеет единственное решение.

Продифференцируем уравнения (14) по времени t и перейдём к пределу по $t\to t_{j-1}$

$$\begin{cases}\mathbf{l}_{k_1}^{-}\dfrac{\partial\mathbf{v}^{-}}{\partial t}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{-}\left(-\sum\limits_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n^{-}\dfrac{\partial\mathbf{u}^{-}}{\partial x_n}(t,\mathbf{x})+\mathbf{f}^{-}(t,\mathbf{x})\right),\lambda_{k_1}^{-}\geq 0\\ \mathbf{l}_{k_1}^{+}\dfrac{\partial\mathbf{v}^{+}}{\partial t}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{+}\left(-\sum\limits_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n^{+}\dfrac{\partial\mathbf{u}^{+}}{\partial x_n}(t,\mathbf{x})+\mathbf{f}^{+}(t,\mathbf{x})\right),\lambda_{k_1}^{+}\leq 0\\ \mathbf{L}\left(\dfrac{\partial\mathbf{v}^{-}}{\partial t}(t,\mathbf{x}),\dfrac{\partial\mathbf{v}^{+}}{\partial t}(t,\mathbf{x})\right)=\mathbf{0}\end{cases} \tag{15}$$

Именно эти уравнения и будут использованы в дальнейшем при построении вычислительного алгоритма.

3. Задача Римана на внешних границах

Необходимо найти решение начально-краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (7) в области $x_1\leq 0$ с непрерывными начальными данными, заданными для $x_1\leq 0$. При этом на границе $\Gamma: x_1=0$ должны выполняться заданные соотношения (граничные условия):

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\in\Gamma\right)\right)=\mathbf{0}. \tag{16}$$

В качестве примера граничных условий для системы уравнений упругой динамики могут быть отражающие граничные условия, когда на границе все компоненты вектора смещений равны нулю. Или свободные граничные условия, состоящие в том, что и нормальные и тангенциальные к гиперплоскости компоненты внешних сил на гиперплоскости равны нулю. Также могут быть рассмотрены граничные условия, когда на границе заданы плотность нормальной и тангенциальной компоненты действующих сил.

Аналогично сказанному выше справедливы равенства (12). Добавим к ним равенства (16) получим СЛАУ, которым должны удовлетворять значения решения обобщённой задачи Римана на правой внешней границе для неизвестных $\mathbf{v}_j^-(t,\mathbf{x})$

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{v}_j^-(t,\mathbf{x}) = \mathbf{l}_{k_1}^- \sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^- \geq 0} \mathbf{C}_{\mathbf{k}}^- \mathbf{u}_{j-1}^-\left(t_{j-1}, \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^-\left(t - t_{j-1}\right)\right) + \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{b}_j^-, \lambda_{k_1}^- \geq 0 \\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}_j^-(t,\mathbf{x})\right) = \mathbf{0} \end{cases}. \tag{17}$$

Для однозначного решения обобщенной задачи Римана с условиями на правой внешней границе необходимо и достаточно, чтобы эта система уравнений имела единственное решение.

Продифференцируем каждое из уравнений (17) по времени t и перейдём к пределу по $t \to t_{j-1}$.

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^- \dfrac{\partial \mathbf{v}^-}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{l}_{k_1}^- \left(-\sum\limits_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n^- \dfrac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_n}(t,\mathbf{x}) + \mathbf{f}^-(t,\mathbf{x}) \right), \quad \lambda_{k_1}^- \geq 0 \\ \mathbf{L}\left(\dfrac{\partial \mathbf{v}^-}{\partial t}(t,\mathbf{x}) \right) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{18}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что необходимым и достаточным условием однозначного решения обобщённого решения задачи Римана на правой внешней границе является существование единственного решения СЛАУ

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{v}_j^+(t,\mathbf{x}) = \mathbf{l}_{k_1}^+ \sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^+ \leq 0} \mathbf{C}_{\mathbf{k}}^+ \mathbf{u}_{j-1}^+\left(t_{j-1}, \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^+\left(t - t_{j-1}\right)\right) + \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{b}_j^+, \lambda_{k_1}^+ \leq 0 \\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}_j^+(t,\mathbf{x})\right) = \mathbf{0} \end{cases}. \tag{19}$$

Продифференцируем эти уравнения по времени t и перейдём к пределу по $t \to t_{j-1}$

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^+ \dfrac{\partial \mathbf{v}^+}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{l}_{k_1}^+ \left(-\sum\limits_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n^+ \dfrac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_n}(t,\mathbf{x}) + \mathbf{f}^+(t,\mathbf{x}) \right), \lambda_{k_1}^+ \leq 0 \\ \mathbf{L}\left(\dfrac{\partial \mathbf{v}^+}{\partial t}(t,\mathbf{x}) \right) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{20}$$

Именно эти соотношения и будут использованы в дальнейшем при построении вычислительного алгоритма.

В случае системы уравнений упругой динамики, если на внешней границе поставлены указанные вышеграничные условия, матрицы СЛАУ (17) и (19) не вырождены и эти СЛАУ имеют единственное решение.

Заключение

В представленной работе приведено решение обобщённой задачи Римана с условиями на внутренних границах и на внешних границах для гиперболических систем уравнений в частных производных со многими пространственными переменными в том числе и для уравнений

упругой динамики. Решение получено с применением теории обобщённых функций и построении фундаментального решения оператора задачи.

Решение обобщённой задачи Римана с условиями на внутренних и внешних границах является ключевым моментом при построении алгоритмов численного решения начально-краевых задач с использованием кусочно-гладких базисных функций. Построенные решения обобщённой задачи Римана представлены в виде, позволяющем их конструктивную имплементацию в алгоритмы численного решения начально-краевых задач.

Литература

1. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М. : Физматлит, 2001.

2. *LeVeque R. L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

3. *Kaser M., Dumbser M.* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes – I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms // Geophys. J. Int. – 2006. – V. 166. – P. 855–877.

4. *Casas F., Murua A., Nadinic M.* Comput. Phys. Commun. – 2012. – 183, 2386 [arXiv:1204.0389 [math-ph]] [Search INSPIRE].

5. *Скалько Ю. И.* Корректные условия на границе, разделяющей подобласти // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, № 3. – С. 347–356.

6. *Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I., Ravodin I. V., Yanaeva V. V.* Simulation of vibrations of a continuously elastic supported rod with varying boundary conditions under the action of a movable // MATEC Web of Conferences 196, 01053 (2018) XXVII R-S-P Seminar 2018, Theoretical Foundation of Civil Engineering.

7. *Skalko Yu. I., Gridnev S. Yu., Yagfarova A.* Modeling the Focusing of the Energy of Elastic Waves in Block-Fractured Medium During the Long-Term Vibration Action // Proc. Int. Scient. Conf. Energy Management of Municipal Facilities and Sustain-able Energy Technologies EMMFT 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing. eds. Murgul V. and Pasetti M. (Springer Nature Switzerland AG) – 2019. – Vol. 983. – P. 534–546.

8. *Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I., Minaeva N. V., Yanaeva V. V.* Comparative analysis of models of limiting supports in the study of structurally nonlinear oscillations of elastically supported bar from mobile load // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203. – 2019. – 012030 IOP Publishing. – doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012030

9. *Skalko Y. I., Gridnev S. Yu., Minaeva N. V.* Computational algorithms based on the fundamental solution of task operator // Journal of Physics: Conf. Series 1479. – 2020. – 012136. IOP Publishing Ltd. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012136

10. *Skalko Y. I., Gridnev S. Yu., Minaeva N. V.* Application of fundamental solution to a problem operator for modeling vibrations of elastically supported load-bearing structures // Journal of Physics: Conf. Series 1479. – 2020. – 012111 . IOP Publishing Ltd. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012111

11. *Skalko Y. I., Gridnev S. Yu.* Review and comparative analysis of computational algorithms for modeling the dynamics of elastically supported structural systems // IOP CONFERENCE SERIES: MATERIALS SCIENCE AND ENGINEERING. – 2020. – 012002 . Institute of Physics and IOP Publishing Limited. – DOI: 10.1088/1757-899X/1083/1/012002

12. *Skalko Y. I., Gridnev S. Yu., Minaeva N. V.* Computational algorithms for modeling systems with piecewise constant parameters // Journal of Physics: Conf. Series. – 2021. – 012023. – IOP Publishing Ltd. – DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012023

УДК 519.8

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РОСТА БИОМАССЫ ВОДОРОСЛЕЙ

Н. А. Слузова

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова
Северный государственный медицинский университет

Аннотация. В настоящей статье проведен анализ устойчивости двумерной нелинейной математической модели, описывающей процессы роста биомассы водорослей. Схема исследования, отраженная в работе, включает в себя следующие этапы: описание математической модели и ее параметров, представление алгоритма линеаризации, сам процесс линеаризации рассматриваемой модели и исследование устойчивости в окрестности положения равновесия, интерпретация полученных результатов. Представлены графики, отражающие влияние вариации параметров модели на ее устойчивость. Показано, что полученные результаты могут быть использованы как в академической, так и практической сфере.
Ключевые слова: математическая модель, устойчивость модели, линеаризация, популяционная модель, численный эксперимент, вариация параметров модели.

Введение

Исследование устойчивости решений системы уравнений является ключевым этапом в понимании ее поведения и предсказании будущих состояний, которые она описывает. Оно позволяет оценить, как реагирует система на незначительные возмущения начальных условий или параметров модели. В настоящей работе исследование устойчивости решений модели, описывающей процесс роста биомассы популяции, позволяет понять фундаментальные свойства популяции, которые определяют ее поведение. Изучение этих свойств позволяет глубже понять механизмы, описывающие динамику изучаемой популяции.

Представленная в настоящей статье математическая модель может быть отнесена к классу моделей типа «хищник-жертва» Лотки — Вольтерра [1, 2]. Модель описывает процесс роста популяции беломорской ламинарии при определенных ограничениях и предположении о постоянстве отдельных показателей экосистемы. В модели учитываются также трофические связи, а именно поглощение водорослями биогенных элементов, являющихся питательной средой для них. Трофическая функция задана зависимостью Моно. Скорость изменения биомассы водорослей рассматривалась без учета возрастных групп, с целью облегчения методологического подхода к исследованию. Показатели экосистемы, которые были учтены в модели, отражают гидродинамические, гидрохимические и гидрологические режимы рассматриваемой экосистемы, а также учитывают уровень освещенности [3].

1. Математическая модель роста биомассы водорослей

Рассмотрим двумерную математическую модель, описывающую изменение биомассы водорослей на заданном отрезке времени $[0,T]$, где размерность модели определяется числом переменных состояния.

Динамический процесс описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mu \dfrac{s(t)}{K_S + s(t)} x(t)(1 - \dfrac{x(t)}{x_m})u \\ \dfrac{ds}{dt} = D(s_n - s(t)) - \dfrac{\mu}{\eta} x(t) \dfrac{s(t)}{K_S + s(t)} \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$x(0) = x_0, x(T) = x_{\text{m}}, \quad s(t) = s_n, s(T) = s_m \quad (2)$$

В системе (1) $x(t)$ и $s(t)$ — биомасса водорослей и концентрация биогенных элементов соответственно. Параметры μ, K_S, x_m, u, s_n, η, D — являются параметрами модели и характеризуют состояние экосистемы, причем для всех параметров выполняется условие не отрицательности всех значений.

Параметр μ — удельная скорость роста, которая может быть задана как функция от времени [4], но в данном случае рассматривается как постоянный коэффициент. Параметр K_S — константа полунасыщения, s_n — первоначальная концентрация биогенных веществ в среде, до начала в ней биологических процессов, связанных с жизнедеятельностью водорослей, η — экономический коэффициент, отражающий прирост биомассы водорослей на единицу потребленных биогенных веществ. Параметр x_m — максимальная биомасса водорослей, u — параметр, характеризующий уровень освещения, D — параметр, описывающий гидрологический режим рассматриваемой экосистемы, являющийся аналогом коэффициента протока в хемостате. Множитель $\dfrac{s(t)}{K_S + s(t)}$ — является трофической функцией, заданной зависимостью Моно [5]. Слагаемое $D(s_n - s(t))$ характеризует скорость изменения концентрации биогенных веществ в среде, вызванных развитием водорослей в момент времени t. Слагаемое $\dfrac{\mu}{\eta} x(t) \dfrac{s(t)}{K_S + s(t)}$ характеризует ту часть биогенных веществ, которая расходуется на рост и развитие водорослей.

2. Исследование устойчивости решений модели роста биомассы водорослей

Рассматриваемая система дифференциальных уравнений (1) является автономной, так как в нее в явном виде не входит переменная времени t. Тогда, положение равновесия исследуемой системы (1) будем искать как решение системы следующих уравнений:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{s}{K_S + s} x(1 - \dfrac{x}{x_m})u = 0 \\ D(s_n - s) - \dfrac{\mu}{\eta} x \dfrac{s}{K_S + s} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему (3) получим две стационарные точки:

1) $\left(x_1^*; s_1^*\right) = \left(0; s_n\right)$ (4)

2) $\left(x_2^*; s_2^*\right) = \left(x_m; 0,5 \cdot \left(\sqrt{\left(\dfrac{x_m \mu}{\eta D} + K_S - s_n \right)^2 + 4 s_n K_S} - \dfrac{x_m \mu}{\eta D} - K_S + s_n \right) \right)$ (5)

Исследование устойчивости решений системы (3) проводилось как аналитически, так и при реализации вычислительного эксперимента. В основу аналитического метода был положен анализ собственных значений матрицы системы, что потребовало линеаризации системы (3) в окрестности точки равновесия. Для этого был реализован следующий алгоритм:

Шаг 1. Пусть x^* — точка равновесия системы $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Пусть отклонение от точки равновесия задается как $\Delta x = x - x^*$, тогда система $\frac{dx}{dt} = f(x)$ может быть представлена в виде $\frac{dx}{dt} = f(x^* + \Delta x)$.

Шаг 2. Используем разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x^* $f(x^* + \Delta x) \approx f(x^*) + J(x^*) \cdot \Delta x + O(\Delta x^2)$, где $J(x^*)$ — матрица Якоби функции $f(x)$ в точке x^*, вычисленная как матрица частных производных, $O(\Delta x^2)$ — члены высшего порядка малости, которые отбрасываются при линеаризации.

Шаг 3. Так как $f(x^*) = 0$, то линеаризованная система примет вид: $f(x^* + \Delta x) \approx J(x^*) \cdot \Delta x$.

Устойчивость линеаризованной системы определяется собственными значениями матрицы $J(x^*)$. Причем, асимптотическая устойчивость гарантируется, если все собственные значения имеют отрицательную вещественную часть; в противном случае (при наличии хотя бы одного собственного значения с положительной вещественной частью) решение неустойчиво. Если вещественная часть собственных значений равна нулю, то требуется проводить дополнительный анализ.

Применяя данный алгоритм, для исследования устойчивости системы (3) в положении равновесия, получим, что окрестность точки (4) задается следующим правилом $\begin{cases} x_1 = x_1^* + \Delta x_1 \\ s_1 = s_1^* + \Delta s_1 \end{cases}$, где $\Delta x_1, \Delta s_1$ малые приращения величин x_1, s_1, а линеаризованная система (3) в первом приближении примет вид:

$$\begin{cases} f(x_1) \approx \mu s_n (K_S + s_n) x_1 \\ g(s_1) \approx -D s_1 - \frac{\mu s_n}{\eta} (K_S + s_n) x_1 \end{cases}.$$

Найдем условия накладываемые на параметры μ, s_n, K_S, η, D при которых система (1), а значит и матрица $A_1 = \begin{pmatrix} \mu s_n (K_S + s_n) & 0 \\ -\frac{\mu s_n}{\eta} (K_S + s_n) & -D \end{pmatrix}$ была бы устойчивой. Для этого необходимо, чтобы в характеристическом уравнении

$$\chi_A(p) = \det(pE - A_1) = \begin{vmatrix} p - \mu s_n (K_S + s_n) & 0 \\ \frac{\mu s_n}{\eta} (K_S + s_n) & p + D \end{vmatrix} = (p + D)\left(p - \mu s_n (K_S + s_n)\right) = 0$$

элементы p были отрицательными. Проверим, действительно ли это так, решив соответствующее квадратное уравнение и определив знак его корней, на основе оценки диапазонов изменений каждого параметра модели [6–8]. Получим

$$p_1 = \frac{-\left(D - \mu s_n (K_S + s_n)\right) - \sqrt{\left(D - \mu s_n (K_S + s_n)\right)^2 + 4D\mu s_n (K_S + s_n)}}{2} < 0$$

$$p_2 = \frac{-\left(D - \mu s_n (K_S + s_n)\right) + \sqrt{\left(D - \mu s_n (K_S + s_n)\right)^2 + 4D\mu s_n (K_S + s_n)}}{2} > 0$$

Итак, собственные числа матрицы A_1 являются действительными числами, но разных знаков. Это говорит о том, положение равновесия (4) системы (3) является неустойчивым. Оно могло бы быть устойчивым, если бы $p_2 < 0$, для этого необходимо, чтобы

$-\left(D-\mu s_n(K_S+s_n)\right)+\sqrt{\left(D-\mu s_n(K_S+s_n)\right)^2+4D\mu s_n(K_S+s_n)}<0$ или $4D\mu s_n(K_S+s_n)<0,$ чего не может быть по условию задачи (все параметры положительны).

Аналогичные шаги были выполнены для линеаризации функций $f(x)$ и $g(s)$ системы (3) в окрестности второго положения равновесия (5). В результате линеаризованная система (3) в первом приближении имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{x}_2=-\mu\xi(K_S+\xi)x_2\\ \dot{s}_2=-\dfrac{\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)x_2-\left(D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)s_2\end{cases},$$

где $\xi=0,5\cdot\left(\sqrt{\left(\dfrac{x_m\mu}{\eta D}+K_S-s_n\right)^2+4s_nK_S}-\dfrac{x_m\mu}{\eta D}-K_S+s_n\right)$ для облегчения записи и анализа.

Найдем условия, накладываемые на $\mu,\ \xi,\ K_S,\ \eta,\ D,\ x_m$ при которых данная система, а значит и матрица $A_2=\begin{pmatrix}-\mu\xi(K_S+\xi) & 0\\ -\dfrac{\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi) & -D-\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\end{pmatrix}$ была бы устойчивой. Для этого необходимо, чтобы в характеристическом уравнении

$$\chi_A(p)=\det\left(pE-A_2\right)=\begin{vmatrix}p+\mu\xi(K_S+\xi) & 0\\ \dfrac{\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi) & p+D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\end{vmatrix}=$$

$$=\left(p+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(p+D+\frac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)=0$$

элементы p были отрицательными. Для этого рассмотрим решения квадратного уравнения

$$p^2+\left(2D+\mu\xi(K_S+\xi)(1+\frac{x_m}{\eta})\right)p+\left(D+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(D+\frac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)=0,$$

которые имеют вид

$$p_1=\frac{-\left(\left(D+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)\right)-\sqrt{discrim}}{2}<0$$

$$p_2=\frac{-\left(\left(D+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)\right)+\sqrt{discrim}}{2}<0$$

где $discrim=\left(2D+\mu\xi(K_S+\xi)(1+\dfrac{x_m}{\eta})\right)^2-4\left(D+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right).$

Оценка значений *discrim* и значений p_1 и p_2 проводилась на основе оценки диапазонов изменений каждого параметра модели. Так как собственные значения матрицы A_2 $p_{1,2}$ — отрицательные действительные числа, то положение равновесия (5) является асимптотически устойчивым.

Для проведения численного эксперимента в среде разработки Delphi был реализован проект, для которого были взяты следующие значения параметров модели (табл. 1). Суть его заключалась в том, чтобы проверить устойчиво ли положение равновесия (5) при помощи варьирования начальных состояний фазовых траекторий вблизи положения равновесия.

Таблица 1

Входные значения параметров модели

Параметры модели	Числовые значения параметров модели
μ	0,055
K_S	0,018
x_m	3000
u	3
s_n	0,15
η	1300
D	0,08

Результаты численного эксперимента отражены на рис. 1 и 2.

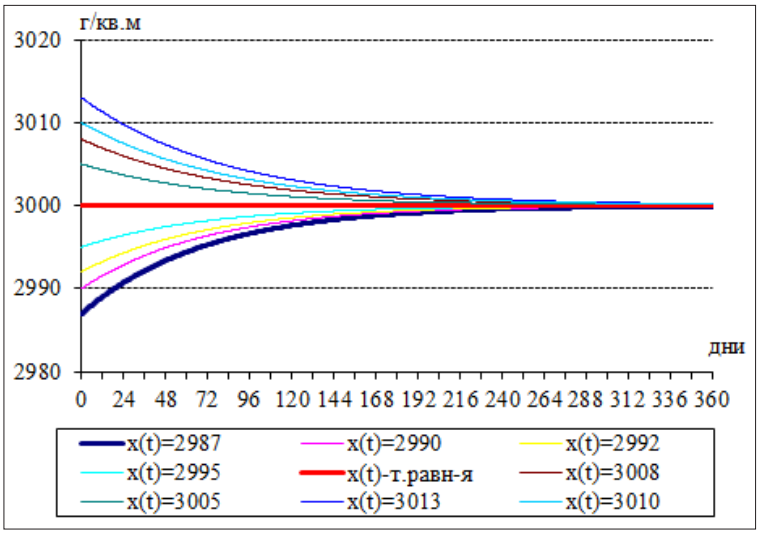


Рис. 1. Интегральные кривые системы (3) для различных значений x_2^* *в плоскости* (t,x)

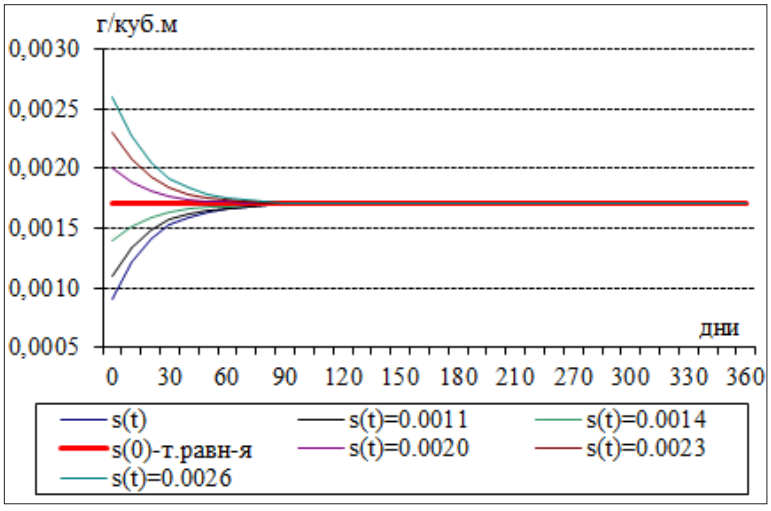


Рис. 2. Интегральные кривые системы (3) для различных значений s_2^* *в плоскости* (t,x)

Анализ полученных результатов, представленных на графиках (рис. 1, рис. 2) подтвердил полученные аналитические выводы. Действительно, решение системы (3) сходится к полученной точке положения равновесия (5) положения равновесия. Таким образом, для двумерной модели (1) с заданными условиями найдена единственная точка устойчивого равновесия.

Заключение

Таким образом, в работе показано, что сделать выводы о том, что математическая модель (1) способна описывать реальные процессы динамики роста биомассы водорослей, которая является одним из промысловых видов в районах Арктических морей. Так как бурые водоросли являются перспективным сырьем для использования в различных отраслях промышленности, то это обуславливает увеличение объемов их добычи и необходимость более точной оценки запаса.

Численный пример показывает, что модель устойчива и характеризуется уровнями чувствительности к изменению параметров, соответствующими значениям для реальных процессов. В дальнейшем планируется адаптировать данную двумерную модель для оценки уровня компетентности студентов Северного (Арктического) федерального университета и Северного государственного медицинского университета учитывая влияние междисциплинарных связей. Практическая значимость отраженной в статье работы заключается в том, что исследование устойчивости решений неуправляемых математических моделей — это необходимый инструмент для понимания поведения систем, которые эти модели описывают. Оно позволяет делать более обоснованные прогнозы, разрабатывать эффективные стратегии управления и оценивать надежность систем в различных областях.

Литература

1. Математическая теория борьбы за существование : научное издание / В. Вольтерра ; пер. с фр. О. Н. Бондаренко ; ред. Ю. М. Свирижев. – Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 286 с.

2. *Ризниченко Г. Ю.* Математические модели биологических продукционных процессов: учебное пособие / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. – Москва : МГУ, 1993 – 302 с.

3. *Шилова Н. А.* Математическое моделирование и управление процессом роста и развития морских гидробионтов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Шилова Наталья Александровна ; ТвГУ. – Тверь, 2010. – 18 с.

4. *Steffen E.* Effects of seasonal perturbations on a model plankton community / E. Steffen, H. Malchow, A. B. Medvinsky // Env. Modeling and Assessment. – 1997. – № 2. – P. 43–48.

5. *Ручай Н. С.* Технология микробного синтеза: электронный курс лекций для студентов специальности 1-48 02 01 «Биотехнология» / Н. С. Ручай, И. А. Гребенчикова. – Минск : БГТУ, 2014. – 167 с. – URL: https://propionix.ru/tehnologiya-mikrobiologicheskogo-sinteza (дата обращения: 23.09.2024).

6. *Шилова Н. А.* Расчет показателей естественной смертности для популяции Laminaria saccharina (l) Lamour / Н. А. Шилова, А. В. Семушин // Вестник Поморского университета. Серия: Естественные науки. – 2011. – № 4. – С. 96–101.

7. *Шилова Н. А.* Методика определения коэффициента полунасыщения для дискретной модели роста популяции морских макроводорослей / Сборник тезисов научно-практической конференции по водным ресурсам, включая биологические ресурсы Соловецкого архипелага. – 2014. – С. 86–89.

8. *Слузова Н. А.* Методика расчета экономического коэффициента в популяционной модели роста биомассы водорослей / Доклады Международной конференции «Математическая биология и биоинформатика»; под ред. В. Д. Лахно. Том 10. – Пущино: ИМПБ РАН, 2024. – Статья № e24. doi: 10.17537/icmbb24.14

УДК 519.82

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ПРОДАЖИ ЖИЛОГО ПОМЕЩЕНИЯ

Л. А. Смирнова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрено понятие рекомендательной системы, описан процесс машинного обучения, а также рассмотрена задача создания рекомендательной системы для продажи жилого помещения по заданным характеристикам, основанной на использовании методов интеллектуального анализа данных, на языке программирования Python. Для этого была проведена предобработка данных, осуществлен выбор алгоритма, произведено непосредственно само обучение и оценка качества моделей.
Ключевые слова: машинное обучение, интеллектуальный анализ данных, матрица корреляции, алгоритмы машинного обучения, линейная регрессия, Data Mining, Python, целевая переменная, недвижимость, рекомендательная система.

Введение

В современном мире объем данных, доступных для анализа, постоянно растет, и это открывает новые возможности для применения методов интеллектуального анализа данных в различных областях. Одной из таких областей является недвижимость, где рекомендательные системы на основе данных становятся все более востребованными.

Жилая недвижимость является одним из ключевых сегментов рынка, где потенциальные покупатели и продавцы сталкиваются с огромным объемом информации о предложениях и потребностях.

Данная работа нацелена на создание инновационной рекомендательной системы, способной эффективно анализировать данные о жилой недвижимости и предлагать персонализированные рекомендации, что в итоге может привести к улучшению пользовательского опыта и увеличению эффективности продаж на рынке жилья.

1. Понятие рекомендательной системы

Рекомендательная система — это информационная технология, которая предлагает пользователю персонализированные рекомендации, основываясь на его предпочтениях и поведении [1]. Она используется для предсказания, какие товары, услуги или контент могут заинтересовать конкретного пользователя. Рекомендательные системы широко применяются в различных областях, таких как электронная коммерция, потоковое видео, социальные сети и музыкальные платформы.

Существует четыре основных разновидности рекомендательных систем:

– системы, основанные на содержании (Content-Based Systems): Данный тип систем анализирует характеристики товаров или контента, которые пользователь ранее оценил или потреблял. На основе этого профиля интересов система рекомендует похожие товары или контент.

– коллаборативная фильтрация (CollaborativeFiltering): Данный метод анализирует данные о взаимодействии пользователей с товарами или контентом. Он ищет образцы потребления и оценок, чтобы определить схожие вкусы между пользователями и рекомендовать товары, которые понравились другим пользователям с похожими предпочтениями.

– гибридные системы (Hybrid Recommender Systems): Подобные системы комбинируют подходы, используя как методы коллаборативной фильтрации, так и основанные на содержа-

нии. Гибридные системы стремятся уменьшить недостатки каждого метода и улучшить точность рекомендаций.

– рекомендации на основе знаний (Knowledge-Based Recommendations): Этот тип систем использует информацию о предпочтениях и потребностях пользователя, а также о свойствах товаров, чтобы сделать рекомендации. Они обычно используют базы знаний или экспертные системы для анализа и предоставления рекомендаций.

Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, и выбор конкретного подхода зависит от контекста применения и доступных данных. Развитие рекомендательных систем играет важную роль в улучшении пользовательского опыта и увеличении эффективности бизнеса в различных отраслях.

2. Процесс машинного обучения

Методы интеллектуального анализа данных, на основе которого строится рекомендательная система, основаны на статистическом анализе, машинном обучении (МО) и математике [2]. ***МО*** представляет собой использование математических моделей данных, которые помогают компьютеру обучаться без непосредственных инструкций. При использовании МО выявляются закономерности в данных, на основе которых создается модель данных для прогнозирования [3]. С накоплением опыта и обработки большого объема данных прогнозы становятся более точными. Благодаря своей адаптивности, МО отлично подходит для сценариев, в которых данные постоянно изменяются, свойства запросов или задач нестабильны или написать код для решения фактически невозможно.

Методология управления проектом по анализу данных SEMMA предлагает следующую последовательность шагов при решении задач, связанных с МО:

1) Sample: создание выборки. Она должна быть достаточно большая, чтобы из неё можно было извлечь достаточно полезной информации, но и достаточно мала, чтобы можно было эффективно ей пользоваться.

2) Explore: исследование отношений в данных. На этом этапе находятся связи между данными (в том числе с помощью корреляционного и регрессионного анализа), а также различные аномалии.

3) Modify: создание новых и преобразование старых переменных.

4) Model: обучение модели МО.

5) Assess: оценка результатов и качества модели.

3. Создание рекомендательной системы

Постановка задачи:

По данным о характеристиках квартир России и их ценах необходимо построить рекомендательную систему определения оптимальной стоимости случайной квартиры с известными характеристиками для продажи с помощью языка программирования Python.

Решение:

Рекомендательная система для продавцов по определению оптимальной стоимости недвижимости представляет собой клиент-серверное приложение, построенное на основе архитектурного стиля REST, для взаимодействия компонентов распределенного приложения в сети.

Архитектура системы состоит из базы данных, серверной и клиентской частей (рис. 1).

Данные включают общую информацию о недвижимости, а также тип дома и год выставления на продажу. Соберем их в одну таблицу, содержащую информацию о более чем 11 млн. квартир России. В ней представлены 14 характеристик, таких как общая площадь, местонахождение, количество комнат и, самое главное, стоимость квартиры. Часть исходных данных представлена на рис. 2.

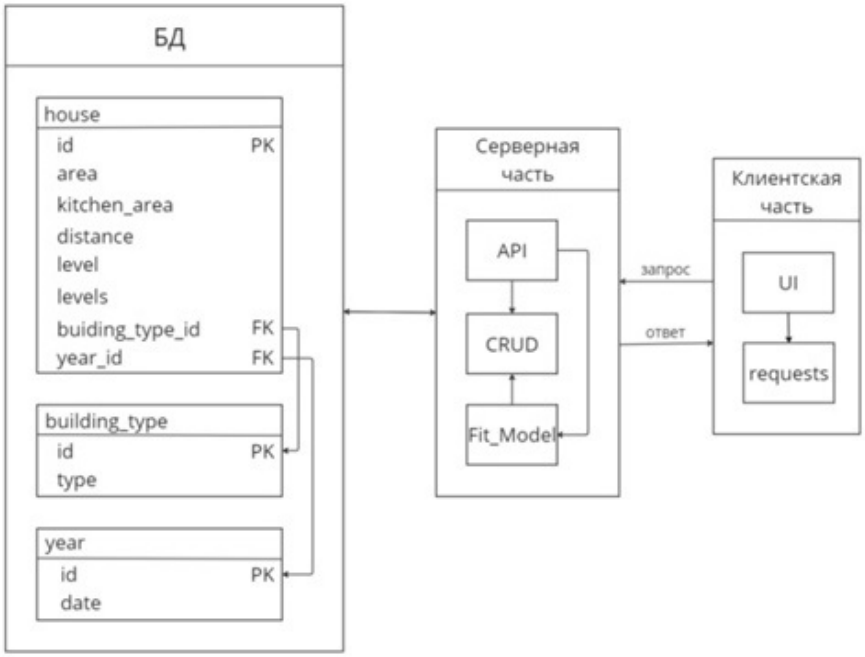


Рис. 1. Архитектура системы

	date	price	level	levels	rooms	area	kitchen_area	geo_lat	geo_lon	building_type	object_type	postal_code	street_id	id_region	house_id
0	2021-01-01	2451300	15	31	1	30.3	0.0	56.780112	60.699355	0	2	620000.0	NaN	66	1632918.0
1	2021-01-01	1450000	5	5	1	33.0	6.0	44.608154	40.138381	0	0	385000.0	NaN	1	NaN
2	2021-01-01	10700000	4	13	3	85.0	12.0	55.540060	37.725112	3	0	142701.0	242543.0	50	681306.0
3	2021-01-01	3100000	3	5	3	82.0	9.0	44.608154	40.138381	0	0	385000.0	NaN	1	NaN
4	2021-01-01	2500000	2	3	1	30.0	9.0	44.738685	37.713668	3	2	353960.0	439378.0	23	1730985.0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
11358145	2021-12-31	6099000	4	9	3	65.0	0.0	56.041539	92.753133	0	0	660030.0	581436.0	24	857003.0
11358146	2021-12-31	2490000	1	10	2	56.9	0.0	55.169949	61.519210	0	0	454079.0	274414.0	74	1820769.0
11358147	2021-12-31	850000	2	2	2	37.0	5.0	55.946206	43.088179	0	0	606101.0	190983.0	52	958329.0
11358148	2021-12-31	4360000	5	5	1	36.0	9.0	61.256383	73.435919	0	0	628406.0	581702.0	86	2156710.0
11358149	2021-12-31	1850000	1	5	1	33.0	7.0	55.164522	61.386448	0	0	454080.0	567218.0	74	2591215.0

11358150 rows × 15 columns

Рис. 2. Исходные данные

Начнем с подготовки данных.

В столбах street_id (улица) и house_id (номер дома) имеется много пропусков (от 30 %). Удалять такое количество квартир будет нерациональным в виду большой потери данных, но и замена пропусков модой не совсем корректна. Поэтому удалим данные характеристики из рассмотрения.

В столбце postal_code (почтовый индекс) 4 % данных пропущено. Заменим эти пропуски модой для каждого региона.

Заметим, что в данных содержится ряд ошибок и выбросов. Исключим квартиры, содержащие ошибки, с помощью следующих фильтров:

– rooms (количество комнат) больше 0 и меньше 15;

– kitchen_area (площадькухни) больше 0 и меньше 50;

– area (общая площадь) больше 0 и меньше 300;

– levels (количество этажей в здании) больше 0 и меньше 100;

– level (этаж) больше 0 и меньше 100.

В столбце date (дата выставления на продажу) содержатся данные в формате даты. Преобразуем их в числа (например, 2021-01-01 в 20210101).

В данных присутствуют координаты квартир, но в необработанном виде они мало информативны. Рассчитаем расстояние от каждой квартиры до центра города. Центром города считается главный почтамт. Под расстоянием подразумевается геодезический путь, то есть кратчайший путь с учетом эллиптической формы земли, который можно рассчитать по следующей формуле:

$$d = \overline{R} \cdot \arccos(\sin(t_1) \cdot \sin(t_2) + \cos(t_1) \cdot \cos(t_2) \cdot \cos(g_1 - g_2)),$$
$$\overline{R} = 6371{,}01,$$

где $\overline{R}$ — среднее значение радиуса Земли в километрах, (t_1, g_1) — широта и долгота первой точки соответственно, (t_2, g_2) — широта и долгота второй точки соответственно.

Построим модель множественной линейной регрессии [4]. Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}755$. Его близость к 1 указывает на то, что выбранная модель значима [5]. Проверим факторы на мультиколлинеарность с помощью матрицы корреляции и исключим не значимые коэффициенты [7]. Факторы исключаются по очереди, и на каждой итерации пересчитывается R^2.

Первая построенная матрица корреляции имеет следующий вид (рис. 3):

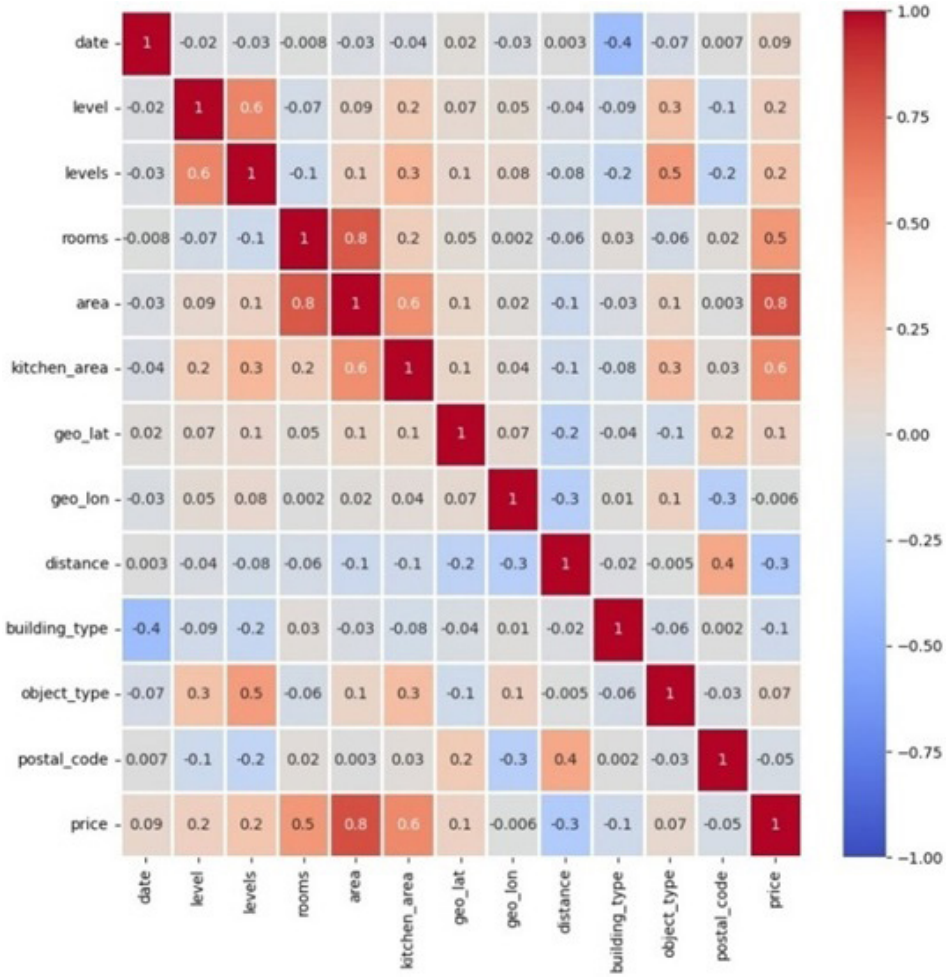


Рис. 3. Матрица корреляции до исключения факторов

Факторы исключаются в следующем порядке: geo_lon (долгота), postal_code (почтовый индекс), object_type (вторичка/новостройка), date (дата выставления на продажу), geo_lon (широта). Также исключим rooms (количество комнат), потому что этот фактор имеет высокую корреляцию с area (общая площадь).

На последней итерации получается следующая матрица корреляции (рис. 4).

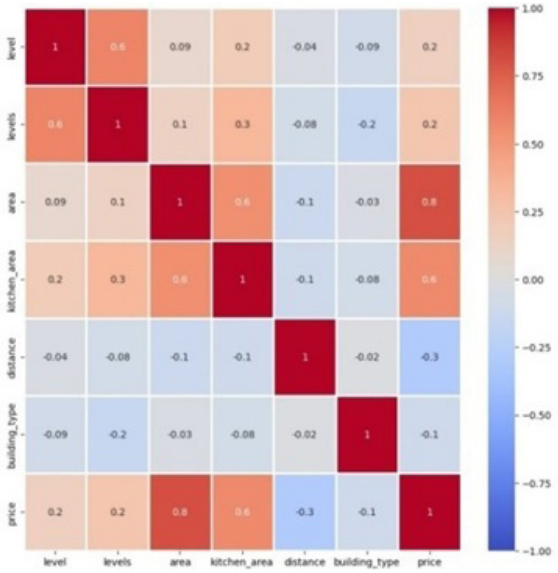


Рис. 4. Итоговая матрица корреляции

Из оставшихся параметров можно составить рейтинг имеющих наибольшую корреляцию с целевой переменной:

1) area (общая площадь);
2) kitchen_area (площадь кухни);
3) distance (расстояние до центра);
4) levels (количество этажей в здании);
5) level (этаж);
6) building_type (тип дома).

Уравнение полученной линейной регрессии имеет вид:

$$y = -2 \cdot 10^5 + 1{,}423 \cdot 10^4 \cdot x_1 + 1{,}617 \cdot 10^4 \cdot x_2 + 6{,}948 \cdot 10^4 \cdot x_3 +$$
$$+ 7{,}089 \cdot 10^4 \cdot x_4 + 1{,}377 \cdot 10^5 \cdot x_5 - 8{,}895 \cdot 10^4 \cdot x_6,$$

где x_1 — номер этажа, x_2 — количество этажей в доме, x_3 — общая площадь, x_4 — площадь кухни, x_5 — расстояние до центра, x_6 — тип дома.

Разделим данные на тренировочную и тестовую выборки, выделив под последнюю 10% от всех данных, и построим модели линейной регрессии, деревьев принятия решений и бустинга [6]. Для того чтобы оценить качество построенных моделей, а также выбрать лучшую из них для решения данной задачи, воспользуемся метриками оценки качества MSE, RMSE и MAE (табл. 1) [8].

Таблица 1

Оценка качества построенных моделей

Модель	MSE	RMSE	MAE
Линейная регрессия	$1{,}36 \cdot 10^{12}$	$1{,}16 \cdot 10^6$	$6{,}87 \cdot 10^6$
Деревья принятия решений	$1{,}36 \cdot 10^{12}$	$8{,}87 \cdot 10^5$	$2{,}83 \cdot 10^6$
Бустинг	$7{,}87 \cdot 10^{11}$	$7{,}27 \cdot 10^5$	$3{,}65 \cdot 10^6$

По метрикам MSE и RMSE лучший результат показал бустинг, а по метрике MAE — деревья принятия решений. Можно сделать вывод о том, что для предсказания стоимости квартиры лучше подходит бустинг.

Построенная модель позволяет пользователям определить оптимальную цену для продажи своего жилого помещения.

Для разработки веб-приложения использовался язык программирования JavaScript.

Приложение позволяет пользователям:

– определять оптимальную цену для продажи квартиры на основе её характеристик;

– добавлять данные о новой квартире;

– просматривать уже имеющиеся в базе квартиры, их цены и характеристики, в том числе, используя фильтры.

После перехода на сайт пользователям доступны три страницы:

– основная страница, на которой пользователь может задать характеристики своей продаваемой квартиры и получить оптимальную цену для продажи. Скриншот страницы приведен на рис. 5.

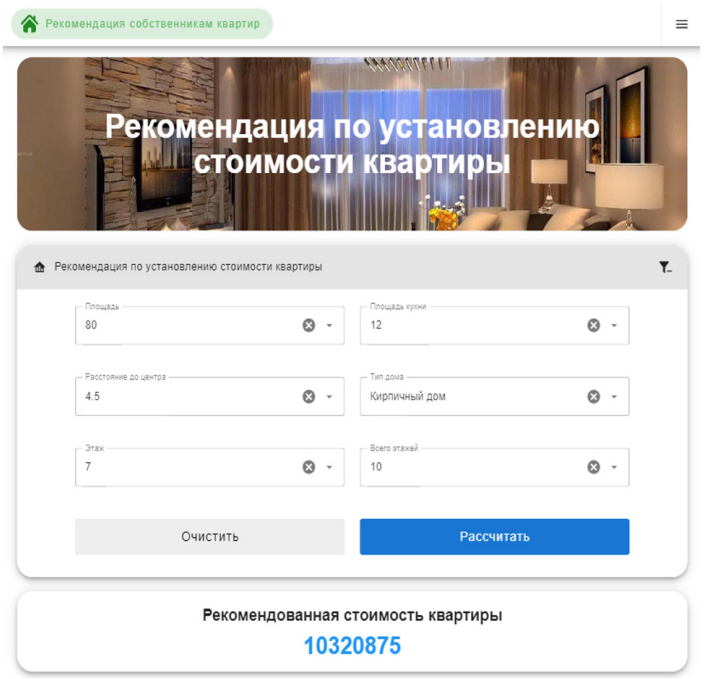


Рис. 5. Основная страница

– страница с добавлением данных о новых квартирах. На рис. 6 приведен пример добавления данных о новой квартире, после нажатия на кнопку «добавить» появляется всплывающее окно с информацией о том, что добавление было выполнено успешно:

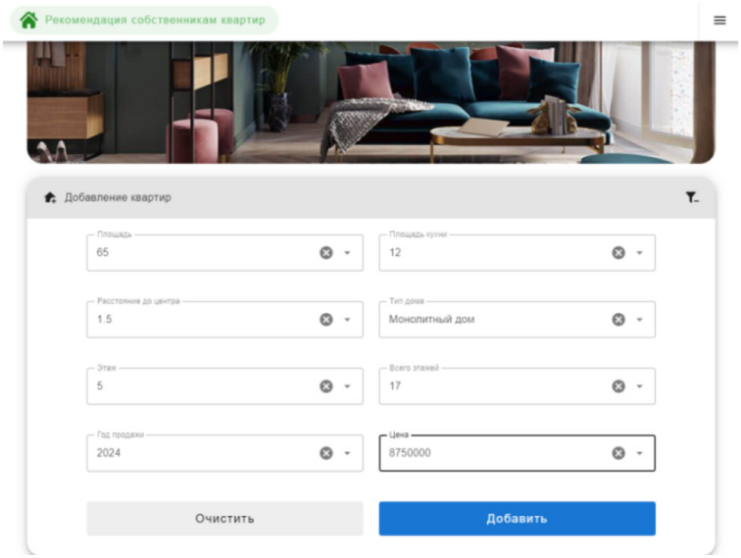


Рис. 6. Добавление данных о новой квартире

– страница, на которой можно просмотреть и отфильтровать все квартиры, данные о которых есть в базе данных. На рис. 7 приведен пример фильтрации квартир по типу дома, этажу, площади и цене, а также отображение полученных квартир.

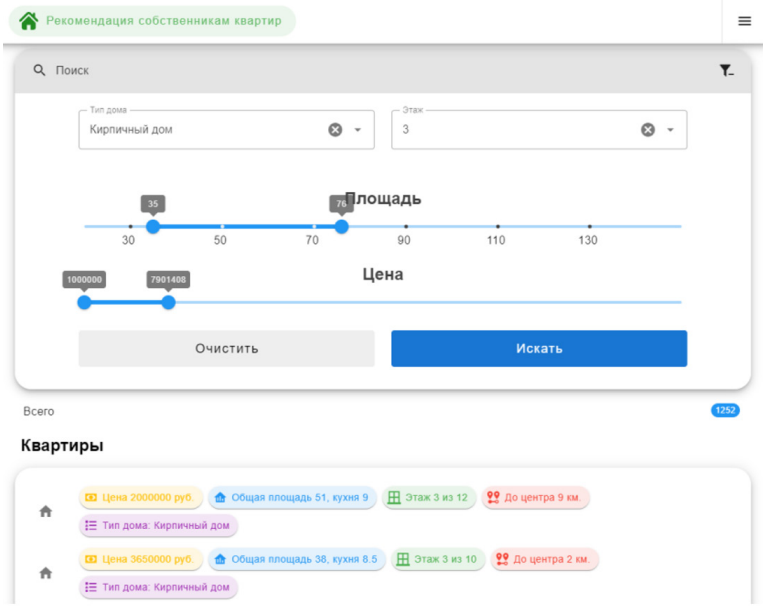


Рис. 7. Фильтрация квартир

Также на сайте присутствует система навигации, расположенная в правом верхнем углу. По навигации можно перейти на все доступные страницы, а также написать автору в телеграм или поделиться сайтом в социальных сетях (рис. 8).

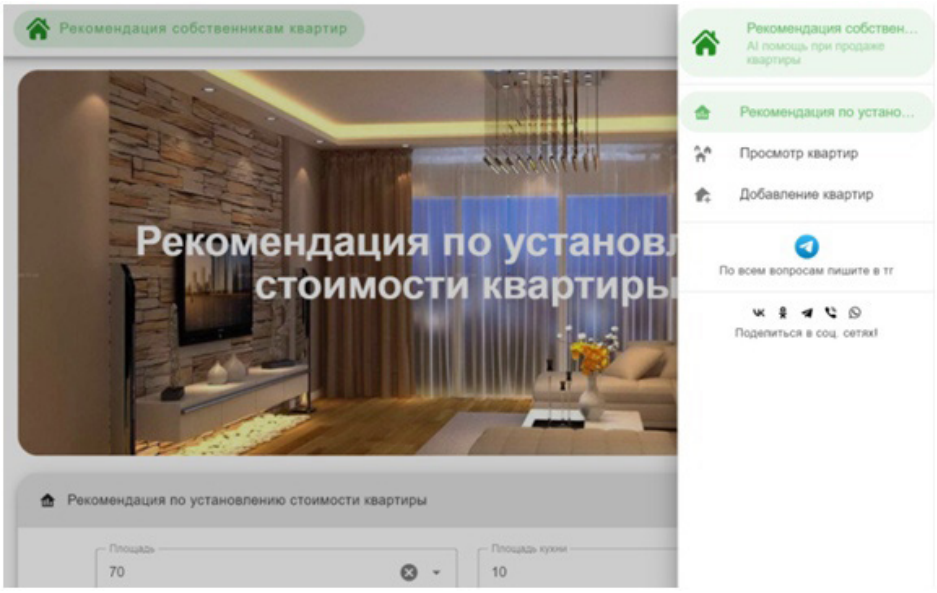


Рис. 8. Система навигации

Заключение

В ходе работы были разработана рекомендательная система для продажи жилого помещения, основанная на методах интеллектуального анализа данных. Метрики оценки качества показали достаточно хорошие результаты, что говорит о точности построенной модели машинного обучения.

Литература

1. *Кузнецов И. А.* Методы и алгоритмы машинного обучения для предобработки и классификации слабоструктурированных текстовых данных на соискание ученой степени кандидата технических наук / И. А. Кузнецов. – Москва : Национальный исследовательский ядерный институт «МИФИ», 2019. – 127 с.

2. *Сапрыкин О. Н.* Интеллектуальный анализ данных: учебное пособие / О. Н. Сапрыкин. – Самара : Издательство Самарского университета, 2020. – 80 с.

3. *Смирнова Л. А.* Машинное обучение в прогнозировании / Л. А. Смирнова, Е. М. Аристова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции (Воронеж, 4-6 декабря 2023 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2023. – С. 658–665.

4. *Аристова Е. М.* Модели принятия решений: учебное пособие / Е. М. Аристова. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. – 64 с.

5. *Алиева П. М.* Курс лекций по дисциплине «Многомерные статистические методы» / П. М. Алиева. – Махачкала, 2014. – 76 с.

6. *Глуховский М. В.* Машинное обучение в прогнозировании / М. В. Глуховский, Л. А. Смирнова // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Мужвузовской научной конференции молодых ученых, студентов и школьников (Воронеж, 24–25 апреля 2024 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2024. – С. 150–157.

7. Что такое мультиколлинеарность? Вот все, что вам нужно знать. Skine. – URL: https://skine.ru/articles/260134/ (дата обращения: 26.09.2024).

8. Метрики качества линейных регрессионных моделей. Loginom. – URL: https://loginom.ru/blog/quality-metrics (дата обращения: 10.10.2024).

УДК 519.816

МОДЕЛЬ РЕАЛЬНОГО СОСТАВНОГО ОПЦИОНА ПРИ МНОГОСТАДИЙНЫХ НИОКР С БАРЬЕРАМИ ЭФФЕКТИВНОСТИ

В. Н. Сыроватка

Российская таможенная академия, Ростовский филиал

Аннотация. Рассмотрена роль научных исследований на современном этапе технологического развития производства. С учетом возможного применения современных информационных технологий в практике проведения научных исследований была предложена модификация модели составных реальных опционов для оценки эффективности многостадийных НИОКР по разработке лекарственных препаратов, в которой исследуется возможность управления ожидаемыми потерями с помощью барьеров эффективности на каждом этапе проведения исследования. Произведено расширение возможностей исходной модели, благодаря чему для руководителя проекта становится возможным сравнивать текущую эффективность с установленным барьером не только в конце текущей стадии исследования, но и в процессе ее проведения. Таким образом, опираясь на текущее значение эффективности, можно остановить малоэффективное исследование внутри фазы, не дожидаясь ее окончания. В этом случае, помимо средств на будущие стадии исследования будет сохранено часть средств, запланированных к расходованию на данной стадии.
Ключевые слова: математическая модель, многостадийный НИОКР, оценка стоимости, процесс Пуассона, модель Блэка — Шоулса, метод Винера — Хопфа, реальный опцион, барьер эффективности, стоимость проекта, ожидаемые потери, выплата по опциону, компенсация по опциону.

Введение

Современное развитие всех сфер материального производства, глобализация экономики, нарастающая конкуренция между компаниями и отдельными странами, требует внедрения инновационных подходов в деятельности отечественных организаций. Выполнение данного условия является основным катализатором повышения эффективности процессов производства и экономического роста.

Выпуск любого типа изделия или продукции на современном этапе технологического развития требует выполнения обязательных предварительных научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (НИОКР). НИОКР является одним из важнейших этапов в жизненном цикле изделия [1]. Именно от качества проведения исследований и их эффективности зависит последующая экономическая востребованность продукции, ее конкурентоспособность на внутреннем и внешних рынках сбыта.

Повышение результативности НИОКР может быть достигнута путем внедрения в данной сфере деятельности организации проектных технологий [2]. По мере усложнения технологических процессов, затраты на научные исследования неуклонно возрастают. Роль НИОКР становится ведущей в силу того, что большая часть добавленной стоимости в конечной цене изделия в настоящий момент формируется не в процессе его производства, а на этапе его разработки [3]. При этом сами исследования становятся длительными по времени и усложняются. Во многих случаях, в частности при разработке лекарственных препаратов, научные исследования разбиваются на стадии, где в процессе реализации каждой из них, осуществляется проверка эффективности выдвинутых гипотез, принятых технических и иных решений на основе сформулированных ранее критериев эффективности. Важным является вопрос управления исследованиями на каждой из стадий, разработки соответствующих математических моделей.

Появление информационных технологий, таких как технология Интернета вещей (IoT) и технология блокчейн, может существенным образом изменить характер деятельности человека в разных сферах. Внедрение перечисленных технологий в практику научных исследований позволит автоматизировать процесс их проведения, более эффективно осуществлять сбор экспериментальной информации. Изменение характера поступления информации, со случайного, порционного на непрерывный, позволит разработать более эффективные методы ее анализа, а как следствие, и методы принятия управленческих решений на ее основе.

В данной работе рассматривается математическая модель управления многостадийным НИОКР по разработке лекарственных препаратов на основе Пуассоновского процесса.

Актуальность данной работы обусловлена необходимостью дальнейшего совершенствования математической базы по управлению НИОКР.

Объектом исследования является математическая модель реальных опционов как элемент управления многостадийным НИОКР.

Целью данной работы является изменение существующей математической модели, ее адаптация на иной, непрерывный, характер поступления экспериментальной информации с использованием соответствующей модели Леви.

1. Реальный опцион как инструмент оценки стоимости многостадийных НИОКР

Принятие обоснованных управленческих решений при проведении многостадийных НИОКР является одной из основных задач математического моделирования данной сферы. Каждый этап проведения исследований сопровождается своими рисками, и возможность управлять данными рисками является одним из непременных условий успешной реализации проекта [4]. Управление рисками может осуществляться с помощью реальных опционов, по аналогии с финансовыми опционами, но применительно не к финансовым инструментам, а реально существующим проектам. Реальный опцион позволяет руководителю проекта принимать управленческие решения в определенные моменты времени, основываясь на новых данных.

Применении реальных опционов в большинстве случаев базируется на использовании модели финансовых опционов, что приводит к неадекватности разработанных моделей. В большинстве моделей для финансовых опционов используется диффузионная модель Блэка-Шоулса [5], ее дискретным аналогом выступает биноминальная модель [6, 7]. Она обладает рядом недостатков, применительно к реальным опционам, в частности, недооценивает риски, при повышении стоимости проекта, может не отражать скачкообразные процессы, лежащие в основе многостадийных НИОКР, не учитывает внезапную динамику рынка и требуемые к учету барьеры эффективности.

Метод вычисления цен барьерных опционов в моделях со стохастической волатильностью и со скачками рассмотрен в работе [8]. Модели со случайной волатильностью лишены основного недостатка модели геометрического броуновского движения, а именно, они исключают постоянную дисперсию приращений за фиксированный промежуток времени [9].

Методология применения реальных опционов для оценки стоимости проекта по отношению к многостадийным НИОКР по разработке лекарств представлена в работе [10]. Данная модель [10] рассматривает цены составных реальных опционов вместе с возможными безвозвратными потерями. В модели также имеется возможность управления ожидаемыми потерями, благодаря использованию барьеров для достигнутой эффективности на реализуемой в данный момент стадии исследования.

Основным базовым процессом модели является эффективность разрабатываемого лекарства. Разработка лекарственных препаратов, и НИОКР связанный с этим процессом, состоит из нескольких регламентированных стадий, это: открытие, доклиническое исследование, три фазы клинических исследований, регистрация и допуск препарата к открытой продаже. При

этом, для минимизации возможных потерь, сравнивается текущая стоимость проекта при завершении стадии с номером i и затраты на следующую стадию $i+1$, и если текущая стоимость проекта меньше дальнейших затрат, проект закрывается, как нецелесообразный с коммерческой точки зрения.

Как в модели [10], в нашей модели информация о результатах экспериментов на первых 5 стадиях приходит порционно, в случайные моменты времени. На ее основании производится оценка текущей эффективности. В качестве модели эффективности будем использовать составной процесс Пуассона с дискретным распределением скачков в эффективности. По аналогии с [10] в нашей модели скачок может осуществляться вверх или вниз на одинаковый процент:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \,, \tag{1}$$

где Y_i — дискретная случайная величина размера скачка в эффективности.

Регистрация препарата на последней стадии исследования будет возможна, только если установленный регулятором барьер эффективности x_0 будет превышен. Таким образом, если продолжить реализацию исследования с низкой текущей эффективностью, то есть высокий риск, что препарат может быть не зарегистрирован регулятором, а все инвестиции в проект потеряны.

Помимо стандартной выплаты по опциону, в модель добавлен индикатор выхода эффективности за установленный барьер на соответствующей стадии. Руководитель проекта выбирает значения барьеров исходя из своей инвестиционной стратегии.

Вычисления реальных опционов в [10] с барьерами, основывается на том, что на первых пяти стадиях сравнивается эффективность с установленным руководителем проекта барьером только в конце текущей стадии.

В нашей модели мы расширим возможности руководителя проекта и добавим в нее возможность сравнения текущей эффективности и установленных барьеров, в течение всей текущей стадии исследования, по факту непрерывного поступления экспериментальных данных. В этом случае, опираясь на текущее значение эффективности, руководитель проекта может остановить малоэффективное исследование внутри фазы, не дожидаясь ее окончания. При этом, часть средств, запланированных к расходованию на данной стадии будет сохранено. В этом случае, помимо средств на будущие стадии исследования будет сохранено часть средств, запланированных к расходованию на данной стадии.

Обозначим минимальную эффективность (минимум процесса эффективности) за период $[t_1, t_2]$: $\min\limits_{t_1 \le t \le t_2} X_t$ через $\underline{X}(t_1, t_2)$. Минимальная эффективность должна быть выше барьера эффективности в течение всего времени прохождения исследования на текущей стадии. Вход в текущую стадию проекта происходит с эффективностью, которая выше барьера для данной стадии h_i. Согласно формуле (2), в отличии от исходной модели [10] цена опциона становится зависимой от момента времени τ_i остановки проекта внутри фазы i исследования. Переход на следующую стадию осуществляется если эффективность будет выше барьера h_i в течение всей стадии. Выплата по опциону в конце стадии составит: $(V_{i+1}(T_i, X_{T_i}, V) - K_i)_+$. Если же будущая стоимость проекта окажется ниже K_i то фаза не начинается, и проект останавливается. Также проект может быть остановлен в момент времени τ_i до времени окончания текущей стадии i, иными словами при $\tau_i \le T_i$. В данном случае остановка происходит в случае падения текущей минимальной эффективности $\underline{X}(t_1, t_2)$ ниже значения барьера эффективности h_i для данной стадии. Проект останавливается до завершения текущей стадии i и возвращается часть средств, неизрасходованных до текущего момента на данной стадии. Таким образом, компенсация по опциону составит: $K_{i-1}\left(\frac{T_i - \tau_i}{T_i - T_{i-1}}\right)$.

Введем $I_{\tau_i > T_i}$ — индикатор события, что минимальная эффективность оставалась выше барьера h_i вплоть до момента T_i завершения фазы i. Далее, обозначим через s_i вероятность того, что в ходе исследования на стадии i у препарата не будут выявлены неприемлемые с точки зрения безопасности побочные эффекты.

В этом случае, цена опциона $V_i(T_{i-1}, x, V)$ на стадию $i = 1,2,3,4,5$ вычисляется по следующим формулам:

$$V_i\left(T_{i-1}, x, V\right) = E\left[e^{-r(T_i - T_{i-1})} \left(V_{i+1}\left(T_i, X_{T_i}, V\right) - K_i \right)_+ I_{\tau_i > T_i} + e^{-r(T_i - T_{i-1})} K_{i-1} \left(\frac{T_i - \tau_i}{T_i - T_{i-1}} \right) I_{\tau_i \le T_i} \middle| X_{T_{i-1}} = x \right] s_i. \quad (2)$$

На завершающей стадии $i = 6$ стоимость проекта определяется по формуле (3) на основе будущего объема продаж после запуска проекта по реализации препарата:

$$V_6\left(T_5, x, V\right) = e^{-r(T_6 - T_5)} E\left[\left(V e^{Z_{T_6 - T_5}} e^{x - x_0} - K_6 \right)_+ \middle| Z_0 = 0 \right] s_6 \cdot I_{x > x_0}, \quad (3)$$

где Z_t — процесс броуновского движения.

Заключение

Непрерывный мониторинг барьеров эффективности препарата на каждой стадии НИОКР существенно усложняет задачу по сравнению с проверкой барьеров только в конце каждой из стадий, как это предложено в работе [10]. Для решения нашей задачи требуются более сложные численные методы, одним из которых является метод Винера — Хопфа. Данный метод активно применялся для решения задач оценивания барьерных финансовых опционов (см., например [11]).

Литература

1. *Аникейчик Н. Д.* Планирование и управление НИР и ОКР : учеб. пособие / Н. Д. Аникейчик, И. Ю. Кинжагулов, А. В. Федоров. – Санкт-Петербург : НИУ ИТМО, 2016. – 192 с.

2. *Савченко Я. В.* Методические основы формирования корпоративной системы управления высокотехнологичными проектами в сфере НИОКР / Я. В. Савченко, Н. Г. Боярских // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Экономика. Управление. Право. – 2020. – Т. 20, № 2. – С. 148–157.

3. *Абрамова И. Г.* Экономика научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ : учеб. пособие / И. Г. Абрамова, Д. А. Абрамов, А. С. Корнилова. – Самара : Изд-во СГАУ, 2015. – 128 с.

4. *Петренева Е. А.* Анализ многостадийных инвестиционных проектов как моделей управления / Е. А. Петренева // Финансовая аналитика: проблемы и решения. – 2015. – № 31(265). – С. 15–26.

5. *Black F.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – № 3(81). – P. 637–654.

6. *Павлов И. В.* Моделирование сбоев и их устранение на финансовых рынках с потоком событий, порожденным бинарным деревом / И. В. Павлов, О. В. Назарько // Инженерный вестник Дона. – 2013. – № 4. – С. 144–148.

7. *Богачева М. Н.* Оценка справедливой цены опциона для обобщенной модели Кокса-Росса-Рубинштейна в случае m состояний / М. Н. Богачева, Л. И. Прянишникова // Инженерный вестник Дона. – 2013. – № 4. – С. 235–240.

8. *Лужецкая П. А.* Вычисление цен опционов в моделях со стохастической волатильностью / П. А. Лужецкая, О. Е. Кудрявцев // Инженерный вестник Дона. – 2020. – № 5. – С. 24–34.

9. *Гречко А. С.* Методы анализа волатильности российского финансового рынка для широкого класса моделей / А. С. Гречко, О. Е. Кудрявцев // Инженерный вестник Дона. – 2016. – № 4. – С. 124–137.

10. *Kudryavtsev O. E.* New Compound Real Option Pricing Method with Lévy Processes for the Quality-by-Design Pharmaceutical R&D / O. E. Kudryavtsev, E. Trushin // Social Science Research Network. – 2023. – № 4650638.

11. *Kudryavtsev O. E.* Approximate Wiener-Hopf factorization and Monte Carlo methods for Lévy processes / O. E. Kudryavtsev // Theory of Probability and Its Applications. – 2019. – № 64(2). – С. 186–208.

УДК 004

БУЛЕВЫ ОПЕРАЦИИ НАД МЕШАМИ

А. С. Точилин[1], Г. В. Петрухнова[2], С. Л. Подвальный[2]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Рассматривается задача выполнения булевых операций над мешами. После перетриангуляции и сегментации мешей образуется набор из открытых мешей. Набор мешей разделяется на 5 классов. Вводится операция конкатенации, позволяющая объединять меши для получения результатов операций. В рамках данного подхода можно работать не только с замкнутыми мешами (телами), но и с открытыми мешами (поверхностями).
Ключевые слова: пересечение мешей, объединение мешей, разность мешей, триангуляция, булевы операции, тело, поверхность, сегмент, классификация мешей, программная система, библиотека.

Введение

Задача выполнения булевых операциях над мешами уже была решена в различных библиотеках, например, CGAL [1], GEOGRAM [2], программных пакетах для моделирования, например, Open Cascade [3]. Однако в большинстве случаев разработчики рассматривают булевы операции над телами — мешами, у которых каждый из треугольников имеет ровно три соседа по ребрам. При попытке выполнить операцию между плоскостью и телом, между касающимися в треугольниках мешами использование CGAL и GEOGRAM приводит либо к неверному результату, либо приводят к зацикливанию операций.

Решение, рассматриваемое в данной работе, показало свою эффективность как в случае операций с телами, так и с поверхностями. Алгоритм для классификации позволяет из имеющегося набора поверхностей, на которые были разбиты входные тела и поверхности, получить тела или поверхности, являющиеся результатом булева пересечения, объединения или разности.

Цель данной работы — упростить алгоритмы обработки информации о мешах.

1. Постановка задачи

Имеются два пересекающихся меша, необходимо построить меш, который представлял бы собой результат одной из булевых операций. Также имеется набор сегментированных частей меша, обладающих определенными свойствами, позволяющими конкатенировать их по вершинам — объединять по общим вершинам, записывая все треугольники одного меша во множество треугольников другого меша.

Меш — множество вершин и треугольников, образующих собой тело или поверхность. Тело — меш, в котором нет открытых срезов:

$$M = \{V, T\},\ T = \{t \mid n(t) > 2\}, \tag{1}$$

где $n(t)$ — количество соседних треугольников по ребру. Поверхность – меш, в котором есть хотя бы один открытый срез:

$$M = \{V, T\}, T = \{t \mid \exists t_i : n(t_i) \le 2\}. \tag{2}$$

2. Обзор решаемых задач

2.1. Булевы операции

Стимулом для написания данной работы стала статья [4], в которой авторы для упрощения процесса получения результатов булевых операций выполняли перетриангуляцию — заменяли треугольники исходного меша на треугольники, являющиеся результатом ограниченной триангуляции Делоне [5] исходного треугольника с примитивами пересечения (точками, отрезками, поверхностями). Целью такой перетриангуляции является получение нового меша, который пересекается с другим мешем только в вершинах. Если поверхности пересекаются, то контур пересечения будет состоять из отрезков, совпадающих с ребрами треугольников в перетриангулированной поверхности.

Алгоритм перетриангуляции получил дальнейшее развитие в других алгоритмах. В работе [6] авторы после переразбивания мешей описывают разделение множества треугольников на лежащие снаружи или лежащие внутри исходной модели. Авторы исходной идеи о перетриангуляции развили свою идею до разделения поверхностей на сегменты, однако в своей работе [7] они опираются на ориентацию треугольников. Классификация, предложенная данной работой, работает также эффективно, но является проще.

3. Классификация и булевы операции

3.1. Классификация сегментов

Результатом решения задачи сегментации является множество мешей, которое нужно разделить на 5 классов:

$$C(\{M\}):\{M\}\to\{l\circ R, l\bullet R, L\cap_{\Delta} R, r\circ L, r\bullet L\}, \tag{3}$$

где $x\circ y$ означает, что треугольники меша x лежат «снаружи» y. Соответственно, $x\bullet y$ — x лежит «внутри» y, $\cap_{\Delta}$ — пересечение по треугольникам. Это абстрактные операции, определение которых зависит от реализации. Они обладают следующими свойствами:

$$\{l\circ R\}\cap_{\Delta}\{l\bullet R\}=\varnothing \tag{4}$$

$$\{l\circ R\}\cap_{\Delta}\{L\cap_{\Delta} R\}=\varnothing \tag{5}$$

$$\{l\bullet R\}\cap_{\Delta}\{L\cap_{\Delta} R\}=\varnothing \tag{6}$$

$$\{l\circ R\}\cap_{\circ}\{L\cap_{\Delta} R\}=\{v\} \tag{7}$$

$$\{l\bullet R\}\cap_{\circ}\{L\cap_{\Delta} R\}=\{v\} \tag{8}$$

где $\cap_{\Delta}$ — пересечение по треугольникам, $\cap_{\circ}$ — пересечение по вершинам.

Другими словами, никакие сегменты не пересекаются в треугольниках (5)–(6), однако они могут пересекаться в вершинах, совпадающих с вершинами отрезков пересечения (7)–(8). Если два сегмента находятся по разную сторону границ, они относятся к двум разным классам — бинарная операция классификации. Пример разбиения мешей на сегменты приведен на рис. 1.

Также в результат сегментации включены множества отрезков и треугольников пересечения. Рассматриваются именно отрезки потому, что контур пересечения может пересекать сам себя — в таком случае требуется разбивать сегменты контура в местах самопересечения. Пример самопересечения приведен на рис. 2 — треугольники крышки не соединены с треугольниками самого чайника.

На рис. 1–2 представлены результаты экспериментов, выполненные в разработанной программной системе отображения мешей.

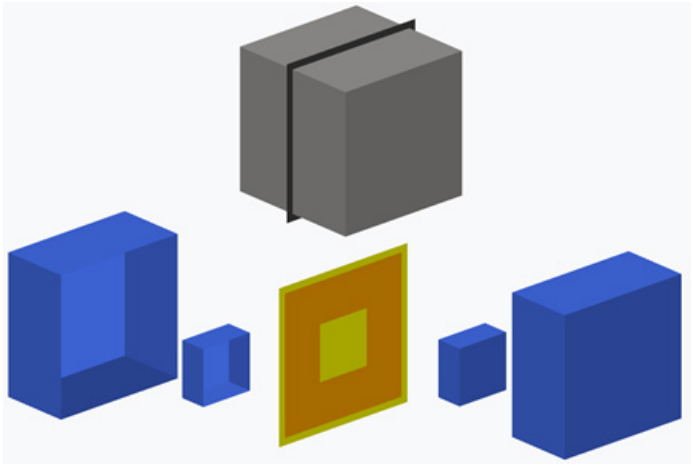


Рис. 1. Классификация сегментов (синим цветом обозначены сегменты куба с полостью, желтым — сегменты меша снаружи куба, оранжевым — внутри)

Рис. 2. Контур пересечения мешей с самопересечением. (квадратами обозначены вершины контура, а красным квадратом обозначена вершина самопересечения

3.2. Объединение сегментов в результате выполнения булевых операций

Переопределим операцию «конкатенации» мешей:

$$+ : M_1, M_2 \to M$$
$$M_1 + M_2 := \{V_1 \cup (V_2 \setminus V_1),\ T_1 \cup T_2' \} \tag{9}$$

Результирующий меш будет содержать внутри себя все вершины первого меша и неповторяющиеся вершины второго. T_2' тогда можно определить как множество треугольников, переиндексированных с учетом удаления повторяющихся вершин. Для получения результатов объединения будем конкатенировать между собой сегменты из классов, определенных в (2)–(6):

$$\bigcup : \{l \circ R\} + \{r \circ L\} + \{L \cap_\Delta R\}$$
$$\bigcap : \{l \bullet R\} + \{r \bullet L\} + \{L \cap_\Delta R\} \tag{10}$$
$$\setminus : \{l \circ R\} + \{r \bullet L\}$$

Ограничения, наложенные на операцию (9), помогут избежать повторной вставки вершин, принадлежавших пересечению сегментов (7), (8).

4. Результаты работы алгоритма

4.1. Результаты применения операций

На рис. 3–4 представлены результаты экспериментов, выполненные в разработанной программной системе отображения мешей. На рис. 3 приводятся результаты пересечения куба с телом с полостью (внутри куба поменьше находится кубическое отверстие). На рис. 4 приводятся результаты операций между более комплексным мешем и призмой.

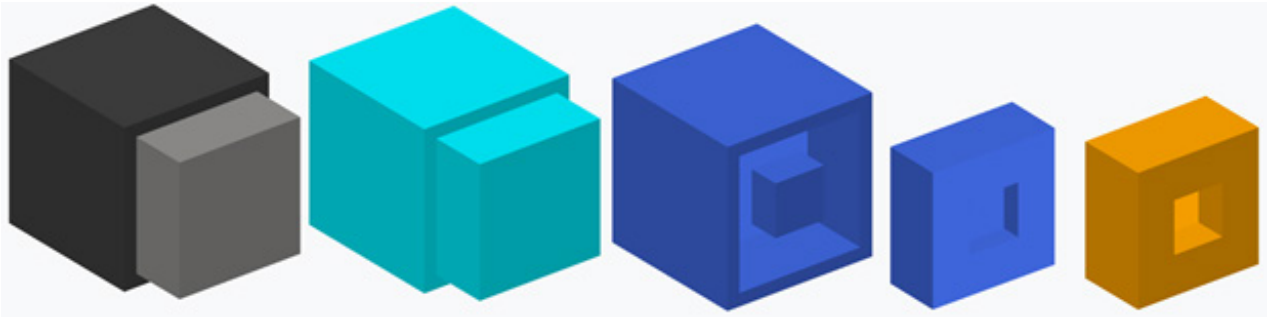


Рис. 3. Результаты выполнения булевых операций между телом и телом с полостью (лазурным цветом обозначено объединение, оранжевым — пересечение, синим — вычитание)

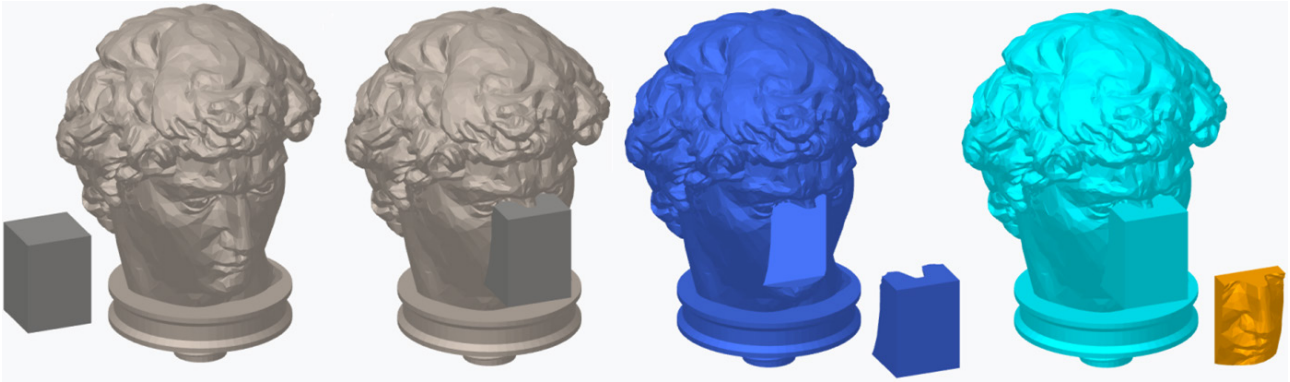


Рис. 4. Результаты булевых операций между головой статуи Давид и призмой (лазурным цветом обозначено объединение, оранжевым — пересечение, синим — вычитание)

Результаты экспериментов позволяют сделать вывод о том, что введенные булевы операции над трехмерными мешами выполняются корректно и позволяют упростить обработку данных о мешах. Процессы классификации и конкатенация позволяют получать меши, являющиеся результатами булевых операций.

Заключение

Рассматривалась задача выполнения булевых операций над мешами с учетом предварительной сегментации поверхностей. Цель данной работы — упростить алгоритмы обработки информации о мешах.

По результатам работы была разработана библиотека и система отображения мешей, в которой пользователь может интерактивно применять булевы операции к мешам: пересечение, вычитание и объединение. В дальнейших работах планируется описание процесса формирования перетриангуляции, алгоритмов получения комплекса примитивов пересечения, сегментации поверхностей.

Литература

1. The Computational Geometry Algorithms Library. – URL: https://www.cgal.org/ (дата обращения: 26.10.2024).

2. BrunoLevy/geogram: a programming library with geometric algorithms. – URL: https://github.com/BrunoLevy/geogram (дата обращения: 26.10.2024).

3. Open Cascade, part of Capgemini. – URL: https://www.opencascade.com/ (дата обращения: 30.10.2024).

4. *Zhou Q.* Mesh Arrangement for Solid Geometry / Q. Zhou, E. Grinspun, D. Zorin, A. Jacobson // ACM Transactions on Graphics (TOG). – 2016. – Т. 35, № 4. – С. 1–15.

5. *Chew L. P.* Constrained delaunay triangulations / L. P. Chew // Proceedings of the third annual symposium on Computational geometry. – 1987. – С. 215–222.

6. *Jacobson A.* Robust inside-outside segmentation using generalized winding numbers / A. Jacobson, L. Kavan, O. Sorkine-Hornung // ACM Transactions on Graphics (TOG). – 2013. – Т. 32, № 4. – С. 1–12.

7. *Zhou M.* Simple and robust boolean operations for triangulated surfaces / M. Zhou [et al.] // Mathematics. – 2023. – Т. 11, № 12. – С. 2713.

УДК 517.9

ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ИНФЕКЦИИ ВИРУСА ГЕПАТИТА В ВО ВРЕМЯ ПРОТИВОВИРУСНОЙ ТЕРАПИИ С АНАЛИЗОМ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ГОМОТОПИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЛЯО

В. А. Усикова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной работе рассматривается построение и исследование математической модели базовой динамики вируса гепатита В. Модель основана на взаимодействии между инфицированными и неинфицированными клетками печени, а также вирусом в организме-хозяине. Основной целью является решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода сеток. В ходе работы был разработан алгоритм и программный код, позволяющий визуализировать результаты в виде графиков. Это помогает анализировать изменение количества клеток и вируса с течением времени. Модель дает возможность лучше понять, как вирус распространяется и влияет на организм человека.

Ключевые слова: математическая модель, метод сеток, вирус гепатита В, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, численное моделирование, прогнозирование заболеваемости, клетки, гепатоциты.

Введение

Жизнь людей по всему миру постоянно находится под угрозой опасных вирусов и заболеваний, что является проблемой уже многих тысячелетий. На сегодняшний день одним из актуальных и серьезных вопросов на эту тему остается вирус гепатита В, несмотря на наличие вакцины, способной предотвратить его действие. Исследования этого вируса ведутся с использованием различных технологий и методов, в том числе при помощи математического моделирования.

Применение моделирования расширяет понимание вируса и его динамики инфицирования. Первые значимые математические модели, которые стали основой для описания иммунного ответа, были разработаны Андерсоном и Мэйем для изучения инфекционных заболеваний человека, в том числе ВИЧ и других вирусных инфекций [1].

Цель данной работы получить более глубокое представление о сложной вирусной динамике, наблюдаемой при инфекции вируса гепатита В во время медикаментозной терапии. Эти знания могут существенно улучшить процесс лечения. Они могут дать информацию о том, как вирус реагирует на различные лекарства, какие препараты наиболее эффективны для подавления инфекции, а также сроки, когда следует начинать и прекращать лечение [2–5].

Одной из основных причин изучения инфекции, вызываемой вирусом гепатита В, является необходимость улучшения контроля за распространением заболевания и, в конечном счете, подавление вируса среди населения. Математические модели могут принести много пользы, так как они помогают более конкретно изучить и понять динамику вируса и помочь с определением мер по противодействию этой инфекции.

Таким образом, математические модели играют важную роль в понимании и контроле гепатита В. Они позволяют предсказывать развитие заболевания, оценивать действенность мероприятий против него, разрабатывать новые более эффективные и оптимальные стратегии, а также методы лечения и профилактики. Все это может значительно повысить эффективность борьбы с инфекцией.

Основополагающим источником для исследования послужила статья: Approximate solutions for HBV infection with stability analysis using LHAM during antiviral therapy [8].

1. Математическая модель

В данной работе рассматривается математическая модель базовой динамики вируса гепатита B [6].

В модели показывается взаимодействие между переменными:

- X обозначает неинфицированные клетки-мишени печени;
- Y представляет собой инфицированные клетки печени;
- Z — вирус гепатита B внутри организма носителя.

Определение данных для ее построения:

- заражение клеток-мишеней происходит со скоростью β при контакте с вирусом;
- учитывается, что инфицированные клетки умирают со скоростью δ;
- скорость выздоровления инфицированных клеток обозначается ρ;
- появление нового вируса происходит со скоростью ν;
- скорость гибели вируса равна c;
- постоянная производительность гепатоцитов (основных клеток печени) обозначается s;
- естественная смертность гепатоцитов представляется через d_T;
- эффект терапии в блокировании инфекции — η;
- эффект препарата на блокирование выработки новых вирусов обозначается как ε.

Переменные рассматриваются в двух вариантах: либо как горизонтальная передача — через контакт с инфицированными людьми, либо как вертикальная — непосредственно от родителей. Вертикальная передача происходит с большей частотой. Эти данные дают возможность построить следующую модель:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = s - (1-\eta)\beta ZX - d_T X + \rho Y \\ \dfrac{dY}{dt} = (1-\eta)\beta ZX - \delta Y - \rho Y \\ \dfrac{dZ}{dt} = (1-\varepsilon)\nu Y - cZ \end{cases} \tag{1}$$

Начальные и краевые условия для нахождения решения системы уравнений (1): $X(0)=0$, $Y(0)=0$, $Z(0)=0$; $X(0)=10^8$, $Y(0)=10^{-2}$, $Z(0)=10$.

В табл. 1 находятся значения переменных, содержащихся в математической модели.

Таблица 1

Значения параметров модели

Параметр	Определение	Значение
s	постоянная производительность гепатоцитов	1 клетка в $день^{-1}$ $мл^{-1}$
d_T	естественная смертность гепатоцитов	$0.01-9\times10^{-4}$ $день^{-1}$
β	скорость инфицирования	$1\times10^{-10}-6.6\times10^{-8}$ $мл$ $вирионов^{-1}$ в $день^{-1}$
δ	скорость гибели инфицированных клеток	$0.06-0.25$ в $день^{-1}$
ρ	скорость выздоровления инфицированных клеток	0 в $день^{-1}$
ν	скорость появления нового вируса	$1.4-164$ клетки $вирионов^{-1}$ в $день^{-1}$
c	скорость гибели вируса	$0.18-1$ в $день^{-1}$
η	эффект терапии в блокировании инфекции	$0.2-0.5$
ε	эффект препарата на блокирование выработки новых вирусов	$0.99934-1$

На рис. 1 приведена диаграмма базовой модели динамики вируса. Эта модель определяет взаимодействие между клетками печени и вирусом [7].

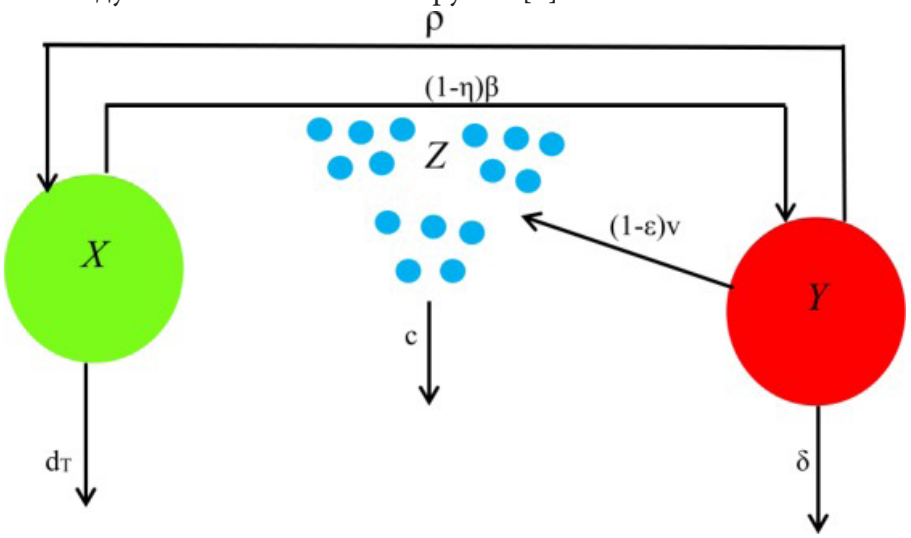


Рис. 1. Диаграмма базовой модели динамики вируса

2. Математическое решение уравнений модели с помощью метода сеток

Суть метода конечных разностей (метода сеток) состоит в замене исходной задачи математической физики ее дискретным аналогом — разностной схемой, а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

Будет применен метод сеток для преобразования уравнений в линейные. В нем известно значение на предыдущем шаге, благодаря чему, возможно вычисление значения на последующем шаге.

Сначала происходит деление отрезка разбиения на части одинаковой длины. Это создает узлы сетки, в которых будут определены значения искомой функции. Затем производные заменяются разностными отношениями. После этих действий система уравнений преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений. Зная значение функции в предыдущем узле и используя разностное уравнение, можно выразить значение функции в текущем узле, через известные значения. После нахождения значения в текущем узле, оно используется для вычисления в следующем узле. Данный процесс повторяется для всех узлов сетки.

Ниже представлены расчеты для каждого из уравнений системы (1):

1) $\dfrac{dX}{dt} = s - (1-\eta)\beta ZX - d_T X + \rho Y.$

$x(t_j)$ — точное значение, x_j — приближенное значение.

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{\tau} = \mu\left(s - (1-\eta)\beta z_j x_{j-1} - d_T x_{j-1} + \rho y_{j-1}\right) + (1-\mu)\left(s - (1-\eta)\beta z_{j-1} x_j - d_T x_j + \rho y_j\right) =$$

$$= -\mu\beta z_j x_{j-1} + \mu\eta\beta z_j x_{j-1} - \mu d_T x_{j-1} + \mu\rho y_{j-1} + s - \beta z_{j-1} x_j + \eta\beta z_{j-1} x_j - d_T x_j + \rho y_j +$$

$$+\mu\beta z_{j-1} x_j - \mu\eta\beta z_{j-1} x_j + \mu d_T x_j - \mu\rho y_j.$$

$$x_j\left(\frac{1}{\tau} + \beta z_{j-1} - \eta\beta z_{j-1} + d_T - \mu\beta z_{j-1} + \mu\eta\beta z_{j-1} - \mu d_T\right) + y_j\left(-\rho + \mu\rho\right) + z_j\left(\mu\beta x_{j-1} - \mu\eta\beta x_{j-1}\right) =$$

$$= \frac{x_{j-1}}{\tau} - \mu d_T x_{j-1} + \mu\rho y_{j-1} + s.$$

2) $\frac{dY}{dt} = (1-\eta)\beta ZX - \delta Y - \rho Y.$

$y(t_j)$ — точное значение, y_j — приближенное значение.

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{\tau} = \mu\left((1-\eta)\beta z_{j-1}x_j - \delta y_{j-1} - \rho y_{j-1}\right) + (1-\mu)\left((1-\eta)\beta z_j x_{j-1} - \delta y_j - \rho y_j\right) \mu\beta z_{j-1}x_j -$$

$$-\mu\eta\beta z_{j-1}x_j - \mu\delta y_{j-1} - \mu\rho y_{j-1} + \beta z_j x_{j-1} - \eta\beta z_j x_{j-1} - \delta y_j - \rho y_j - \mu\beta z_j x_{j-1} + \mu\eta\beta z_j x_{j-1} + \mu\delta y_j +$$

$$+\mu\rho y_j.$$

$$y_j\left(\frac{1}{\tau} + \delta + \rho - \mu\delta - \mu\rho\right) + x_j\left(-\mu\beta z_{j-1} + \mu\eta\beta z_{j-1}\right) + z_j\left(-\beta x_{j-1} + \eta\beta x_{j-1} + \mu\beta x_{j-1} - \mu\eta\beta x_{j-1}\right) =$$

$$= \frac{y_{j-1}}{\tau} - \mu\delta y_{j-1} - \mu\rho y_{j-1}.$$

3) $\frac{dZ}{dt} = (1-\varepsilon)\nu Y - cZ.$

$z(t_j)$ — точное значение, z_j — приближенное значение.

$$\frac{z_j - z_{j-1}}{\tau} = \mu\left((1-\varepsilon)\nu y_{j-1} - cz_{j-1}\right) + (1-\mu)\left((1-\varepsilon)\nu y_j - cz_j\right) = \mu\nu y_{j-1} - \mu\varepsilon\nu y_{j-1} - \mu cz_{j-1} +$$

$$+\nu y_j - \varepsilon\nu y_j - cz_j - \mu\nu y_j + \mu\varepsilon\nu y_j + \mu cz_j.$$

$$z_j\left(\frac{1}{\tau} + c - \mu c\right) + y_j\left(-\nu + \varepsilon\nu + \mu\nu - \mu\varepsilon\nu\right) = \frac{z_{j-1}}{\tau} + \mu\nu y_{j-1} - \mu\varepsilon\nu y_{j-1} - \mu cz_{j-1}.$$

3. Компьютерное моделирования с помощью метода сеток

Система линейных алгебраических уравнений для компьютерной реализации модели выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} + \beta z_{j-1}\left(1-\eta+\mu(\eta-1)\right) + d_T(1-\mu) & \rho(\mu-1) & \mu\beta x_{j-1}(1-\eta) \\ \mu\beta z_{j-1}(\eta-1) & \frac{1}{\tau} + (1-\mu)(\delta+\rho) & \beta x_{j-1}\left(-1+\eta+\mu(1-\eta)\right) \\ 0 & \nu\left(-1+\varepsilon+\mu(1-\varepsilon)\right) & \frac{1}{\tau} + c(1-\mu) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_{j-1}}{\tau} + s + \mu\left(-d_T x_{j-1} + \rho y_{j-1}\right) \\ y_{j-1}\left(\frac{1}{\tau} - \mu(\delta+\rho)\right) \\ z_{j-1}\left(\frac{1}{\tau} - \mu c\right) + \mu\nu y_{j-1}(1-\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

4. Применение модели к данным

В табл. 2 приведены значения, используемые при построении модели.

Полученные графики представлены на рис. 2–4.

Таблица 2

Выбранные значения параметров для моделирования

$X(0)$	$Y(0)$	$Z(0)$	s	η	β	d_T	ρ	δ	ε	ν	c
108	0.01	10	1	0.5	10-10	0.01	0	0.07	0.99934	100	0.67

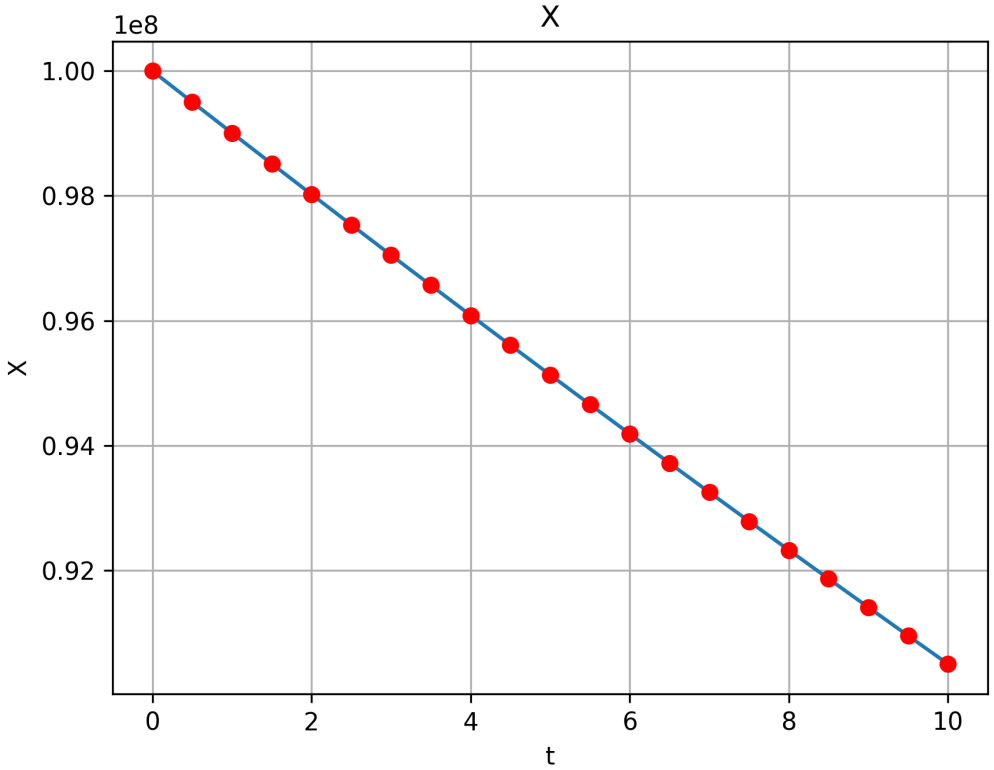


Рис. 2. График зависимости количества здоровых клеток от времени

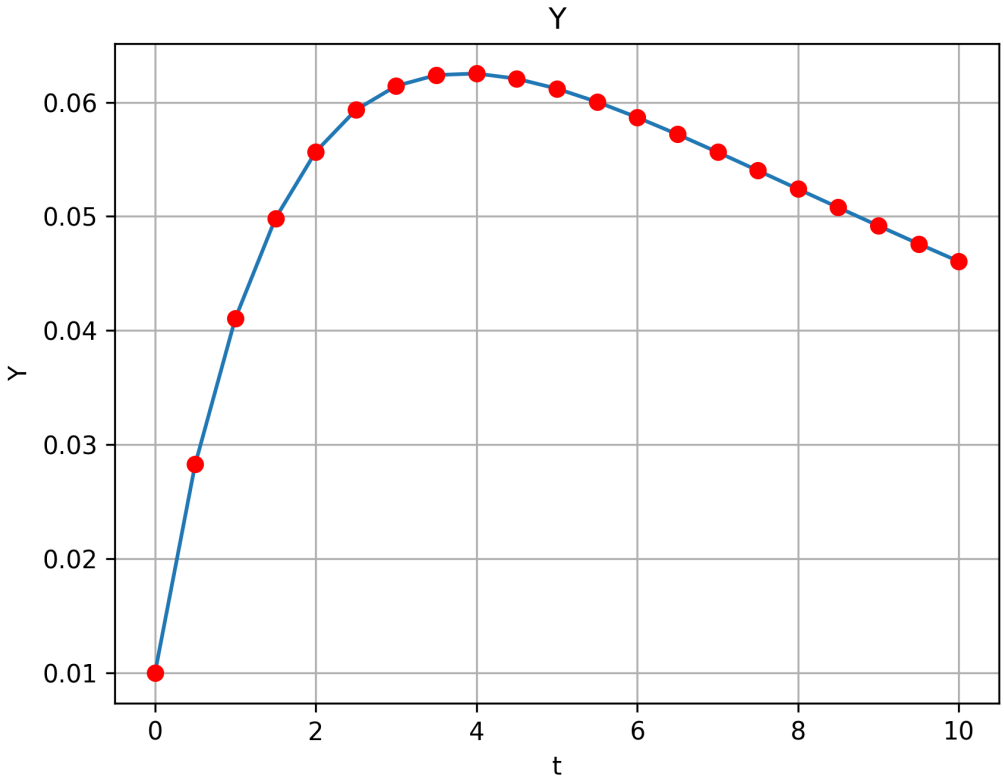


Рис. 3. График зависимости количества инфицированных клеток от времени

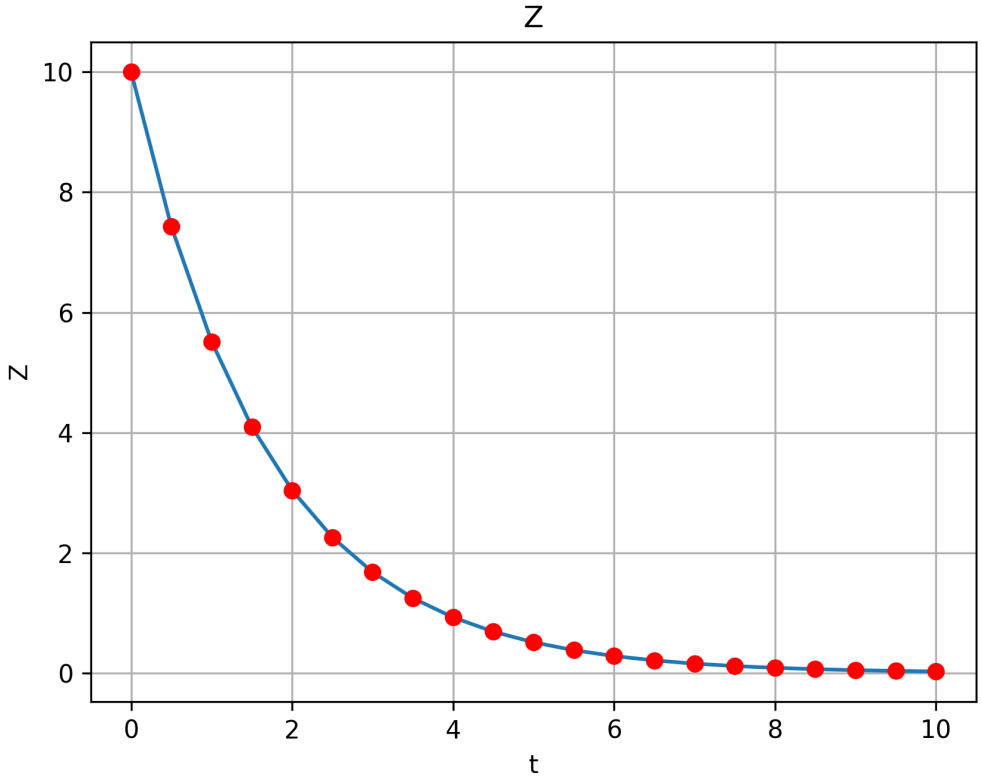


Рис. 4. График зависимости уровня вируса от времени

При значениях времени

t [0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8, 8.5, 9, 9.5, 10]

были получены значения:

X [100000000.000, 99502240.394, 99006958.443, 98514141.812, 98023778.230, 97535855.484, 97050361.424, 96567283.962, 96086611.067, 95608330.771, 95132431.163, 94658900.395, 94187726.674, 93718898.268, 93252403.502, 92788230.762, 92326368.488, 91866805.180, 91409529.395, 90954529.746, 90501794.904];

Y [0.010, 0.028, 0.041, 0.050, 0.056, 0.059, 0.061, 0.062, 0.063, 0.062, 0.061, 0.060, 0.059, 0.057, 0.056, 0.054, 0.052, 0.051, 0.049, 0.048, 0.046];

Z [10.000, 7.427, 5.516, 4.098, 3.044, 2.262, 1.681, 1.250, 0.930, 0.692, 0.516, 0.384, 0.287, 0.215, 0.161, 0.121, 0.091, 0.069, 0.052, 0.040, 0.031].

Заключение

Вследствие проведенного математического и компьютерного моделирования получены следующие результаты:

• количество здоровых клеток X уменьшается со временем из-за заражения клеток и их естественной смертности;

• количество инфицированных клеток Y растет в начале из-за заражения здоровых клеток, это длится до тех пор, пока количество здоровых клеток достаточно велико для поддержания процесса заражения. Через некоторое время происходит достижение пика, и после него наблюдается убывание так как происходит гибель и выздоровление инфицированных клеток;

• уровень вируса Z снижается со временем из-за уменьшения численности инфицированных клеток и механизмов разрушения вируса.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю Половинкину И. П. за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

1. *Anderson R.* Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control / R. Anderson, R. May. – Oxford : OUP Oxford, 1991. – 757 p. – ISBN 9780198540403.

2. *Min L.* Analysis of a basic model of virus infection with application to HBV infection / L. Min, Y. Su, Y. Kuang // Rocky Mt. J. Math. – 2008. – Vol. 38. – P. 1573–1585.

3. *Yousfi N.* Modeling the adaptive immune response in HBV infection / N. Yousfi, K. Hattaf, A. Tridane // J. Math. Biol. – 2011. – Vol. 63. – P. 933–957.

4. *Fatehi F.* Mathematical model of immune response to hepatitis B / F. Fatehi, Y. Kyrychko, K. Blyuss // J. Theor. Biol. – 2018. – Vol. 447. – P. 98–110.

5. *Friedman A.* Chronic hepatitis B virus and liver fibrosis: a mathematical model / A. Friedman, N. Siewe // J. Infect. Dis. – 2018. – Vol. 217. – P. 1408–1416.

6. *Zou L.* An age-structured model for the transmission dynamics of hepatitis B / L. Zou, S. Ruan, W. Zhang // SIAM J. Appl. Math. – 2010. – Vol. 70. – P. 3121–3139.

7. *Liang P.* The independent impact of newborn hepatitis B vaccination on reducing HBV prevalence in China / P. Liang, J. Zu, J. Yin // The independent impact of newborn hepatitis B vaccination on reducing HBV prevalence in China, 1992–2006: a mathematical model analysis. – J. Theor. Biol. – 2015. – Vol. 386. – P. 115–121.

8. *Aniji M.* Approximate solutions for HBV infection with stability analysis using LHAM during antiviral therapy / M. Aniji, N. Kavitha, S. Balamuralitharan // SpringerOpen. – URL: https://boundaryvalueproblems.springeropen.com/articles/10.1186/s13661-020-01373-w (дата обращения: 30.10.2024).

УДК 004.056.55

ФОРМАЛЬНАЯ ВЕРИФИКАЦИИ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОТОКОЛОВ

Д. В. Филонов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена вопросам верификации криптографических протоколов, направленных на защиту данных в цифровых системах. В статье будет проведена формальная верификация протокола SSH. Далее будет построена модель протокола безопасности, которую ProVerif будет принимать на вход и автоматически переводить процессы в систему дизъюнктов Хорна и используя алгоритм, основанный на свободном выборе дизъюнкта из доступного множества, определяет, является ли утверждение верным в заданной системе правил вывода. Результатом данной статьи должна стать проверка свойства конфиденциальности данных.

Ключевые слова: криптопротоколы, верификация, информационная безопасность, ProVerif, конфиденциальность, SSH, криптографические методы, автоматизация, формальный анализ, защита данных.

Введение

В современном мире стала возрастать потребность в разработке специализированных протоколов для обеспечения безопасности передачи данных и коммуникаций в сети. В данной работе рассматривается актуальность проведения верификации криптопротоколов, что представляет собой процесс проверки корректности работы протокола и его соответствия установленным стандартам безопасности. Верификация криптопротоколов играет важную роль в обеспечении защиты информации от утечек, несанкционированного доступа и других угроз. В данной статье будет проведена формальная верификация протокола SSH.

1. Актуальность проблемы

Развитие технологий и увеличение объёмов передаваемой информации создают потребность в надёжной защите данных и безопасной передаче конфиденциальной информации. Это стимулирует разработку специализированных криптографических протоколов, которые обеспечивают безопасность коммуникаций и предотвращают несанкционированный доступ. Верификация таких криптопротоколов, которая включает формальную проверку их корректности, становится важной задачей в условиях постоянных угроз безопасности и всё более сложных атак.

На практике верификация криптографических протоколов позволяет выявлять потенциальные уязвимости до их внедрения, что существенно повышает надёжность систем и минимизирует риск утечки данных и нарушения целостности информации. Современные подходы к верификации, такие как ProVerif, Scyther и FDR2, используют методы моделирования и формальные методы анализа, что позволяет разработчикам проверять ключевые свойства безопасности протоколов, включая конфиденциальность, целостность и аутентификацию.

Таким образом, в условиях растущих требований к безопасности информационных систем формальная верификация криптопротоколов становится одной из приоритетных задач в области защиты данных.

2. Постановка задачи

Проверка криптографических протоколов представляет собой важную задачу в области информационной безопасности. Для эффективного анализа криптографического протокола необходимо использовать специальные методы и инструменты, которые позволят проверить корректность его реализации и соблюдение заданных требований безопасности. В ходе исследования необходимо установить, насколько данный протокол обеспечивает конфиденциальность и защиту передаваемой информации, что важно для предотвращения утечек и защиты от потенциальных атак.

Существует несколько подходов к верификации, включающих формальные методы проверки и использование автоматизированных инструментов. В рамках данной работы применяются средства автоматической верификации, которые обеспечивают анализ основных свойств безопасности криптографических протоколов. ProVerif, выбранный для исследования, позволяет моделировать протокол и проводить проверку на соответствие критериям безопасности с использованием формальной модели. Основная цель работы — исследовать и подтвердить свойства безопасности протокола с акцентом на конфиденциальность данных.

Таким образом, работа направлена на моделирование и верификацию протокола с использованием инструментов автоматической верификации, которые помогают обнаруживать уязвимости и повышать безопасность криптографических систем.

3. Реализация задачи

Для проведения формальной верификации на основе хорновских выражений в приложении ProVerif необходимо построить модель, для начала стоит добавить ясности в терминологии.

Хорновские выражения в ProVerif — это способ представления криптографического протокола для его автоматической верификации.

В качестве верифицируемого криптопротокола будет выступать SSH, который используется для обеспечения безопасного обмена данными между клиентом и сервером. Модель будет включать в себя шифрование, создание подписей, аутентификацию, хэширование и другие функции, необходимые для обеспечения безопасности и конфиденциальности при обмене данными через канал связи.

Чтобы осуществить проверку свойства конфиденциальности данных или же секретности необходимо обратить внимание на следующие основные моменты в модели:

1. Переменная «secretC» определена как «free secretC: bitstring [private]», что означает, что это секретное значение типа «bitstring». Секретное значение типа bitstring - конфиденциальное или секретное информационное значение, представленное в виде последовательности битов (bitstring) в компьютерной системе или криптографическом протоколе. Это секретное значение обычно используется для шифрования, аутентификации или других целей безопасности для обеспечения конфиденциальности и целостности данных.

2. Запрос «query attacker(secretC)» используется для проверки наличия атаки на секретное значение «secretC». Этот запрос позволяет определить, существует ли возможность получения доступа к секретному значению «secretC» со стороны злоумышленника (рис. 1).

3. В процедурах «processClient» и «processServer» секретное значение «secretC» используется для отправки секретного сообщения в случае подключения к доверенному серверу. Если переменная «ServerVerKey» равна переменной «SVerKey», то секретное значение «secretC» отправляется по каналу связи.

Таким образом, в данном протоколе проверка секретности осуществляется путем определения секретного значения, проверки возможной атаки на это значение и использования секретного значения для отправки секретного сообщения при выполнении определенного условия.

```
(* Secrecy assumptions *)
free secretC: bitstring [private].
query attacker(secretC).
```

Рис.1. Запрос для проверки наличия атаки на секретное значение «secretC»

В данной модели использовался протокол SSH с криптографическим алгоритмом RSA (рис. 2).

```
(* RSA *)
const p: G.
const q: G.
const e: G.
const d: G.
const g: G.
fun rsa_enc(G, exponent): G.
equation forall x: exponent, y: exponent; rsa_enc(rsa_enc(g, x), y) = rsa_
enc(rsa_enc(g, y), x).
fun rsa_dec(G, exponent): G.
equation forall x: exponent, y: exponent; rsa_dec(rsa_dec(g, x), y) = rsa_
dec(rsa_dec(g, y), x).
```

Рис. 2. RSA Proverif в модели протокола SSH

4. Результат формальной верификации

В результате проверки криптографического протокола SSH с помощью инструмента ProVerif была подтверждена его устойчивость к несанкционированному доступу и конфиденциальность передаваемых данных. Одним из основных результатов анализа является подтверждение того, что ключевые свойства безопасности, такие как секретность данных, соблюдаются в соответствии с требованиями протокола.

На рис. 3 представлен вывод инструмента ProVerif, демонстрирующий успешную проверку конфиденциальности данных. В частности, строка «Query not attacker(secretC[]) is true» указывает на то, что в формальной модели протокола злоумышленник не получил доступ к переменной secretC. Это означает, что данные, обозначенные как secretC, остаются защищенными и недоступными для несанкционированного доступа.

```
Completing equations...
-- Process 1-- Query not attacker(secretC[]) in process 1
Translating the process into Horn clauses...
Completing...
ok, secrecy assumption verified: fact unreachable attacker(dhsecretC[!1 = v])
ok, secrecy assumption verified: fact unreachable attacker(dhsecretS[dhpublicC_1
= v, !1 = v_1])
ok, secrecy assumption verified: fact unreachable attacker(SSigKey([])
Starting query not attacker(secretC[ ])
RESULT not attacker(secretC[]) is true.

Verification summary:

Query not attacker(secretC[]) is true.
```

Рис. 3. Вывод ProVerif

На основании полученных данных можно сделать вывод, что исследуемый криптопротокол демонстрирует высокий уровень защиты передаваемых данных и эффективен в предотвращении возможных атак.

Заключение

По итогам данной работы была проведена формальная верификация протокола SSH. В результате проверки криптографического протокола SSH с помощью инструмента ProVerif была подтверждена его устойчивость к несанкционированному доступу и конфиденциальность передаваемых данных. Одним из основных результатов анализа является подтверждение того, что ключевые свойства безопасности, такие как секретность данных, соблюдаются в соответствии с требованиями протокола.

Литература

1. Формальная верификация криптографических протоколов. – URL: https://wiki2.org/ru/Формальная_верификация_криптографических_протоколов#Методы_формальной_верификации[4] (дата обращения: 26.03.2024).

2. Криптографические примитивы. – URL: https://wiki2.org/ru/Криптографический_примитив (дата обращения: 13.04.2024).

3. ProVerif 2.05:Automatic Cryptographic Protocol Verifier,User Manual and Tutorial. – URL: https://bblanche.gitlabpages.inria.fr/proverif/manual.pdf (дата обращения: 20.04.2024).

4. Automatic Verification of Security Protocols in the Symbolic Model: the Verifier ProVerif. — URL: https://bblanche.gitlabpages.inria.fr/proverif/publications/BlanchetFOSAD14.pdf (дата обращения:23.04.2024).

УДК 539.4, 519.6

АНИЗОТРОПНЫЕ ЛИНЕЙНО УПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

М. А. Фомченкова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва

Аннотация. Данная работа сосредоточена на ключевых аспектах механики разрушения, касающихся конструкционных композитов, обладающих анизотропными механическими свойствами. Основное внимание уделяется анализу напряжений и деформаций в ортотропных материалах с дефектами. Представлено асимптотическое разложение полей напряжений, деформаций и перемещений в анизотропных материалах, которое расширяет решение Уильямса, изначально разработанное для линейно упругих изотропных материалов. Исследование сочетает два методологических подхода: классическую теорию комплексных переменных и метод конечных элементов.

Ключевые слова: асимптотическое решение, переопределенный метод, ортотропные материалы, анализ напряжений и деформаций, механика разрушения, теория комплексных переменных, метод конечных элементов, анизотропные среды, поля напряжений у вершины трещины, анизотропные упругие материалы.

Введение

Анализ причин возникновения дефектов и трещин, а также закономерностей их развития в анизотропных хрупких материалах представляет собой ключевую задачу для оценки прочности и долговечности конструкций. В связи с этим критически важно и актуально определить напряжения, связанные с кончиком трещины, поскольку существующие критерии разрушения основываются на полях напряжений и деформаций в непосредственной близости к дефекту, что может существенно повлиять на определение траектории распространения трещины. В работе [1] были получены асимптотические разложения полей напряжений, перемещений и деформаций в окрестности вершины трещины в бесконечной пластине, содержащей центральную трещину, выполненной из ортотропного материала. Данное асимптотическое решение включает слагаемые высоких порядков, что позволяет осуществлять более точную и всеобъемлющую оценку поля напряжений на значительных расстояниях от вершины трещины, тем самым значительно расширяя область применимости асимптотического решения. В настоящем исследовании предлагается метод, позволяющий построить асимптотические разложения для конечных тел с дефектами и сравнить его с точным численным решением, полученным из конечно-элементного пакета Simulia Abaqus. Метод конечных элементов, в свою очередь, позволяет находить решения для сложных геометрических конфигураций с трещинами под различными механическими нагрузками. Также рассмотрены графики асимптотического решения в полярных системах координат, которые позволяют предположить направление распространения роста трещины.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим пластину с центральной трещиной, находящуюся в условиях плоского напряженного состояния, в анизотропном материале. На пластину воздействует растягивающая нагрузка величиной $\sigma = 100$ Па. Угол α представляет собой угол между трещиной и приложенной нагрузкой, в то время как угол β обозначает угол между трещиной и осью симметрии

материала. На рис. 1 приведена схема пластины с трещиной в анизотропном материале. В качестве примера ортотропного материала выбран материал AgF_2.

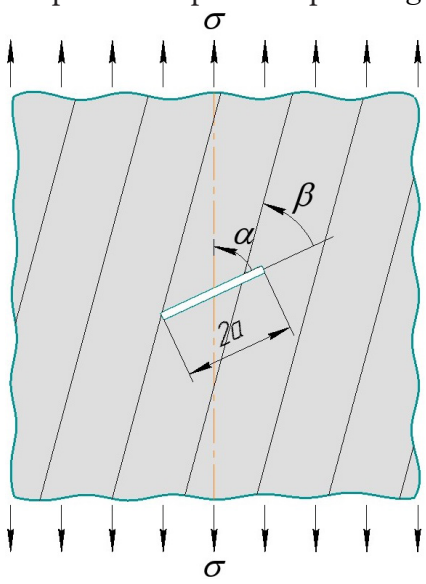


Рис. 1. Схема пластины с трещиной в анизотропном материале

Аналитическое приближенное представление компонентов тензора напряжений для ортотропного материала имеет следующую форму:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1-\mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2\mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2\mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ -\left(\mu_2\mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1\mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\right) \end{bmatrix}\right) +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1-\mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2\mu_1^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2\mu_2^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ -\left(\mu_2\mu_1^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1\mu_2^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\right) \end{bmatrix}\right), \quad (1)$$

где μ_1, μ_2 — корни характеристического уравнения; r, θ — полярные координаты; A_n, B_n — амплитудные коэффициенты асимптотических полей трещины анизотропного материала.

На практике используется усечённый ряд (1), в котором в настоящее время сохраняются высшие приближения [2–8], поскольку высшие слагаемые оказывают значительное влияние на полное описание полей в окрестности вершины трещины. В связи с этим возникает вопрос о том, какое количество слагаемых следует учитывать в асимптотических представлениях (1).

2. Конечно-элементное решение задачи о нагружении пластины с горизонтальной трещиной в анизотропном материале и его анализ

Метод конечных элементов представляет собой численный подход к решению дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений, возникающих при

анализе задач прикладной физики. В целях решения различных задач, связанных с механикой твердого деформируемого тела, теплообменом, гидродинамикой, электродинамикой и топологической оптимизацией, применяется данный метод. В процессе формулирования задачи происходит ее упрощение, в последующем компьютер производит расчеты и выдает результат. Это позволяет трактовать полученные результаты как точные численные решения. На рис. 2 показаны напряжения и интенсивность напряжений при $\alpha = 90,\ \beta = 0$, в конечно-элементном пакете Simulia Abaqus.

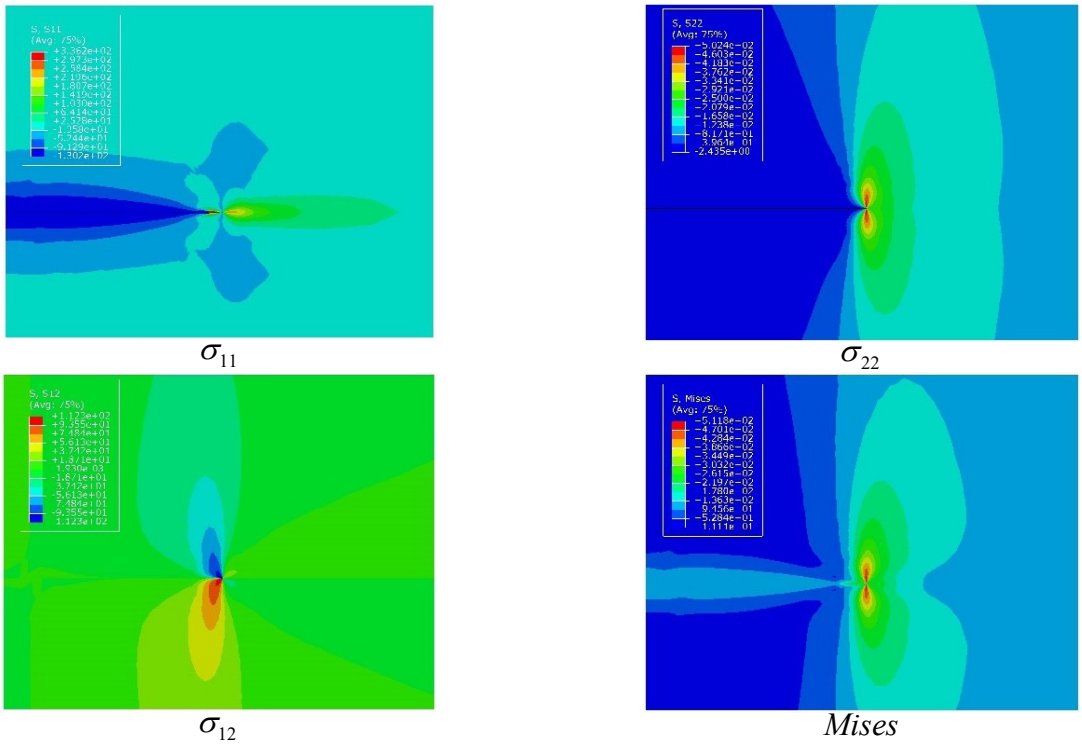


Рис. 2. Напряжения и интенсивность напряжений при $\alpha = 90,\ \beta = 0$

На рис. 3 изображены кривые угловых распределений компонент тензора напряжений, построенные при помощи асимптотического решения с удержанием разного числа слагаемых ряда.

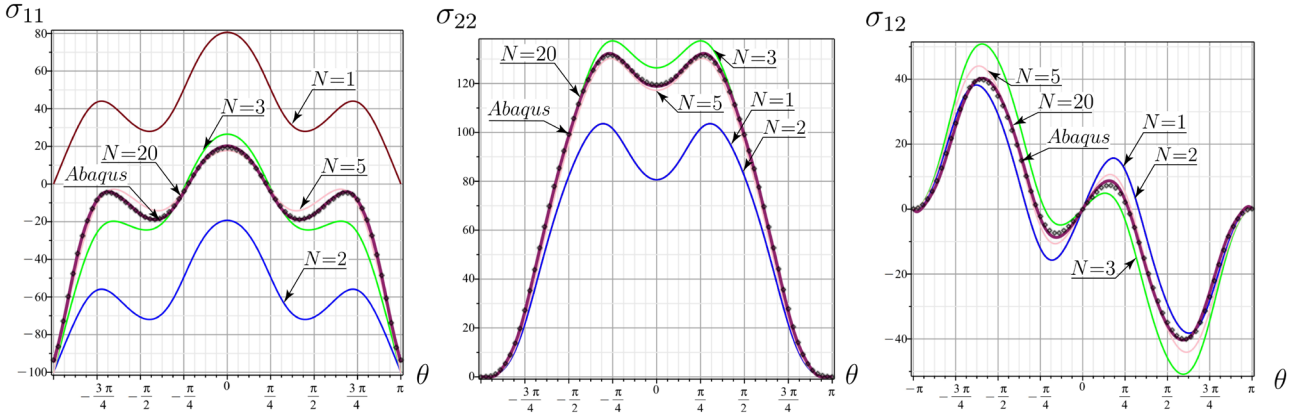


Рис. 3. Кривые угловых распределений компонент тензора напряжений

При сравнении двух решений, можно сделать вывод о том, что минимальная разница в погрешности достигается при удержании количества слагаемых $N = 20$.

Как показано на рис. 4, угловые распределения компонент тензора напряжений в полярных координатах имеют вид:

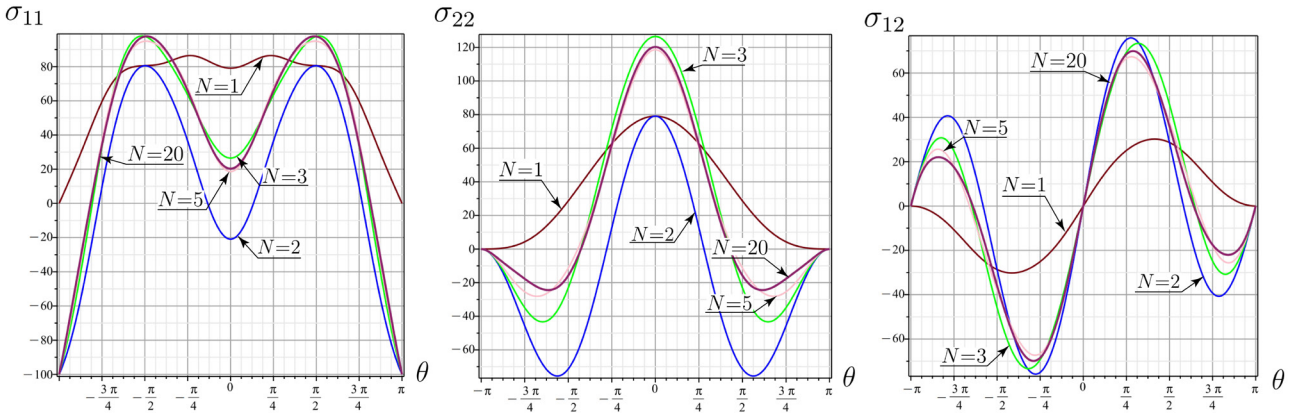


Рис. 4. Угловые распределения компонент тензора напряжений в полярных координатах

Заключение

В работе проведен анализ точности усеченных асимптотических разложений, которые обобщают представление М. Уильямса для механических полей вблизи трещин в анизотропных средах. Рассмотрены различные варианты усечения асимптотических решений и оценено влияние этого усечения на точность представления механических величин.

Показано сравнение точного численного решения, полученного с помощью конечно-элементного пакета Simulia Abaqus, с асимптотическим решением, удерживающим нерегулярные слагаемые.

Проделанное исследование подтверждает важность учета высших слагаемых асимптотического разложения в анизотропных средах, указывая на то, что включение большего числа членов ряда расширяет область, где асимптотическое решение остается достоверным. Учет высших порядков в асимптотическом разложении приводит к более точному представлению напряжений и перемещений вблизи окрестности трещины.

Литература

1. *Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M. R.* Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 91. – P. 837–862. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025.

2. *Hello G.* On the loci of exactness for truncated Williams crack-tip stress expansions// International Journal of Fracture. – 2024. https://doi.org/10.1007/s10704-024-00802-6.

3. *Фомченкова М. А., Степанова Л. В.* Процедура переопределенного метода нахождения коэффициентов разложения полей у вершины трещины, основанная на конечно-элементном решении для компонент тензора напряжения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2024. – Т. 30, № 2. – С. 54–66. DOI 10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66.

4. *Жаббаров Р. М.* Сравнительный анализ полей напряжений у вершины трещины и боковых надрезов, полученных с помощью усеченных разложений Уильямса / Р. М. Жаббаров, Л. В. Степанова // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2021. – Т. 27, № 4. – С. 30–67. – DOI 10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67.

5. *Степанова Л. В.* Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II / Л. В. Степанова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. – С. 72–85. – DOI 10.15593/perm.mech/2021.1.08.

6. *Степанова Л. В.* Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I / Л. В. Степанова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 237–249. – DOI 10.15593/perm.mech/2020.4.20.

7. *Ayatollahi M. R., Nejati M., Ghouli S.* Crack tip fields in anisotropic planes: a review// International Journal of Fracture. – 2022. – Vol. 234. – P. 113-139. https://doi.org/10/01007/s10704-021-00559-2.

8. *Shi L., Oyadiji S. O.* Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods// Engineering Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 296. – 109852. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852.

УДК 681.3

ВЫЯВЛЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАДАРНЫХ СИСТЕМ, ОСНОВАННЫХ НА ПРОГРАММНО-ОПРЕДЕЛЯЕМОМ РАДИО

М. Ю. Шевцов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье обсуждается проблема выявления беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) с использованием радарных систем на базе программно-определяемого радио (ПОР). Задача обнаружения дронов сложна, поскольку они характеризуются слабой радиосигнатурой и низким уровнем радиолокационного отражения. БПЛА обладают рядом преимуществ, включая их экономичность в эксплуатации, способность длительно находиться в воздухе. Эти особенности делают беспилотники идеальным, незаметным и доступным средством для различных групп, включая как государственные, так и негосударственные структуры. Эффективные методы их обнаружения включают радарные системы, использующие доплеровский сдвиг для идентификации движущихся объектов, а интеграция ПОР способствует повышению гибкости и снижению затрат на такие системы.

Ключевые слова: эффект Доплера, программно-определяемое радио, БПЛА, программно-определяемая радарная система.

Введение

Первое значительное применение беспилотников в боевых действиях произошло во время войны в Персидском заливе, когда США использовали дрон «Predator» для эффективного наблюдения и ударов по целям. После этой войны беспилотники стали все чаще использоваться в военных операциях. Они активно применялись коалицией под руководством Саудовской Аравии в гражданской войне в Йемене, начавшейся в 2015 году, для нанесения ударов по объектам, принадлежащим повстанцам Хути.

Первая террористическая акция с использованием массированного налета БПЛА была осуществлена в секторе РС Пура в Джамму и Кашмире в 2022 году, где помимо средств нападения, БПЛА использовались для контрабанды оружия и наркотиков на равнинах Пенджаба. По данным пограничных сил безопасности Сил пограничной безопасности (СББ), с 1 января 2022 года на индийско-пакистанской границе в Пенджабе было зафиксировано 254 вторжения беспилотников. 1 января 2022 года, что в четыре раза больше, чем 67 вторжений беспилотников, о которых сообщалось в 2021 году. Большинство из этих было зафиксировано в пограничных районах Тарн Таран, Фазилка и Амритсар. Атаки осуществлялись роями БПЛА в составе от 5 до 60 аппаратов одновременно.

Тактикам использования БПЛА во время боевых действий еще не дана полная аналитическая оценка, однако, с развитием технологий на основе сверхбольших интегральных схем (СБИС) нет стало очевидно, что беспилотники являются мощным оружием, которое окажет значительное влияние на военные конфликты ближайшего времени. Таким образом, обнаружение беспилотников является актуальной задачей, чтобы предотвратить использование БПЛА в качестве оружия, которое наносящего ущерб вооруженным силам.

1. Основы радиолокации

– Основы развития радиолокации были заложены Генрихом Герцем в 1886 году. Однако первая практическая радарная система была изобретена только в 1935 году британским фи-

зиком Робертом Уотсоном-Уаттом. Радар широко использовался британскими военными во время Второй мировой войны для обнаружения и отслеживания вражеских самолетов и кораблей. Он также использовался военными США и других стран-союзников и сыграл решающую роль в победе союзников во время войны.

– Радар — это аббревиатура от Radio Detection and Ranging System, которая использует радиоволны для определения расстояния, угла и скорости объектов. Это активный датчик, то есть он излучает собственную энергию для обнаружения объектов. Радарные системы обычно состоят из передатчика, антенны, приемника и процессора. Передатчик посылает импульс радиоволн, которые отражаются от объекта и возвращаются через антенную систему в приемник. Приемник измеряет время, необходимое для прохождения волн до объекта и обратно. Эта информация используется для расчета расстояния до объекта.

2. Эффект Доплера

Эффект Доплера — это кажущееся изменение частоты волны по отношению к наблюдателю, движущемуся относительно источника волны. Возникает потому, что гребни волн, испускаемых источником, располагаются ближе друг к другу, когда источник движется к наблюдателю, и дальше друг от друга, когда источник удаляется от наблюдателя. Это происходит потому, что источник излучает волны с постоянной скоростью, а наблюдатель движется относительно источника. Эффект Доплера используется для расчета дальности от передатчика до летящего объекта.

– Формула для эффекта Доплера выглядит следующим образом:

$$f' = f\frac{v+u}{v-u}, \tag{1}$$

где f' — наблюдаемая частота, f — излучаемая частота, v — скорость волны, u — скорость наблюдателя, относительно источника.

В радарных системах есть возможность рассчитывать скорость объекта с помощью частоты биений. Частота биений — это разница между частотами двух волн (частота, на которой волны интерферируют друг с другом и создают заметный сигнал).

Частоту биений можно наблюдать, при взаимодействии двух волн с немного разными частотами. Например, если смешать две волны с частотами 100 Гц и 102 Гц, частота биений составит 2 Гц. Это означает, что волны будут интерферировать друг с другом дважды в секунду.

Данный эффект можно наблюдать на рис. 1.

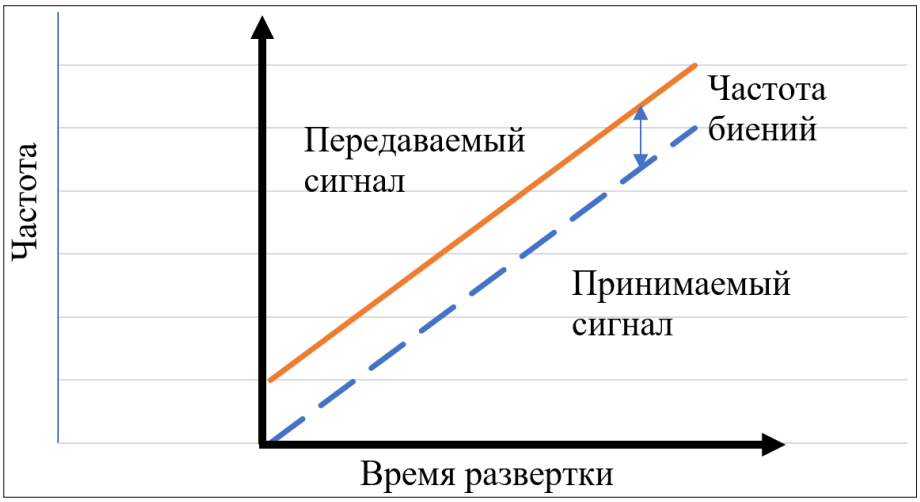


Рис. 1. Демонстрация эффекта частоты биений

Вычисление скорости v может быть выполнено с помощью частоты биений:

$$v = f\frac{b}{c}, \tag{2}$$

где f — частота передатчика, b — частота биений и c — скорость света.

3. Программно-определяемое радио как радар

– Программно-определяемые радиостанции — это системы передатчиков-приемников, которые работают, в основном, с программным обеспечением радиостанций. Они используют только базовое оборудование, которое должно работать в радиочастотной цепи и распространять сигнал. Типичная архитектура SDR состоит из двух основных компонентов: переднего радиоузла (RFE) и цифрового заднего узла. RFE включает в себя функции приемника (Rx) и передатчика (Tx) и работает в широком диапазоне настройки, обычно от постоянного тока до 18 ГГц. Мгновенная полоса пропускания также важна для определения мгновенно идентифицируемого спектра.

– Функции обработки данных радиостанции могут быть перепрограммированы и настроены без необходимости модификации оборудования. Таким образом, одно устройство может быть полностью перепрограммировано для выполнения другой функции без замены компонентов.

– Архитектура на основе ПЛИС позволяет полностью переконфигурировать и модернизировать SDR для поддержки новейших радиопротоколов и алгоритмов ЦОС, что значительно продлевает срок службы радиооборудования. SDR также содержат несколько независимых радиочастотных каналов с выделенными аналого-цифровыми и цифро-аналоговыми преобразователями (АЦП/ЦАП).

– Многоканальный режим работы в сочетании с параллельными вычислительными возможностями ПЛИС обеспечивает одновременную передачу и прием нескольких сигналов с очень низкой задержкой, сохраняя при этом фазовую когерентность и стабильность.

4. Среда разработки «GNU Radio»

Для реализации функциональности программно-определяемого радио (SDR) основой служит GNU Radio. Эта платформа предлагает библиотеки, которые можно использовать для создания различных компонентов SDR.

GNU Radio — это инструмент разработки ПО с открытым исходным кодом, который предоставляет набор сигнальных компонентов для реализации программно-определяемого радио и различных функций обработки сигналов. Он может использоваться как в сочетании с радиочастотным оборудованием, так и в программной среде, аналогичной моделированию, для создания программно-определяемых радиостанций. Этот инструмент находит широкое применение в любительском, академическом и коммерческом секторах, поддерживая научные исследования в области связи и позволяя публиковать реальные данные.

5. Алгоритм реализации радара Доплера с помощью SDR-систем

Для реализации Доплеровского радара с помощью SDR (Software Defined Radio) основное внимание сосредоточено на обработке сигнала, которая включает анализ частоты отражённого сигнала для вычисления скорости цели. Математическая основа алгоритма состоит в применении эффекта Доплера, который проявляется в изменении частоты сигнала при движении источника или приёмника относительно отражающего объекта.

Основные шаги алгоритма:

1. Передача радиочастотного сигнала

Передатчик радара отправляет непрерывный радиочастотный сигнал на заданной несущей частоте f_0. В идеале используется простая синусоидальная волна:

$$s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi), \tag{3}$$

где A — амплитуда, ϕ — фаза сигнала, f_0 — частота передаваемого сигнала.

2. Отражение сигнала от движущегося объекта

Когда сигнал встречает движущийся объект, он отражается и возвращается к приёмнику радара с изменённой частотой из-за Доплеровского эффекта. Если объект приближается, частота увеличивается, если удаляется — уменьшается.

Формула изменения частоты:

$$f_d = \frac{2v}{\lambda}, \tag{4}$$

где f_d — доплеровский сдвиг частоты, v — скорость объекта относительно радара, λ — длина волны передаваемого сигнала, связанная с частотой f_0 через $\lambda = c / f_0$, c — скорость света.

3. Приём отражённого сигнала

Отражённый сигнал на приёмнике будет выглядеть как:

$$r(t) = A\cos(2\pi(f_0 + f_d)t + \phi), \tag{5}$$

где f_d — доплеровский сдвиг, добавленный к исходной частоте f_0.

4. Частотный анализ и вычисление доплеровского сдвига

Для того чтобы вычислить скорость объекта, необходимо извлечь f_d из принятого сигнала. Это достигается с помощью гетеродинирования и быстрого преобразования Фурье (БПФ).

1.1. Гетеродинирование. Принятый сигнал умножается на синусоидальную волну с частотой f_0 для смещения частоты на более низкий диапазон:

$$s_{mix}(t) = r(t)\cos(2\pi f_0 t). \tag{6}$$

Получаем:

$$s_{mix}(t) = \frac{A}{2}[\cos(2\pi f_d t) + \cos(2\pi(2f_0 + f_d)t)]. \tag{7}$$

Здесь остаются компоненты на частотах f_d и $2f_0 + f_d$, но интересует только низкочастотная компонента $\cos(2\pi f_d t)$.

1.2. Фильтрация. Высокочастотная компонента $2f_0 + f_d$ фильтруется с помощью низкочастотного фильтра.

1.3. Преобразование Фурье. Теперь для извлечения f_d можно применить БПФ к $s_{mix}(t)$, чтобы преобразовать сигнал из временной области в частотную и найти пиковую частоту, которая будет соответствовать f_d.

5. Вычисление скорости объекта

Из найденного значения f_d вычисляем скорость объекта:

$$v = \frac{f_d \lambda}{2}. \tag{8}$$

6. Реализация алгоритма

В качестве аппаратной платформы были использованы два полудуплексных SDR-трансивера HackRF (первый — в качестве приемника, второй — передатчика).

На стороне приёма необходимо настроить параметры выборки, чтобы анализировать частоты в нужном диапазоне.

Обработка сигнала осуществлялась с помощью таких библиотек, как NumPy и SciPy для Python или аналогичных инструментов для других языков.

Таким образом, алгоритм построен вокруг улавливания доплеровского сдвига и использования математических преобразований для извлечения информации о скорости цели.

Реализация допплеровского радара на SDR-трансиверах состоит из нескольких секций со следующей структурой:

1. Настройки HackRF. Устройства настраиваются на одинаковую частоту передачи и приёма. В примере используется частота 2.4 ГГц.

– Передатчик передаёт синусоидальный сигнал с частотой 2.4 ГГц.

– Приёмник принимает отражённый сигнал.

2. Генерация передаваемого сигнала. Функция «generate_tx_signa»l создаёт синусоидальный сигнал, который будет передаваться в эфир.

3. Приём сигнала. Данные от приёмника HackRF собираются в цикле на протяжении заданного времени «DURATION».

4. Обработка сигнала:

– Сначала принятый сигнал умножается на исходный для снижения частоты (гетеродинирование).

– Затем применяется фильтрация с помощью «Butterworth» фильтра, чтобы удалить высокочастотные компоненты.

– Используется БПФ для анализа частотного спектра и определения пиковой частоты, которая соответствует доплеровскому сдвигу.

5. Расчёт скорости. Из частоты пика спектра вычисляется доплеровский сдвиг, а затем скорость объекта.

Библиотеки и зависимости:

– Pyhackrf — для работы с устройствами HackRF.

– NumPy — для генерации и обработки сигналов.

– SciPy — для фильтрации и преобразования Фурье.

7. Расчетные оценки точности определения высоты и скорости

Оценки точности определения скорости и высоты для Доплеровского радара, построенного на базе SDR (например, HackRF), зависят от нескольких факторов, таких как частота сигнала, ширина полосы частот, разрешение системы, а также качество обработки сигнала. Ниже приведены оценки точности для скорости и высоты в условиях применения системы с HackRF.

Точность определения скорости с помощью Доплеровского радара зависит от точности измерения доплеровского сдвига частоты (8). Для частоты $f_0 = 2.4$ (частота, часто используемая в SDR) длина волны:

$$\lambda = \frac{3\times10^8}{2.4\times10^9} \approx 0{,}125 \text{ м}. \tag{9}$$

Если система способна измерить доплеровский сдвиг с точностью Δf_d порядка 10 Гц (зависит от разрешающей способности по частоте БПФ), это даст точность определения скорости:

$$\Delta v = \frac{\Delta f_d \lambda}{2} = \frac{10\times0{,}125}{2} \approx 0{,}625 \text{ м/с}. \tag{10}$$

Таким образом, для радара на базе HackRF, работающего на частоте 2.4 ГГц, при разрешении 10 Гц по частоте доплеровского сдвига, точность измерения скорости будет порядка 0.6 м/с.

Доплеровский радар непосредственно не измеряет высоту цели, однако есть несколько косвенных способов оценки высоты, основываясь на моделях траектории движения и угло-

вом положении радара относительно цели. Для этого может использоваться многочастотная система или радар с фазированной антенной решёткой, что позволяет определять не только скорость, но и траекторию движения, включая высоту.

Без дополнительных сенсоров или механизмов треангуляции, можно сделать только приблизительную оценку высоты на основе изменения скорости, если известен угол приближения объекта (например, если БПЛА движется под известным углом к радару).

Оценка высоты с использованием радиолокационного триангулирования:

$$h = R\sin(\theta), \tag{11}$$

где θ — угол возвышения, который можно оценить с помощью фазированной антенной решётки или геометрических методов, R — расстояние до цели, которое может быть определено по времени задержки сигнала.

Таким образом, точность определения скорости для Доплеровского радара с использованием HackRF и частоты 2.4 ГГц может составлять около 0.6 м/с при хороших условиях и разрешении по частоте около 10 Гц. Более высокая частота передачи сигнала и улучшенные методы обработки могут повысить точность. Однако, точность определения высоты ограничена, если не используется дополнительное оборудование или методики триангуляции.

Заключение

Использование Доплеровского радара с SDR для обнаружения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) предоставляет несколько ключевых преимуществ:

– Высокая чувствительность к движению. Доплеровский радар использует изменение частоты сигнала, вызванное движением объекта, что делает его особенно эффективным для обнаружения БПЛА, которые часто движутся на высоких скоростях. Изменение частоты отражённого сигнала позволяет точно определять скорость дрона, даже если он перемещается с относительно низкой радиальной скоростью.

– Точное определение скорости. Доплеровский радар способен не только обнаружить объект, но и измерить его скорость с высокой точностью. Для обнаружения БПЛА это особенно важно, так как скорость может использоваться для классификации летательного аппарата и отличия его от других движущихся объектов (например, птиц).

– Экономичность и гибкость SDR. Использование SDR-платформы (например, HackRF) позволяет создать гибкую и недорогую радарную систему. В отличие от специализированных аппаратных радаров, SDR можно легко перепрограммировать под различные задачи, включая разные частотные диапазоны и типы сигналов. Это даёт возможность адаптировать систему для различных условий и типов БПЛА.

– Широкий частотный диапазон. SDR может работать в широком диапазоне частот, что даёт возможность настраивать систему на различные частоты в зависимости от окружающих условий и типа обнаруживаемых объектов. Например, для обнаружения БПЛА можно выбрать частоты, которые минимизируют интерференцию от других источников радиосигналов.

– Масштабируемость. Систему на основе SDR можно легко масштабировать. Можно использовать несколько передатчиков и приёмников для создания многопозиционных систем наблюдения, что повышает точность определения положения и направления движения БПЛА.

– Обнаружение малых объектов. Доплеровские радары эффективны для обнаружения малых объектов, таких как БПЛА, благодаря их способности улавливать слабые изменения частоты отражённого сигнала. Это даёт возможность обнаруживать дроны, даже если они имеют небольшие размеры или летят на низких высотах.

– Многофункциональность. Такой радар может одновременно решать несколько задач, включая мониторинг скорости, направления и характеристик движения объектов. Это осо-

бенно полезно для систем наблюдения и безопасности, где необходимо не только обнаружение, но и отслеживание перемещающихся целей.

Таким образом, использование Доплеровского радара с SDR для обнаружения БПЛА сочетает в себе высокую точность, гибкость и экономичность. Такая система может быть адаптирована для различных условий эксплуатации, обладает высокой чувствительностью к движению, и её можно использовать в различных сценариях — от военных задач до гражданской безопасности и охраны периметров. Возможность масштабирования и программируемость SDR делает её особенно полезной для обнаружения малых и быстро перемещающихся целей, таких как дроны.

Литература

1. GNU Radio. – Режим доступа: https://gnuradio.org. – (Дата обращения: 12.10.2024).

2. Understanding the Doppler Effect in Radar Systems. – Режим доступа: https://example.com/doppler-effect-radar. – (Дата обращения: 12.10.2024).

3. How to Implement Software Defined Radio for Detection of Drones. – Режим доступа: https://example.com/sdr-detect-drones. – (Дата обращения: 12.10.2024).

4. Property Based Testing for JavaScript – An Introduction. – Режим доступа: https://example.com/property-testing-javascript. – (Дата обращения: 13.10.2024).

УДК 51-76+004.942

ВАРИАЦИЯ РЕЖИМОВ РОСТА БАКТЕРИАЛЬНЫХ КОЛОНИЙ В РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ: УЧЕТ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЭФФЕКТА ЗАПАЗДЫВАНИЯ

И. А. Шевкун[1], А. Г. Масловская[2]

[1]Амурский государственный университет
[2]Университет Иннополис

Аннотация. В работе рассматривается вариативность режимов при реализации модели роста бактериальных колоний на питательных средах. Математическая модель, описывающая концентрацию питания и концентрацию биомассы, формализована основе уравнений типа «реакция-диффузия» с учетом стохастических процессов роста паттернов и эффекта запаздывания. Проведен численный анализ четырех режимов эволюции бактериальных колоний: дендритного, «цветочного» ('flower-like'), гомогенного и комбинированного в зависимости от начальных условий и параметров модели. Проведено программное решение прикладной задачи с использованием неявного конечно-разностного метода. Результаты проиллюстрированы графическими примерами, демонстрирующими эволюцию бактериальных структур. Установлены наборы управляющих параметров, при которых формируются различные типы колоний, в том числе в режимах с запаздыванием.
Ключевые слова: бактериальный рост, питательная среда, уравнение «реакция-диффузия», эффект запаздывания, дендритные структуры, метод конечных разностей, математическая биология.

Введение

Моделирование эволюции бактериальных популяций на питательных средах имеет большое практическое значение в таких отраслях, как медицина (например, производство и изучение воздействия ингибиторов на бактериальные колонии), пищевая промышленность (как с точки зрения обеспечения безопасности продуктов, так и с точки зрения производства ферментированных продуктов) и др. Режимы роста бактериальных колоний зависят от многих факторов, таких как вид бактерии, температура, количество питания, доступ кислорода и др., и характеризуются образованием различных геометрических форм. Это затрудняет использование какой-либо одной модели для моделирования всех возможных режимов роста. В этой работе определяется диапазон применимости детерминированной модели на основе нелинейной системы уравнений в частных производных диффузионного типа к геометриям бактериальных колоний различного вида.

С биологической точки зрения моделируемый процесс представляет собой выращивание бактериальной колонии в чашке Петри на подложке с питательным веществом (например, агаром) [1, 2]. В чашку Петри добавляется подложка с агаром в определенной концентрации, после чего в центре производится точечный посев бактериальной колонии. Колония начинает потреблять питательное вещество и развиваться. Для моделирования этого процесса применяются различные подходы: детерминированные на основе обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, стохастические на основе метода Монте-Карло, дискретные на основе клеточных автоматов или агентных моделях и др. В фокусе наших исследований — детерминированный подход и базовая реакционно-диффузионная модель роста бактериальных культур, предложенная в [3], и позволяющая описать пространственно-временные зависимости концентраций биомассы и питательного субстрата. В цикле предшествующих работ [4, 5] численно проанализированы основные режимы и геометриче-

ские особенности формирования бактериальных колоний ветвящегося морфологического типа. Настоящее исследование проведено с целью установления специфики визуализации бактериальных паттернов в различных режимах на основе модифицированной реакционно-диффузионной модели при вариации начальных условий и параметров вычислительных экспериментов.

1. Постановка задачи

Базовая реакционно-диффузионная модель эволюции бактериальных паттернов [3] позволяет формализовать пространственно-временные распределения концентраций биомассы и питательного субстрата. Данная модель была модифицирована таким образом, чтобы учитывать время запаздывания между потреблением питания бактериями и ростом бактерий. Эффект запаздывания характерен для всех биологических процессов, и бактериальный рост — не исключение [6]. В нормированном виде модель включает следующую систему уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = \Delta n - bn, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \nabla\left(\sigma n b \nabla b\right) + n\left(t-\alpha\right)b\left(t-\alpha\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $n(x,y,t)$ — концентрация питательного вещества; $b(x,y,t)$ — концентрация бактериальной массы; σ — параметр модели, характеризующий жесткость питательной подложки; α — величина запаздывания, $\alpha \geq 0$. Расчетная область для 2D модели и промежуток времени наблюдения процесса задаются как $\Omega = \{-L \leq x \leq L,\ -L \leq y \leq L,\ 0 \leq t \leq T\},\ L > 0,\ T > 0$.

Замкнем математическую постановку заданием начальных и граничных условий. Начальные условия задают постоянный уровень питания по всей расчетной области и точечный посев бактериальной колонии, формализуемый (в нашем случае) с помощью распределения Гаусса:

$$n\left(x,y,0\right) = n_0,\ b\left(x,y,0\right) = \beta_m \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{C^2}\right),\ -L \leq x \leq L, -L \leq y \leq L, \tag{2}$$

где n_0 — начальный уровень питательного вещества, β_m и C — параметры модели.

Для обеспечения корректности постановки математической задачи в условиях наличия эффекта запаздывания необходимо также задать историю процесса для значений $t \in [-\alpha, 0)$ следующим образом: концентрация питательных веществ n уже имеет уровень n_0, а бактериальная масса $b = 0$ — во всей расчетной области.

Граничные условия задают нулевой поток субстанций на границе:

$$\left.\frac{\partial n}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma} = 0,\ \left.\frac{\partial b}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma} = 0,\ 0 < t \leq T, \tag{3}$$

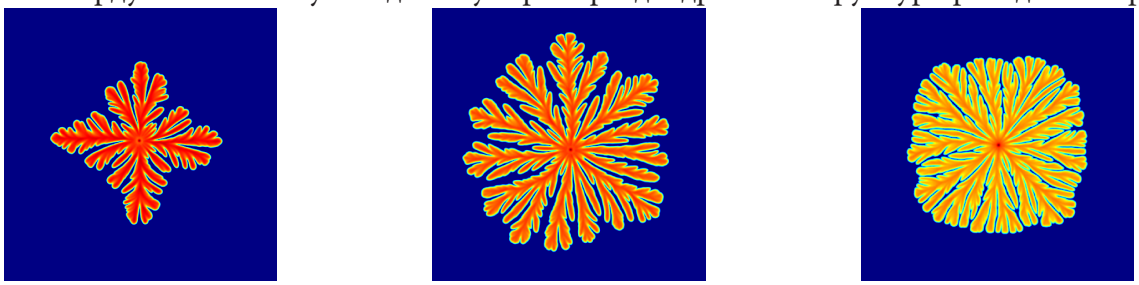
где Γ — граница расчетной области Ω, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе Γ.

2. Результаты вычислительных экспериментов

Поставленная задача (1)–(3) решалась методом конечных разностей с применением метода дробных шагов Яненко [7]. Получаемые на каждом шаге системы линейных уравнений решались методом прогонки. При моделировании использовались следующие значения и диапазоны параметров: $L = 250,\ T \in [1000, 10000],\ n_0 \in [0.1, 2],\ \beta_m = 0.71,\ C^2 = 6.25$. Параметр σ вычислялся по формуле $\sigma = \sigma_0(1+\delta)$, где $\sigma_0 \in [0.3, 4]$ — постоянный параметр, δ — случайная величина, отвечающая за формирование несимметричных форм, характерных для всех биологических систем. В нашем исследовании параметр δ вычислялся в каждом узле аппроксимации с помощью треугольного распределения в диапазоне $(-1,1)$. Реализация алгоритма была

выполнена в пакете прикладных программ MATLAB. В результате вычислительных экспериментов были проанализированы четыре режима роста бактериальной колонии.

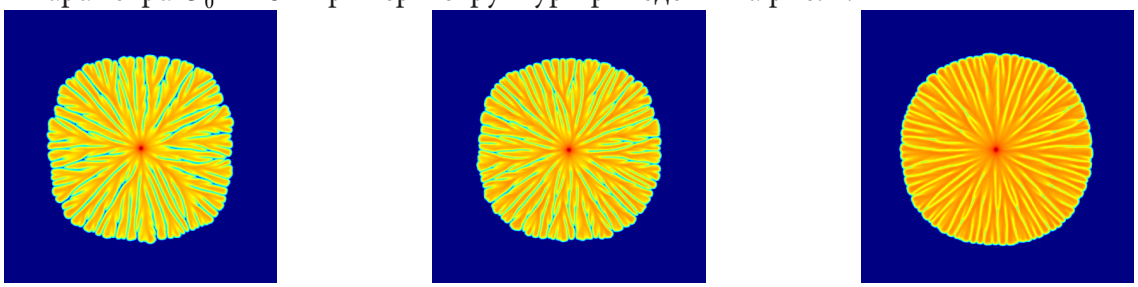
Дендритная геометрия с четкой дифференциацией ветвей. Первый режим роста характеризуется формированием дендритной структуры (ветвистый морфологический тип) с ярко выраженными изолированными ветвями. Такая геометрия образуется при относительно низком начальном питании $n_0 < 0.8$ и небольших значениях параметра $\sigma_0 < 1.5$, которые характеризуют более твердую питательную подложку. Примеры дендритных структур приведены на рис. 1.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 1. Дендритная геометрия:
(а) — $n_0 = 0.3, \sigma_0 = 0.8$, *(б)* — $n_0 = 0.5, \sigma_0 = 0.8$, *(в)* — $n_0 = 0.8, \sigma_0 = 0.8$

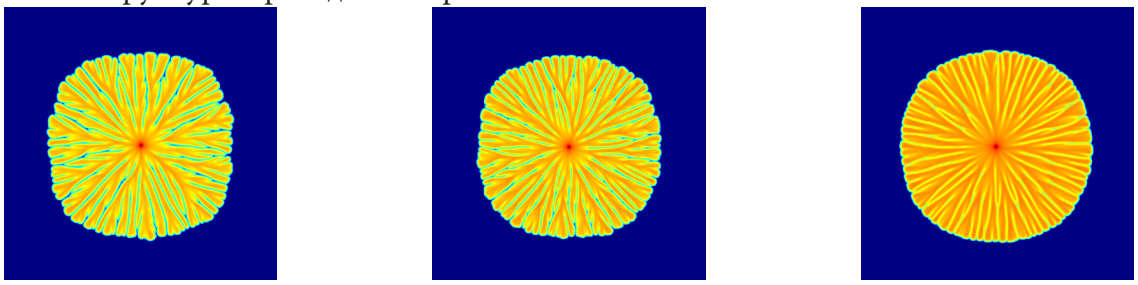
«Цветочная» геометрия. По мере увеличения уровня питания и/или значений параметра σ_0 ветви дендритной структуры «склеиваются» и происходит переход к цветочной (‘flower-like’) геометрии [8]. Такие паттерны образуются при параметрах, соответствующих средним значениям начального уровня питания $0.7 < n_0 < 1$, и также при относительно небольших значениях параметра $\sigma_0 < 1.5$. Примеры структур приведены на рис. 2.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 2. «Цветочная» геометрия:
(а) — $n_0 = 0.8, \sigma_0 = 1.2$, *(б)* — $n_0 = 0.85, \sigma_0 = 1.2$, *(в)* — $n_0 = 1, \sigma_0 = 1.2$

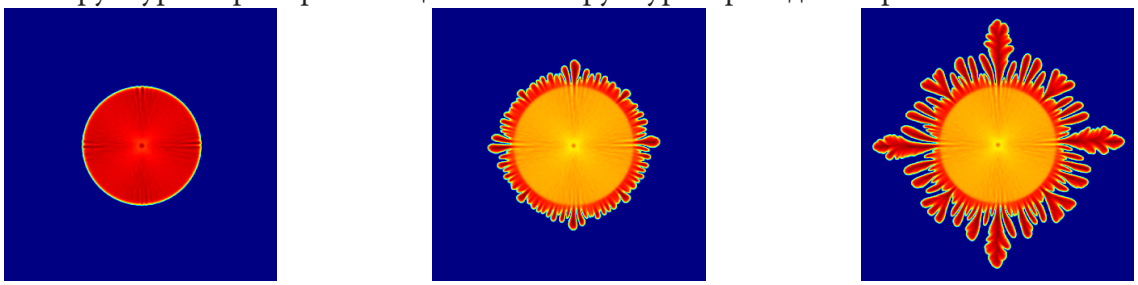
Гомогенная геометрия. При дальнейшем повышении уровня питания и/или значений параметра σ_0 происходит переход к гомогенной структуре, по форме напоминающей круг, с постепенным выравниванием границы колонии. Такая геометрия образуется при большом начальном питании $n_0 > 0.8$ и относительно больших значениях параметра $\sigma_0 > 1$. Примеры гомогенной структуры приведены на рис. 3.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 3. Гомогенная геометрия:
(а) — $n_0 = 1.5, \sigma_0 = 2, T = 65$, *(б)* — $n_0 = 1, \sigma_0 = 4, T = 90$, *(в)* — $n_0 = 2, \sigma_0 = 4, T = 27$

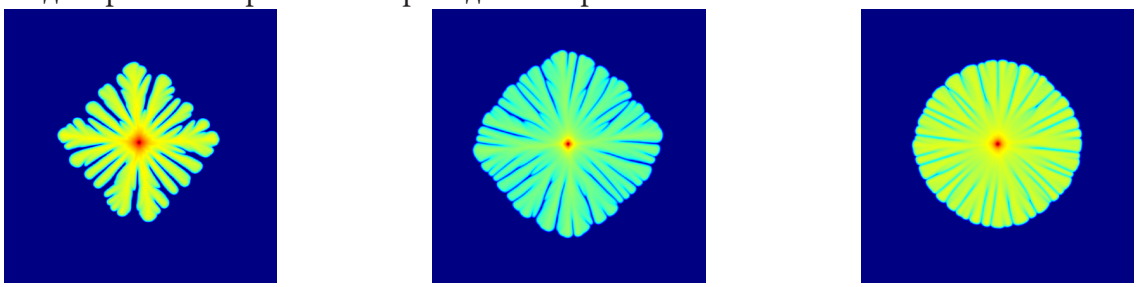
Комбинированная геометрия. При определенных небольших значениях параметра $\sigma_0 < 0.7$ также образуются комбинированные структуры, которые в начале своего роста сохраняют гомогенную геометрию, но с определенного момента переходят к образованию ветвистой дендритной структуры. Пример эволюции такой структуры приведен на рис. 4.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 4. Комбинированная геометрия: $n_0 = 0.5, \sigma_0 = 0.3$*;*
(а) — $T = 3000$*, (б) —* $T = 5000$*, (в) —* $T = 7500$

Влияния эффекта запаздывания на геометрию бактериальных паттернов. В работе также был проведен анализ влияния эффекта запаздывания на формируемую геометрию моделируемых бактериальных колоний. Все вычислительные эксперименты, результаты которых приведены выше, были также повторены с различными значениями величины запаздывания α в диапазоне от 0 до 40 ед. времени. В результате получены те же режимы роста с четырьмя типами геометрии. Однако за счет того, что при наличии эффекта запаздывания снижаются скорость роста и объем бактериальной массы, значения параметров n_0 и σ_0, при которых проявляется та или иная геометрия, отличаются в зависимости от значений параметра запаздывания α. Определение конкретных диапазонов параметров n_0 и σ_0 при различных значениях лага α требует дополнительных исследований и выходит за рамки данной работы. Примеры результатов моделирования при $\alpha = 10$ приведены на рис. 5.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 5. Результаты моделирования с эффектом запаздывания: $\alpha = 10$*;*
(а) — $n_0 = 0.5, \sigma_0 = 0.8, T = 3000$*, (б) —* $n_0 = 1.2, \sigma_0 = 1.2, T = 1200$*,(в) —* $n_0 = 1.6, \sigma_0 = 1.2, T = 500$

Заключение

Таким образом, в настоящей работе проведена спецификация форм бактериальных паттернов при вариациях динамических режимов роста, определяемых управляющими параметрами модели. Вычислительные эксперименты проводились в рамках численной реализации модифицированной реакционно-диффузионной модели эволюции бактериальных паттернов, которая позволяет формализовать пространственно-временные распределения концентраций биомассы и питательного субстрата. Установлено, что возникновение режимов (дендритный, «цветочный», гомогенный и комбинированный) обуславливается начальными условиями и значениями параметров модели. Кроме того, присутствующий в биосистемах эффект запаздывания не влияет на формируемые типы паттернов, однако запаздывание приводит к

изменению диапазонов значений управляющих параметров. Перспективу развития исследований составляет реализация гибридной модели бактериального роста, управляемого «чувством кворума» [9].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 122082400001-8).

Литература

1. *Ben-Jacob E.* Social behavior of bacteria: from physics to complex organization / E. Ben-Jacob // European Physical Journal B. – 2008. – Т. 65. – С. 315–322.

2. *Eberl H. J.* A transient density-dependent diffusion-reaction model for the limitation of antibiotic penetration in biofilms / H. J. Eberl, M. A. Efendiev // Electronic Journal of Differential Equations. – 2003. – № 10. – С. 123–142.

3. *Kawasaki K.* Modeling spatio-temporal patterns generated by Bacillus subtilis / K. Kawasaki, A. Mochizuki, M. Matsushita, T. Umeda, N. Shigesada // Journal of Theoretical Biology. – 1997. – № 188. – С. 177–185.

4. *Шевкун И. А.* Вариация моделей дендритоподобной морфологии бактериальных культур: численная реализация в рамках реакционно-диффузионного приближения / И. А. Шевкун, А. Г. Масловская // Вестник АмГУ. Серия: Естественные и экономические науки. – 2023. – № 101. – С. 30–39.

5. *Масловская А. Г.* Адаптированные алгоритмы интеллектуальной спецификации скейлинговых характеристик морфологии культивированных бактерий / А. Г. Масловская, В. О. Салмиянов, И. А. Шевкун // Информатика и системы управления. – 2023. – № 4(78). – С. 75-89.

6. *Ellermeyer S.* Theoretical and empirical investigation of delayed growth response in the continuous culture of bacteria / S. Ellermeyer, J. Hendrix, N. A. Ghoochan // Journal of Theoretical Biology. – 2003. – Т. 222, № 4. – С. 485–494.

7. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск : Наука, 1967. – 196 с.

8. *Xiong L.* Flower-like patterns in multi-species bacterial colonies / L. Xiong, Y. Cao, R. Cooper, W.-J. Rappel, J. Hasty, L. Tsimring // eLife. – Режим доступа: https://elifesciences.org/articles/48885 (дата обращения: 21.11.2024).

9. *Shuai Y.* 2D reaction-diffusion model of quorum sensing characteristics during all phases of bacterial growth / Y. Shuai, A. Maslovskaya, C. Kuttler // Far Eastern Mathematical Journal/ – 2022. – V. 22, No 2. – P. 232–237.

УДК 519.86

ПРЕДЕЛЫ ТЕОРИИ МАТЧИНГА НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

М. А. Шмелев

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается концепция параметрического матчинга на основе нечетких предпочтений. Теория нечеткого матчинга основывается на снятии ограничений теории паросочетаний. Утверждается, что она может найти применение в самых разных практических областях. Основной вопрос к данной теории на текущий момент состоит в унификации и сравнении разнородных сущностей. В работе проводится краткий анализ концепции нечеткого параметрического матчинга. Также предлагаются наработки в рамках дальнейшего развития теории, основанные на получении нечетких функций принадлежности с помощью последовательного метода обратных функций.
Ключевые слова: матчинг, нечеткая логика, соответствие, унификация компонент, агрегирование, интегральные операторы, нечеткие функции принадлежности, метод обратных функций.

Введение

Представители самых разных специальностей имеют дело с задачами, где нужно определить наилучшее возможное решение. К примеру, инженеры-технологи стараются рационализировать организацию производства, чтобы выпускать большее количество товаров, а экономисты стараются минимизировать транспортные издержки, планируя взаимодействие завода с поставщиками сырья. То есть, задачи на оптимизацию связаны с теорией принятия решений.

Одной из разновидностей векторной оптимизации является задача матчинга. В такой задаче происходит сопоставление двух видов объектов, обладающих некоторыми характеристиками. Задачам поиска наилучшего соответствия между компонентами рассматриваемых векторов посвятил свои научные труды Элвин Рот. Одна из самых известных работ Рота посвящена распределению интернов (выпускников медицинских высших учебных заведений) по рабочим местам в больницах [1].

Особый интерес вызывает концепция параметрического матчинга на основе нечетких предпочтений (далее — теория нечеткого матчинга), предложенная совсем недавно. Её применение опирается на теорию графов: решение конкретной задачи сводится к выбору оптимальных отношений на двудольном графе [2, 3]. Утверждается, что данный подход может найти свое применение в самых разных практических областях.

Предлагаемый для изучения доклад посвящен рассмотрению концепции параметрического матчинга в условиях неоднородности компонент векторов, определению пределов ее возможного применения. Также предлагаются собственные наработки, позволяющие развить рассматриваемую теорию.

1. Анализ теории

Описание теории нечеткого матчинга в [3] начинается с допущения, что можно снять некоторые ограничения теории паросочетаний. Такой ход является достаточно опасным, так как не учитывает специфику применения теории Рота. Прежде всего, теория игр подразумевает автономное, рациональное поведение «экономического человека» (термин, введенный английским экономистом Джоном Стюартом Миллем). Применение теории характерно в задачах с большой неопределенностью (о действиях других субъектов), там, где отсутствует время.

Моделирование той или иной области исходит из того, что участвующие субъекты действуют строго по определенным правилам, чтобы достичь максимальной полезности. Так бывает не всегда, чему пример — периодические кризисы в современной рыночной экономике.

Анализируемая концепция нечеткого матчинга основывается на бесконечнозначной, нечеткой логике. Предлагается рассматривать не точные значения параметров определенных векторов, а нечеткие подмножества допустимых значений характеристик вершин каждой доли графа [3]. Ранее оговаривается, что унификация сопоставляемых компонент векторов нужна для реализации процедуры матчинга. Основной вопрос к теории нечеткого матчинга на текущий момент состоит в унификации и сравнении разнородных сущностей. Ведь в статье [4] подразумевается, что разнородность агрегируемых компонент создает трудности в использовании процедур агрегирования для получения интегральной скалярной характеристики.

К тому же моделирование той или иной предметной области не всегда определяется только количественными показателями. Перспективы применения теории в области медицинской диагностики, оценки качества образования туманны. Качество образовательного процесса не сводимо лишь к оценкам, а медицинские диагнозы выставляются по определенным прецедентам, что не сводимо к нахождению соответствий.

Теория нечеткого матчинга детально описана для области электронной коммерции и активно применяется в этой сфере. Заметим, что уже в 18 веке французский экономист Жак Тюрго в основу своего экономического анализа положил желания покупателей и потребителей. Он утверждал, что соотношение потребностей определяет цену товара. Идеи Тюрго были предтечей появления неолиберальной экономической мысли. Методология исследования конкретных экономических проблем другого французского экономиста Антуана Курно сыграла свою роль в зарождении теории игр, полагающейся на рациональное поведение индивидов.

Однако применение концепции нечеткого матчинга в сфере торговли, электронной коммерции также базируется на определенных допущениях. При таком рассмотрении множества продавцов и покупателей не пересекаются, так как рассматривается строго двудольный граф. Также в качестве целевой функции выбора рассматривается только максимизация прибыли. Причем эта прибыль определяется только в сфере обращения, без использования трудовой теории стоимости. На текущий момент не определено, как совместить применение теории нечеткого матчинга с трудовой теорией стоимости в области экономики.

Для учета нечеткости целесообразно применять интегральные операторы. Они позволяют моделировать взаимодействие параметров в отличие от семейства средних операторов [5]. В статье [6] показано, что применение интеграла Шоке в связке с нечеткой мерой Сугено в области электронной торговли дает лучший результат, чем среднее арифметическое.

Далее будут предложены наработки для развития теории нечеткого матчинга, определяющие нечеткость в рамках объекта моделирования.

2. Построение нечетких функций принадлежности

Для формализации нечеткости опишем процедуру генерации векторов в общем виде. Для характеристики каждого объекта моделирования введем $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где каждый из параметров вектора будет нечетким. Это свойство отображают нечеткие функции принадлежности. Каждый из параметров задается на условной шкале [0;1] тройкой вида $(a; M; b)$, где a и b — границы носителя треугольной функции, M — мода. На границах функция равна нулю, а в моде равна 1.

Для генерации нечетких функций принадлежности также используется последовательный метод обратных функций [7]. Последовательный метод обратных функций заключается в том, что каждому значению из заданной таблицы распределения можно сопоставить интервал, равный по длине его вероятности. Используются следующие формулы:

$$s_0 = 0,\ s_n = 1;\ s_i = s_{i-1} + p_i, \quad (1)$$

где s_i — накопленные вероятности, с которыми сравнивается конкретное значение x в цикле, пока первый раз не реализуется неравенство $x \le s_i$. Полученное значение i позволит с помощью модифицированной таблицы найти моду M.

Однако сама процедура генерации может отличаться для независимых и зависимых параметров. Покажем алгоритм получения тройки $(a;M;b)$ для независимых параметров в общем виде. Определимся, что этот параметр имитируется с использованием генератора дискретного распределения вероятностей. Также примем, что все значения нормированы для общности рассуждений. Процесс получения нечеткой функции принадлежности удобно рассматривать с помощью диаграммы состояний, как показано на рис. 1.

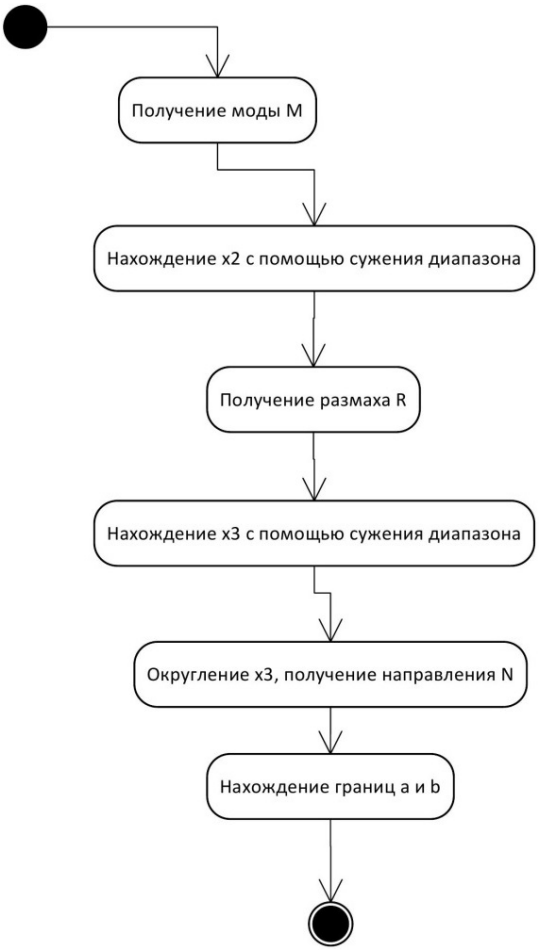


Рис. 1. Получение нечеткой функции принадлежности

Рассмотрим этапы алгоритма для получения нечеткой функции принадлежности на примере независимого параметра, который принимает значения от 0 до 1 с шагом 0,1:

1. Нахождение моды M.

С помощью генератора случайных чисел получаем конкретное значение x на интервале [0;1]. На основе заданного распределения и последовательного метода обратных функций находим моду. Для строгости рассуждений отметим, что значения размаха R и направления N, как и моды M, могут принимать значения от 0 до 1 с шагом 0,1.

2. Определение размаха R.

Размах треугольной функции $(a;M;b)$ определяется как $R = b - a$.

Получение нового значения $x2$ будем называть операцией сужения диапазона. При нахождении нового значения с помощью операции сужения диапазона предварительно определяет-

ся, в каком из интервалов размером k находится x. Затем применяется формула сужения диапазона.

После получения моды M вычисляем новое значение $x2$:

$$x2 = \frac{x - \tilde{a}}{k}, \quad (2)$$

где $\tilde{a}$ — левая граница интервала, в которой находится x; k — параметр сужения (стандартно значение $k = 0,2$).

После нахождения $x2$ интервал [0;1] делим на одиннадцать промежутков для нахождения R, так как рассматриваются значения от 0 до 1 с шагом 0,1. Задано, что нулю сопоставляется интервал длиной 0,01 в интервале [0;1]; всем остальным возможным значениям соответствуют интервалы равной длины (таких равных интервалов десять). Следовательно, при генерации тройки вероятность получить значение размаха, равное нулю, крайне мала. Получаем размах R на основе $x2$ также с помощью последовательного метода обратных функций.

3. Определение направления N.

Направление определяет, в каких пропорциях слева и справа от моды распределится размах.

Опишем получение направления N. С помощью операции сужения диапазона над значением $x2$ получаем $x3$. Округляя полученное значение $x3$ до десятых, находим направление N.

4. Нахождение a и b.

С помощью формул $a = M - R \cdot N$; $b = a + R$ находят границы треугольной функции принадлежности. Для a и b задействуется округление до десятых. Если получилось $a < 0$, то a приравнивают к нулю. Если $b > 1$, то b приравнивают к единице. Ограничения обусловлены тем, что функция принадлежности задается на интервале [0;1].

Заключение

В заключении стоит отметить, что применение математических методов в самых разных сферах деятельности позволяет решать насущные задачи, стоящие пред обществом и государством. Теория принятия решений оказывается во многих случаях полезной и актуальной.

Теория нечеткого матчинга, анализу которой посвящен доклад, вызывает неподдельный интерес в области решения задач оптимизации. В рамках краткого анализа рассмотрены пределы возможного применения концепции параметрического матчинга на основе нечетких предпочтений. Также определено направление будущих исследований для дальнейшего развития теории.

Литература

1. *Roth A. E., Sotomayor M.* Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis / Cambridge University Press, 1990.

2. *Матвеев М. Г.* Концепция матчинга на основе моделирования нечетких предпочтений / М. Г. Матвеев, Н. А. Алейникова, А. А. Громковский, В. В. Коротков // Инженерные технологии. – 2023. – № 4. – С. 43–56.

3. *Матвеев М. Г.* Принятие решений в организационных системах с выбором пар на двудольном графе / М. Г. Матвеев, Н. А. Алейникова, А. А. Громковский, В. В. Коротков // Информатика: проблемы, методы, технологии: сборник материалов XXII международной научно-практической конференции (14–15 февраля 2024 г.) – Воронеж, ВГУ, 2024. – С. 4–21.

4. *Матвеев М. Г.* Информационные технологии формирования сервисов на электронной торговой площадке / М. Г. Матвеев, М. А. Шмелев, Н. А. Алейникова // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2021. – № 1. – С. 63–73. DOI: 10.17308/sait.2021.1/3371

5. *Леденева Т. М.* Обзор основных классов операторов порядкового взвешенного агрегирования / Т. М. Леденева, И. Н. Левкина // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2022. – №. 1. – С. 5–31. DOI: 10.17308/sait.2022.1/9198

6. *Шмелев М. А.* Имитационное моделирование поведения различных типов потребителей на основе экспертного подхода / М. А. Шмелев, М. Г. Матвеев // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2023. – № 2. – С. 91–99.

7. *Некруткин В. В.* Моделирование случайности / Кафедра статистического моделирования, матмех СПбГУ. Материал к специальному курсу. – 2017. – 111 с.

УДК 519.688

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО НАВИГАЦИИ ГРУППЫ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПОДВОДНЫХ АППАРАТОВ С ЛИДЕРОМ

А. Ф. Щербатюк[1], В. М. Кузькин[2], С. А. Переселков[3], Н. В. Ладыкин[3]

[1]Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
[2]Институт проблем морских технологий ДВО РАН
[3]Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе проведено исследование эффективности навигации группы автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) на основе метода фильтра частиц. Рассмотрена организация группы, включающей АНПА-лидера и специализированные подводные аппараты (СПА), выполняющие общую миссию в мелководной акватории. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие высокую точность и работоспособность предложенного метода в условиях ограниченной акватории.
Ключевые слова: навигационное обеспечение, автономный необитаемый подводный аппарат, фильтр частиц, численное моделирование, групповая навигация.

Введение

Современные задачи исследования и освоения морских акваторий все чаще требуют применения групп автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА). Групповая работа АНПА эффективна при выполнении миссий по мониторингу окружающей среды, поиску и спасению, инспекции подводных сооружений и отслеживанию морских объектов. Однако использование группы АНПА вызывает новые сложности в навигационном обеспечении, поскольку традиционные методы навигации одиночных аппаратов не подходят для коллективных операций. Одним из перспективных подходов к решению этой проблемы является использование лидера группы — АНПА, оснащенного высокоточными средствами навигации. Лидер может регулярно уточнять свое местоположение с помощью спутниковых навигационных систем и передавать эту информацию остальным аппаратам. В данной работе исследуется эффективность навигации группы подводных аппаратов на основе метода фильтра частиц, который позволяет учитывать нелинейности и неопределенности в данных измерений.

1. Постановка задачи

Необходимо разработать метод навигационного обеспечения группы СПА, выполняющих совместную миссию в мелководной акватории. Группа состоит из: АНПА-лидера, оснащенного высокоточными средствами навигации, способного периодически уточнять свое местоположение. А также СПА, имеющих базовые навигационные датчики для измерения глубины, угловой ориентации и относительной скорости движения. Все аппараты оборудованы гидроакустическими модемами и имеют синхронизированные часы. Они обмениваются навигационными пакетами, содержащими временные метки, текущие координаты и параметры движения. Цель состоит в оценивании местоположения каждого СПА на основе измерения дальностей до лидера и между собой, используя метод фильтра частиц для обработки информации.

2. Математическая модель метода навигации группы АНПА

Для определения координат СПА на борту АНПА путем измерения гидроакустической системой связи задержек распространения звукового сигнала между СПА и АНПА формируется

информация о дальностях D_{lk} и взаимных дальностях между СПА D_{ljk}, где $l, j = \overline{1, L}$, L — число СПА, k — номер текущего шага работы навигационной системы. Соотношения, которые связывают дальности и координаты АНПА (x_{Ak}, y_{Ak}, z_{Ak}) и СПА (x_{lk}, y_{lk}, z_{lk}), имеют вид:

$$D_{lk}^2 = (x_{Ak} - x_{lk})^2 + (y_{Ak} - y_{lk})^2 + (z_{Ak} - z_{lk})^2, \quad (1)$$

$$D_{ljk}^2 = (x_{jk} - x_{lk})^2 + (y_{jk} - y_{lk})^2 + (z_{jk} - z_{lk})^2. \quad (2)$$

Обозначим через Δ временной интервал между излучениями отдельных аппаратов, тогда один такт работы занимает время $T = (L+1)\Delta$. Если, группа локализована в районе диаметром 600 м и включает $L = 4$ СПА, тогда временной интервал Δ равен 0.8 с. Один такт работы описываемой навигационной системой, составляет $T = 4$ с. Аппараты движутся в ограниченной области акватории, и перемещение за время одного такта считается незначительным, что позволяет упрощать расчеты.

В начальный момент времени все СПА находятся на поверхности и их координаты определяются с помощью спутниковой навигационной системы с известной ошибкой σ_1. Фактические координаты l-го СПА $(x_l(t), y_l(t))$ связаны с фактическими значениями модуля скорости $u_l(t)$ и курса $\phi_l(t)$ кинематическими уравнениями:

$$x_l'(t) = u_{lx}(t), \quad y_l'(t) = u_{ly}(t), \quad (3)$$

$$u_{lx}(t) = u_l(t)\cos\phi_l(t), \quad u_{ly}(t) = u_l(t)\sin\phi_l(t). \quad (4)$$

где $\widehat{u_l}(t)$ и $\widehat{\phi_l}(t)$ — измерения скорости и курса СПА; ξ_u и ξ_ϕ — случайные ошибки измерения относительной скорости и курса СПА; $w(t)$ — скорость течения в районе работ. Для каждого СПА задача сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно его координат, с учетом ограничений на область неопределенности, заданную ковариационной матрицей ошибок предыдущего шага.

Метод фильтра частиц применяется для оценивания местоположения СПА, учитывая нелинейности и неопределенности в измерениях. Алгоритм включает два основных этапа этап предсказания и этап коррекции. На этапе предсказания на основе модели движения аппарата и предыдущего состояния предсказываются новые позиции частиц. Для каждого СПА используются уравнения движения:

$$\hat{x}_{lk} = \sum_{i=1}^{I} x_{lki} p_{lki}, \quad \hat{y}_{lk} = \sum_{i=1}^{I} y_{lki} p_{lki}. \quad (5)$$

Эта коррекции следует после получения новых измерений дальностей обновляются веса частиц по формуле:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{I} p_{lki} (X_{lki} - \widehat{X}_{lk})(X_{lki} - \widehat{X}_{lk})^T. \quad (6)$$

Частицы с малыми весами отбрасываются, а на их месте генерируются новые вблизи частиц с большими весами, что соответствует механизму выборки с восстановлением. Нужно также учитывать особенности реализации алгоритма. При реализации алгоритма учитываются синхронизация времени: необходима для корректного измерения задержек сигналов, ошибки измерений: моделируются случайные ошибки в определении времени прихода сигналов, скорости распространения звука, скорости и курса СПА, а также ыбор количества частиц: определяется балансом между точностью оценок и вычислительными ресурсами. Также предполагается, что АНПА и группа СПА выполняют поставленную задачу в мелководной акватории и имеется возможность периодически получать текущие координаты АНПА с помощью спутника.

3. Результаты численного моделирования

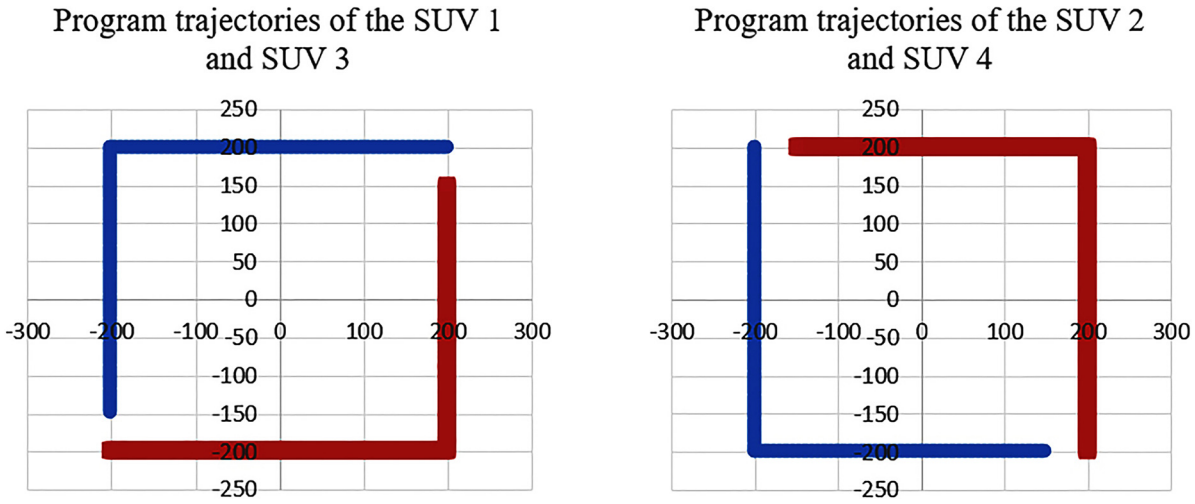


Рис. 1. Программные траектории движения СПА1-4 в течение 150 тактов

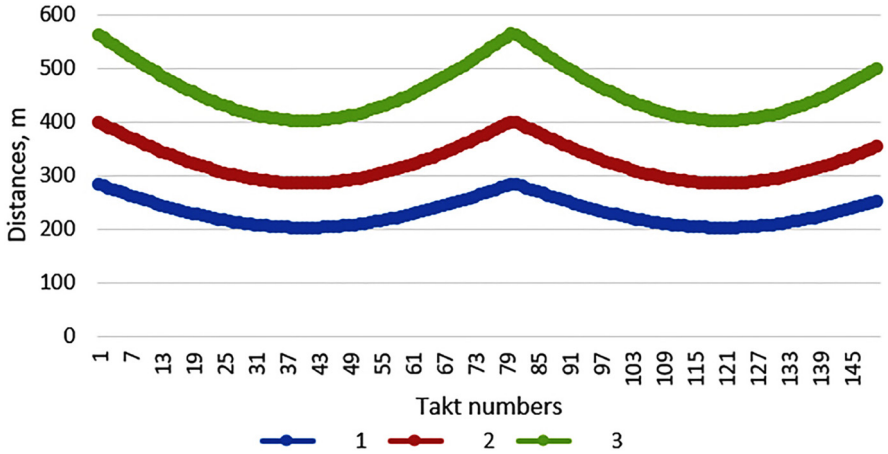


Рис. 2. СПА1-4 (ряд 1), соседними СПА (ряд 2)пи не соседними СПА (ряд 3) в течение 150 тактов

Проведено численное моделирование работы алгоритма для группы, состоящей из АНПА-лидера и четырех СПА. Исходные данные включают начальные положения лидера и СПА, заданные в координатной системе. Аппараты движутся по заданным траекториям с постоянными скоростями и курсами, при этом в измерениях дальностей, скоростей и курсов учитываются случайные ошибки. В разделе 3 представлены настройки моделирования, в которых количество частиц для каждого СПА установлено равным 1000, временной шаг составляет один такт работы системы $T = 4$ секунды, а продолжительность моделирования охватывает 150 тактов. На рисунке представлены положения СПА 1-4 в течение 150 тактов, сгруппированные по соседним и не соседним СПА.

Далее в разделе 3 проведен анализ результатов, где оценка точности и работоспособности навигационного алгоритма определения местоположения СПА выполнена с использованием фильтра частиц (ФЧ) в рамках численного моделирования. Модельные эксперименты были осуществлены в среде IDLE (Python 3.12 64-bit). Результаты моделирования продемонстрировали, что средняя ошибка определения координат СПА не превышает 3 метров. Также было установлено, что фильтр частиц эффективно корректирует оценки местоположения, несмотря на наличие ошибок измерений, что свидетельствует о сходимости алгоритма. Кроме того,

выявлено, что увеличение числа частиц повышает точность определения местоположения, однако одновременно увеличивает вычислительную нагрузку.

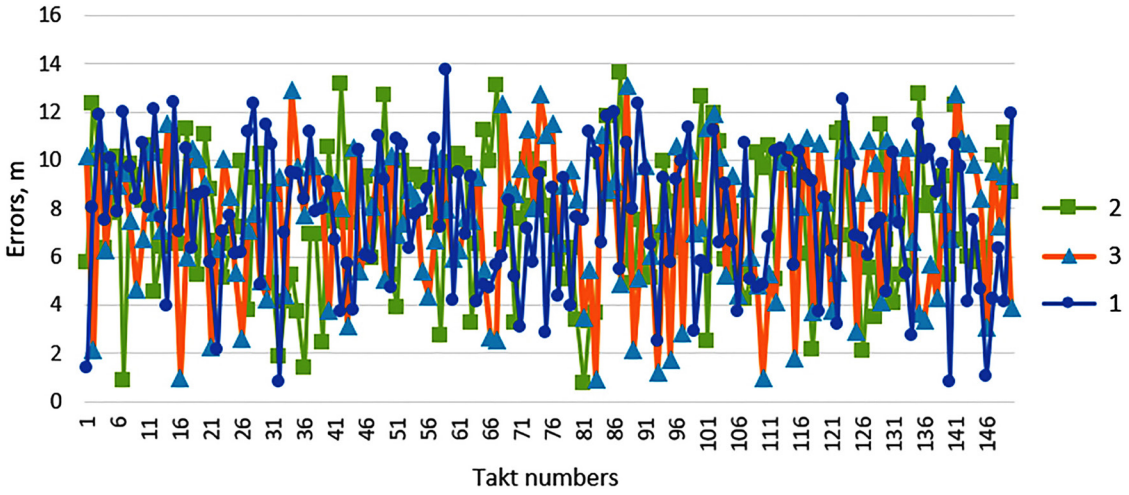


Рис. 3. Ошибка оценивания местоположения СПА1-3 (ряд 1-3) в течение 150 тактов работы системы

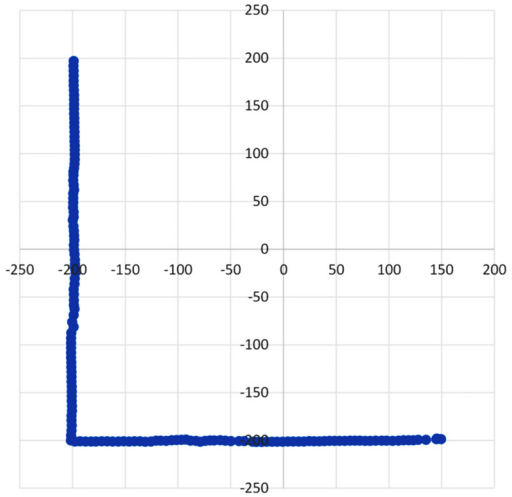


Рис. 4. Оценка траектории движения СПА4 в течение 150 тактов работы системы

На рис. 4 представлена оценка траектории СПА, что демонстрирует хорошее соответствие оценок реальным положениям аппаратов. Пройденный путь составил около 750 метров, а время в пути — примерно 12,5 минут. Из результатов моделирования следует, что ошибка определения местоположения СПА4 без коррекции за указанное время движения составляет около 30 метров, а с коррекцией не превышает 10 метров.

Заключение

Исследование показало, что использование метода фильтра частиц для навигации группы подводных аппаратов обеспечивает высокую точность позиционирования в условиях ограниченных навигационных средств и наличия ошибок измерений. Предложенный метод эффективен для мелководных акваторий и может быть применен в различных подводных миссиях, требующих координированной работы группы АНПА. Дальнейшие исследования будут направлены на учет влияния подводных течений, изменение скорости звука в воде и других факторов, способных повлиять на точность навигации. Планируется оптимизация алгоритма с точки зрения вычислительных ресурсов для его реализации в реальном времени.

Также авторы планируют разработать метод групповой навигации на основе голографической обработки широкополосных гидроакустических сигналов (ГОС) [3–30]. Это один из наиболее эффективных методов обработки гидроакустических сигналов в океанических волноводах. Теоретические и математические основы ГОС для океанических волноводов изложены в работах [3–8]. В исследовании [6] метод ГОС был адаптирован для шумовых источников, а в [7, 8] анализировалось его применение в низкочастотных диапазонах. В работах [9, 10] изучены возможности разрешения нескольких источников при использовании ГОС, а в [11–18] исследована устойчивость метода в присутствии внутренних волн. Адаптивные алгоритмы ГОС развиты в работах [19–21]. Применение ГОС к антенной обработке сигналов описано в работах [21–23]. Модовая селекция в мелководных волноводах на основе ГОС проанализирована в [25–27]. Применение ГОС в групповой навигации подводных аппаратов предоставляет дополнительные возможности и позволит решить эти навигационные задачи более эффективно.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/

Литература

1. *Ваулин Ю. В.* О методах обеспечения навигации групп АНПА: Краткий обзор / Ф. С. Дубровин, Д. А. Щербатюк, А. Ф. Щербатюк // Подводные исследования и робототехника. – 2019. – № 4 (30). – С. 27–36. – https://doi.org/ 10.25808/24094609.2019.30.4.004.

2. *Gustafsson F.* Particle filters for positioning, navigation and tracking / N. Bergman, U. Forssell, J. Jansson, R. Karlsson, P.-J. Nordlund // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2002. – Vol. 50, No 2. – P. 425–437. https://doi.org/10.1109/78.978396.

3. *Кузькин В. М.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелководном море / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Г. Н. Кузнецов // Акустический журнал. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

4. *Кузькин В. М.* Обнаружение источника в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344.

5. *Kuz'kin V. M.* Noise source detection in an oceanic waveguide using interferometric processing / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, Y. V. Matvienko, G. A. Lyakhov, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 1. – P. 68–74.

6. *Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization / S. Pereselkov, V. Kuz'kin // Acoust. Soc. Am. – 2022, – Vol. 151 – P. 666–676.

7. *Ehrhardt M.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water / M. Ehrhardt, S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin, I. Kaznacheev, P. Rybyanets / J. Sound Vibr. – 2023. – 544 – C. 117388.

8. *Kuz'kin V. M.* Resolving power of the interferometric method of source localization / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

9. *Кузькин В. М.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, В. И. Грачев, П. В. Рыбянец, С. А. Ткаченко // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

10. *Kuz'kin V. M.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, V. G. Zvyagin, Yu. A. Malykhin, D. Yu. Prosovetskiy // Physics of Wave Phenomena. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 160–167.

11. *Badiey M.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 4. – P. 313–319.

12. *Kaznacheeva E. S.* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves / E. S. Kaznacheeva, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Physics of Wave Phenomena. – 2021. – Vol. 29, № 3. – P. 278–284.

13. *Kuz'kin V. M.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, M. Badiey, N. V. Ladykin, A. Yu. Malykhin, S. A. Tkachenko // Physics of Wave Phenomen. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 346–354.

14. *Badiey M.* Interferometry of hydrodynamics of oceanic shelf caused by intensive internal waves / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Fundam. Appl. Hydrophys. – 2020. – Vol. 1 – P. 45–55.

15. *Кузькин В. М.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В.Рыбянец // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 2 – С. 197–204.

16. *Кузькин В. М.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, Н. В. Ладыкин, М. В. Куцов // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – Т. 15, № 3 – С. 317–326.

17. *Pereselkov S.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, M. Ehrhardt, S. Tkachenko, P. Rybyanets, N. Ladykin // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11 – P. 1922.

18. *Кузькин В. М.* Интерферометрическая обработка с использованием вертикальной линейной антенны / В. М. Кузькин, Ю. В. Матвиенко, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 2 – С. 14–23.

19. *Кузькин В. М.* Реализация адаптивного интерферометрического метода локализации источника звука. II часть / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, С. А. Ткаченко, И. В. Казначеев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 1 – С. 14–23.

20. *Pereselkov S.* Adaptive Algorithms for Interferometric Processing / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, G. Lyakhov, S. Tkachenko, E. Kaznacheeva // Phys. Wave Phenom. – 2020. – № 28. – С. 267–273.

21. *Кузькин В. М.* Интерферометрическая обработка акустической информации с использованием протяженных антенн в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, С. А. Ткаченко, И. В. Казначеев // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2020. – Т. 12, № 4 – С. 483–494.

22. *Кузькин В. М.* Обнаружение шумового сигнала в океаническом волноводе горизонтальной антенной / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко, Д. Ю. Просовецкий // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 1 – С. 65–72.

23. *Kuz'kin V. M.* Mode selection in oceanic waveguides / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskii, E. S. Kaznacheeva // Physics of Wave Phenomena. – 2022 – Vol. 30, № 2. – P. 111–118.

24. *Kuz'kin V. M.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, E. S. Kaznacheeva, S. A. Tkachenko // Physics of Wave Phenomena. – 2022 – Vol. 30, № 5. – P. 314–320.

25. *Кузькин В. М.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 279–286.

26. *Казначеев И. В.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником / И. В. Казначеев, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2018. – Т.64, № 1. – С. 33–45.

27. *Kuznetsov G. N.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, I. V. Kaznacheev, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2017. – Vol. 25, № 4. – P. 299–306.

28. *Kuz'kin V. M.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, I. V. Kaznacheev // Physics of Wave Phenomena. – 2018. – Vol. 26, № 1. – P. 63–73.

29. *Переселков С. А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов / С. А. Переселков, В. М. Кузькин, Г. Н. Кузнецов, Д. Ю. Просовецкий, С. А. Ткаченко // Акустический журнал. – 2020. – Т. 66, № 4. – С. 437–445.

30. *Кузнецов Г. Н.* Интерференционная структура шумового поля движущегося источника в высокочастотном диапазоне / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, М. В. Куцов, С. А. Переселков // Известия РАН. Серия физическая. – 2021. – Т. 85, № 6. – С. 907–912.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ, ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.65

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФОВЫХ БАЗ ДАННЫХ ДЛЯ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

А. Е. Акулова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В рамках этой статьи рассмотрены распространенные способы взаимодействия с пользователем в информационной системе для выявления наиболее эффективного инструмента, приведены средства работы с данными для решения задач, основанных на выявлении пользовательских действий, проанализированы и проиллюстрированы на конкретных примерах алгоритмы (Лувена, Лейдена, Walktrap) поиска сообществ в графах.
Ключевые слова: БД, СУБД, РСУБД, граф, графовая база данных, Walktrap, кластеризация.

Введение

Большинство информационных систем в современном мире стремится к привлечению большего количества пользователей, увеличению экранного времени, затрачиваемого именно их системой. Все стараются внедрить наиболее эффективное средство взаимодействия с пользователем. Но перед тем, как ответить на вопрос «Какое?», стоит узнать «Как?»:

С помощью чего можно добиться заинтересованности пользователей и ее удержания? Какие существуют наиболее действенные средства по достижению этого? Как определить основную черту приложения и основываться именно на ней для привлечения клиентов? Как реализовать наиболее эффективное средство? Ответив на эти вопросы, станет возможным добиться значительных результатов.

1. Обзор способов взаимодействия с пользователем

Помимо внедрения новых функций, современные информационные системы используют такие наиболее эффективные средства взаимодействия с пользователем, как персонализированные уведомления, программа поощрений, основанные на анализе действий пользователя; рекомендательные системы, основанные на интересах, позволяют расширять количество получаемых данных, что увеличивает время использования.

Однако, мало того, чтобы пользователь просто зашел в ваше приложение из-за пришедшего сообщения, важно, чтобы ему это было интересно и хотелось проводить там все больше и больше времени. Исходя из этого появляется понимание важности адаптации приложения под увлечения пользователя.

Рекомендательные системы, помимо удержания заинтересованности пользователя, помогают ему определиться с выбором в огромном количестве данных, поэтому знания о пользователе и контенте, с которым он взаимодействует, способствует получению более точного каталога объектов, основанных на его предпочтениях. При создании приложения, ориентированного на действия пользователя, возможность основываться на связях между ним и остальными элементами приложения, является значительным преимуществом.

2. Обзор графовых баз данных

Использование графовых баз данных оптимально подходит для решения задач, основанных на выявлении пользовательских действий, из-за их преимущества в скорости выполнения

запросов и удобстве работы с самой базой данных, относительно реляционных БД, где данные структурированы в виде таблиц. Внедрение графовых систем также возможно и в реляционной БД, однако, это требует более сложных алгоритмов анализа данных [1] .

Граф — структура, состоящая из узлов и ребер, которые их соединяют. Узлами являются объекты в графе, к примеру, пользователи, новости. Ребра — линии, соединяющие пару вершин, могут быть направленными и ненаправленными и определяют связи между узлами (подписки, сообщения, комментарии).

К основным графовым программным средствам относят нереляционную СУБД Neo4j. Отсутствие необходимости строго фиксировать структуру данных на начальном этапе, гибкость, способность масштабироваться [2] делает данную графовую систему популярным средством с открытым кодом.

Внедрение и использование специальных библиотек в реляционный БД также является одним из средств работы с графами. При работе с РСУБД PostgreSQL возможно использование таких расширений, как pgRouting или AGE (A Graph Extension) предоставляющих возможности для работы с графами, включая маршрутизацию и анализ, а также создание и управление графами с помощью реляционных структур.

Для работы с графами существуют различные алгоритмы выявления сообществ, на основе которых пользователям будет выдаваться больше рекомендаций.

3. Алгоритмы для анализа графов

Алгоритм Лувена для обнаружения сообщества в больших сетях является методом жадной оптимизации и работает по принципу группировки узлов на основе максимизации общей модульности. Вычислительная сложность алгоритма Лувена равна O(n*logn), где n — количество узлов.

1. Каждому узлу присваивается собственное сообщество.

2. Для каждого узла в графе рассматриваются его соседи и определяется насколько изменится модулярность. Под модулярностью понимается метрика для разбиения графа на сообщества, отображающая отношение плотности связей внутри сообщества к плотности связей между группами.

Если перемещение узла в соседний кластер повышает модулярность графа, то узел перемещается в это сообщество.

Процесс повторяется для всех узлов до тех пор, пока не будет достигнуто максимальное улучшение. Это улучшение выполняется для каждого узла и его соседей.

3. Создается новая сеть, узлами которой являются сообщества, найденные на первом этапе.

4. Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока не перестанут вноситься изменения и не будет достигнута максимальная модулярность.

Алгоритм Лейдена для кластеризации графа аналогичен методу Лейдена, но дает более качественные решения. Он был разработан как модификация метода Лувена для решения проблем с отключёнными сообществами. Данный алгоритм состоит из трех шагов:

1. Каждый узел является отдельным кластером и имеет свою уникальную метку.

2. На каждом шаге алгоритм рассматривает соседей каждого узла и переносит его в тот кластер, который имеет наибольшее количество соседей.

3. Алгоритм продолжает перераспределение до тех пор, пока каждое сообщество не будет состоять только из одного узла.

4. Алгоритм завершает свою работу, когда перестают происходить значительные изменения в кластерах. В конечном итоге мы получаем множество кластеров, каждый из которых представляет собой группу с похожими интересами.

Алгоритм обнаружения сообществ Walktrap. Его работа основывается на идее того, что более близкие вершины в графе будут иметь более короткие случайные пути между собой.

1. Дан граф $G = (x,u)$. Для каждого узла v в графе генерируется случайное блуждание длины L, которое начинается с узла v и переходит к случайным соседям на каждом шаге. На k-м шаге случайного блуждания для узла u осуществляется переход к одному из соседей этого узла, с учётом вероятности перехода $p_{vu}^{(l)}$.

$$p_{vu}^{(l)} = P(\text{узел } v \xrightarrow{l} u), \tag{1}$$

где $p_{vu}^{(l)}$ зависит от структуры графа и может быть определено как:

$$p_{vu}^{(l)} = \frac{A_{vu}}{d_v}. \tag{2}$$

Здесь

A_{vu} — элемент матрицы смежности графа, равный 1, если между узлами v и u существует ребро, и 0 в противном случае,

d_v — степень вершины v, то есть количество рёбер, инцидентных вершине v.

2. Для каждого узла v и u вычисляется метрика сходства, основанная на их случайных блужданиях. Если $p_v^{(l)}$ — это распределение вероятностей посещения узлов графа при случайном блуждании длины l, то сходство между узлами v и u можно выразить через скалярное произведение их распределений:

$$S(v,u) = \sum_{l=1}^{L} \left(p_v^{(l)} * p_u^{(l)} \right). \tag{3}$$

Здесь $p_v^{(l)}$ и $p_u^{(l)}$ — это векторы вероятностей для узлов v и u соответственно на l-м шаге случайного блуждания. Чем выше значение сходства $S(v,u)$, тем более вероятно, что узлы v и u принадлежат одному сообществу.

3. Для построения матрицы расстояний D, которая отражает степень сходства между всеми парами узлов, можно использовать евклидово расстояние между этими распределениями:

$$D(v,u) = \sqrt{1 - S(v,u)}. \tag{4}$$

Это расстояние характеризует, насколько сильно различаются вероятности случайных блужданий для узлов v и u. Если $D(v,u)$ маленькое, это означает, что узлы v и u принадлежат к одному сообществу.

4. Далее используется агломеративная кластеризация для построения иерархии сообществ. На каждом шаге выбираются два сообщества с минимальным расстоянием (или максимальным сходством), и они объединяются в одно. Пусть C_v и C_u — два сообщества, которые объединяются на шаге k. Тогда на каждом шаге кластеризации для объединения сообществ используется следующая формула для обновления расстояния между объединёнными сообществами:

$$D(C_v, C_u) = \frac{1}{|C_v| * |C_u|} \sum_{v \in C_v} \sum_{u \in C_u} D(v,u). \tag{5}$$

Здесь

$|C_v|$, $|C_u|$ — размеры сообществ C_v и C_u,

$D(v,u)$ — расстояние между узлами v и u.

Это позволяет обновлять расстояния между объединёнными сообществами на каждом шаге кластеризации.

Критерии останова:

– Желаемое количество сообществ k достигнуто.

– Минимальное расстояние между оставшимися сообществами больше порогового значения.

4. Применение алгоритмов

Рассмотрим информационную систему, в которой создание рекомендаций основывается на общих интересах пользователей. Пусть узлами графа будут являться:

Пользователи $(P1, P2, ..., Pn)$; Мероприятия $(E1, E2, ..., En)$; Категории мероприятий $(C1, C2, ..., Cn)$.

Тогда ребра графа будут:

– Мероприятие → Категория (Мероприятия принадлежат к определенным категориям)

– Пользователь → Категория (Пользователь выбирает интересующие его категории)

Алгоритм Лувена.

1. Каждому узлу назначается новая метка (рис. 1).

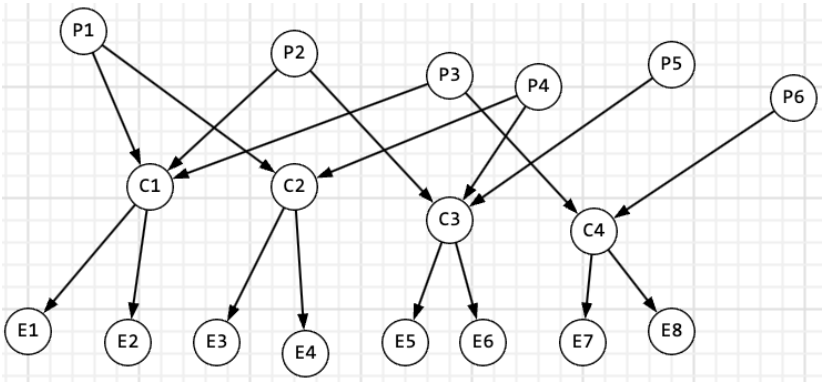


Рис. 1. Граф информационной системы

2. Для каждого узла в графе рассматриваются его соседи и определяется насколько изменится модульность. (рис. 2).

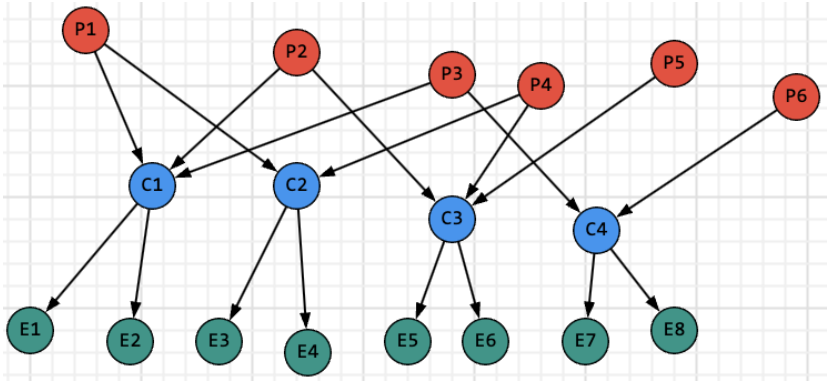


Рис. 2. Рассмотрение узлов графа

3. Перераспределение узлов между сообществами для повышения модулярности графа. Каждый пользователь будет стремиться попасть в то сообщество, где его связи с другими пользователями максимально сильны. Если пользователи выбирают одинаковые категории и схожие мероприятия, то они должны быть в одном сообществе. (рис. 3).

4. Перераспределение продолжается, пока не перестанут вноситься изменения и не будет достигнута максимальная модулярность (рис. 4).

Когда модулярность стабилизируется, мы получаем окончательные сообщества, которые оптимально отражают схожесть интересов пользователей. Таким образом становится возможно создание системы рекомендаций:

Пользователи P1, P2, P3 будут рекомендоваться друг другу так как находятся в одном кластере, интересуясь общей категорией C1.

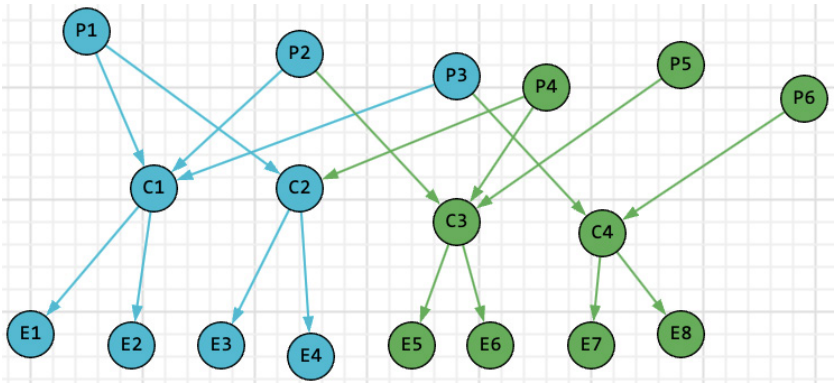


Рис. 3. Перераспределение узлов в графе

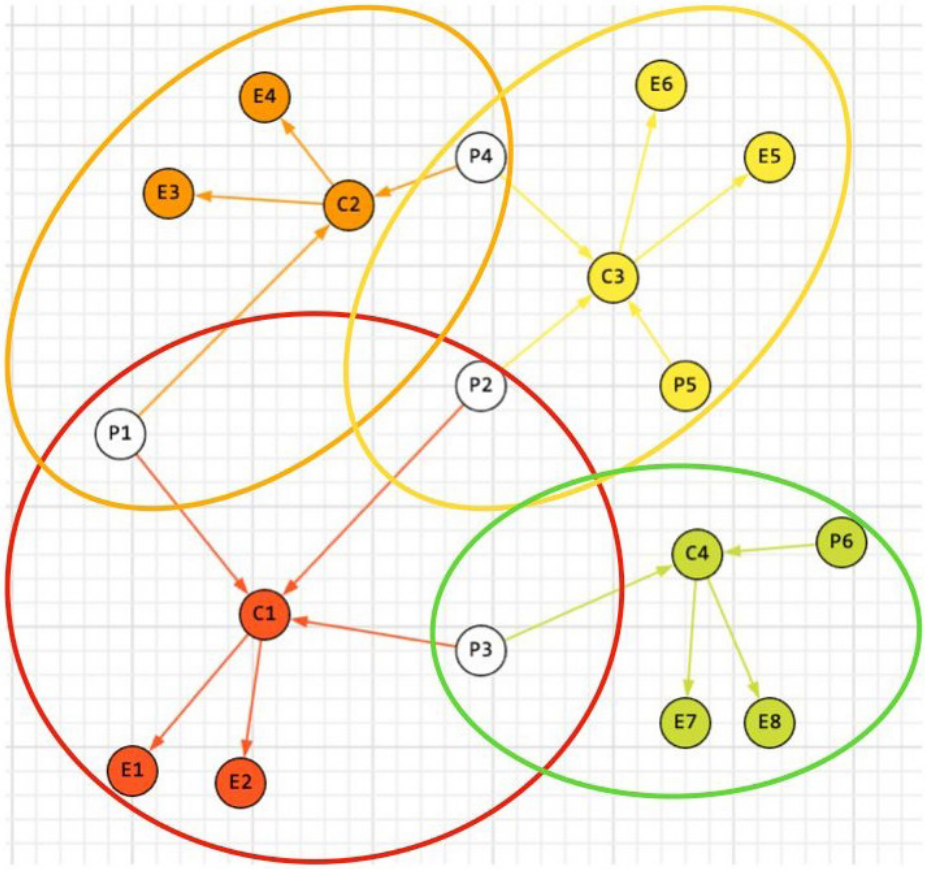


Рис. 4. Вид перераспределенного графа

Пользователи P1, P4 будут рекомендоваться друг другу так как находятся в одном кластере, интересуясь общей категорией C2.

Пользователи P4, P2, P5 будут рекомендоваться друг другу так как находятся в одном кластере, интересуясь общей категорией C3.

Пользователи P6, P3 будут рекомендоваться друг другу так как находятся в одном кластере, интересуясь общей категорией C4.

По итогу, взяв для рассмотрения пользователя P1, увидим, что ему будут рекомендоваться P2, P3, P4.

Рассматривая рекомендационную систему для мероприятий на примере пользователя P1, можно получить такое разбиение: P1 будет получать рекомендации мероприятий из категорий C2, C3, C4, поскольку P1 находится в одном кластере с P2, P3, другой кластер содержит вместе P1 и P4.

Производительность данного алгоритма является преимуществом по сравнению с остальными, рассматриваемыми в этой статье, однако в точности кластеризация при работе с сложными системами он уступает.

Шаги алгоритма Лейдена схожи с алгоритмом Лувена, его преимуществом является то, что сообщества будут гарантированно связаны, что позволит находить более качественные кластеры и сделает это с большей скоростью. Несмотря на то, что реализация усложняется за счет разбиения на более мелкие шаги, оптимизация кластеров на каждом шаге позволяет избежать имеющихся в предыдущем алгоритме проблем. При создании рекомендательной системы, улучшение качества сообществ за счет дополнительной оптимизации способствует получению более точных данных, хоть это и влияет на замедление скорости работы.

Алгоритм Walktrap использует матрицу расстояний между узлами и пытается найти сообщества, минимизируя расстояние между узлами внутри каждого сообщества.

1. Строится граф $G = (x, u)$ с восемнадцатью узлами $X = \{x_1, x_2, ..., x_{18}\}$ и ребрами U, где узлы представляют сущности, а рёбра отражают связи между ними (рис. 5).

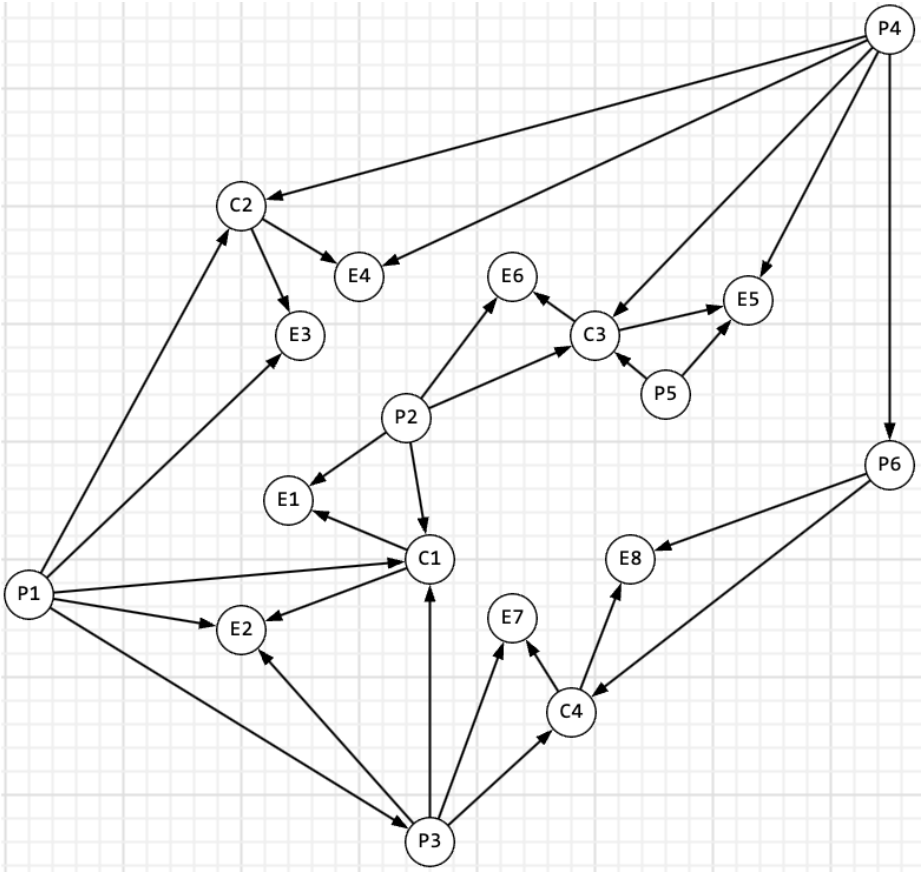


Рис. 5. Изначальный вид графа

Добавим еще связи между пользователями, где ребра будут выражать подписку на пользователя.

2. Граф можно представить в виде матрицы смежности A (6), где элемент $A_{ij} = 1,$ если между узлами есть ребро и 0 в противном случае. Таким образом, узлы будут включать пользователей, мероприятия и категории мероприятий, а ребрами будут являться их взаимодействия.

Если пользователи подписаны друг на друга, то элемент матрицы будет равен 1.

Если пользователь собирается посетить мероприятие, то элемент $A_{ij} = 1.$

Если мероприятие принадлежит к конкретной категории, то элемент будет равен 1.

Если пользователь заинтересован в конкретной категории мероприятий, то взаимосвязь между ними будет определять ребро с индексом 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0010000011000001100 \\ 0000001000010010 10 \\ 1000000100001010 01 \\ 0000010001100001 10 \\ 0000000000100000 10 \\ 0000000000000100 01 \\ 0100000000000010 00 \\ 1010000000000010 00 \\ 1000000000000001 00 \\ 0001000000000001 00 \\ 0001100000000001 0 \\ 0100000000000001 0 \\ 0010000000000000 1 \\ 0000010000000000 1 \\ 1110001100000000 0 \\ 1001000011000000 0 \\ 0101100000110000 0 \\ 0010010000001100 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Рассчитаем степени узлов:

$$d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 5, d_4 = 4, d_5 = 2, d_6 = 2,$$
$$d_7 = 2, d_8 = 3, d_9 = 2, d_{10} = 2, d_{11} = 3, d_{12} = 2, \quad (7)$$
$$d_{13} = 2, d_{14} = 2, d_{15} = 5, d_{16} = 4, d_{17} = 5, d_{18} = 4$$

Выберем длину случайного блуждания $L = 3$.

3. Для каждого узла графа генерируются случайные блуждания. Пусть v — узел, с которого начинается блуждание. Алгоритм выбирает случайного соседа для каждого шага блуждания.

Рассмотрим в качестве примера узел P1:

$$p_{P1,P3} = \frac{A_{1,3}}{d_1} = \frac{1}{5}, p_{P1,E2} = \frac{A_{1,8}}{d_1} = \frac{1}{5}, p_{P1,E3} = \frac{A_{1,15}}{d_1} = \frac{1}{5}, p_{P1,C1} = \frac{A_{1,15}}{d_1} = \frac{1}{5}, p_{P1,C2} = \frac{A_{1,16}}{d_1} = \frac{1}{5} \quad (8)$$

Если мы пришли в C1, то:

$$p_{C1,P1} = \frac{A_{15,1}}{d_{15}} = \frac{1}{5}, p_{C1,P2} = \frac{A_{15,2}}{d_{15}} = \frac{1}{5}, p_{C1,P3} = \frac{A_{15,3}}{d_{15}} = \frac{1}{5}, p_{C1,E1} = \frac{A_{15,7}}{d_{15}} = \frac{1}{5}, p_{C1,E2} = \frac{A_{15,8}}{d_{15}} = \frac{1}{5} \quad (9)$$

На третьем шаге, если мы пришли в P3, то вероятность перехода в P1, E1, E7, C1, C4 будет:

$$p_{P3,P1} = \frac{A_{3,1}}{d_3} = \frac{1}{5}, p_{P3,E1} = \frac{A_{3,7}}{d_3} = \frac{1}{5}, p_{P3,E7} = \frac{A_{3,13}}{d_3} = \frac{1}{5}, p_{P3,C1} = \frac{A_{3,15}}{d_3} = \frac{1}{5}, p_{P3,C4} = \frac{A_{3,18}}{d_3} = \frac{1}{5} \quad (10)$$

Теперь для P1 случайное блуждание может быть представлено в виде:

На первом шаге $p_{P1,C1} = \frac{1}{5},$ на втором шаге $p_{C1,P3} = \frac{1}{5},$ на третьем — $p_{P3,P1} = \frac{1}{5}.$ Итак, вероятность перехода $\frac{1}{5} * \frac{1}{5} * \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$:

Для узла P3 аналогично, но в обратном порядке.

Теперь для P3 случайное блуждание может быть представлено в виде:

На первом шаге $p_{P3,C1} = \frac{1}{5}$, на втором шаге $p_{C1,P1} = \frac{1}{5}$, на третьем — $p_{P1,P3} = \frac{1}{5}$. Итак, вероятность перехода: $\frac{1}{5} * \frac{1}{5} * \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

4. Вычислим сходство между узлами, используя скалярное произведение их вероятностей на каждом шаге блуждания:

$$S(P_1, P_3) = \left(\frac{1}{5} * \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} * \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} * \frac{1}{5}\right) = 0.12. \quad (11)$$

5. Теперь вычислим расстояние между узлами с помощью евклидова расстояния:

$$D(P_1, P_3) = \sqrt{1 - S(P_1, P_3)} = \sqrt{1 - 0.12} = 0.9381. \quad (12)$$

6. Алгомеративная кластеризация. Сначала каждое сообщество будет состоять из одного узла. После чего, объединяем самые близкие сообщества:

Если $D(P_1, P_3)$ будет наименьшим, то P1 и P3 объединяются. И так до тех пор, пока не будет выполнен критерий останова.

Таким образом, применение алгоритма Walktrap к информационной системе позволит выявить сообщества пользователей, у которых совпадают интересы (предпочтения в выборе одинаковых категорий). Также, за счет «случайных блужданий» можно получить неочевидные зависимости, что будет преимуществом при расширении системы. Относительно двух предыдущих, производительность данного алгоритма ниже из-за того, что помимо расчета модулярности, на каждом шаге выбирается случайный путь для определения вероятности того, что два узла окажутся в одном сообществе.

Заключение

Графовые базы данных эффективно работают в системах, основанных на действиях пользователей. Их реализация возможна не только с помощью специализированных платформ и языков, но и систем управления реляционными базами данных. Каждый алгоритм имеет свои особенности и при выборе стоит отталкиваться от требований конкретной системы для настройки рекомендаций. Оптимальным выбором будет являться алгоритм Лейдена, он имеет среднюю производительности, хорошую точность получаемых данных и справляется с сложными сетями. Выбор в пользу алгоритма Лувена стоит делать в случае, если в системе нет сложных зависимостей и получаемым качеством можно пожертвовать в пользу скорости и простоты разработки. Для информационной системы, основными критериями которой являются качество, желание опережать мысли клиентов, касательно предлагаемых рекомендаций, подойдет использование алгоритма Walktrap, чья производительность может снижаться на больших графах, однако он эффективен с разнообразными зависимостями.

Литература

1. *Абрамский М. М.* Сравнительный анализ использования реляционных и графовых баз данных в разработке цифровых образовательных систем. // Вестник НГУ. Серия «Информационные технологии». – 2018. – Т. 16, № 4. – С. 5–12.

2. *Еремеев А. П., Панявин Н. А.* Унификация модели представления данных и преобразование форматов на основе нереляционной СУБД Neo4j. // Программные продукты и системы. – 2022. – Т. 35, № 4. – С. 549–556.

3. *Засядко Г. Е., Карпов А. В.* Проблемы разработки графовых баз данных. // Инженерный вестник Дона, Nel. – 2017. – ivdon.ru/ru/magazine/archive/nly2017/3994

4. *Кочкаров А. А., Калашников Н. В., Кочкаров Р. А.* Сравнительный анализ алгоритмов выявления сообществ в сложных сетевых системах на примере социальных сетей //Программные продукты и системы // Sofware & Systems. – 2020. – Т. 33, № 2. – С. 349–356.

УДК 004.415.2

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ

Е. Д. Александрова, И. И. Каширская

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается проектирование веб-приложения, которое предоставляет выпускникам возможность самостоятельной подготовки к ЕГЭ по информатике. В статье приводится общая архитектура приложения, модель базы данных и структура пользовательского интерфейса.
Ключевые слова: программирование, веб-приложение, веб-разработка, проектирование веб-приложения, ЕГЭ по информатике.

Введение

За последние несколько лет появилась потребность в использовании дистанционного формата обучения. Большая часть граждан отдает предпочтение обучению в онлайн формате [1].

На данный момент можно найти большое количество ресурсов для подготовки к ЕГЭ по информатике. Однако найти среди этого обилия структурированные и понятные источники — трудная задача, особенно для человека, который начинает подготовку с самого начала.

Из вышесказанного вытекает, что создание веб-приложения для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по информатике представляет собой перспективное и актуальное направление.

1. Анализ существующих решений

Наиболее популярными ресурсами для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по информатике являются: kompege [2], Сайт Константина Полякова [3], Решу ЕГЭ [4], Яндекс Образование [5], ФИПИ [6]. Необходимо проанализировать указанные ресурсы по разработанным критериям. Результат сравнения представлен в табл. 1.

Таблица 1

Сравнительный анализ существующих решений

Критерий сравнения	КЕГЭ	Сайт Константина Полякова	Решу ЕГЭ	Яндекс Образование	ФИПИ
Прикрепленные решения задач	–	–	–	–	–
Возможность решения готовых вариантов	+	+	+	+	–
Автоматическая проверка заданий	+	–	+	+	–
Доступ к теории по номерам	–	+	–	–	–
Возможность просмотра результатов теста через время	–	–	–	–	–

Все вышеперечисленные ресурсы не предусматривают возможности просматривать свои результаты в любой момент использования сайта, а также не реализуют возможность самостоятельного разбора ошибок. Почти все ресурсы не предоставляют материалы для самостоятельного изучения теоретического материала по заданиям, представленным в ЕГЭ.

Отталкиваясь от вышеизложенного, появляется необходимость создания такого веб-приложения, которое бы учитывало все недочеты рассмотренных ресурсов и поддерживало их достоинства.

2. Требования к веб-приложению

Веб-приложение должно предоставлять пользователю следующие возможности:
- регистрация в системе;
- аутентификация в системе;
- просмотр информации о доступных тестах;
- выбор теста;
- прохождение теста с отображением результата, указанием ошибок и правильных ответов;
- просмотр решений заданий, в которых совершена ошибка;
- просмотр теоретического материала по каждому заданию;
- просмотр результатов теста, через некоторое время после его завершения;
- одинаковое отображение графического интерфейса в наиболее распространенных браузерах.

3. Модель данных

Для хранения пользовательской информации, теории по заданиям и практических задач была разработана модель данных, представленная на рис. 1. По данной модели данных была создана база данных [7]. Краткое описание основных таблиц приведено в табл. 2.

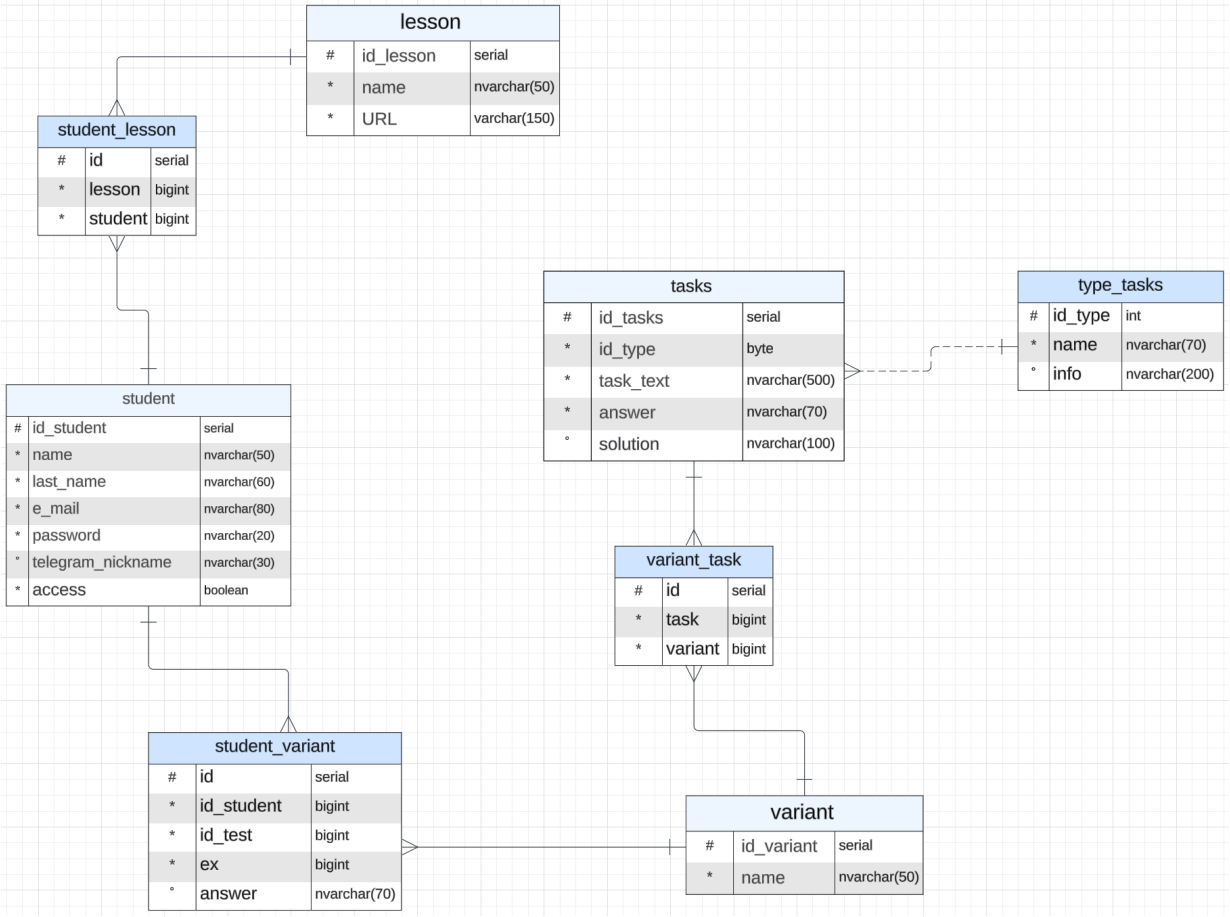


Рис. 1. Модель данных

Таблица 2

Описание основных таблиц базы данных

Таблица	Описание
lesson	Содержит информацию о теоретическом материале
tasks	Содержит информацию о задачах
variant	Содержит информацию о варианте
student	Содержит информацию о пользователях

4. Архитектура веб-приложения

Веб-приложение состоит из 4 основных компонентов:

• клиентская часть — реализует пользовательский интерфейс, формирует запросы к серверу и обрабатывает ответы от него;

• серверная часть — получает и обрабатывает запросы от клиента, формирует ответы, отвечает за взаимодействие с базой данных;

• база данных — хранит информацию о пользователях и метаданные;

• файловый сервер — хранит изображения, используемые в задачах.

Диаграмма компонентов веб-приложения представлена на рис. 2.

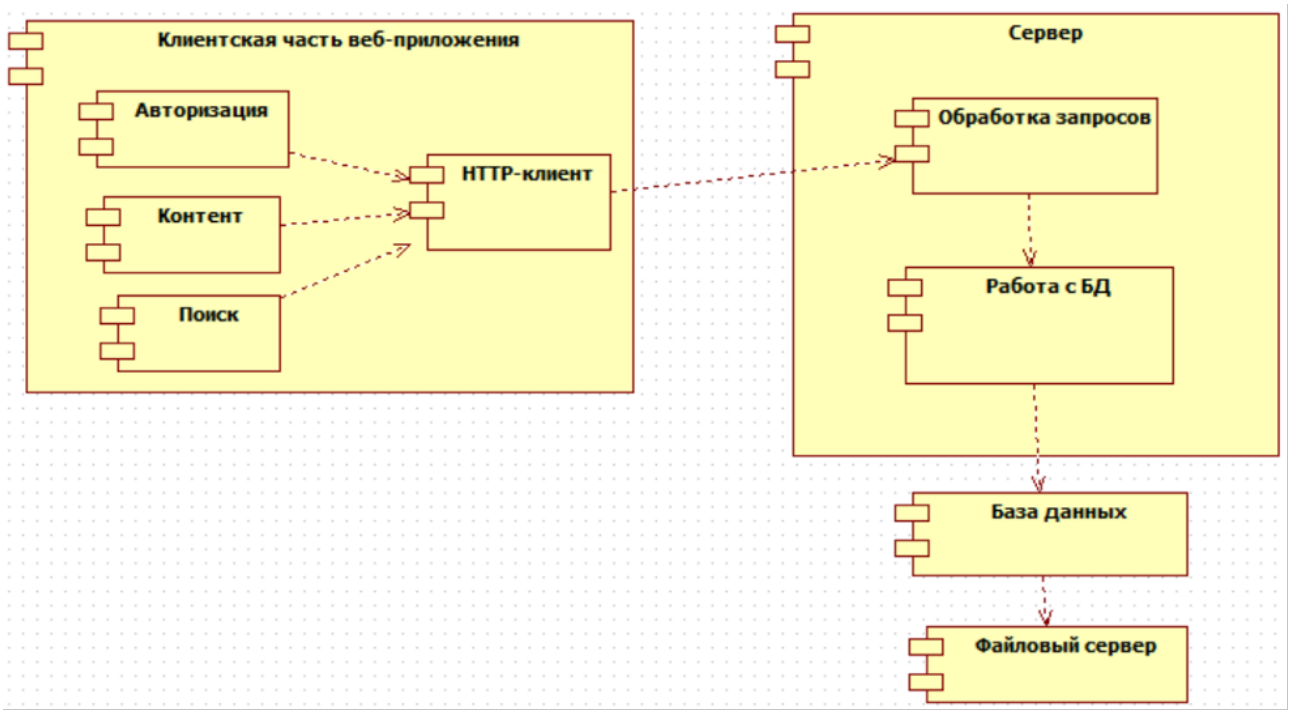


Рис. 2. Диаграмма компонентов веб-приложения

5. Интерфейс пользователя

Интерфейс веб-приложения должен соответствовать принципам юзабилити [8] и обеспечивать необходимую функциональность. Он будет состоять из 12 страниц, включая главную страницу. На рис. 3 представлена схема переходов между страницами проектируемого приложения.

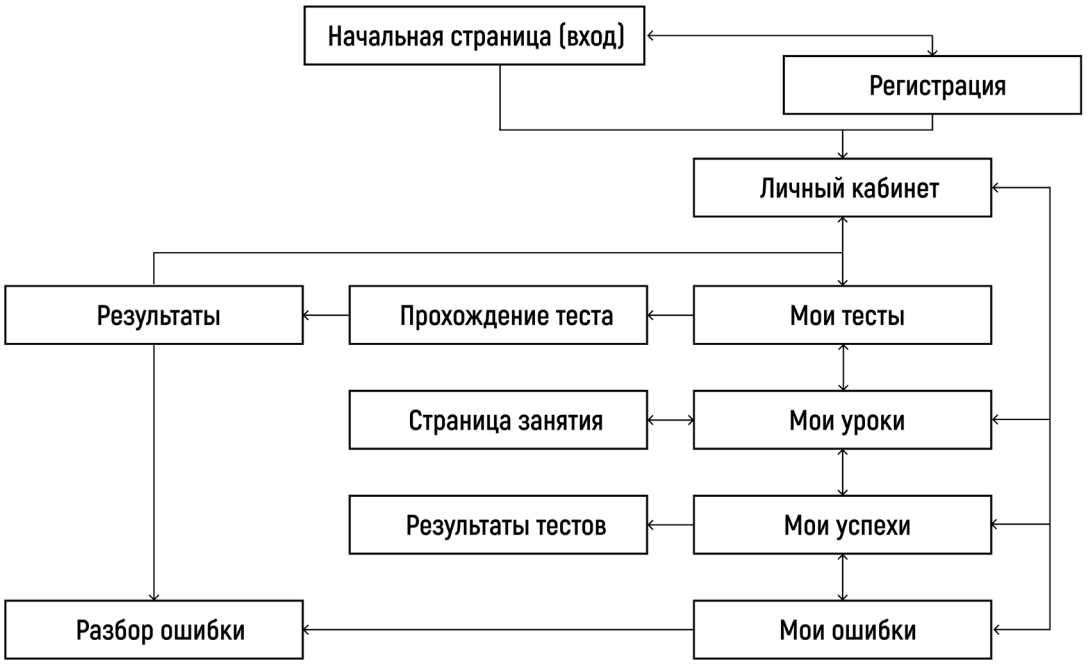


Рис. 3. Схема переходов между страницами

Заключение

Спроектировано веб-приложение, предназначенное для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по информатике. Были проанализированы аналогичные решения, их преимущества и недостатки. Разработаны требования, спроектирована архитектура и база данных. Планируется реализовать клиентскую и серверную часть, а также перенести ресурс на хостинг и ввести его в эксплуатацию. Для реализации выбраны язык программирования Python и фреймворк для веб-приложений Django.

Литература

1. Сколько россиян предпочитают дистанционную форму обучения // РИА НОВОСТИ. – URL: https://ria.ru/20240327/opros-1936229091.html (дата обращения 7.10.2024)

2. КЕГЭ – URL: https://kompege.ru (дата обращения: 7.11.2024).

3. Сайт Константина Полякова – URL: https://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm (дата обращения: 7.11.2024).

4. Решу ЕГЭ – URL: https://inf-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 7.11.2024).

5. Яндекс Образование – URL: https://education.yandex.ru/ege (дата обращения 7.11.24)

6. ФИПИ – URL: https://fipi.ru/navigator-podgotovki/navigator-ege#inf (дата обращения 7.11.24)

7. Новиков Б. А. Основы технологий баз данных: учебное пособие. / Б. А. Новиков, Е. А. Горшкова, Н. Г. Графеева; под ред. Е. В. Рогова. – 2-е изд. – Москва : ДМК Пресс, 2020. – 582 с.

8. Нильсен Я. Дизайн Web-страниц. Анализ удобства и простоты использования 50 узлов / Я. Нильсен – Москва : Вильямс, 2002. – 326 с.

УДК 004.75

МЕТОДЫ ПОИСКА ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ: АНАЛИЗ И РЕАЛИЗАЦИЯ

Д. Д. Ануфриев, В. М. Мельников

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрены методы хранения и поиска пространственно-временных данных, востребованные в современных приложениях для работы с подвижными объектами, такими как навигационные и социальные сервисы. На примере индексации пространственных данных для сотен тысяч объектов, передающих координаты в режиме реального времени, исследованы R-деревья и Grid-индексы как основные подходы к решению задачи. Описаны принципы работы, преимущества и ограничения структур R-дерева и его модификаций (R*-дерева и R+-дерева), а также Grid-индексов. Проведено их сравнение по ключевым параметрам, определяющим производительность, точность и масштабируемость методов в задачах, связанных с отслеживанием и быстрым обновлением координат подвижных объектов.

Ключевые слова: подвижные объекты, индексация пространственных данных, R-дерево, R*-дерево, R+-дерево, Grid-индекс, поиск объектов в реальном времени, навигационные системы, геоинформационные системы.

Введение

Современные технологии, такие как смартфоны и GPS, способствуют росту объема пространственно-временных данных. Различные приложения, от служб навигации до социальных сетей, собирают и используют эти данные, что требует эффективных методов хранения, обновления и поиска информации об объектах, движущихся в пространстве. В этом контексте задача состоит в том, чтобы обрабатывать данные о 100 000 подвижных объектах, которые отправляют свои координаты (широта и долгота) в систему в реальном времени.

Для решения задачи необходимо проанализировать методы хранения и поиска пространственных данных, которые могут обеспечивать высокую производительность при частых обновлениях данных о местоположении объектов. Два перспективных подхода, которые часто используются в таких системах, — это R-деревья и Grid-индексы. В статье будут рассмотрены R-дерево и его альтернативы, а также предложена реализация сервиса на основе REST-интерфейса для хранения и поиска данных о подвижных объектах.

1. R-дерево

R-дерево является одной из наиболее широко используемых структур данных для индексации двумерных и многомерных пространственных объектов [1]. В контексте задач, связанных с поиском подвижных объектов, таких как автомобили, находящиеся в движении, R-дерево предоставляет эффективные средства для поиска и обработки запросов на пересечение или нахождение объектов в конкретных областях пространства.

1.1. Принцип работы R-дерева

R-дерево строится на основе иерархии прямоугольных областей, называемых ограничивающими прямоугольниками, которые заключают в себе объекты. Каждый узел дерева хранит несколько таких прямоугольников, которые, в свою очередь, могут содержать либо другие прямоугольники (внутренние узлы), либо непосредственно объекты (листья).

R-дерево представляет собой иерархическую структуру, организованную в виде узлов, каждый из которых имеет свою роль в упорядочении и хранении пространственных данных. На вершине этой структуры располагается корневой узел, содержащий ограничивающие прямоугольники, каждый из которых охватывает определённые группы объектов, задавая общие границы для них. Далее следуют внутренние узлы, которые отвечают за организацию прямоугольников меньшего размера, создавая уровни вложенности внутри общей структуры. На самом нижнем уровне находятся листовые узлы, содержащие конечные объекты, например, автомобили с указанием их координат. Эти листовые узлы формируют базу данных R-дерева, обеспечивая возможность быстрого доступа к объектам в пространственных запросах.

1.2. Алгоритм работы R-дерева

При добавлении объекта в дерево, дерево ищет подходящий листовой узел, который может вместить новый объект. Если такой узел найден, объект добавляется. Если узел переполняется, происходит разбиение узла на два новых, что может вызвать разделение на верхних уровнях дерева.

Для поиска объектов, находящихся в определённой области (например, для определения всех машин, находящихся рядом с пользователем), R-дерево начинает с корневого узла, исключая области, не пересекающиеся с запросом. Процесс продолжается рекурсивно до тех пор, пока не будут найдены все объекты в пределах запрашиваемой области.

1.3. Преимущества и недостатки R-дерева

R-дерево обладает рядом преимуществ, которые делают его особенно полезным для работы с пространственными данными. Одним из ключевых достоинств этой структуры является высокая эффективность при выполнении запросов на пересечение. Это позволяет легко находить все объекты, расположенные в пределах заданной области, что удобно для задач вроде отображения автомобилей, находящихся рядом с пользователем в реальном времени.

Кроме того, R-дерево отличается встроенной балансировкой и гибкостью своей структуры, благодаря чему оно остаётся компактным даже при хранении больших объемов данных [2]. Такой подход не только экономит место, но и поддерживает высокую скорость обработки данных.

Ещё одним важным преимуществом R-дерева является поддержка динамических данных. Оно позволяет легко обновлять информацию, добавляя и удаляя объекты, что особенно ценно для приложений, работающих с подвижными объектами, координаты которых постоянно изменяются. Эти особенности делают R-дерево идеальной структурой для приложений, где требуется оперативное обновление пространственных данных.

R-дерево, несмотря на свои преимущества, имеет и некоторые недостатки, которые могут ограничить его эффективность в ряде задач. Одной из основных проблем являются сложности с частыми обновлениями. Когда объекты перемещаются слишком часто, процесс вставки и удаления данных может существенно замедлить работу дерева, поскольку для каждого обновления необходимо находить подходящий листовой узел и, в некоторых случаях, перестраивать структуру. Это особенно заметно в приложениях с высокой динамикой объектов.

Ещё один недостаток R-дерева связан с его ограниченными возможностями по работе с временными данными [3]. Изначально R-дерево не поддерживает временные запросы, поэтому для обработки пространственно-временных данных, например, поиска автомобилей, которые находились в определённой точке 10 минут назад, его необходимо адаптировать. Это требует усложнения структуры и добавления дополнительных механизмов, что повышает сложность и ресурсоёмкость обработки запросов.

1.4. Примеры использования R-дерева

В навигационных системах R-дерево может использоваться для быстрого поиска ближайших к пользователю объектов (автомобилей или магазинов) [4]. Когда пользователь передвигается, его координаты обновляются, и необходимо быстро находить ближайшие к нему объекты.

В приложениях, где пользователи могут видеть местоположение своих друзей на карте, R-дерево помогает эффективно обрабатывать запросы на поиск друзей вблизи.

2. Варианты оптимизации R-дерева

R*-дерево является улучшенной версией классического R-дерева, специально разработанной для уменьшения перекрытий между ограничивающими прямоугольниками в узлах дерева. Цель такой модификации — сократить количество ложных срабатываний и повысить точность и производительность при выполнении запросов, особенно для поиска ближайших соседей и поиска по диапазону.

Основные отличия R*-дерева от классического R-дерева заключаются в его более продвинутых методах управления и оптимизации данных. Во-первых, R*-дерево ориентировано на уменьшение площади перекрытия между ограничивающими прямоугольниками. Это снижает вероятность обработки лишних узлов, не содержащих искомого объекта, что ускоряет поиск. Такой эффект достигается за счёт улучшенных алгоритмов вставки и удаления элементов.

Во-вторых, при добавлении новых объектов R*-дерево автоматически перестраивает узлы, стремясь минимизировать не только площадь каждого прямоугольника, но и его периметр и центр тяжести [5]. Это позволяет формировать более компактные группы объектов и снижать риск ложных срабатываний, обеспечивая большую точность поиска.

Третьей особенностью является механизм реинсерции объектов. Когда при добавлении элементов узел перегружается, R*-дерево не просто делит узел, но и переносит часть объектов в другие узлы. Такой подход позволяет эффективно перераспределить объекты, дополнительно оптимизируя размещение и уменьшая площади пересечений между прямоугольниками.

R+-дерево представляет собой модификацию классического R-дерева, которая отличается тем, что запрещает перекрытие прямоугольников на одном уровне дерева. Такая структура упрощает процесс поиска, так как каждый объект может находиться только в одном узле на каждом уровне. В результате при поиске уменьшается число узлов, которые нужно проверить, что значительно повышает производительность при выполнении запросов.

R+-дерево обладает рядом особенностей, которые отличают его от R-дерева и R*-дерева [6]. Одной из главных характеристик является отсутствие перекрытий между узлами на каждом уровне. В R+-дерево узлы располагаются так, чтобы минимизировать пересечения, и если объект по своим координатам попадает сразу в несколько узлов, то его разделяют и добавляют в каждый подходящий узел.

Эта особенность связана с механизмом разбиения объектов. Когда объект занимает пространство, пересекающее несколько областей, его копируют в каждый соответствующий узел. Несмотря на увеличение числа дубликатов, такое разбиение упрощает поиск: для нахождения объекта не требуется проверять все пересекающиеся узлы.

Благодаря отсутствию перекрывающихся областей, R+-дерево обеспечивает повышенную производительность поиска. Оно обходится меньшим количеством узлов, что делает его особенно эффективным для задач, требующих высокой скорости поиска, таких как диапазонные запросы.

Ниже приведено сравнение R-дерева, R*-дерева и R+-дерева в табл. 1.

Таблица 1

Сравнительные характеристики деревьев

Метод	Преимущества	Недостатки	Пример применения
R-дерево	Простая реализация, сбалансированная структура	Возможно значительное перекрытие узлов	Общие базы данных, навигация
R*-дерево	Минимизация перекрытий, высокая точность поиска	Сложность реализации, высокие требования к ресурсам	Геоинформационные системы, 3D-моделирование
R+-дерево	Запрещены перекрытия, высокая производительность поиска	Дублирование данных, сложность вставки и обновления	ГИС, системы управления базами данных, навигация

3. Grid-индексы

Grid-индексы представляют собой структуру данных, использующую разделение пространства на ячейки фиксированного размера. Такой подход обеспечивает высокую скорость работы и простоту в реализации, что делает его особенно востребованным

в системах, где необходимо обрабатывать данные в реальном времени с частыми обновлениями, как в логистике, навигации или системах отслеживания подвижных объектов. В отличие от деревьев, Grid-индексы работают с простой сеточной структурой, где пространство делится на равные ячейки, и каждый объект привязывается к одной или нескольким из них.

3.1. Основные принципы работы Grid-индексов

Grid-индексы организуют пространство в виде сетки, разделённой на регулярные ячейки, что обеспечивает высокую скорость поиска и обновления данных [7]. Работа Grid-индексов строится на нескольких этапах.

Первым этапом является деление пространства: вся область, в которой отслеживаются объекты, разбивается на равные ячейки, формируя сетку. После этого каждый объект в зависимости от своих координат привязывается к одной или нескольким ячейкам этой сетки. Такая привязка позволяет легко обновлять положение объектов и эффективно обрабатывать запросы на их поиск.

Для поиска объектов в определённой области система проверяет только те ячейки, которые пересекаются с заданной областью. Это уменьшает объем обрабатываемых данных и ускоряет поиск, так как нет необходимости просматривать всю сетку. При изменении положения объектов их координаты обновляются: объекты перемещаются между ячейками, к которым они привязаны, что позволяет гибко отслеживать изменения их размещения.

3.2. Преимущества и недостатки Grid-индексов

Grid-индексы обладают рядом преимуществ, которые делают их отличным выбором для задач, требующих высокой скорости обработки данных в реальном времени. Прежде всего, их структура отличается простотой: Grid-индексы легко реализовать и использовать, так как они не требуют сложных операций, таких как балансировка дерева, что снижает вычислительную нагрузку по сравнению с более сложными структурами вроде R-деревьев.

Одним из ключевых достоинств Grid-индексов является их высокая скорость работы с данными в реальном времени. Координаты объектов можно обновлять очень быстро: при переме-

щении объекта достаточно просто переназначить его привязку к ячейкам сетки. Grid-индексы также масштабируемы: их можно разделить на множество сегментов и обрабатывать каждый отдельно, что позволяет распределять нагрузку между серверами и работать с большими объемами данных.

Кроме того, Grid-индексы экономны с точки зрения вычислительных затрат на поиск. Чтобы найти объекты в пределах определённой области, достаточно проверить лишь ячейки, которые пересекаются с этой областью. Это позволяет сократить объём обрабатываемых данных и ускорить работу системы.

Однако у Grid-индексов есть и свои недостатки. Например, при неравномерном распределении объектов по пространству плотность некоторых ячеек может значительно превышать другие, что приводит к неравномерному расходу памяти: в областях с высокой плотностью объекты скапливаются, тогда как в других – ячейки могут оставаться пустыми.

Ещё одним минусом является ограниченная точность при поиске ближайших соседей. В отличие от R-деревьев, Grid-индексы менее эффективны в таких запросах, поскольку приходится проверять дополнительные ячейки для получения точного результата, что может замедлить работу в условиях высокой плотности объектов.

Grid-индексы чувствительны к размеру ячеек. Слишком крупные ячейки снижают точность поиска, затрагивая больше областей, чем необходимо. С другой стороны, слишком мелкие ячейки могут повысить затраты памяти и сделать поиск менее эффективным из-за увеличения числа операций.

3.3. Применение Grid-индексов в системах отслеживания подвижных объектов

Grid-индексы могут быть очень полезны для отслеживания транспортных средств в условиях большого города. Рассмотрим, как их использование поможет в задаче мониторинга нескольких тысяч автомобилей с целью быстрой обработки запросов на поиск ближайших объектов и своевременного обновления информации о местоположении.

Во-первых, город можно разбить на сетку, где каждая ячейка представляет собой участок определённого размера, например, 100 на 100 метров. Это позволяет легко разделить городскую территорию на удобные зоны для отслеживания объектов.

Далее, в зависимости от своих координат, каждый автомобиль привязывается к конкретной ячейке сетки. Когда автомобиль пересекает границу между ячейками, его привязка обновляется, и он перемещается в соответствующую ячейку. Такая структура позволяет эффективно отслеживать местоположение объектов.

Если возникает запрос на поиск ближайших автомобилей к определённой точке, например, для подачи такси, система проверяет только объекты в текущей ячейке и соседних, что сокращает объём данных для обработки и ускоряет поиск.

Кроме того, Grid-индексы обеспечивают быстрое обновление информации: при перемещении автомобиля в пределах одной и той же ячейки обновление данных происходит локально, без необходимости перестраивать сетку. Это делает систему эффективной и оптимизированной для обработки частых перемещений, что особенно важно для приложений реального времени.

4. Сравнение методов индексации R-дерева и Grid-индекса

Методы R-дерева и Grid-индекса отличаются по своей структуре и применимости, особенно в задачах пространственной индексации и поиска [8].

R-дерево представляет собой сложную иерархическую структуру данных, которая предназначена для эффективного поиска и индексации объектов в двумерных и многомерных пространствах. Оно организует объекты с помощью иерархии прямоугольных областей, где

каждый узел дерева охватывает множество объектов, создавая вложенную структуру прямоугольников. Это позволяет R-дереву быстро выполнять точные пространственные запросы, включая задачи поиска ближайших объектов и пересечения. Однако, частое обновление данных может увеличивать сложность дерева, что постепенно снижает его производительность.

Grid-индекс, напротив, основан на простом делении пространства на ячейки фиксированного размера, образующих сетку. Объекты привязываются к одной или нескольким ячейкам в зависимости от их положения. Такая структура делает Grid-индекс особенно удобным для задач, требующих частых обновлений в реальном времени, поскольку его просто реализовать и масштабировать. Однако Grid-индекс имеет ограничения: при высокой плотности данных он менее точен для поиска ближайших объектов, и его эффективность снижается при неравномерном распределении объектов по пространству.

Основные преимущества и недостатки обоих подходов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение подходов R-Дерева и Grid-индекса

Метод	Основное преимущество	Основной недостаток	Применение
R-дерево	Эффективный поиск в двумерных и многомерных данных	Может снижать производительность при частых обновлениях перекрытие узлов	Поддержка динамических объектов
Grid-индекс	Простота реализации, высокая скорость обновлений	Неэффективен при неравномерной плотности объектов	Масштабируемая система для объектов в реальном времени

Заключение

R-дерево является мощным инструментом для индексации пространственных данных и их поиска. В задачах, связанных с отслеживанием подвижных объектов, оно обеспечивает быструю обработку запросов на пересечение областей и поиск ближайших объектов. Однако, для систем, где необходимы частые обновления данных, могут потребоваться дополнительные оптимизации или использование альтернативных структур, таких как Grid-индексы.

Grid-индексы являются удобным и эффективным инструментом для задач, где требуется быстрое обновление и поиск объектов в реальном времени. Преимущества, такие как высокая скорость, простота реализации и возможность масштабирования делают их оптимальным выбором для систем отслеживания подвижных объектов.

Литература

1. *Гутмен Д.* Алгоритмы поиска и сортировки в многомерных данных / Д. Гутмен. – Москва : Наука, 2005. – 412 с.

2. *Хан Д.* Пространственно-временные базы данных : теория и практика / Д. Хан, М. Аль-Хабиб. – Москва : Мир, 2015. – 293 с.

3. *Mahmood A., Punni S., Aref W. G.* Spatio-Temporal Access Methods: A Survey (2010–2017) // GeoInformatica. – 2018. – P. 1–36.

4. *Браверман М.* Пространственные индексы и их применение в геоинформационных системах / М. Браверман // Программирование. – 2016. – Т. 40, № 4. – С. 55–67.

5. *Zhao W., Chen L.* An Optimized R*-Tree Structure for High-Density Spatial Data // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. – 2017. – Vol. 29, No 3. – P. 670–682.

6. *Sidiropoulos D., Manolopoulos Y.* R+-Tree Performance Analysis in Spatial Database Management Systems / D. Sidiropoulos, Y. Manolopoulos // ACM Transactions on Database Systems. – 2018. – Vol. 43, No 2. – P. 112–128.

7. *Розенфельд А.* Методы пространственно-временной обработки данных / А. Розенфельд, Дж. Хаттон. – СПб. : БХВ-Петербург, 2008. – 374 с.

8. *Лионс Дж., Хикс П.* Структуры данных и алгоритмы для пространственных баз данных / Дж. Лионс, П. Хикс. – Санкт-Петербург : Питер, 2011. – 586 с.

УДК 004.428.4

ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ БИОСИСТЕМ КАК ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ЭКОСИСТЕМ

В. Ю. Богушов, В. Д. Воронов, Д. В. Каспер, Р. В. Скворцов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе представлено приложение для моделирования биосистем, разработанное с использованием языка программирования Rust и современных технологий визуализации. Основное внимание уделено моделированию роевых насекомых с использованием муравьиного алгоритма, позволяющего воспроизводить коллективное поведение колонии. Приложение также обладает инструментами для задания параметров, визуализации данных и проведения анализа взаимодействий в экосистемах. Особенности реализации обеспечивают высокую производительность и кроссплатформенность, что делает его полезным инструментом для исследования и прогнозирования экологических процессов.

Ключевые слова: моделирование экосистем, биосистемы, муравьиный алгоритм, Rust, феромоны, визуализация данных, роевые насекомые, многозадачность, Canvas API, симуляция, поведение экосистем, экология, биоинформатика.

Введение

Биосистемы представляют собой сложные и многокомпонентные системы, состоящие из живых организмов и их взаимодействий с окружающей средой. Они охватывают разные уровни организации: от клеточного и органного до экосистемного и биосферного. Ключевыми особенностями таких систем являются их сложная иерархическая структура, высокая степень взаимозависимости компонентов и способность реагировать на внешние изменения, сохраняя функциональную целостность, что делает их важным объектом исследования.

Изучение биосистем имеет фундаментальное значение для понимания основных причин эволюции живых существ. Также изучение таких систем позволяет предсказывать динамику экосистем, разрабатывать меры по их сохранению и создавать искусственные среды, обеспечивающие выживание исчезающих видов.

1. Постановка задачи

Одной из актуальных задач современной экологии и биоинформатики является создание программных средств для моделирования и анализа экосистем.

Необходимо разработать программное решение, способное моделировать поведение экосистем в заданных пользователем рамках и позволяющее в удобной визуальной форме отображать данные. К основным требованиям к такой программе относятся:

- Возможность задавать параметры экосистемы, такие как начальные условия и внешние воздействия на компоненты этой системы.
- Возможность предоставлять пользователю графических средства визуализации данных, таких как анимации жизнедеятельности экосистемы и статистические графики, для наблюдения за развитием экосистемы во времени.

Такая система должна обладать функционалом, благодаря которому можно будет воспроизводить сложные экологические процессы, прогнозировать развитие экосистем, а также тестировать выдвинутые гипотезы, о поведении биосистем.

2. Реализация модели с помощью языка программирования Rust

В данном разделе представлена реализация модели для симуляции биосистемы, с фокусом на роевых насекомых. В качестве примера была выбрана модель муравьев. Для моделирования этой системы, использовался язык программирования Rust.

Этот язык был выбран потому, что Rust предоставляет высокий уровень контроля над памятью при сохранении безопасности, что критично при работе с моделями, где требуется высокая производительность и минимальные накладные расходы. Также, Rust сочетает в себе удобство работы с высокоуровневыми абстракциями и низкоуровневое управление ресурсами, что позволяет использовать многозадачность и многопоточность для повышения производительности, при этом гарантируя безопасность данных и предотвращая такие ошибки, как гонки данных или утечки памяти.

Для точного и быстрого расчета столкновений между объектами биосистемы был использован алгоритм Гилберта — Джонсона — Кирти (GJK), который применяет метод симплекса для проверки пересечения двух объектов.

Сам алгоритм начинается с построения пустого симплекса, который затем итеративно ищет новые направления, добавляя точки в симплекс, пока не будет найдено пересечение. Но для повышения скорости вычислений было принято решение на первом этапе проводить проверки пересечения описанных окружностей объектов. И в случае успешного пересечения окружностей применять полный алгоритм GJK. Такой подход позволяет значительно сократить вычислительные ресурсы.

Для повышения производительности программы также была использована многозадачность. Основной поток приложения выполняет симуляцию биосистемы, в то время как дополнительный поток занимается подготовкой и передачей данных о системе через веб-сокеты для дальнейшей их обработки. Этот подход позволяет избежать блокировки основного потока, улучшая общую производительность программы.

Также важным элементом оптимизации является механизм передачи данных только при активном соединении, что позволяет уменьшить накладные расходы.

2.1. Муравьиный алгоритм

Для моделирования поведения объектов в биосистеме был использован Муравьиный алгоритм. Этот алгоритм является одним из методов поиска оптимальных решений, который основан на поведении реальных муравьёв в природе. Муравьиный алгоритм базируется на способности муравьев находить кратчайшие пути к источникам пищи, используя феромоны, которые они оставляют на пути. Система феромонов в алгоритме помогает оптимизировать поиск путей и решений путем усиления или ослабления следов муравьёв.

В контексте симуляции муравьёв, алгоритм используется для моделирования коллективного поведения, взаимодействий между муравьями и принятия решений на основе локальной информации. В данной модели муравьи «общаются» между собой, оставляя феромоны на виртуальной среде, что позволяет им адаптироваться к изменениям в экосистеме и оптимизировать свои действия в зависимости от текущих условий. Такой подход особенно эффективен для моделирования роевых насекомых, где индивидуальное поведение определяется взаимосвязью с окружающими членами группы.

При каждом шаге муравей начинает с того, что выбирает путь на основе вероятности, который зависит от следующих двух факторов: длины пути и интенсивности феромонов (чем больше феромонов на пути, тем более вероятен выбор этого пути). То есть, муравьем с большей вероятностью будет выбран тот путь, который короче и который имеет больше феромонов.

В смоделированной в этой программе симуляции количество феромонов, оставляемых муравьями, изменяется во времени и зависит от следующих факторов:

– Каждый раз, когда муравей проходит по пути, он оставляет базовый уровень феромонов.

– Феромоны имеют тенденцию исчезать со временем. Это моделирует естественное испарение феромонов в реальном мире.

– Когда муравей достигает ресурса, например, пищи, он оставляет больше феромонов на пути, который привёл его к этому ресурсу.

Также для приближения нашей модели к реальной колонии, был добавлен параметр стадности, который регулирует насколько сильно феромоны влияют на поведение других муравьёв. И чем выше будет значение стадности, тем сильнее будет влияние феромонов, оставленных другими муравьями.

Таким образом, феромоны в симуляции функционируют как средство передачи информации между муравьями: чем больше феромонов на пути, тем выше вероятность, что другие муравьи выберут тот же маршрут. Этот процесс способствует поиску кратчайших путей и эффективному распределению ресурсов в экосистеме. Моделирование феромонов в симуляции позволяет не только учитывать их природные свойства, но и отражать адаптивное поведение муравьёв, которое изменяется в зависимости от текущих условий в экосистеме.

3. Технологии для удобной визуализации и использования приложения

Приложение для моделирования биологических систем состоит из трёх взаимосвязанных компонентов: симуляции, основного сервера и клиентского приложения, что позволяет моделировать различные виды биосистем.

Приложение разработано для работы в браузерной среде, что обеспечивает его кроссплатформенность. Благодаря этому приложение можно запускать на любой операционной системе и в любом современном браузере. Основным языком разработки был выбран JavaScript.

Для успешного запуска моделирования пользователю необходимо подготовить карту. Для этого был разработан редактор (рис. 1), обеспечивающий удобное создание ландшафта. После

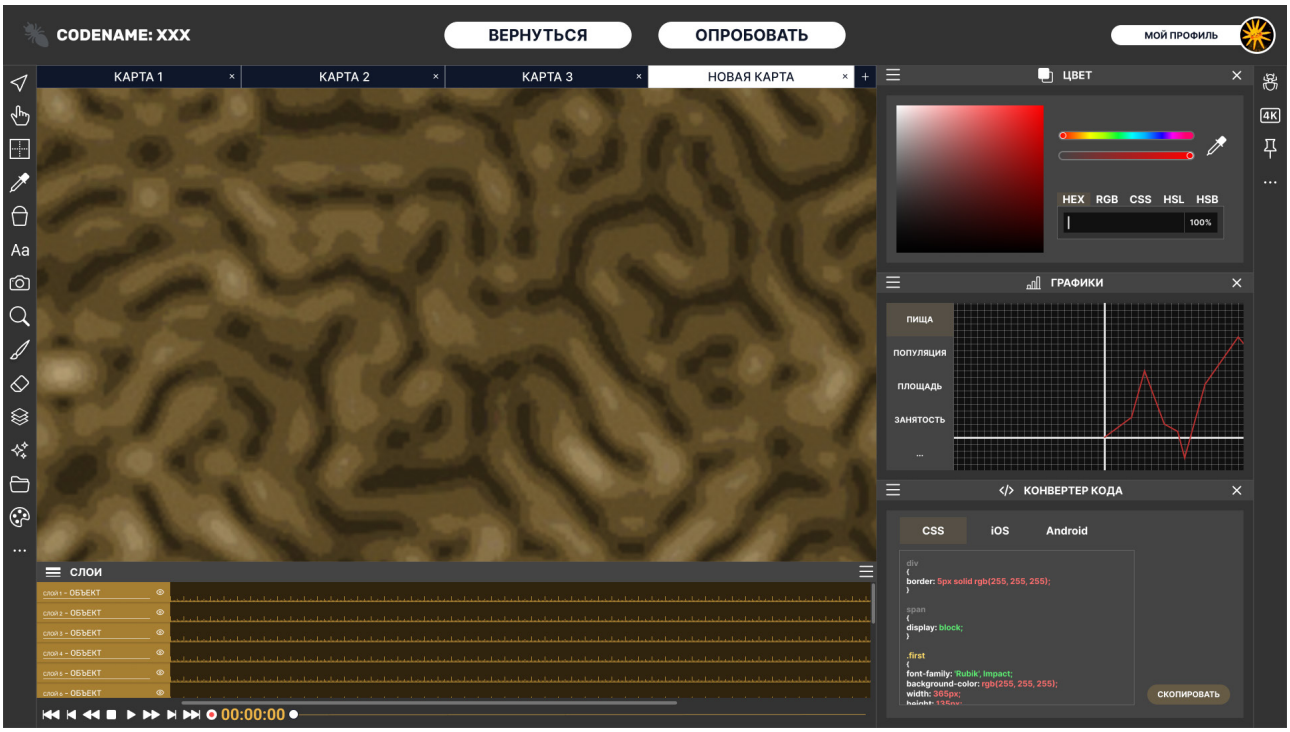


Рис. 1. Редактор карты

создания карты её данные передаются на сервер, в котором происходит моделирование биосистем, где выполняются основные вычисления. Этот сервер постоянно отправляет данные о положении муравьёв на основной сервер, который отвечает за взаимодействие с пользователем и использует TCP-соединение для надежной передачи данных.

Для снижения задержек и стабильной визуализации моделируемой колонии используется UDP протокол, обеспечивающий устойчивость системы к потере пакетов, поскольку пропуск отображаемого кадра не влияет на моделируемую симуляцию.

Для визуального отображения колонии была выбрана растровая графика с использованием Canvas API, поскольку она обеспечивает высокую производительность и стабильность работы системы даже при обработке большого количества движущихся объектов, как, например, на рис. 2 с оптимизированным видом на симуляцию колонии.

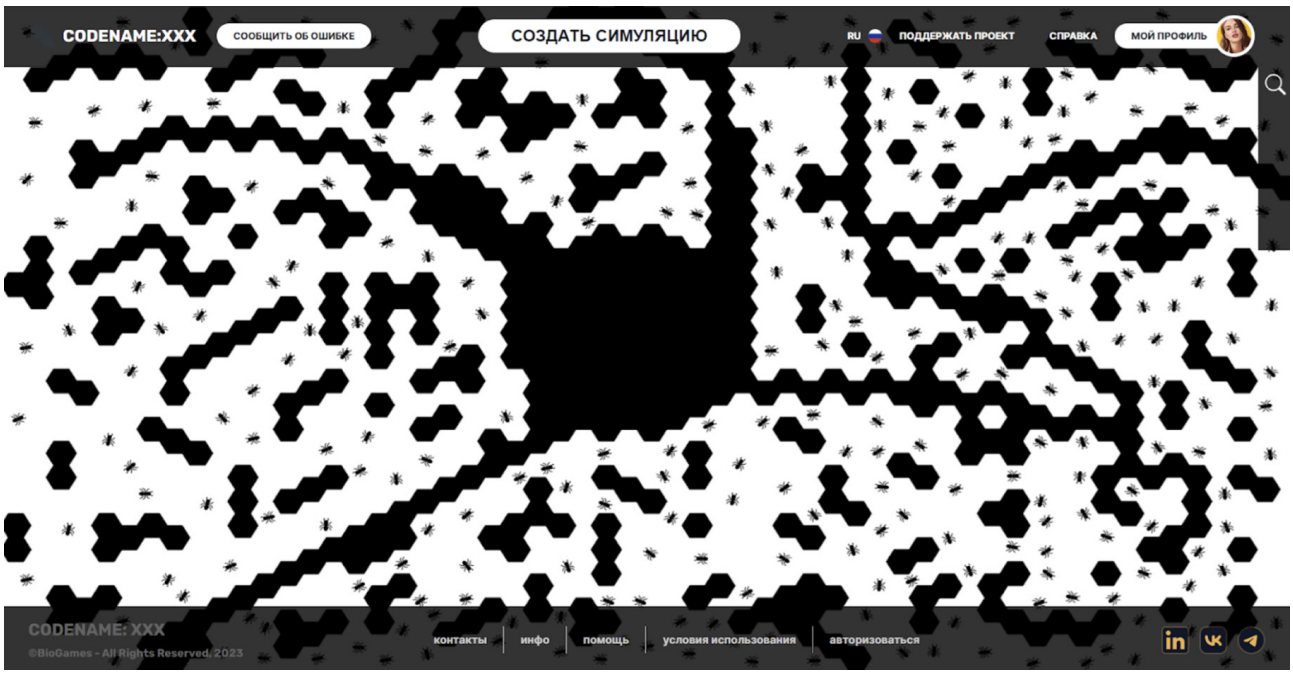


Рис. 2. Оптимизированный вид симуляции колонии муравьёв

Для повышения удобства использования приложения был разработан дизайн, который при обильной экспериментальной информации о моделируемой системе оставался бы удобным для пользователя. Для этого использовалась методология атомарного дизайна, которая подразумевает разбиение интерфейса на более мелкие компоненты (атомы).

4. Результат моделирования экосистем

Разработанное приложение для моделирования биосистем предоставляет возможности, которые трудно или даже невозможно реализовать в реальной природе. Использование компьютерных моделей позволяет ускорить исследование биосистем за счёт более высокой скорости проведения симуляций. Моделирование даёт возможность устанавливать такие начальные условия и параметры, которые сложно или даже невозможно создать в природных условиях.

Заключение

В рамках проведенной работы было создано приложение для моделирования биосистем, которое выступает мощным инструментом для исследования поведения этих систем. Разра-

ботка включает использование современных технологий и методов, что обеспечивает высокую производительность и удобство для пользователя.

Данное приложение позволяет воспроизводить сложные экологические процессы, исследовать влияние различных параметров на развитие экосистем и тестировать гипотезы, которые трудно проверить в реальных условиях. Таким образом, созданный инструмент открывает новые возможности для изучения и понимания взаимодействий в биосистемах, что имеет как научное, так и практическое значение.

Литература

1. Rust lang book – URL: https://doc.rust-lang.ru/book/ (дата обращения: 11.11.2024).

2. Муравьиные алгоритмы. – URL: https://blog.bullgare.com/wp-content/uploads/2019/05/aca.pdf (дата обращения: 03.11.2024).

3. TCP/IP. – URL: https://selectel.ru/blog/tcp-ip-for-beginners/ (дата обращения: 05.11.2024).

4. Клиент-серверное и межсервисное взаимодействие: разбираемся в REST, GraphQL, RPC и WebSocket. – URL: https://habr.com/ru/articles/729528/ (дата обращения: 10.11.2024).

5. Atomic Design by Brad Frost. – URL: https://atomicdesign.bradfrost.com (дата обращения: 08.11.2024).

6. *Дженифер Тидвелл, Чарли Брюэр, Эйнн Валенсия*. Разработка интерфейсов. Паттерны проектирования. 3-е изд. – СПб. : Питер, 2022. – 560 с.

УДК 004.023

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АРХИТЕКТУРНЫХ ПОДХОДОВ К ОБЪЕКТНО-РЕЛЯЦИОННОМУ ОТОБРАЖЕНИЮ В C++ 14

А. Д. Бузуверов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются проблемы объектно-реляционного отображения (ORM) в разработке программного обеспечения, сосредотачиваясь на преимуществах и недостатках различных архитектурных паттернов: Table Gateway, Row Gateway, Active Record и Data Mapper. Рассматриваются цели и задачи ORM, а также трудности, связанные с несоответствием объектной и реляционной моделей данных. Каждый паттерн оценивается с точки зрения сложности реализации, производительности, масштабируемости и тестируемости в контексте C++14.
Ключевые слова: объектно-реляционное отображение (ORM), семантический разрыв, бизнес-логика, доступ к данным, Table Gateway, Row Gateway, Active Record, Data Mapper, CRUD операции.

Введение

Использование объектно-ориентированного подхода в разработке программного обеспечения влечет за собой необходимость решения задачи долговременного хранения объектов. Использование реляционной БД для хранения объектно-ориентированных данных приводит к семантическому разрыву между способами обработки объектов и их хранения [1]. Разработка бизнес-логики приложения часто требует использования разных парадигм: объектно-ориентированного подхода для кода приложения и реляционной модели для базы данных. Это приводит к постоянному переключению между ними при каждом обращении к БД, что влечет за собой либо избыточный код, либо необходимость создания промежуточного слоя. Более эффективным решением является разработка специальной библиотеки, которая выполняет преобразования между объектами приложения и реляционной моделью БД. Такие библиотеки называются ORM (Object-Relational Mapping).

Альтернативой использования объектно-реляционного отображения является хранение объектов в объектно-ориентированных базах данных [2]. Предлагаемый подход устраняет несоответствие между представлениями данных. Однако, поскольку реляционные базы данных по-прежнему широко распространены, эффективное отображение объектно-ориентированных моделей в реляционные остаётся важной задачей.

1. ORM Цели и задачи объектно-реляционного отображения

1.1. Цели и за объектно-реляционного отображения

Цели использования ORM библиотек:
1. Минимизировать ошибки при взаимодействии объектной и реляционной моделей данных.
2. Разделить бизнес-логику от логики доступа к данным.
3. Обеспечить независимость приложения от конкретной базы данных.
4. Уменьшить вероятность нарушения целостности данных.
5. Повысить безопасность работы с данными.
6. Сократить объем кода приложения.

1.2. Задачи объектно-реляционного отображения

Разработка универсального подхода к автоматическому прямому и обратному отображению объектно-ориентированных и реляционных данных связана с трудностями (в англ. литературе — «object-relational impedance mismatch» [1, 3]):

1. Объектная модель, в отличие от реляционной, обладает более высокой степенью детализации и может описывать больше сущностей (классов), чем представлено в соответствующей базе данных таблицами.

2. Наследование — ключевая концепция объектно-ориентированного программирования, отсутствующая в современных реляционных системах управления базами данных.

3. В отличие от реляционных СУБД, использующих первичные ключи для идентификации записей, в объектно-ориентированном программировании идентификация объектов определяется программистом.

4. В объектно-ориентированных системах ассоциации реализуются однонаправленными ссылками, в отличие от реляционных баз данных, где используются внешние ключи. Для создания двунаправленной связи в ООП требуется явное определение ссылки в обеих сторонах.

5. В отличие от эффективного доступа к данным в реляционных базах данных с помощью SQL-запросов и JOIN-операций, навигация по графу объектов в объектно-ориентированных системах может быть неэффективной при извлечении данных из реляционной БД, требуя множества отдельных обращений.

2. Сравнительный анализ возможных подходов

Существует несколько подходов (паттернов) к созданию библиотеки объектно-реляционного отображения (англ. Data Source Architectural Patterns): Table Gateway, Row Gateway, Active Record, Data Mapper [4].

2.1. Table Gateway

В архитектуре программного обеспечения Table Gateway представляет собой шаблон проектирования, инкапсулирующий все операции доступа к данным (CRUD — создание, чтение, обновление, удаление) для конкретной таблицы базы данных. Взаимодействие с базой данных осуществляется посредством вызова методов объекта Table Gateway, что абстрагирует непосредственный контакт с SQL-запросами от остальной части приложения.

Этот подход обладает рядом преимуществ: централизация логики доступа к данным упрощает сопровождение и модификацию кода, повышая его читаемость и поддерживаемость. Повторное использование одного объекта Table Gateway в разных частях приложения сокращает дублирование кода. Наконец, простота создания моков Table Gateway существенно облегчает процесс юнит-тестирования.

Однако использование Table Gateway имеет и свои ограничения. Сложные запросы, не учтенные в первоначальном интерфейсе объекта, могут потребовать модификации самого Table Gateway, что снижает гибкость. Для выполнения ресурсоемких или сложных операций, требующих оптимизированных SQL-запросов, использование единого объекта Table Gateway может быть неэффективным. Наконец, сильная привязка Table Gateway к конкретной таблице базы данных делает его чувствительным к изменениям схемы базы данных; рефакторинг может потребовать значительных изменений в коде. Поэтому применение этого шаблона оптимально для таблиц с относительно простой структурой и запросами.

Table Gateway в C++14 подходит для небольших проектов с простыми моделями данных и где важен контроль над SQL-запросами и требуется высокая производительность. Однако,

для больших и сложных проектов с множеством взаимосвязанных таблиц, лучше рассмотреть более сложные ORM-фреймворки или архитектурные подходы, предлагающие более высокий уровень абстракции и функциональности. Его простота реализации делает его хорошей отправной точкой для изучения принципов ORM, прежде чем переходить к более сложным решениям.

2.2. Row Gateway

Шаблон проектирования Row Gateway представляет каждую запись из таблицы базы данных в виде отдельного объекта, структура которого отражает структуру таблицы. Взаимодействие с базой данных полностью скрыто внутри этих объектов.

К преимуществам Row Gateway относятся простота и интуитивность: разработчик работает с объектами, не используя SQL-запросы напрямую. Это способствует интеграции данных с объектно-ориентированным кодом. В ряде случаев, создание mock-объектов упрощает юнит-тестирование.

Однако, данный подход имеет и существенные недостатки. Внедрение доступа к данным непосредственно в объекты, содержащие бизнес-логику, нарушает принцип разделения ответственности и усложняет разработку и сопровождение кода. Более того, частые обращения к базе данных для получения каждого объекта приводят к снижению производительности приложения, особенно заметному при обработке больших объемов данных и во время тестирования. Поэтому Row Gateway наиболее эффективен для небольших наборов данных и простых приложений, где производительность не является критическим фактором.

Row Gateway в C++14 — это простой и эффективный подход для ORM, идеально подходящий для проектов с простыми схемами данных и небольшим количеством запросов. Однако, для сложных приложений с многочисленными отношениями между сущностями и сложными запросами, Row Gateway может оказаться непрактичным и потребует значительных усилий для поддержания кода. Его лучше рассматривать как один из вариантов в сравнительном анализе, подходящий для конкретных, ограниченных задач.

2.3. Active Record

Шаблон проектирования Active Record представляет собой подход, в котором объект одновременно содержит данные и методы для работы с ними, причем основная часть данных хранится в базе данных. Этот паттерн тесно интегрирует логику доступа к данным с бизнес-логикой объекта.

Его простота и интуитивность делают Active Record привлекательным, особенно для разработчиков с ограниченным опытом работы с базами данных. Код становится более кратким и читабельным, а разработка — быстрее, что особенно ценно для небольших проектов.

Однако, по мере роста и усложнения проекта, преимущества Active Record начинают уступать место недостаткам. Тесная связь данных и логики приводит к снижению поддерживаемости и усложнению модификации кода. Тестирование таких объектов становится сложной задачей, требующей использования моков или других изоляционных техник. Наконец, Active Record часто нарушает фундаментальные принципы объектно-ориентированного проектирования, такие как принцип единственной ответственности и принцип открытости/закрытости, что в долгосрочной перспективе негативно влияет на архитектуру и масштабируемость приложения. Переход на другую СУБД также может потребовать значительных усилий. Таким образом, Active Record подходит для небольших проектов с ограниченной сложностью, но может стать препятствием для больших и сложных систем.

Реализация паттерна Active Record в C++14 для объектно-реляционного отображения (ORM) характеризуется определёнными удобствами и недостатками. Удобство прежде всего заключается в простоте концепции: класс напрямую отражает таблицу базы данных, а его методы — операции CRUD (Create, Read, Update, Delete). Это интуитивно понятно и облегчает начальную разработку.

2.3. Data Mapper

Объектно-ориентированные и реляционные модели данных обладают фундаментальными различиями: объектные модели используют механизмы наследования и коллекций, отсутствующие в реляционных базах данных. В сложных приложениях с богатой бизнес-логикой это различие приводит к несоответствию между объектной моделью и схемой базы данных.

Шаблон проектирования Data Mapper решает эту проблему, создавая промежуточный слой между объектной моделью приложения и базой данных. Этот слой отвечает за преобразование данных между двумя моделями и обеспечивает их независимость друг от друга. Объекты в приложении, использующем Data Mapper, не знают о структуре базы данных, не содержат логики доступа к данным и не работают с SQL-запросами напрямую.

Преимущества Data Mapper очевидны: чёткое разделение логики обработки данных и логики доступа к данным повышает читаемость, поддерживаемость и тестируемость кода. Изменение базы данных или объектной модели не требует изменений в другой части приложения; миграция на другую СУБД сводится к замене Data Mapper. Этот шаблон хорошо масштабируется и подходит для больших и сложных проектов. Data Mapper легко тестируется благодаря возможности изоляции от базы данных и использованию моков. Наконец, один и тот же Data Mapper может использоваться для работы с различными объектами, обеспечивая единообразие интерфейса.

Однако, использование Data Mapper имеет и некоторые недостатки. Внедрение этого паттерна более сложно, чем использование более простых подходов, таких как Active Record; потребуется больше кода и времени на разработку. Дополнительный уровень абстракции может незначительно снизить производительность. Наконец, потребуется время на освоение паттерна для разработчиков, не знакомых с ним. Таким образом, Data Mapper — мощный инструмент для больших и сложных проектов, но требует тщательного взвешивания сложности внедрения и потенциальных преимуществ.

Data Mapper в C++14 представляет собой элегантный и гибкий подход к ORM, если приоритетом является контроль и производительность. Он подходит для проектов, где критична оптимизация запросов и требуется глубокое понимание работы с базой данных. Однако, для быстрой разработки и проектов с простой моделью данных, более автоматизированные ORM-фреймворки могут показаться более удобными, несмотря на возможную потерю производительности и гибкости.

Заключение

Таким образом, проведенный сравнительный анализ архитектурных подходов к объектно-реляционному отображению (ORM) демонстрирует, что каждый паттерн имеет свою нишу и может быть эффективным в определенных контекстах. Отличия в производительности, сложности реализации и степени абстракции указывают на отсутствие универсального решения.

В контексте C++14 Table Gateway и Row Gateway подходят для небольших проектов с простыми моделями данных, предлагая простоту реализации и контроль над SQL-запросами, но ограничены в масштабируемости и сложности обрабатываемых данных. Active Record, несмотря на свою интуитивность и быстроту разработки, страдает от недостатков в масштабируе-

мости и тестируемости по мере роста проекта. Data Mapper, являясь наиболее сложным в реализации, оптимален для крупных проектов с богатой бизнес-логикой, обеспечивая высокую гибкость, масштабируемость и тестируемость за счет четкого разделения ответственности. Выбор конкретного шаблона должен основываться на компромиссе между простотой реализации, производительностью и требованиями к масштабируемости и поддерживаемости проекта.

Литература

1. *Johnson R.* J2EE Design and Development // Wrox. – 2002. – P. 255–256.

2. *Dietrich S. W., Urban S. D.* Fundamentals of Object Databases: ObjectOriented and Object-Relational Design, – Morgan & Claypool Publishers, 2011. – P. 66–100.

3. *Bernard E.* «The Object-Relational Impedance Mismatch,» [В Интернете]. Available: http://hibernate.org/orm/what-is-an-orm/#the-object-relationalimpedance-mismatch.

4. *Fowler M.* Patterns of Enterprise Application Architecture. – Addison-Wesley, 2002.

УДК 004.42

СРАВНЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ БИБЛИОТЕК AR FOUNDATION И VUFORIA

Д. О. Бутузова, Е. В. Трофименко

Воронежский государственный университет

Аннотация. Дополненная реальность (AR) представляет собой технологию, которая позволяет интегрировать виртуальные объекты в реальное пространство, обеспечивая новые формы взаимодействия с окружающим миром. В статье рассматриваются две библиотеки для разработки AR-приложений в Unity: AR Foundation и Vuforia. Оцениваются их возможности, особенности безмаркерного трекинга, а также производительность на различных устройствах. Сравнение этих библиотек помогает выбрать оптимальное решение для различных типов AR-приложений, учитывая специфику проекта и требования к совместимости с устройствами.

Ключевые слова: дополненная реальность, augmented reality(AR), Unity, AR Foundation, Vuforia, безмаркерный трекинг, кроссплатформенность, производительность, распознавание поверхностей, разработка AR-приложений.

Введение

Дополненная реальность(AR) — это технология, которая в реальном времени совмещает виртуальные объекты с элементами физического мира. В отличие от виртуальной реальности(VR), которая полностью погружает в искусственную среду, AR позволяет расширить реальное окружение. AR широко используется в играх и мобильных приложениях, улучшая пользовательский опыт и предоставляя новые формы взаимодействия с окружающей средой.

В игровой индустрии AR открывает новые возможности для создания интерактивных приложений, где игроки могут взаимодействовать с виртуальными объектами, помещенными в их физическое окружение. Unity [1, 2] — один из самых популярных движков для разработки игр и приложений, предоставляет мощные инструменты для создания приложений с дополненной реальностью.

1. Библиотеки для работы с безмаркерной технологией в AR в Unity

Безмаркерная технология дополненной реальности предоставляет возможность определять и отслеживать поверхности, объекты и их перемещения без использования маркеров [3]. Она опирается на функции пространственного распознавания и трекинга, что открывает широкий спектр возможностей для взаимодействия с окружающим миром. Благодаря этому пользователи могут размещать виртуальные объекты в реальном пространстве, взаимодействовать с ними и наблюдать, как они динамически адаптируются к изменениям окружения [4, 5].

Для отслеживания положения и ориентации устройства в реальном пространстве, и правильного интегрирования виртуальные объекты с реальным миром реализован процесс трекинга. Это ключевая часть технологии AR, которая позволяет виртуальным объектам, таким как 3D-модели, текстуры и анимации, оставаться стабильно привязанными к реальным объектам или определённым точкам в окружающем пространстве.

Трекинг без маркеров использует данные с устройства, такие как GPS, акселерометры, гироскопы и камеры, чтобы отслеживать изменения в положении и ориентации. Это позволяет отслеживать объекты и пространства без необходимости в явных маркерах.

В рамках данной статьи будет подробно рассмотрена безмаркерная технология. Для сравнения, существует и маркерная технология, где размещение виртуальных объектов зависит от специальных меток, размещённых в физическом пространстве.

1.1. Библиотека AR Foundation

AR Foundation [6, 7] — это кроссплатформенная библиотека Unity, упрощающая создание и развертывание AR-приложений на различных платформах с использованием единого API, что делает разработку удобнее и быстрее. AR Foundation поддерживает безмаркерную технологию, в том числе распознавание плоскостей, 3D-объектов и лиц. Простота настройки и широкие возможности трекинга поверхностей и объектов позволяют эффективно использовать AR Foundation для самых разных задач.

Главное преимущество AR Foundation — это кроссплатформенность. Библиотека поддерживает устройства на iOS и Android, а также совместима с актуальными версиями ARKit (для iOS) и ARCore (для Android). Она легко интегрируется в Unity, что ускоряет процесс разработки.

Однако у AR Foundation есть и недостатки. Она не полностью поддерживает устаревшие устройства, а её функциональность зависит от возможностей ARKit и ARCore, что может ограничивать разработчиков в использовании некоторых функций.

1.2. Библиотека Vuforia

Vuforia [8] — это платформа для разработки AR, предназначенная для мобильных устройств и очков дополненной реальности. Изначально она разрабатывалась как маркерная система, но со временем получила поддержку безмаркерной технологии, включая распознавание плоскостей и трекинг объектов.

Vuforia предлагает расширенные возможности трекинга, совмещая маркерные и безмаркерные подходы. Она обеспечивает высокую точность отслеживания объектов, поддерживая различные форматы изображений и моделей. Библиотека также включает функции трекинга плоскостей, пространственного позиционирования и распознавания 3D-объектов.

Среди преимуществ Vuforia — поддержка большего числа устройств, включая некоторые устаревшие модели, и возможность интеграции с платформами и библиотеками, которые недоступны в AR Foundation.

Однако у Vuforia есть и недостатки. Поддержка новых функций ARKit и ARCore ограничена, а производительность на современных устройствах может уступать AR Foundation. Кроме того, для доступа к полному набору возможностей требуется приобретение платной лицензии.

1.3. Сравнение библиотек AR Foundation и Vuforia

Сравнение двух библиотек по критериям: доступность платформ для работы приложения, поддержки безмаркерной технологии, точности трекинга, качество распознавания поверхностей, возможность кастомизации, вариантов лицензий и производительности приведено в табл. 1.

Выбор между библиотеками AR Foundation и Vuforia зависит от специфики проекта и целевых устройств. AR Foundation, интегрированная с Unity и использующая возможности ARKit и ARCore, является отличным выбором для приложений, которые требуют поддержки современных устройств с высокой точностью трекинга и безмаркерной технологии. Она идеально подходит для приложений, ориентированных на мобильные платформы iOS и Android.

Vuforia, в свою очередь, предоставляет более широкие возможности для использования маркеров и 3D-объектов, а также поддерживает различные устройства, включая очки дополненной реальности. Она подходит для более универсальных решений, в том числе для старых устройств, и предоставляет большую гибкость в кастомизации. Однако, для доступа к полной функциональности необходимо приобретение платной версии, что может быть ограничением для некоторых пользователей.

Таблица 1

Критерий	AR Foundation	Vuforia
Поддержка платформ	iOS, Android (через ARKit и ARCore)	iOS, Android, очки дополненной реальности
Безмаркерная технология	Отличная, поддерживает плоскости и лица	Хорошая, но ориентирована больше на маркеры
Точность трекинга объектов	Зависит от ARKit/ARCore, высокое качество	Широкий спектр, включая маркеры, 3D-объекты
Качество распознавания поверхностей	Очень точное для новых устройств	Универсальное, подходит для старых и новых
Гибкость и кастомизация	Ограничено платформами	Высокая, можно использовать в различных AR-решениях
Лицензирование	Бесплатно с Unity	Бесплатно с ограничениями, полная версия платная
Производительность	Высокая на новых устройствах	Зависит от устройства, может требовать больше ресурсов

Таким образом, AR Foundation лучше подходит для современных устройств и приложений с фокусом на мобильные платформы и безмаркерные технологии, в то время как Vuforia предоставляет больше возможностей для кастомизации и поддержки широкого спектра устройств, но с учетом платных лицензий для полного функционала.

2.4. Сравнение производительности библиотек AR Foundation и Vuforia

Для оценки производительности были созданы два приложения с идентичным функционалом, использующие AR Foundation и Vuforia. Оба приложения включали реализацию распознавания поверхностей с применением стандартных функций библиотек, визуализацию обнаруженных поверхностей, а также возможность размещения и перемещения 3D-объекта по распознанной поверхности. Пример работы приложения изображен на рис. 1.

Рис. 1. Пример работы приложения

С помощью Unity Profiler были измерены различные критерии производительности приложений, такие как средний FPS(частота обновления экрана), стабильность трекинга, среднее время обнаружения первой плоскости, потребление ресурсов CPU и GPU, точность позиционирования, использованная память и использованная память для хранения текстур. Также путем вывода логов в файл было рассчитано среднее время распознавания первой поверхности. Данные, полученные в процессе тестирования приложений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Данные тестирования

Критерий	AR Foundation	Vuforia
Средний FPS	30 FPS	30 FPS
Стабильность трекинга	Высокая стабильность	Средняя стабильность
Среднее время обнаружения плоскости (сек)	15	12
CPU (мс/кадр)	33.85	56
GPU (мс/кадр)	1.72	1.92
Точность позиционирования	Высокая точность	Хорошая точность
Использованная память(MB)	260	194
Использованная память для хранения текстур(MB)	20.4	29.3

AR Foundation обеспечивает более стабильный трекинг и высокую точность позиционирования, но требует больше ресурсов памяти и нагрузки на CPU.

Vuforia быстрее распознает поверхности и использует меньше оперативной памяти, но имеет чуть менее стабильный трекинг и меньшую точность позиционирования.

Память текстур у Vuforia выше, что может указывать на большую нагрузку на графическую подсистему.

Обе библиотеки — AR Foundation и Vuforia — имеют свои сильные и слабые стороны, и выбор между ними должен зависеть от специфики проекта.

Заключение

AR Foundation идеально подходит для приложений, ориентированных на новые устройства с поддержкой ARKit и ARCore. Она обеспечивает высокую производительность, точность и стабильность трекинга на современных устройствах. Библиотека особенно эффективна для задач безмаркерного трекинга, что делает её отличным выбором для приложений, требующих высокой точности и стабильности работы.

Vuforia, в свою очередь, предоставляет большую гибкость и поддерживает широкий диапазон устройств, включая старые модели и AR-очки. Это делает её лучшим вариантом для проектов, где важно обеспечить совместимость с различными типами устройств. Также Vuforia поддерживает как маркерный, так и безмаркерный трекинг, что позволяет кастомизировать приложение под разные требования. Однако её производительность и точность на новых устройствах могут быть ниже по сравнению с AR Foundation.

Если основным приоритетом является высокая производительность и поддержка новых устройств, то лучшим выбором будет AR Foundation. В случае, когда требуется поддержка различных типов устройств и гибкость в трекинге, включая маркерный AR, предпочтительнее использовать Vuforia.

Литература

1. Unity Technologies / Unity. – URL: https://unity.com/ (дата обращения: 08.10.2024).

2. AR development in Unity/ Unity. – URL: https://docs.unity3d.com/2023.1/Documentation/Manual/AROverview.html (дата обращения: 10.10.2024).

3. Augmented Reality and Virtual Reality: New Trends in Immersive Technology / M. Claudia tom Dieck, Timothy H. Jung, Sandra M. C. Loureiro. – 1-е изд. – Берлин : Springer, 2021. – 325 с.

4. Robert Wells. Unity 2020 By Example: A project-based guide to building 2D, 3D, augmented reality, and virtual reality games from scratch / Robert Wells. – Бирмингем : Packt Publishing, 2020. – 676 с.

5. Micheal Lanham. Augmented Reality Game Development / Micheal Lanham. – Бирмингем : Packt Publishing, 2017. – 334 с.

6. Введение в ARFoundation / Habr. – URL: https://habr.com/ru/companies/otus/articles/688306/ (дата обращения: 10.10.2024).

7. AR Foundation / Unity. – URL: https://docs.unity3d.com/Packages/com.unity.xr.arfoundation@6.0/manual/index.html (дата обращения: 10.10.2024).

8. Vuforia Developer Portal. – URL: https://developer.vuforia.com/library/unity-extension/working-vuforia-engine-and-unity/ (дата обращения: 19.10.2024).

УДК 004.9, 628.1

АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ ВОДОСНАБЖЕНИЯ

В. С. Войнова

Астраханский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация. В статье проведен сравнительный анализ программ, используемых для проектирования и расчета систем водоснабжения. Исследование позволило выявить преимущества и недостатки каждой программы, а также определить их эффективность в решении конкретных задач. Результаты исследования будут использоваться для разработки информационной системы для проектирования водопроводных сетей.
Ключевые слова: учёт расхода воды, расчётная модель, функциональные особенности, решение задач проектирования систем водоснабжения.

На сегодняшний день проектирование систем водоснабжения достаточно трудоёмкое и ресурсозатратное занятие. Люди долгое время проектировали все эти системы вручную, используя таблицы Exel или бумажные носители, что создавало определённые неудобства: постоянно приходится ссылаться на нормативные документы, на бумаге можно было легко ошибиться с расчётами, а файлы Exel легко поддаются изменениям, что тоже сказывается на точности расчётов, и оба типа хранения данных могут легко потеряться.[1] Ввиду большой трудоёмкости расчётов были разработаны различные цифровые инструменты для расчёта и проектирования водопроводных сетей, такие как ZuluHydro, УМНАЯ ВОДА и WaterSupply. Рассмотрим их функциональные особенности, достоинства и недостатки.

Сравнительный анализ проводился по ряду критериев:

– кроссплатформенность,
– доступ пользователя к ИС,
– техническая поддержка,
– функциональность ИС,
– тип лицензии.

Эти критерии наиболее важны для определения удобства в работе пользователя в системе, поэтому в данном сравнительном анализе описанные выше информационные системы будут рассматриваться с позиции каждого из перечисленных критериев.

ZuluHydro — это набор программ для расчетов водопроводных сетей, предназначенных для решения различных отраслевых задач [2]. ZuluHydro доступна только на операционных системах Windows и устанавливается локально на каждый компьютер, из-за чего программа не доступна пользователям, работающим на Linux, Mac OS, Android, iOS.

В функционал данной программы входит создание расчетной математической модели сети, выполнение паспортизации сети. На основе созданной модели возможно решение информационных задач, задач топологического анализа и выполнение различных гидравлических расчетов. ZuluHydro позволяет рассчитывать водопроводную сеть большого объема и любой сложности. Расчету подлежат тупиковые и кольцевые сети водоснабжения, в том числе с оптимизирующими насосными станциями и дросселирующими устройствами, работающие от одного или нескольких источников [2].

Построение электронных моделей систем водоснабжения включает применении следующих этапов [3]:

1. Разработка расчетной схемы модели: выбор типа расчетной схемы (укрупненной или подробной) в зависимости от поставленных задач, формировании топологии сети в про-

граммный комплекс, создании электронных баз данных характеристик элементов для проведения гидравлических расчетов.

2. Разработка балансовой характеристики модели заключается в разработке балансовой схемы в соответствии выбранному типу расчетной схемы. На данном этапе проводится анализ балансов потребления воды в городе.

3. Проведение предварительных расчетов системы. Целью предварительных расчетов является определение потокораспределения в водопроводной сети, подачи и напора источников при известных диаметрах труб и отборах воды в узловых точках.

4. Калибровка гидравлической модели. Калибровка гидравлической модели уточняет математическую модель сети с использованием измерений, полученных на водопроводной сети. В результате калибровки подбираются новые гидравлические сопротивления и коэффициенты утечек для участков сети так, чтобы математическая модель давала минимальные отклонения от давлений в контрольных точках, распределяла суммарные утечки по участкам сети и обеспечивала баланс расходов между источниками.

Интерфейс программы для проектировщика водопроводных сетей, который не обладает высокими навыками работы с компьютером, сложен и загромождён избыточными функциями, не предназначенными напрямую для расчёта.

Программный продукт является платным. Для бесплатного пользования программой с официального сайта скачивается демо-версия программы на рабочий компьютер, но она имеет множество ограничений по количеству параметров, что уже не подходит для решения более крупных задач. Обеспечивается ежегодная платная техническая поддержка [4].

Программа для проектирования систем внутреннего водопровода и канализации зданий УМНАЯ ВОДА зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ с 25 ноября 2016 г. [5].

В отличии от ZuluHydro, в программе УМНАЯ ВОДА можно работать как через браузер в веб-версии программы, так и через клиентское приложение. Однако «УМНАЯ ВОДА» не является самостоятельным приложением: работа в этой программе осуществляется через тонкий клиент 1С.

Основной функционал программы — это создание «одного окна», в котором будут выполняться все необходимые расчёты в соответствии с нормативно-технической документацией. Как и ZuluHydro в УМНОЙ ВОДЕ имеются функции, которые являются избыточными для пользователя, например, санитарный расход воды в секунду, а не в час [6].

УМНАЯ ВОДА ориентирована на расчет внутренних систем водоснабжения и позволяет проектировать:

1) хозяйственно-питьевой водопровод,
2) противопожарный водопровод,
3) хозяйственно-противопожарный водопровод,
4) бытовая канализация,
5) дождевая канализация (внутренний водосток).

Информационная система «УМНАЯ ВОДА» в режиме онлайн позволяет выполнять мониторинг уровня и расхода воды по каналу и отводу. Путем нажатия на ярлык дислокации водного объекта достигается автоматический учет расхода воды. В данной программе моделируется зарастание трубопроводов, приводящее к увеличению потерь напора, производится балансировка циркуляционных колец, осуществляется подбор необходимого оборудования, материалов и их специфицирование. Гидравлические расчеты выполняются не по табличным значениям, а по аналитическим формулам, которые наиболее точно описывают физические зависимости.

Сформированные отчеты сохраняются в форматах .doc/docx, .xls/xlsx или .pdf [7]:

– баланс водопотребления и водоотведения;
– спецификация оборудования и материалов;

– паспорт системы ГВС / ХВС;
– расчетные расходы воды;
– гидравлический расчет в режиме водоразбора;
– тепловой расчет;
– гидравлический расчет в режиме циркуляции;
– настройка балансировочных клапанов.

Пользователю доступен пробный период 1,5 месяца, по окончании которого функционал по выполнению расчетов становится ограниченным.

WaterSupply относится к типу программ «Технический расчет» (ТП) и создан для расчета различных инженерных проектов. В отличии от программы УМНАЯ ВОДА, WaterSupply доступна только для пользователей ОС Windows и устанавливается локально на компьютер, также как ZuluHydro.

Основной функционал программы основан на положении СНиП 2.04.01-85 [8] и реализует его основные пункты для гидравлического проектирования водопроводных сетей внутри зданий. Для заданной конфигурации сети (известными величинами считаются длины участков, материал и диаметры труб в первом приближении, характер водопотребления, свободные напоры у водоразборной арматуры, количество потребителей, а также количество и места расположения водоразборной арматуры) определяется требуемый напор на вводе. Также программа предоставляет возможность назначения диаметров участков в соответствии с «экономичными» скоростями движения воды [9].

В WaterSupply реализована возможность определения необходимого напора воды для конкретной конфигурации водопроводной сети. Конфигурация сети определяется в программе выбором значений следующих параметров:

1) длина участка трубы;
2) материал труб;
3) диаметр труб в первом приближении;
4) характер потребления воды;
5) свободные напоры водоразборной арматуры;
6) количество потребителей;
7) количество водоразборной арматуры и ее расположение в сети.

С целью оптимизации скоростей движения воды предусмотрена возможность изменения диаметра участков труб для готовой схемы.

В отличии от рассмотренных выше программ, WaterSupply обновляется и не имеет технической поддержки. Информационная система имеет устаревший интерфейс и ограниченный функционал, например, реализован расчет общего расхода воды, при этом нельзя выполнить просмотр результатов среднесуточного расхода воды.

Для бесплатного пользования WaterSupply доступна только демо-версия, которая включает в себя возможность расчета данных лишь для «контрольной сети» одного типа водопотребителей [10].

Проведенный сравнительный анализ позволил выявить как достоинства, так и недостатки рассмотренных информационных систем. Результаты анализа представлены в табл. 1.

В результате проведенного исследования были рассмотрены три информационные системы для проектирования водопроводных сетей. Каждая система обладает своими особенностями, преимуществами и недостатками. По результатам анализа была актуализирована и поставлена задача по разработке информационной системы для автоматизации расчетов водопотребления, которая будет учитывать выявленные недостатки рассмотренных выше программ и позволит проектировщикам более качественно решать задачи проектирования систем водоснабжения.

Таблица 1

Результат сравнительного анализа ZuluHydro, УМНАЯ ВОДА, WaterSupply

Название ИС / Критерии	ZuluHydro	УМНАЯ ВОДА	WaterSupply
Компания разработчик (правообладатель)	Политерм	Элита	Istok
Кроссплатформенность	отсутствует	присутствует	отсутствует
Доступ пользователя	локально	локально, веб	локально
Техническая поддержка	реализуется	реализуется	не реализуется
Функциональность	избыточная	избыточная	ограничена
Лицензия	платно, цена уточняется у компании, демо-версия	платно: 1 400 – 36 000р., пробный период 1,5 месяца	платно, цена уточняется у компании, демо-версия

Литература

1. Разработка гидравлических электронных моделей водоснабжения // Научная электронная библиотека ELibrary.Ru : [сайт]. – 2000–2024. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=57182400 (дата обращения: 28.10.2024).

2. Расчет систем водоснабжения – ZULUHYDRO 9.0 («ZULUHYDRO 9.0») // Научная электронная библиотека ELibrary.Ru : [сайт]. – 2000–2024. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=45823250 (дата обращения: 28.10.2024).

3. 06.12-19И.292 Применение современных информационных технологий при расчете гидравлического удара в системах водоснабжения // Научная электронная библиотека ELibrary.Ru : [сайт]. – 2000–2024. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=9800504 (дата обращения: 28.10.2024).

4. Сайт разработчиков «Политерм». ZuluHydro : официальный сайт. – Санкт-Петербург, 1999–2024. – URL: https://www.politerm.com/products/hydro/zuluhydro/ (дата обращения: 28.10.2024).

5. «УМНАЯ ВОДА» : сайт группы компаний «CSoft». – Санкт-Петербург, 2002–2024. – URL: https://www.csoft.ru/soft/umnaya-voda/umnaya-voda.html (дата обращения: 28.10.2024).

6. Оптимизация управления водными ресурсами с использованием системы «УМНАЯ ВОДА» в ирригационных системах: методы и результаты // Научная электронная библиотека ELibrary.Ru : [сайт]. – 2000–2024. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=59462825 (дата обращения: 05.11.2024).

7. Сайт программы «УМНАЯ ВОДА» : официальный сайт. – Санкт-Петербург, 2024 – URL: https://smartwater.su/ (дата обращения: 05.11.2024).

8. СНиП 2.04.01-85 «Внутренний водопровод и канализация зданий» – М. : Министерство строительства РФ, 1996.

9. Программа для расчета гидравлических характеристик внутреннего водопровода «WaterSupply» : сайт компании «Агроводком». – Москва, 2003–2024 –URL: https://clck.ru/3ERYaT (дата обращения: 05.11.2024).

10. Сайт программы «WaterSupply» : официальный сайт. – Санкт-Петербург, 2024. – URL: https://www.kommproekt.ru/index.php/blog/item/157-istokcalc-watersupply (дата обращения: 05.11.2024).

УДК 004.512

РАЗРАБОТКА МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ КЛИНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПРИ ЭНДОСКОПИЧЕСКОМ ГЕМОСТАЗЕ ЯЗВЕННЫХ ГАСТРОДУОДЕНАЛЬНЫХ КРОВОТЕЧЕНИЙ

А. И. Воротилина, И. Л. Каширина

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается разработка мобильного приложения для поддержки принятия врачебных решений при эндоскопическом гемостазе язвенных дуоденальных кровотечений. Приложение включает рекомендательную систему, основанную на дереве решений, которая помогает в принятии клинических решений и диагностике типа кровотечения. Система предоставляет врачам рекомендации по лечению, а также информацию о необходимом оборудовании для проведения процедуры. В приложении реализованы модули для обучения, оказания медицинской помощи, оценки качества и справочной информации. Планируется внедрение приложения в медицинские учреждения Воронежа.

Ключевые слова: мобильное приложение, эндоскопический гемостаз, рекомендательная система, клинические решения, язвенные гастродуоденальные кровотечения.

Введение

Внутренние желудочные кровотечения представляют собой серьёзное медицинское состояние. Современные методы диагностики и лечения внутренних желудочных кровотечений разнообразны и зависят от тяжести состояния, причины кровотечения и общего состояния пациента. Однако, несмотря на развитие медицинских технологий, процесс принятия решений врачами остаётся сложным и требует глубоких знаний и опыта.

В Российской Федерации язвенной болезнью страдает 1,7–5 % населения, причем количество пациентов с кровотечениями из хронических язв желудка и 12-перстной кишки составляет 90–160 человек на 100 000 населения и имеет отчетливую тенденцию к увеличению [1]. Несмотря на значительные успехи хирургии и анестезиологии, летальность при острых желудочно-кишечных кровотечениях составляет 5–14 %, а при рецидиве возрастает до 30–40 % и не имеет тенденции к уменьшению [2].

Принятие клинических решений при эндоскопическом гемостазе язвенных гастродуоденальных кровотечений связано с рядом сложностей. Точность диагностики зависит от субъективной оценки врача и опыта в интерпретации эндоскопических изображений, а также ограниченное время на принятие решения в экстренных ситуациях создает давление на врача, что увеличивает риск ошибок.

Описанные факторы подчеркивают важность разработки вспомогательных инструментов, основанных на современных технологиях. Мобильное приложение, оснащённое рекомендательной системой предоставить врачам своевременные и точные рекомендации по лечению и помочь в диагностике типа кровотечения, улучшая тем самым качество медицинской помощи.

Мобильные технологии играют все более важную роль в медицине, предоставляя клиницистам доступ к необходимой информации и инструментам в режиме реального времени. Современные технологии позволяют улучшить точность диагностики, автоматизировать процессы сбора данных и повысить скорость принятия клинических решений. Поддержка клиницистов через мобильные приложения особенно важна в условиях необходимости быстрого нахождения оптимальной тактики лечения.

Целью исследования является разработка и внедрение мобильного приложения для поддержки принятия врачебных решений в процессе эндоскопического гемостаза.

1. Материалы и методы

Разработка дерева решения для грамотной рекомендательной системы имеет критическое значение для нескольких аспектов медицинской практики, особенно в контексте лечения внутренних желудочных кровотечений. В результате взаимодействия с группой квалифицированных врачей Воронежской области описана рекомендательная система для поддержки принятия врачебных решений, а также составлено дерево решений для мобильного приложения.

Все рекомендации имеют идентификационный номер. Из конечной рекомендации при нажатии кнопки «продолжить» совершается переход в блок оценки приложения. При помощи кнопки назад из любой странички (кроме стартового окна) совершается переход либо на предыдущую рекомендацию, либо на блок выбора, из которого был совершен переход на текущую страницу. Примеры блоков дерева решений представлены на рис. 1–2.

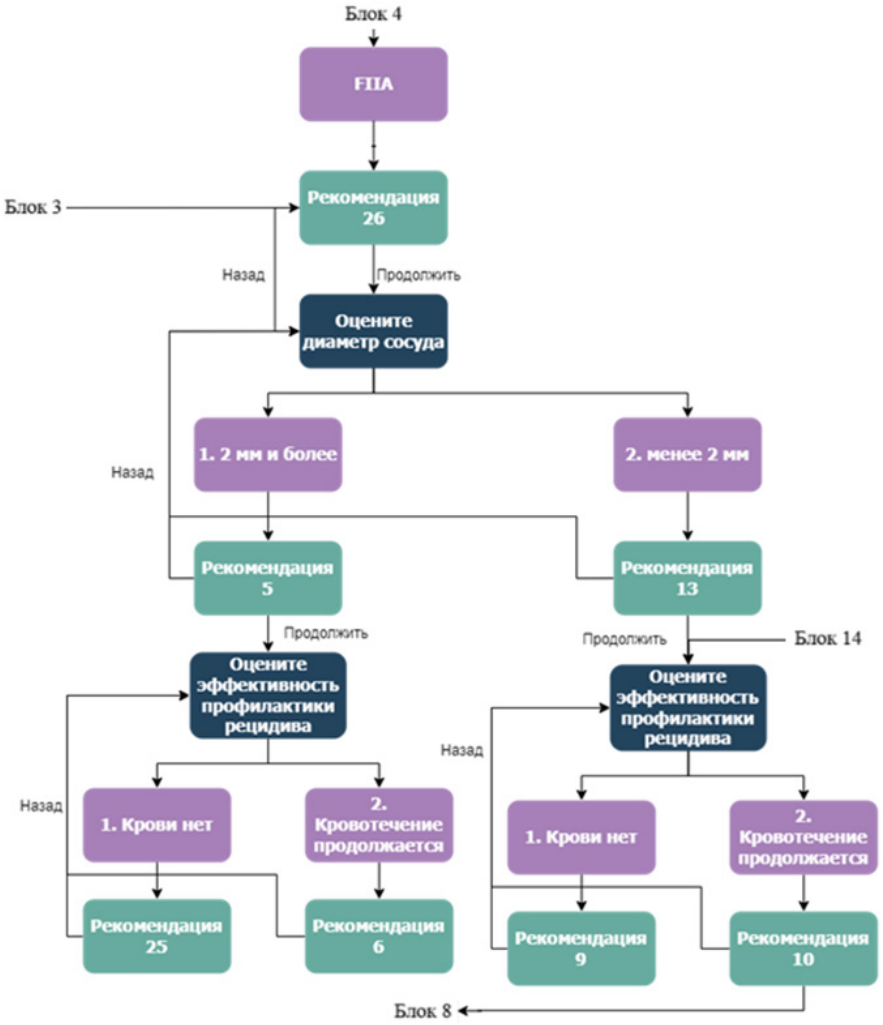


Рис. 1. Пример блока дерева решений

Для разработки мобильного приложения выбран фреймворк React Native языка программирования JavaScript. Одним из ключевых преимуществ React Native [3] является возможность разработки приложений для iOS и Android с использованием единого кода. Выбор React Native для разработки мобильного приложения предоставляет множество преимуществ, таких как высокая производительность, богатая экосистема, интеграция с нативным кодом, возможность повторного использования кода и улучшенное пользовательское взаимодействие. Для создания React Native проекта использовался Expo CLI [4].

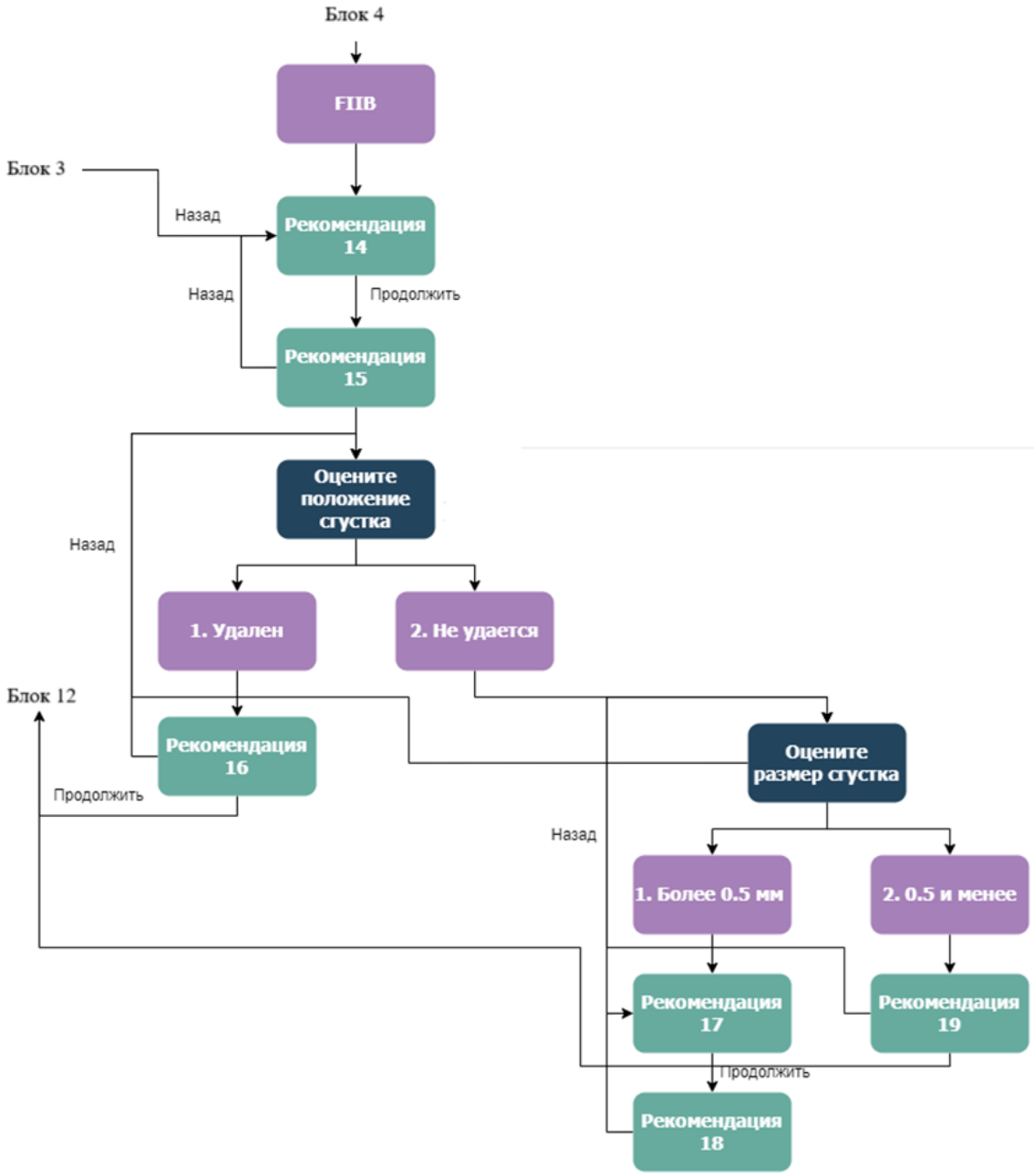


Рис. 2. Пример блока дерева решений

Основываясь на дереве решения и специфике проекта, были определены следующие ключевые особенности дизайна мобильного приложения:

1. Header с заголовком экрана или содержанием вопроса;
2. Кнопки «назад» и «продолжить», обеспечивающие удобную навигацию внутри мобильного приложения;
3. Возможность заполнять данные о медицинской организации;
4. Возможность оставлять отзыв об алгоритме рекомендательной системе;
5. Возможность изменять цветовую схему мобильного приложения.

Исходя из этого был разработан макет интерфейса мобильного приложения.

На стартовом экране приложения отображены название проекта и кнопка «продолжить», осуществляющая переход на главную страницу приложения. Также на стартовом экране расположен переключатель, который позволяет сменить цветовую тему приложения. На главной

странице приложения осуществляется выбор режима работы приложения. Каждый модуль приложения выполнен в едином стилистическом оформлении.

Приложение включает опрос, разработанный для сбора мнений врачей о функциональности и значимости алгоритма рекомендательной системы. Из ответа пользователя формируется email письмо на почту врача, который анализирует получаемые данные.

Для реализации описанных функциональных возможностей разработаны следующие компоненты: Footer, Header, Info, BackButton, LaterButton, MenuButton, NextButton, QAForm, SaveAnswers, RecommendationStyle, StartBox.

Все рекомендации хранятся в файле формата json, который содержит информацию об идентификационном номере рекомендации и текст рекомендации.

На базе компонент реализованы экраны EquipmentScreen, InformationScreen, StartScreen, HomeScreen, а также страницы типов QAScreens, QuestionsScreens, RecommendationScreens.

Мобильное приложение имеет разветвленную логику принятия решений и большое количество экранов, поэтому React Navigation выступает ключевым инструментом для обеспечения навигации внутри приложения. Параметры передаются через метод navigate, так как это позволяет динамически адаптировать содержимое экранов на основе пользовательского ввода и минимизирует дублирование кода. Такая архитектура облегчает добавление новых экранов и маршрутов.

Интеграция React Navigation поддерживает централизованное управление навигацией при помощи файла Navigation, который содержит в себе настройки и информацию о всех экранных переходах.

2. Результаты и обсуждение

Когда пользователь открывает приложение, он видит стартовое окно, на котором у него есть возможность изменить цветовую схему. Все экраны приложения отображаются корректно, навигация осуществляется согласно дереву решения. Пример экрана приложения изображен на рис. 3.

В мобильном приложении реализованы следующие основные модули:

1. Модуль «Обучение» позволяет ознакомиться с алгоритмом и изучить клинические рекомендации, сформированные на основе симптомов пациента;

2. Модуль «Оказание медицинской помощи» запрашивает данные о названии медицинской организации, номере истории болезни пациента и кратком анамнезе, а после открывает доступ к алгоритму поддержки принятия решений. Пользователь отвечает на вопросы с выбором вариантов и получает таким образом полный список рекомендаций для текущего пациента;

3. Модуль «Оборудование для эндоскопического гемостаза» полный перечень необходимого оборудования для выполнения процедуры эндоскопического гемостаза;

4. Модуль «Оценить качество приложения» предоставляет возможность пройти опрос и дать обратную связь о работе приложения и алгоритма;

5. Модуль «Справочная информация» включает полные сведения о разработчиках приложения, их квалификации и участии в проекте.

Разработанное приложение обладает высоким потенциалом для интеграции в повседневную клиническую практику. Оно обеспечивает врачей быстрым доступом к актуальным клиническим рекомендациям и алгоритму, что ускоряет принятие решений в условиях ограниченного времени. Список необходимого оборудования помогает оптимизировать подготовку к процедурам, снижая риск упущений. Кроме того, функционал обратной связи позволяет пользователям делиться опытом работы с приложением, что способствует его постоянному совершенствованию.

Рис. 3. Главный экран в светлой теме

Заключение

В ходе работы было реализовано мобильное приложение для поддержки принятия врачебных решений в процессе эндоскопического гемостаза, которое включает качественную рекомендательную систему. Планируется поэтапное внедрение приложения в медицинские учреждения Воронежа и Воронежской области. На первом этапе будет проведено пилотное тестирование в ряде больниц, с последующей адаптацией на основе обратной связи.

Литература

1. Общероссийская общественная организация Российское общество хирургов. Язвенные гастродуоденальные кровотечения. Клинические рекомендации. Приняты на Общероссийской согласительной конференции по принятию национальных клинических рекомендаций, 6 июня 2014 года, г. Воронеж. – Воронеж : 2014.

2. *Петров Ю. В.* Хирургическая тактика при язвенных гастродуоденальных в зависимости от вида кровотечения: дис. …. канд.мед.наук / Ю. В. Петров. – Уфа, 2016. – 139 с.

3. React Native Documentation // React Native URL: https://reactnative.dev/ (дата обращения: 12.10.2024).

4. Expo CLI Documentation // Expo CLI URL: https://docs.expo.dev/ (дата обращения: 12.10.2024).

УДК 004.622

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ ОБ АКТИВНОСТЯХ СТУДЕНТОВ В РАЗНЫХ ЦИКЛАХ ОБУЧЕНИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЮ НА ОСНОВЕ ИНСТРУМЕНТОВ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

А. А. Гамбаров, Н. А. Демидов

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В данной работе проведен сравнительный анализ активности студентов в системе дистанционного обучения программированию на Python (ЦАП) за 2023 и 2024 годы с использованием методов кластеризации. Были извлечены 33 признака из журналов событий, описывающих активность студентов по 11 задачам.
Ключевые слова: python, кластеризация, k-means, UMAP, анализ данных, журналы событий, активность студентов, метрики качества кластеризации, ЦАП.

В современном мире дистанционное обучение стало неотъемлемой частью образовательного процесса, особенно в сфере программирования. Системы дистанционного решения задач, такие как Цифровой Ассистент Преподавателя (ЦАП), играют ключевую роль в обеспечении эффективного обучения студентов. ЦАП представляет собой автоматизированную систему, которая предлагает каждому студенту 11 уникальных разнотипных задач по программированию на языке Python, проверяет их решения и фиксирует результаты в журналах событий. Эти журналы содержат важную информацию о деятельности студентов, включая время решения задач, количество попыток и способы решения [1].

Анализ данных, собранных в журналах ЦАП, позволяет выявить закономерности в активности студентов, определить успешных и неуспешных студентов, а также выявить потенциальные проблемы в процессе обучения. Одним из эффективных инструментов анализа таких данных является кластеризация, которая позволяет группировать студентов по схожим признакам, таким как время решения задач, количество попыток и другие [3].

В предлагаемом исследовании был выполнен анализ данных, собранных в журналах ЦАП за 2023 и 2024 годы, с использованием алгоритма кластеризации k-means [4]. Цель работы заключалась в выявлении различий/сходства в активности студентов в этих двух циклах обучения. Для достижения поставленной цели из журналов событий посредством предварительной обработки для каждой из 11 задач были извлечены три признака, характеризующие время успешной загрузки решения задачи, длительность решения задачи и общее число попыток при решении задачи. В результате были сформированы 2 набора данных, каждый из которых содержал 33 признака. Эти наборы соответствовали 2023 и 2024 года и содержали соответственно по 1056 и 1111 записей, описывающих активности студентов, успешно сдавших системе ЦАП все 11 задач. Эти наборы данных были объединены в один. К новому объединенному набору данных был применен алгоритм k-means. При этом оптимальное число кластеров было определено с использованием индекса кластерного силуэта. Кроме того, этот набор данных был разбит на 11 поднаборов, соответствующих 11 задачам. К этим поднаборам данных также был применен алгоритм k-means.

При выполнении исследования была разработана программа на языке Python в среде Jupyter Notebook. Программа выполняет сравнение активности студентов в решении задач по программированию на Python в течение двух циклов обучения в 2023 и 2024 годах и определяет, можно ли корректно разделить активности, относящиеся к разным циклам с помощью инструментов кластеризации. При этом активность может описывать как все 11 задач, так и каждую задачу по отдельности.

Основные этапы работы программы включают в себя следующие этапы.

1. **Загрузка и предобработка данных.** Программа загружает данные из журналов ЦАП за 2023 и 2024 годы. Каждый набор данных содержит информацию о 11 задачах, для каждой из которых извлекаются три признака: время успешной загрузки решения задачи, длительность решения задачи и общее число попыток при решении задачи. В результате для каждого цикла обучения формируется набор, содержащий 33 признаков, характеризующих активности студентов. Наборы данный объединяются в один общий с сохранением меток, определяющих разные циклы обучения.

2. **Кластеризация с использованием k-means.** Программа реализует кластеризации данных с использованием алгоритма k-means, который является одним из наиболее распространенных алгоритмов неконтролируемого обучения. Для выбора оптимального числа кластеров k программа использует индекс кластерного силуэта, который должен быть максимизирован.

3. **Оценка качества кластеризации.** Программа реализует расчет различных метрик, позволяющих оценить качество кластеризации. В частности, вычисляется индекс кластерного силуэта silhouette, который максимизируется. При его расчете считается, что метки кластеров неизвестны. Кроме того, вычисляются такие метрики, как homogeneity, completeness, V-measure, ARI (Adjusted Rand Index), AMI (Adjusted Mutual Information), позволяющие сопоставить предсказанные метки кластеров фактическим.

4. **Визуализация результатов.** Программа использует UMAP (Uniform Manifold Approximation and Projection) алгоритм [5] для визуализации результатов кластеризации. Визуализация помогает наглядно представить распределение данных и выявить различия между кластерами.

На рис. 1–12 приведены результаты визуализации исследуемых наборов данных с применением UMAP алгоритма как для всех 11 задач, так и для каждой задачи в отдельности. На рис. 1–12, слева маркерами разного цвета изображены предсказанные с использованием алгоритма k-means кластеры. На рис. 1–12, справа маркерами разного цвета изображены фактические кластеры, соответствующие 2 циклам обучения.

Результаты кластеризации показали, что разделить данные на кластеры, соответствующие годам 2023 и 2024, не удалось ни в целом по всем 11 задачам, ни по отдельности по каждой задаче. Кластеры, полученные в результате кластеризации, не соответствуют циклам обучения. При этом предсказанное число кластеров составляло от 2 до 4. В случае больших значений такой метрики качества кластеризации, как индекс кластерного силуэта для некоторых задач, можно предположить, что сформированные кластеры определялись, например, с учетом способностей студентов решать задачи быстро при малом числе ошибочных попыток и медленно

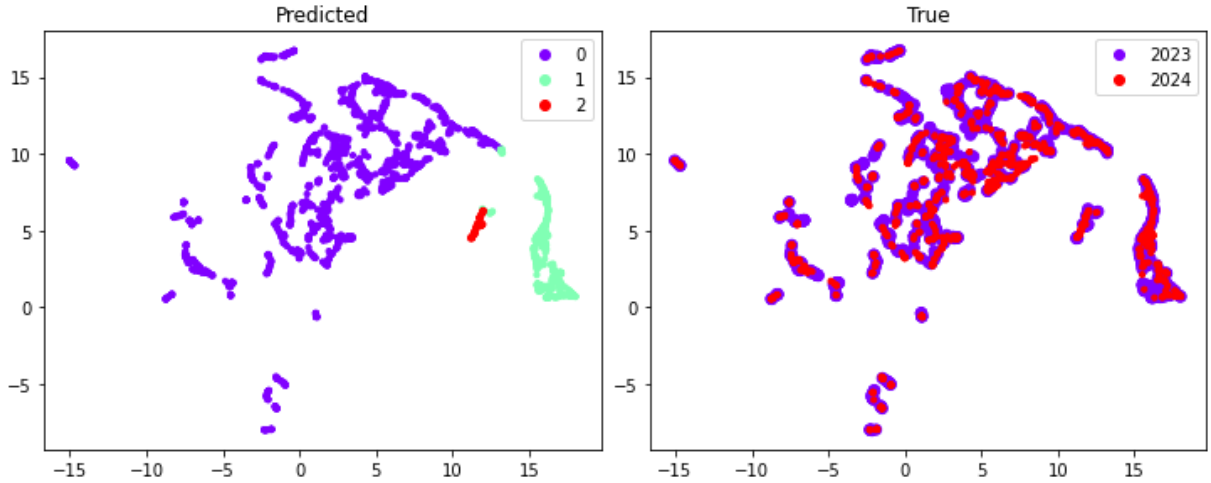


Рис. 1. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 11 задачам: homogeneity=0.002, completeness=0.002, V-measure=0.002, ARI=0.001, AMI=0.002, silhouette=0.448

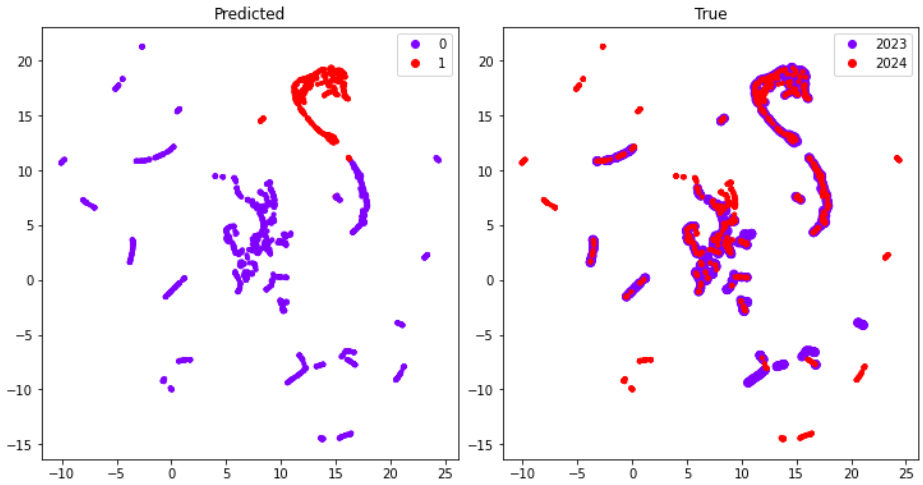


Рис. 2. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 1-й задаче: homogeneity=0.006, completeness=0.007, V-measure=0.007, ARI=0.001, AMI=0.006, silhouette=0.825

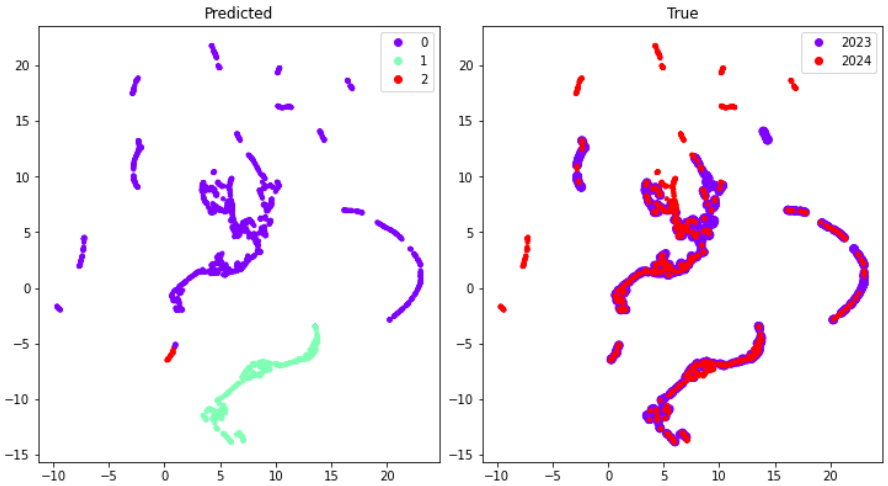


Рис. 3. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 2-й задаче: homogeneity=0.0002, completeness=0.0003, V-measure=0.0002, ARI=0.0003, AMI=–0.0001, silhouette=0.828

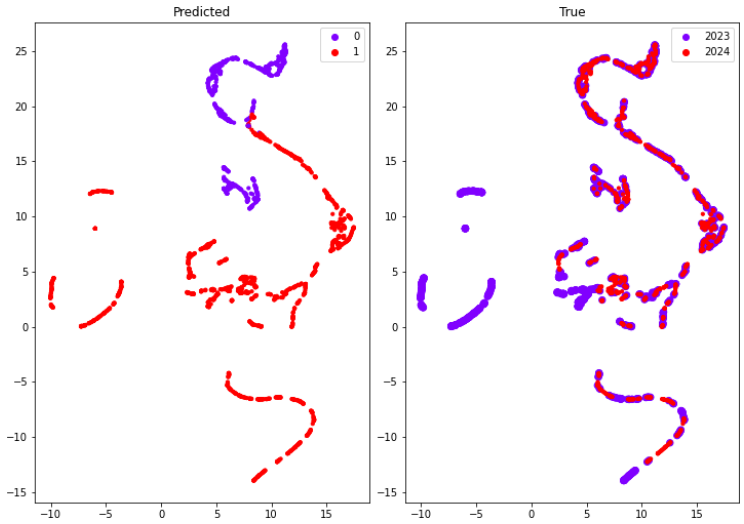


Рис. 4. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 3-й задаче: homogeneity=0.0003, completeness=0.0003, V-measure=0.0003, ARI=–0.0006, AMI=–0.0004, silhouette=0.826

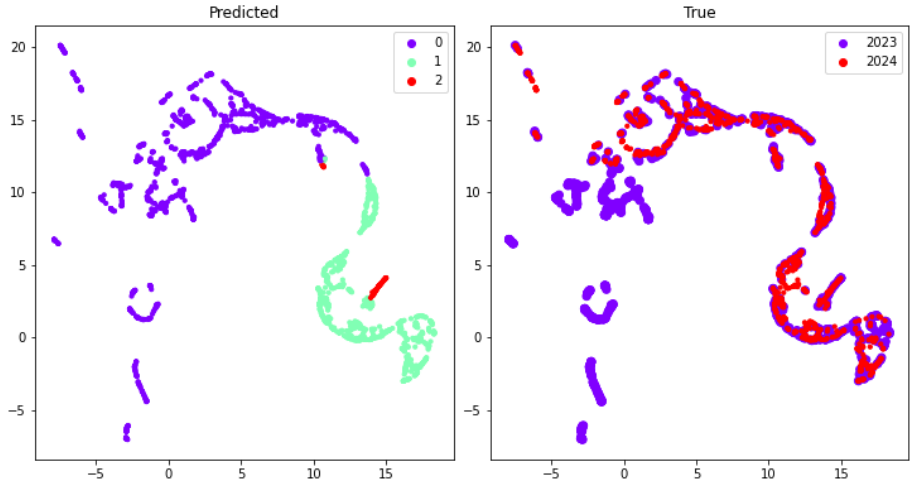


Рис. 5. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 4-й задаче: homogeneity=0.006, completeness=0.007, V-measure=0.006, ARI=0.004, AMI=0.006, silhouette=0.812

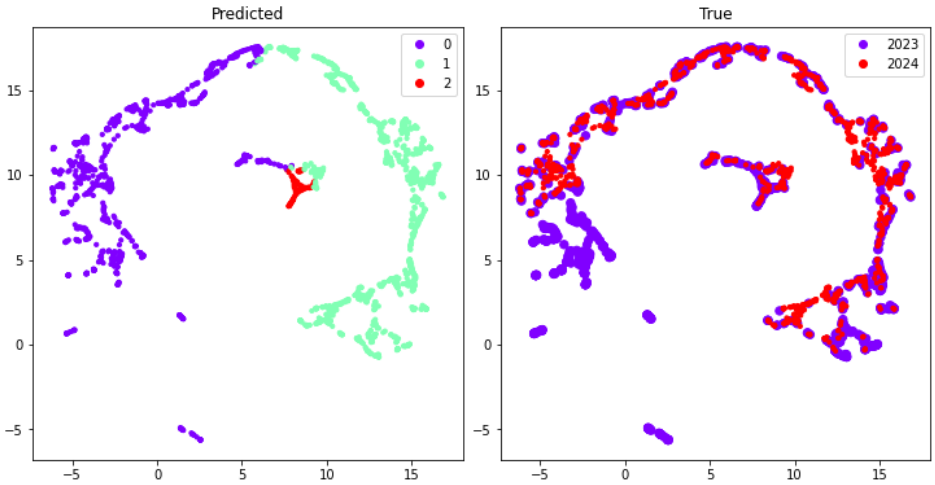


Рис. 6. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 5-й задаче: homogeneity=0.019, completeness=0.017, V-measure=0.018, ARI=0.019, AMI=0.017, silhouette=0.756

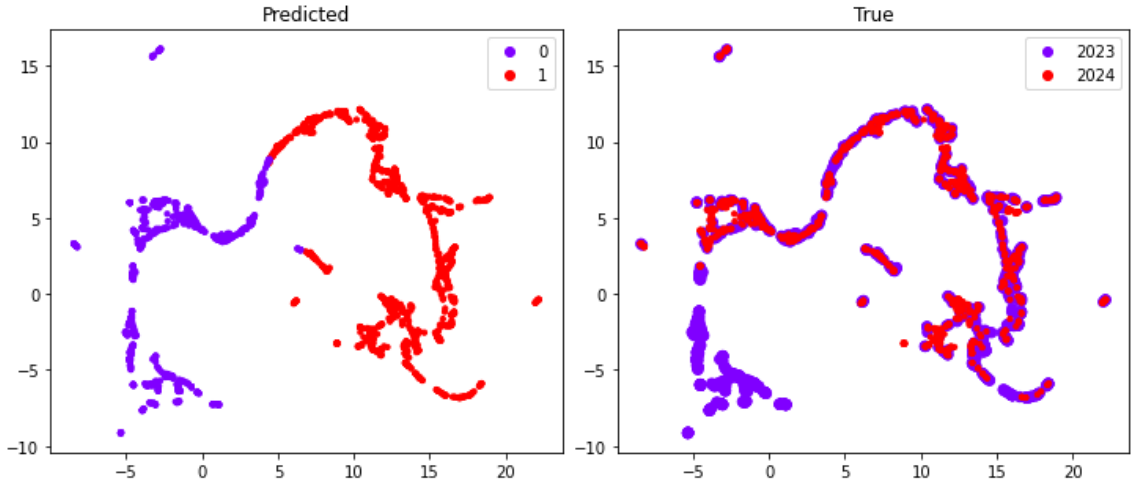


Рис. 7. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 6-й задаче: homogeneity=0.034, completeness=0.029, V-measure=0.031, ARI=0.043, AMI=0.031, silhouette=0.707

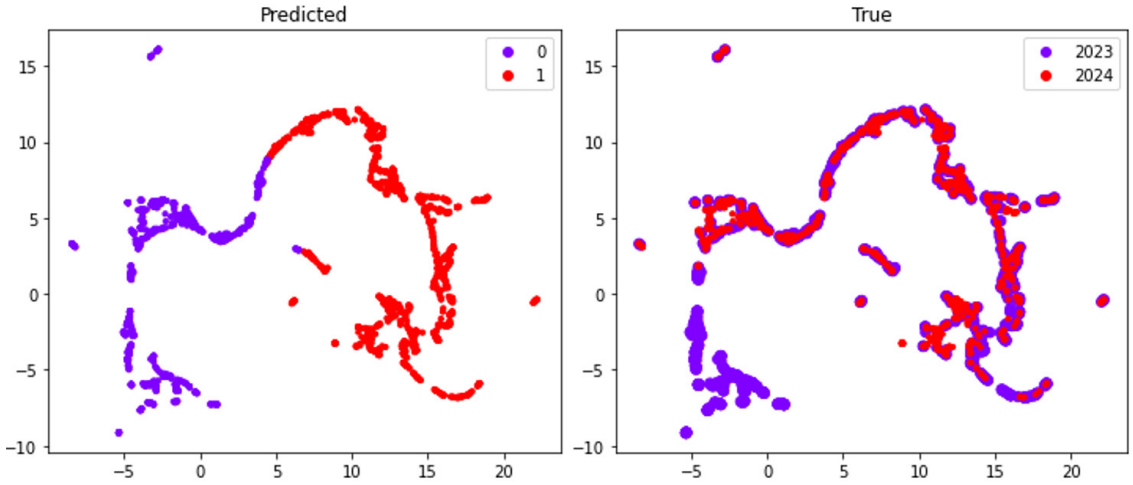


Рис. 8. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 7-й задаче: homogeneity=0.026, completeness=0.027, V-measure=0.026, ARI=0.036, AMI=0.026, silhouette=0.695

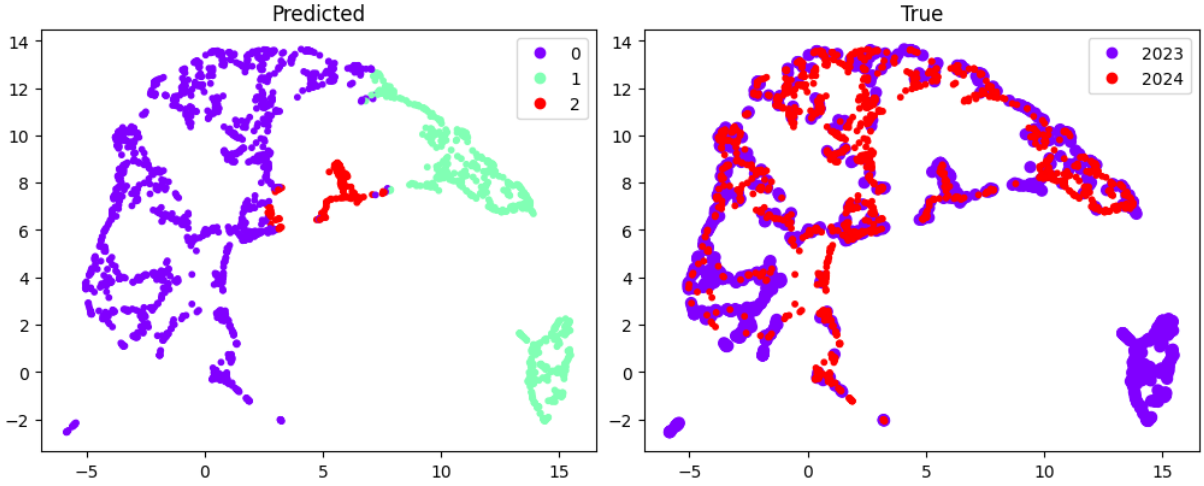


Рис. 9. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 8-й задаче: homogeneity=0.029, completeness=0.024, V-measure=0.026, ARI=0.038, AMI=0.026, silhouette=0.647

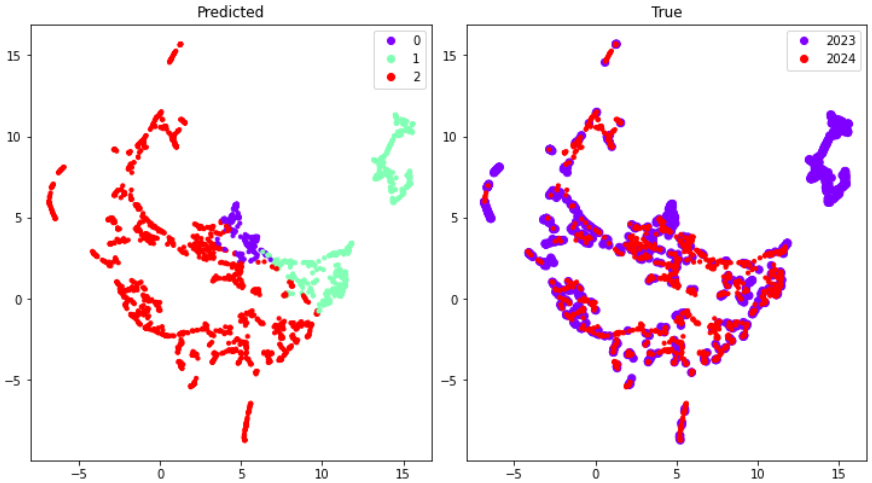


Рис. 10. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 9-й задаче: homogeneity=0.028, completeness=0.023, V-measure=0.026, ARI=0.034, AMI=0.025, silhouette=0.586

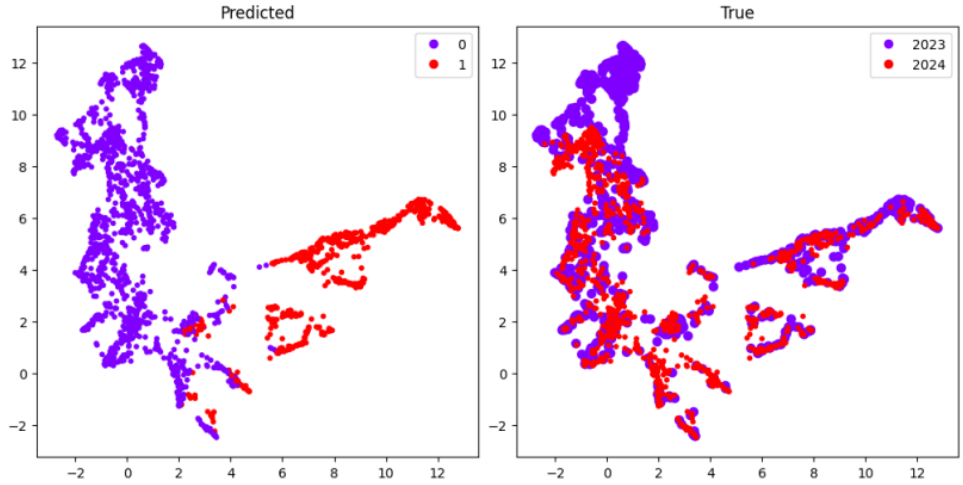


Рис. 11. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 10-й задаче: homogeneity=0.034, completeness=0.029, V-measure=0.031, ARI=0.036, AMI=0.030, silhouette=0.537

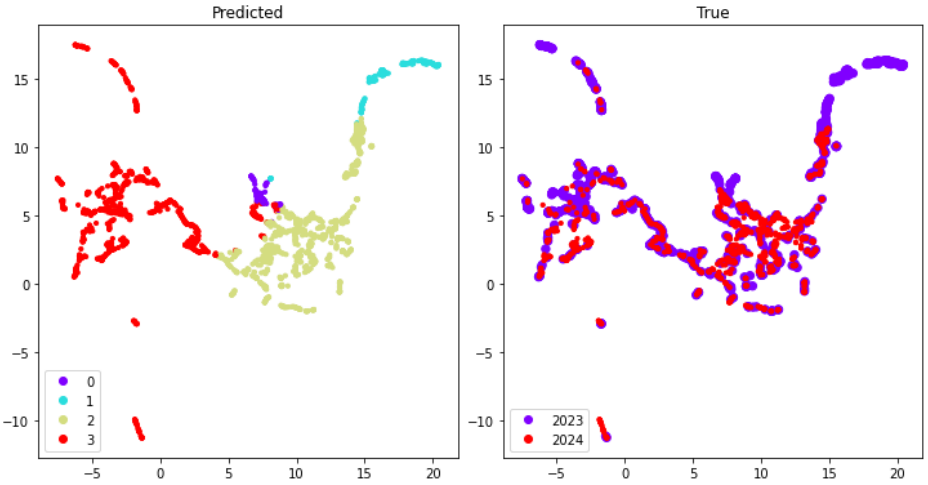


Рис. 12. Визуализация предсказанных и фактических кластеров на основе UMAP алгоритма для набора данных, соответствующего 11-й задаче: homogeneity=0.165, completeness=0.106, V-measure=0.129, ARI=0.095, AMI=0.128, silhouette=0.551

при большом числе ошибочных попыток. Малые значения других метрик качества кластеризации свидетельствуют о плохой разделимости активностей студентам по 2 циклам обучения (как в целом по всем 11 задачам, так и по отдельности по каждой задаче).

Таким образом, результаты исследования свидетельствуют о том, что активности студентов в решении задач по программированию на Python в 2023 и 2024 годах похожи между собой. Кластеризация данных не позволила разделить активности студентов на группы, соответствующие разным циклам обучения, что указывает на отсутствие значительных различий в активностях студентов в этих циклах.

Литература

1. *Горчаков А. В., Демидова Л. А., Советов П. Н.* Интеллектуальный учёт учебных достижений в системе цифровой ассистент преподавателя // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. – Т. 11, № 4. – С. 106–115.

2. *Wang C., Dai J., Xu L.* Big data and data mining in education: a bibliometrics study from 2010 to 2022 // 7th International Conference on Cloud Computing and Big Data Analytics (ICCCBDA), IEEE. – 2022. – P. 507–512.

3. *Demidova L. A., Sovietov P. N., Andrianova E. G., Demidova A. A.* Anomaly Detection in Student Activity in Solving Unique Programming Exercises: Motivated Students against Suspicious Ones // Data. – 2023. – Vol. 8, No 8. – P. 129. – https://doi.org/10.3390/data8080129.

4. *Sinaga K. P., Yang M.-S.* Unsupervised K-Means Clustering Algorithm // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 80716–80727.

5. *McInnes L., Healy J., Melville J.* UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection for Dimension Reduction // arXiv:1802.03426. – 2018.

УДК 512.622

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ БИНОМИАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА В СКМ MAPLE

Я. В. Гамилов, И. Н. Попов

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова

Аннотация. Различные разложения многочленов используются в решении многих задач, связанных как с исследованиями самих многочленов, так и их применениями. Под разложением понимается представление многочлена в виде линейной комбинации определённых многочленов со скалярными коэффициентами из коммутативного кольца с единицей. Одним из разложений является биномиальное разложение. В работе предлагается способ вычисления коэффициентов биномиального разложения по известным коэффициентам исходного многочлена, который записывается в стандартной форме. Компьютерная реализация вычислений искомых коэффициентов осуществлена в СКМ Maple. Итогом реализации является представление многочлена в биномиальном виде.

Ключевые слова: многочлен, стандартная запись многочлена, линейная комбинация многочленов со скалярными коэффициентами, разложение многочлена, биномиальный коэффициент, биномиальное разложение многочлена, рекуррентная формула, комбинаторика, алгоритм разложения, СКМ Maple.

Введение

При выяснении свойств многочленов и их применения в решении задач нередко многочлен раскладывается по многочленам определённого множества. Под разложением понимается представление многочлена в виде линейной комбинации данных многочленов со скалярными коэффициентами, которые, в общем случае, принадлежат коммутативному кольцу с единицей [1]. Разложения используются для выяснения свойств приводимости многочлена, вычисления значений многочлена и его производных, а также приближенных значений, в решении задач аппроксимации и так далее [2]. Одним из разложений является биномиальное разложение, которое, в частности, используется для решения комбинаторных задач (например, суммирование степеней натурального ряда) и в качестве способа многочленного шифрования.

Ставится задача об определении коэффициентов биномиального разложения по коэффициентам исходного многочлена, записанного в стандартном виде. Решение этой задачи приводится в рекуррентном виде с использованием СКМ Maple [3]. Для получения формул вычисления используются знания о комбинаторных элементах [4].

1. Теоретические аспекты

Представление многочлена, записанного в стандартной форме,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k C_x^{n-k}, \text{ где } C_x^k = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(k-1))}{k!}, k > 0, \\ 1, k = 0, \end{cases}$$

называется биномиальным разложением. Слагаемые исходного многочлена записываются по убыванию их степеней от n до 0.

Для вычисления коэффициентов биномиального разложения составляются две вспомогательные таблицы.

А) В таблице A (табл. 1) построчно записываются коэффициенты произведения $x(x-1)(x-2)\ldots$, которые вычисляются рекуррентно по формуле $A_{i,j+1} = -(i-1)A_{i-1,j} + A_{i-1,j+1}$

(два первых слева столбца — вспомогательные, третий столбец состоит из единиц, так как при раскрытии скобок в выражении $x(x-1)(x-2)\ldots$ старший коэффициент равен 1; каждая строка заканчивается нулём для удобства вычислений).

Таблица 1

Таблица коэффициентов разложения произведения $x(x-1)(x-2)\ldots$

x	–1	1	0				
$x(x-1)$	–2	1	–1	0			
$x(x-1)(x-2)$	–3	1	–3	2	0		
$x(x-1)(x-2)(x-3)$	–4	1	–6	11	–6	0	
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$	–5	1	–10	35	–50	24	0
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$	–6	1	–15	85	–225	274	–120	0
...							

Б) В таблице B в столбцы записываются скаляры, вычисляемые по рекуррентной формуле, опираясь на элементы матрицы A:

$$B_{i,j} = -\sum_{k=j}^{i-1} B_{k,j} A_{n-k+1,i-k+1},\ B_{i,i} = 1 \text{ для всех } i = 1\ldots n, j = 1\ldots n, j-1 < i..$$

Например, для случая $n = 6$ элементы таблицы B указаны в табл. 2.

Таблица 2

Таблица B (случай $n = 6$)

1					
15	1				
65	10	1			
90	25	6	1		
31	15	7	3	1	
1	1	1	1	1	1

В этом случае коэффициенты b_k биномиального разложения выражаются через коэффициенты a_k исходного многочлена следующим образом:

$b_6 = 6!\cdot a_6$

$b_5 = 5!\cdot(15a_6 + a_5)$

$b_4 = 4!\cdot(65a_6 + 10a_5 + a_4)$

$b_3 = 3!\cdot(90a_6 + 25a_5 + 6a_4 + a_3)$

$b_2 = 2!\cdot(31a_6 + 15a_5 + 7a_4 + 3a_3 + a_2)$

$b_1 = 1!\cdot(a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1)$

$b_0 = 0!\cdot a_0$

Отметим, что для любого n последняя строка таблицы B состоит из единиц и свободные члены разложений совпадают.

2. Практическая реализация в СКМ Maple

Предлагаются программы в СКМ Maple для вычисления элементов таблиц A и B и вывода результатов.

Программа 1

Генерация матриц A и B

```
restart:
n:=6:
# Generating product coefficients x(x-1)(x-2)...(x-(n-1)), the matrix A
A[1]:=[1,0]:
for i from 2 to n do
   A[i]:=[1];
   for j from 1 to i-1 do
      A[i]:=[op(A[i]),-(i-1)*A[i-1][j]+A[i-1][j+1]];
   od:
   A[i]:=[op(A[i]),0]:
od:
# Generating matrix elements B
for j from 1 to n do B[j]:=[] od:
for j from 1 to n do
   B[j]:=[op(B[j]),1];
   for i from j+1 to n do
      S:=-sum(B[k][j]*A[n-k+1][i-(k-1)],k=j..i-1):
      B[i]:=[op(B[i]),S];
   od:
od:
seq(B[i],i=1..n);
for i from 1 to n do c[i]:=[]: od:
for i from 1 to n do
   c[n-i+1]:=sum(B[i]['j']*a['n-j+1'],'j'=1..nops(B[i]))
od;
```

Результат работы программы для случая $n = 6$ представлен на рис. 1.

$$[1], [15, 1], [65, 10, 1], [90, 25, 6, 1], [31, 15, 7, 3, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$c_6 := a_6$$

$$c_5 := 15\,a_6 + a_5$$

$$c_4 := 65\,a_6 + 10\,a_5 + a_4$$

$$c_3 := 90\,a_6 + 25\,a_5 + 6\,a_4 + a_3$$

$$c_2 := 31\,a_6 + 15\,a_5 + 7\,a_4 + 3\,a_3 + a_2$$

$$c_1 := a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$$

Рис. 1. Выражение составных частей коэффициентов биномиального разложения

Программа 2

Биномиальное разложение многочлена

```
# Expression of b_n,...,b_1,b_0 in terms of a_n,...,a_1,a_0
# Input data by volume n: a[...]; output data by volume n: b[...]
a:=[1,1,1,1,1,1,1]:
b:=[]:
```

```
5 for i from 1 to n do
6    b:=[op(b), sum(a[k]*B[i][k]*(n-i+1)!,k=1..i)];
7 od:
8 b:=[op(b),a[n+1]]:
9 sort(sum('a[k]*x^(n-k+1)','k'=1..n+1))=sum('b[k]*C[x]^(n-k+1)','k'=1..
  n+1);
```

Комментарии к программе 2.

1) В строке 3 задаются коэффициенты исходного многочлена, начиная с наивысшей степени одночлена и до нулевой (до константы).

2) В строках 4–8 генерируются коэффициенты при биномиальных слагаемых на основе коэффициентов исходного многочлена.

3) В строке 9 осуществляется вывод результата — запись исходного многочлена и его биномиальное разложение.

Результат работы программы представлен на рис. 2.

$$a := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 720\, C_x{}^6 + 1920\, C_x{}^5 + 1824\, C_x{}^4 + 732\, C_x{}^3 + 114\, C_x{}^2 + 6\, C_x + 1$$

Рис. 2. Биномиальное разложение многочлена

Результатом реализации программы 2 является представление многочлена в биномиальном виде.

3. Приложение

Биномиальное разложение используется, в частности, для вычисления сумм чисел натурального ряда.

Пример. Пусть многочлен $f(x)$ записан в биноминальном виде:

$$f(x) = b_k C_x^k + b_{k-1} C_x^{k-1} + \cdots + b_0 C_x^0.$$

Используя равенство

$$C_0^r + C_1^r + C_2^r + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1},$$

получаем

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = b_k C_{n+1}^{k+1} + b_{k-1} C_{n+1}^k + \cdots + b_0 C_{n+1}^1.$$

Используя указанные выше предложенные программы, получаем результат для случая $f(x) = x^3$ (рис. 3).

$$a := [1, 0, 0, 0]$$

$$x^3 = 6\, C_x{}^3 + 6\, C_x{}^2 + C_x$$

Рис. 3. Биномиальное разложение многочлена $f(x) = x^3$

Так как $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, то

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = 6C_{n+1}^4 + 6C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2.$$

Следовательно, получаем формулу суммирования кубов натурального ряда ■

Отметим, что биномиальное разложение также может рассматриваться как пример многочленного шифрования по схеме $a_n a_{n-1} \ldots a_0 \leftrightarrow b_n b_{n-1} \ldots b_0$.

Заключение

Итогом работы является компьютерное решение в СКМ Maple задачи о нахождении биномиального разложения многочлена.

Литература

1. *Гриншпон С. Я.* Многочлены над областями целостности (теория и приложения) / С. Я. Гриншпон, И. Э. Гриншпон. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – 152 с.

2. *Прасолов В. В.* Многочлены / В. В. Прасолов. – Москва : МЦНМО, 2003. – 336 с.

3. *Говорухин В. Н.* Введение в Maple. Математический пакет для всех / В. Н. Говорухин, В. Г. Цибулин. – Москва : Мир, 1997. – 208 с.

4. *Виленкин И. Я.* Комбинаторика / А. И. Виленкин, П. А. Виленкин. – Москва : ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.

УДК 004.62

ЭФФЕКТИВНАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ МЕТАДАННЫМИ В СИСТЕМАХ ХРАНЕНИЯ НА БАЗЕ TELEGRAM

И. А. Грошев

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются подходы к маршрутизации и управлению метаданными в распределенных системах хранения данных, построенных на базе Telegram. Описаны методы сохранения метаданных: в текстовых сообщениях и внешних базах данных. Проанализированы стратегии поиска информации о фрагментах, включая стандартизированное именование, использование хэшей и организацию дерева каталогов. Полученные результаты позволяют оптимизировать процессы хранения и восстановления данных, повышая надежность и удобство использования Telegram как распределенного хранилища.

Ключевые слова: распределенное хранилище данных, Telegram как система хранения, метаданные, фрагменты данных, управление метаданными, хэширование данных, контроль целостности, внешние базы данных, поиск по метаданным, стандартизированное именование, репликация данных, масштабирование системы, архитектура хранения данных, оптимизация восстановления файлов.

Введение

В последние годы мессенджеры, такие как Telegram, стали неотъемлемой частью нашей цифровой жизни. Их удобство и функциональность делают их привлекательными платформами не только для общения, но и для хранения данных. Однако, при использовании мессенджеров для хранения больших объемов информации возникает проблема эффективной организации и поиска данных. В данной статье рассматривается задача управления метаданными в контексте использования Telegram как хранилища данных.

1. Методы хранения метаданных в Telegram

Метаданные играют ключевую роль в организации и управлении данными в распределенных системах хранения, особенно в случаях, когда данные разбиваются на множество частей, как в случае с Telegram. Эффективное хранение и поиск метаданных — это важный аспект, который позволяет обеспечивать целостность данных, их быстроту и доступность при восстановлении. Метаданные, в частности, содержат информацию о файлах (например, имя, размер), структуру распределения данных, идентификаторы сообщений или ссылок, а также контрольные суммы для проверки целостности. В случае использования Telegram в качестве распределенного хранилища важно грамотно организовать хранение этих данных, учитывая особенности самой платформы и ограниченные возможности устройства пользователя. Для этого могут быть использованы различные подходы, включая хранение метаданных в текстовых сообщениях и использование внешних баз данных.

1.1. Использование сообщений Telegram

Один из интуитивных способов хранения метаданных — использование сообщений в Telegram. Текстовые сообщения могут содержать структурированную информацию о файлах, такую как имя, размер, дата создания и хэш. Однако у этого метода есть несколько проблем.

Во-первых, существуют задержки при поиске сообщений с метаданными, так и сложность их инерпритации. Во-вторых, возникает проблема разбивания сообщений: Telegram ограничивает размер сообщения, поэтому длинные метаданные будут разделены на несколько частей. Это требует разработки фрейма метаданных, который будет учитывать эту особенность, поддерживая разбивку и обеспечение целостности данных.

Пример фрейма метаданных:

[Номер фрейма/Общий номер фрейма][Дата и время][Строка метаданных]

Каждое сообщение будет содержать часть метаданных, а система будет собирать и обрабатывать их в правильном порядке, обеспечивая восстановление исходной информации.

1.2. Внешние базы данных

Использование внешних баз данных позволяет хранить более объемные и сложные метаданные. Такие базы данных, как SQLite, PostgreSQL или MongoDB, предлагают гибкие возможности для организации и поиска данных. Информация о файлах может быть представлена в виде таблиц с полями, соответствующими различным атрибутам метаданных.

Выбор базы данных для локального устройства зависит от специфики проекта, включая платформу, требования к производительности и объему данных. SQLite является предпочтительным выбором для большинства локальных приложений, в то время как Realm Database и PouchDB могут быть более эффективными для мобильных приложений с высокими требованиями к скорости доступа и синхронизации данных.

2. Методы поиска информации о фрагментах

Поиск фрагментов метаданных может быть организован различными способами в зависимости от используемой технологии хранения данных. Рассмотрим два подхода: поиск через API Telegram и использование внешних баз данных.

2.1. Поиск через API Telegram

Telegram API предоставляет возможность взаимодействия с сообщениями через методы, такие как *getMessages*, что позволяет извлекать и искать метаданные внутри сообщений. Однако для поиска фрагментов метаданных в Telegram необходимо учитывать особенности этой платформы.

Одной из основных проблем является ограничение длины сообщений в Telegram. Из-за этого метаданные могут быть разбиты на несколько сообщений. В этом случае важно учитывать порядок сообщений, чтобы собрать все фрагменты в правильном порядке. Для этого можно использовать уникальные идентификаторы или метки, которые будут привязаны к каждому фрагменту, и обеспечат восстановление исходных данных.

Поиск фрагментов можно осуществлять с помощью фильтрации по ключевым словам или меткам. Например, можно искать сообщения, содержащие текст, связанный с метаданными, такие как «имя файла», «размер» или «хэш». Такой подход полезен, если метаданные имеют определённую структуру, позволяя находить сообщения по заранее определённым параметрам.

Тем не менее, при поиске по большому объёму сообщений могут возникнуть задержки и проблемы с производительностью. Метод *getMessages* не всегда оптимален для быстрого поиска, особенно если сообщения разбросаны по множеству чатов или каналов. Чтобы уменьшить задержки, можно использовать индексацию сообщений, сохраняя информацию о фрагментах

в базе данных и связывая её с идентификаторами сообщений в Telegram. Это позволит восстанавливать данные быстрее, не обращаясь к API при каждом запросе.

2.2. Поиск через внешние базы данных

Использование внешних баз данных для хранения метаданных предоставляет больше возможностей для эффективного поиска и управления фрагментами. Рассмотрим несколько популярных баз данных.

SQLite является оптимальным решением для локальных приложений, где важно быстро хранить и искать метаданные. В этой базе данных можно организовать структуру с таблицами, содержащими поля для номера фрейма, идентификатора файла, даты и времени получения данных, а также строк метаданных. Запросы к базе данных позволяют быстро находить нужные фрагменты и восстанавливать оригинальные данные. Это решение особенно полезно для небольших и средних объёмов данных, где требуется высокая производительность при поиске.

PostgreSQL и MongoDB подходят для более крупных проектов с высокими требованиями к производительности и масштабируемости. PostgreSQL поддерживает реляционные структуры данных, что делает её идеальной для сложных запросов, а MongoDB используется для хранения данных в виде документов. Обе эти базы данных поддерживают индексацию, что позволяет эффективно искать фрагменты, даже если объём данных значительно велик. Например, можно искать фрагменты метаданных по таким атрибутам, как «имя файла» или «хэш», а также восстанавливать данные по порядку фреймов, что существенно упрощает работу с большими объёмами информации.

Realm Database и PouchDB предназначены для мобильных приложений и предлагают быстрые способы синхронизации данных с сервером. Они обеспечивают высокую скорость доступа к локальному хранилищу и удобство работы с данными на мобильных устройствах. В таких базах данных также можно эффективно управлять фрагментами метаданных и быстро выполнять поисковые запросы, что делает их отличным выбором для приложений с высокими требованиями к синхронизации и производительности.

Использование внешних баз данных обладает рядом преимуществ, таких как гибкость, высокая производительность и поддержка сложных запросов. В отличие от Telegram, где необходимо учитывать ограничения на размер сообщений, внешние базы данных позволяют хранить более сложные структуры данных и выполнять поиск с минимальными задержками.

Заключение

В данной статье рассмотрены два подхода к хранению и поиску метаданных: использование сообщений в Telegram и внешних баз данных. Методы, основанные на Telegram, удобны для простых решений, но имеют ограничения по длине сообщений и требуют дополнительных усилий для управления фрагментами данных. Внешние базы данных, такие как SQLite, PostgreSQL и MongoDB, предоставляют более гибкие и масштабируемые решения для работы с большими объёмами данных и сложными запросами. Выбор подхода зависит от специфики проекта: Telegram оптимален для обмена данными в реальном времени, а базы данных — для сложных и масштабируемых систем.

Литература

1. A Digital Signature Based on a Conventional Encryption Function. – 1988. – URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/5371620/сенкс (дата обращения: 20.11.2024).

2. The Google File System. – 2003. – URL: https://dl.acm.org/doi/10.1145/940072.940073/ (дата обращения: 20.11.2024).

3. The Design and Implementation of Data Caching Systems for High-Performance Applications. – 2007. – URL: https://dl.acm.org/doi/10.1145/1270001.1270011/ (дата обращения: 20.11.2024).

4. SQLite: The Definitive Guide. O'Reilly Media. – URL: https://www.sqlite.org/docs.html/ (дата обращения: 21.11.2024).

5. Efficient Search Techniques in Large Distributed Systems. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0743731504000810/ (дата обращения: 21.11.2024).

6. Optimal File Chunking and Retrieval Algorithms for Distributed File Systems. – URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/5070422/ (дата обращения: 21.11.2024).

7. Automatic Information Retrieval. – URL: https://www.researchgate.net/publication/220539160_Automatic_Information_Retrieval/ (дата обращения: 21.11.2024).

8. Telegram Bot API Documentation. – URL: https://core.telegram.org/bots/api (дата обращения: 21.11.2024).

9. Database Systems: Design, Implementation, and Management. – URL: https://www.cengage.com/c/database-systems-design-implementation-and-management-12e-connolly/ (дата обращения: 21.11.2024).

10. Patterns of Enterprise Application Architecture. – URL: https://martinfowler.com/eaaCatalog/ (дата обращения: 21.11.2024).

УДК 004-4

BLOC И CUBIT ВО FLUTTER: УПРАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЕМ ПРИЛОЖЕНИЯ

Н. В. Денисов, Н. А. Каплиева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются паттерны управления состоянием BLoC и Cubit, используемые в разработке приложений на Flutter. BLoC предоставляет мощный механизм управления через события и состояния, в то время как Cubit упрощает реализацию для менее сложных сценариев. Описываются основные отличия, преимущества и области применения каждого подхода. Приводятся примеры кода, демонстрирующие их использование. Статья помогает выбрать подходящий инструмент для разработки приложений с четкой архитектурой.
Ключевые слова: Flutter, BLoC, Cubit, управление состоянием, события, состояния, потоки, Streams, архитектура приложений, кроссплатформенная разработка, бизнес-логика, пользовательский интерфейс, масштабируемость, тестируемость, примеры кода, оптимизация разработки.

Введение

Современная разработка приложений требует четкой архитектуры, обеспечивающей масштабируемость, тестируемость и легкость сопровождения. Flutter, как один из ведущих фреймворков для кроссплатформенной разработки, предоставляет широкий выбор инструментов для управления состоянием, среди которых особое место занимают BLoC (Business Logic Component) и его упрощенная версия Cubit.

BLoC основывается на концепциях однонаправленного потока данных и четкого разделения ответственности между пользовательским интерфейсом и бизнес-логикой. Этот подход позволяет минимизировать связность компонентов, упрощая сопровождение и масштабирование приложений. Cubit, в свою очередь, представляет собой упрощенную реализацию BLoC, исключая обработку событий, что делает его подходящим для менее сложных задач.

Целью данной статьи является изучение особенностей, преимуществ и сценариев использования BLoC и Cubit. Мы рассмотрим их концепции, ключевые отличия, а также предоставим примеры кода, демонстрирующие их интеграцию в Flutter-приложениях.

1. Суть работы BLoC

BLoC — это паттерн управления состоянием, основанный на использовании потоков (Streams) для обработки событий и предоставления нового состояния. Он помогает реализовать однонаправленный поток данных, что упрощает поддержку и тестирование приложений. Этот подход позволяет четко разделить пользовательский интерфейс и бизнес-логику, минимизируя связность компонентов и улучшая читаемость кода [1].

BLoC активно используется для построения масштабируемых и гибких приложений, так как предоставляет мощный механизм для обработки сложных сценариев с большим количеством взаимодействий. Рассмотрим работу BLoC на рис. 1 [2].

Основные элементы BLoC [3]:

1. События (*Events*) — входные данные, отправляемые в BLoC. События могут быть вызваны действиями пользователя, системными изменениями или любыми другими внешними триггерами. Примеры событий: *LoginButtonPressed*, *FetchData*, *ItemSelected*.

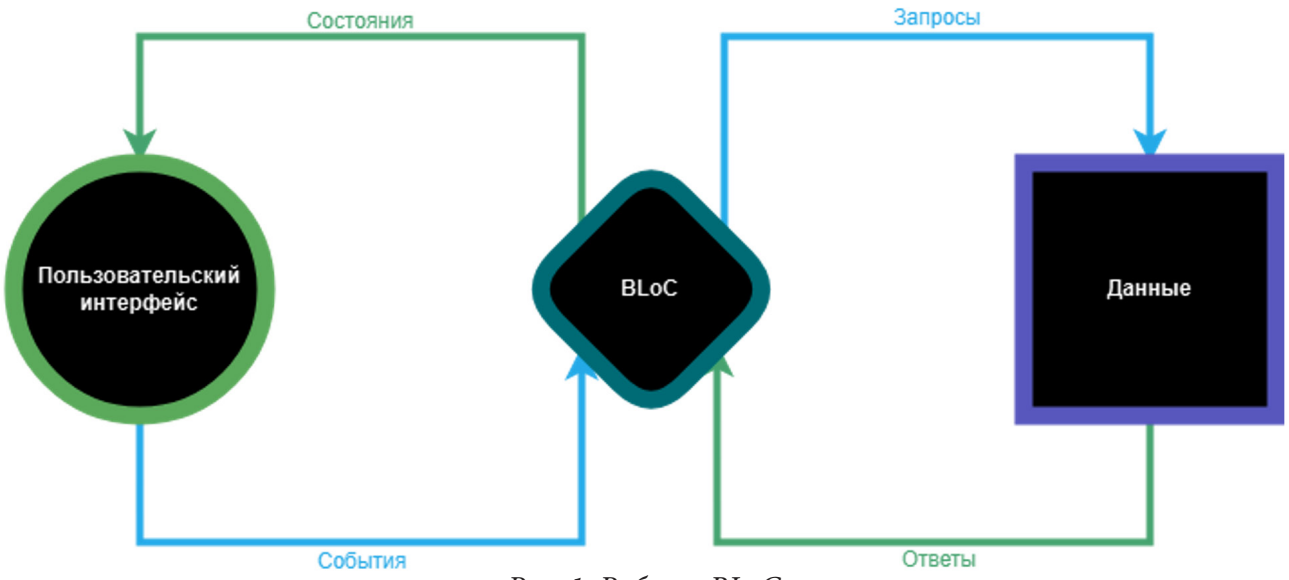


Рис. 1. Работа BLoC

2. Состояния (*States*) — выходные данные, которые представляют текущее состояние приложения. Они описывают, как интерфейс должен выглядеть в данный момент. Примеры состояний: *Loading*, *Loaded*, *Error*.

3. BLoC — центральный компонент, который принимает события, обрабатывает их и возвращает новое состояние. Он содержит всю бизнес-логику приложения.

2. Преимущества использования BLoC

1. *Однонаправленный поток данных*. Обеспечивает предсказуемость поведения приложения.

2. *Тестируемость*. Так как бизнес-логика отделена от интерфейса, ее легко покрывать модульными тестами.

3. *Масштабируемость*. Структура BLoC позволяет легко добавлять новые функции без значительных изменений в существующем коде.

4. *Поддерживаемость*. Четкое разделение ответственности между слоями делает код более читаемым и простым в сопровождении.

5. *Улучшенная производительность*. BLoC позволяет оптимизировать перерисовку UI, обновляя только те части интерфейса, которые действительно изменились.

3. Пример работы BLoC

Для начала работы с BLoC в Flutter-приложении необходимо определить структуру событий и состояний. Рассмотрим пример создания структуры BLoC для простого приложения-счетчика [4].

3.1. Создание событий

События в BLoC представляют действия или изменения, которые могут произойти в приложении. Они определяются как классы, наследующиеся от базового абстрактного класса. Это позволяет создать типобезопасную систему обработки событий. Следующий код определяет базовую структуру для событий в нашем приложении-счетчике:

```
abstract class CounterEvent {}
class IncrementCounter extends CounterEvent {}
class DecrementCounter extends CounterEvent {}
```

Этот код работает следующим образом:

1. *abstract class CounterEvent* — абстрактный класс, служащий основой для всех событий, связанных со счетчиком. Его использование позволяет нам создавать иерархию событий и обеспечивает типобезопасность при обработке событий.

2. *class IncrementCounter extends CounterEvent* — класс, представляющий событие увеличения счетчика на единицу. Он наследуется от *CounterEvent*. Это означает конкретное действие, которое может произойти с нашим счетчиком.

3. *class DecrementCounter extends CounterEvent* — аналогично с п. 2, этот класс представляет событие уменьшения счетчика на единицу.

3.2. Создание состояний

Состояния в BLoC представляют текущее состояние приложения. Они определяются как классы, наследующиеся от базового абстрактного класса. Это позволяет создать иерархию состояний и обеспечивает типобезопасность при обработке состояний. Пример структуры состояний для приложения-счетчика:

```
abstract class CounterState {}
class CounterValueState extends CounterState {
  final int value;
  CounterValueState(this.value);
}
```

Этот код работает следующим образом:

1. *abstract class CounterState* — абстрактный класс, который служит основой для всех состояний, связанных со счетчиком. Использование абстрактного класса позволяет нам создавать иерархию состояний и обеспечивает типобезопасность при обработке состояний.

2. *class CounterValueState extends CounterState* —класс, представляющий текущее состояние счетчика после какого-либо действия (увеличения или уменьшения). Он содержит значение счетчика.

В более сложных сценариях можно добавить дополнительную информацию в классы-состояния. Например, если нужно отслеживать ошибки или загрузку данных, можно добавить соответствующее состояние:

```
class LoadingState extends CounterState {}
class ErrorState extends CounterState {
  final String error;
  ErrorState(this.error);
}
```

3.3. Создание BLoC

Рассмотрим код для создания BLoC для приложения-счетчика:

```
import 'package:flutter_bloc/flutter_bloc.dart';
class CounterBloc extends Bloc<CounterEvent, CounterState> {
  CounterBloc() : super(CounterState()) {
    on<IncrementCounter>((event, emit) {
      final currentState = state as CounterValueState;
      emit(CounterValueState(currentState.value + 1));
    });
```

```
    on<DecrementCounter>((event, emit) {
      final currentState = state as CounterValueState;
      emit(CounterValueState(currentState.value - 1));
    });
  }
}
```

Этот код работает следующим образом:

1. Мы наследуем наш класс *CounterBloc* от Bloc библиотеки *flutter_bloc*, указывая тип событий (*CounterEvent*) и тип состояния (*CounterState*).

2. В конструкторе устанавливаем начальное состояние как *CounterState()*.

3. Мы определяем обработчики для каждого типа события с помощью методов *on<EventType>*. Эти методы принимают два аргумента:

• первый аргумент — событие, которое было отправлено;

• второй аргумент — функция *emit*, которая позволяет нам генерировать новые состояния.

4. В каждом обработчике мы можем выполнить какие-либо действия перед обновлением состояния.

5. После выполнения действий мы используем метод *emit()* для генерации нового состояния. В нашем случае это новое состояние типа *CounterValueState* с обновленным значением счетчика.

6. Мы также добавили проверку на отрицательное значение счетчика в обработчике *DecrementCounter*, чтобы избежать получения отрицательного значения.

3.4. Интеграция с интерфейсом

Сделаем интеграцию реализованного BLoC в интерфейс приложения:

```
BlocBuilder<CounterBloc, CounterState>(
  builder: (context, state) {
    final counterValue = (state as CounterValueState).value;
    return Text('Counter: $counterValue');
  },
);
```

Этот фрагмент кода представляет собой ключевую часть внедрения паттерна BLoC в пользовательский интерфейс Flutter приложения. Он использует *BlocBuilder*, который является компонентом Flutter для отображения изменений состояния в BLoC.

1. *BlocBuilder<CounterBloc, CounterState>*:

• первый аргумент (*CounterBloc*) указывает тип BLoC, с которым мы работаем;

• второй аргумент (*CounterState*) указывает тип состояния, которое мы ожидаем от BLoC.

2. Внутренняя функция-строитель (*builder*):

• эта функция вызывается каждый раз, когда состояние BLoC изменяется;

• она принимает два аргумента: текущий контекст и новое состояние;

• внутри функции мы извлекаем текущее значение счетчика из состояния.

3. Отображение значения:

• используем *Text* виджет для отображения текущего значения счетчика;

• форматирование строки включает в себя переменную *$counterValue*, которая динамически обновляется при изменении состояния BLoC.

4. Суть работы Cubit

Cubit (Command Unit Business Logic Template) — это упрощенная версия паттерна BLoC, которая предоставляет более легкий способ управления состоянием во Flutter-приложениях.

Основные отличия Cubit от BLoC:

1. *Простота*. Cubit требует меньше кода для реализации, что делает его более подходящим для небольших проектов или приложений с относительно простой бизнес-логикой.

2. *Отсутствие обработки событий*. В Cubit нет отдельного слоя событий. Вместо этого, все действия выполняются напрямую через методы класса Cubit.

Рассмотрим пример структуры Cubit для приложения-счетчика.

4.1. Реализация Cubit

```
import 'package:flutter_bloc/flutter_bloc.dart';
class CounterCubit extends Cubit<int> {
  CounterCubit() : super(0);
  void increment() => emit(state + 1);
  void decrement() => emit(state - 1);
}
```

Этот код реализует *CounterCubit* — класс для управления состоянием счетчика с помощью *Cubit* из библиотеки *flutter_bloc*. Начальное состояние (*state*) установлено в *0*. Методы increment и decrement изменяют состояние, увеличивая или уменьшая его на единицу с помощью метода *emit*.

4.2. Интеграция с интерфейсом

```
BlocBuilder<CounterCubit, int>(
  builder: (context, state) {
    return Text('Counter: $state');
  },
);

FloatingActionButton(
  onPressed: () => context.read<CounterCubit>().increment(),
  child: Icon(Icons.add),
);
```

Этот код демонстрирует использование *BlocBuilder* и кнопки для работы с *CounterCubit*.

BlocBuilder отображает текстовый виджет *Text*, который обновляется каждый раз, когда состояние *CounterCubit* меняется. В *builder* передается текущее состояние (*state*).

FloatingActionButton при нажатии вызывает метод *increment* у *CounterCubit* через *context.read<CounterCubit>()*, увеличивая значение счетчика.

5. Области применения BLoC и Cubit

1. BLoC:

a. Подходит для сложных приложений с множеством событий.

b. Требуется четкая архитектура с разделением ответственности.

c. Необходима масштабируемость и тестируемость.

2. Cubit:

a. Подходит для простых приложений и прототипов.

b. Требуется простая бизнес-логика.

c. Приложение содержит небольшое количество состояний.

Заключение

В данной работе были проанализированы и сравнены два подхода к управлению состоянием в приложениях на Flutter: BLoC и Cubit. Рассмотрены ключевые особенности каждого подхода, их преимущества и области применения.

BLoC (Business Logic Component) представлен как более сложный и гибкий механизм управления состоянием. Он основан на концепции однонаправленного потока данных и обеспечивает четкое разделение между событиями, состояниями и бизнес-логикой. BLoC особенно эффективен для сложных приложений с множеством взаимодействий и состояний, требующих масштабируемой и тестируемой архитектуры.

С другой стороны, Cubit предлагается как упрощенная версия BLoC, более подходит для менее сложных сценариев использования. Он предоставляет более простую структуру и требует меньше кода для реализации, что делает его предпочтительным для небольших проектов или прототипов. Cubit также отличается отсутствием отдельного слоя событий, вместо этого используя прямые методы для обновления состояния.

В дальнейшем результаты данного обзора будут использованы при реализации CRM-системы для центров заботы о животных. Это позволит учесть преимущества и недостатки подходов BLoC и Cubit и выбрать наиболее подходящий.

Литература

1. Bloc State Management Library // Bloc : [сайт]. – 2024. – URL: https://bloclibrary.dev/ (дата обращения: 05.11.2024).

2. Flutter Bloc package // Bloc : [сайт]. – 2024. – URL: https://pub.dev/packages/flutter_bloc (дата обращения: 04.11.2024).

3. Flutter Bloc concepts // Bloc : [сайт]. – 2024. – URL: https://bloclibrary.dev/flutter-bloc-concepts/ (дата обращения: 04.11.2024).

4. Flutter Counter // Bloc : [сайт]. – 2024. – URL: https://bloclibrary.dev/tutorials/flutter-counter/ (дата обращения: 05.11.2024).

УДК 004.056.55

МНОГОЧЛЕННОЕ ШИФРОВАНИЕ

А. М. Джабаров, А. Ф. Сауляк, И. Н. Попов

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова

Аннотация. Разложения многочленов по системе многочленов применяются в решении различного рода задач, как для выяснения свойств самих многочленов, так и их применения. Разложения многочленов, в частности, используются при многочленном шифровании сообщений. Если под разложением понимается запись многочлена в виде линейной комбинации многочленов данной системы со скалярами из коммутативного кольца с единицей в качестве коэффициентов, то многочленное шифрование может выражаться в том, что коэффициенты исходного многочлена соответствуют символам исходного сообщения, коэффициенты разложения — символам шифрованного сообщения. При многочленном шифровании используются разложения, которые способствуют дешифрованию сообщений. Точнее, при выборе кольца, к которому принадлежат коэффициенты исходного многочлена и коэффициенты разложения, есть возможность осуществить как шифрование, так и дешифрование. Одним из примеров разложений является разложение многочлена по степеням линейного многочлена, реализация которого осуществляется с помощью ступенчатой схемы Горнера. Такое разложение как раз обладает указанными требованиями к многочленному шифрованию сообщений. В работе рассматривается именно такое разложение с точки зрения многочленного шифрования, реализация которого осуществляется с использованием языка программирования Python.
Ключевые слова: многочлен, стандартная запись многочлена, линейная комбинация многочленов, разложение многочлена, алгоритм разложения, схема Горнера, Python, программирование, шифрование, многочленное шифрование.

Введение

В данной работе под разложением многочлена понимается представление многочлена, записанного в стандартной форме, в виде линейной комбинации неотрицательных целых степеней линейного приведенного (со старшим коэффициентом, равным единице) многочлена со скалярами из коммутативного кольца с единицей в качестве коэффициентов. Разложение многочлена имеет значение в решении задач, как связанных с выяснением свойств самого многочлена, так и прикладного характера. К первому случаю можно отнести задачи о нахождении корней многочлена (добиваясь равенства нулю того или иного коэффициента в разложении, что требуется, например, для применения формул Кардана при решении кубического уравнения) или доказательства его неприводимости (например, с использованием критерия Эйзенштейна для многочлена с целыми коэффициентами), о вычислении значений самого многочлена и всех его производных при данном значении аргумента, о приближенных вычислениях значений многочлена (например, при табулировании значений многочлена в окрестности данного значения), о раскрытии скобок и приведении подобных слагаемых в выражениях определённого вида и другие. К прикладным задачам, в которых играет разложение многочлена, относится, например, задача о представлении дробно-рациональной функции со степенью линейного многочлена в качестве знаменателя в виде суммы элементарных дробей (что, в частности, используется при интегрировании дробно-рациональных функций).

Основным алгоритмом для получения разложения многочлена является схема Горнера, которая основывается на теореме Безу. Схема Горнера применяется для возврата десятичной записи натурального числа, указанного в определенной системе счисления (в двоичной, троичной и так далее), используется в построении эффективного алгоритма возведения числа в на-

туральную степень и так далее. Само разложение многочлена получается посредством многократного применении схемы Горнера и сводится к построению ступенчатой схемы Горнера [1].

Схема Горнера применяется в шифровании сообщений, если в основе шифрования используется многочлен и вычисление символов шифрованного сообщения ведётся вычислением этого многочлена при данных значениях переменной [2].

Разложение многочлена можно рассматривать и как способ шифрования сообщений. В этом случае речь идёт о многочленном шифровании, суть которого в том, что набор коэффициентов исходного многочлена связывается с символами исходного сообщения, набор же коэффициентов разложения — с символами шифрованного сообщения.

1. Теоретические аспекты

Разложение многочлена может рассматриваться в качестве одного из способов многочленного шифрования — способа шифрования сообщений (как преобразование сообщения с целью защиты его конфиденциальности), основанного в общем случае на разложении многочлена по многочленам из определённого наперед множества. Суть многочленного шифрования сводится к тому, что символам сообщения приписываются по некоторому правилу числа, которые выступают в роли коэффициентов многочлена, записанного в стандартной форме, затем полученный многочлен раскладывается по данным многочленам и коэффициенты этого разложения считаются преобразованными числами, по которым уже строится зашифрованное сообщение. Естественно требовать, чтобы была и возможность дешифрования. Формально ставится задача об определении формул для вычисления коэффициентов разложения по коэффициентам исходного многочлена, и ей обратная.

Отметим, что рассматриваемое в работе разложение при использовании ступенчатой схемы Горнера позволяет как шифровать, так и дешифровать в произвольных коммутативных кольцах с единицей, в частности, в кольце классов вычетов целых чисел по модулю.

Разложение многочлена зависит от двух параметров: степени многочлена и точки разложения. Эти числа являются в шифровании данным способом секретными.

Схема шифрования

А) Определяется алфавит, из символов которого составляются сообщения. Используется русский алфавит из 33 букв с добавлением символов «пробела» и «*» (всего — 35 символов). Исходное сообщение может содержать символы, отличные от символа «*». Символам алфавита сопоставляются целые числа.

Б) Сообщение делится на блоки определенной длины (первое секретное число). Если длина сообщения не кратна длине блока, то к последнему «короткому» блоку добавляется определённое число символов «*».

В) Числа, сопоставленные символам блока, рассматриваются в качестве коэффициентов многочлена, который с помощью ступенчатой схемы Горнера раскладывается по степеням линейного многочлена в кольце классов вычетов по модулю 35 при выбранной точке разложения (второе секретное число). По числам-коэффициентам разложения создается блок символов алфавита. Так поступают с каждым блоком из п. б).

Г) Полученные блоки складываются в сообщение, являющееся шифрованным.

Схема дешифрования

А) Сообщение делится на блоки, длина которых совпадает с длиной блоков из п. б) схемы шифрования.

Б) Числа, сопоставленные символам блока, рассматриваются в качестве коэффициентов многочлена, который с помощью ступенчатой схемы Горнера раскладывается по степеням линейного многочлена с точкой разложения, равной разности числа 35 и точки разложения из

п. в) схемы шифрования, в кольце классов вычетов по модулю 35. По числам-коэффициентам разложения создается блок символов алфавита. Так поступают с каждым блоком из п. а).

В) Полученные блоки складываются в сообщение, удалив символы «*». Получается дешифрованное сообщение.

2. Практическая реализация

Предлагаются программы на Python [3] для шифрования и дешифрования текста с использованием многочленного шифрования на основе разложения многочлена, записанного в стандартной форме, по степеням линейного многочлена. В качестве алгоритма разложения многочлена используется ступенчатая схема Горнера.

Программа-шифратор

```
def alphabet_index(symbol):
    if symbol in alphabet:
        return alphabet.index(symbol) + 1
    else:
        raise ValueError(f"Символ '{symbol}' не найден в алфавите.")
def symbol_from_index(index):
    alphabet = 'абвгдеёжзийклмнопрстуфхцчшщьыъэюя *'
    return alphabet[index - 1]
def polynomial_encryption(message, n, a, m):
    # Приведение сообщения к нижнему регистру
    message = message.lower()
    # Преобразование сообщения в числа
    numbers = []
    for symbol in message:
        try:
            numbers.append(alphabet_index(symbol))
        except ValueError as e:
            print(e)
            return None
    # Дополнение сообщения до кратной длины n
    while len(numbers) % n != 0:
        numbers.append(alphabet_index('*'))
    # Разбиение на блоки длины n
    blocks = [numbers[i:i + n] for i in range(0, len(numbers), n)]
    # Шифрование каждого блока
    encrypted_blocks = []
    for block in blocks:
        encrypted_block = horner_scheme(block, a, m)
        encrypted_blocks.extend(encrypted_block)
    # Перевод зашифрованного сообщения в текст
    encrypted_message = ''
    for i in range(len(encrypted_blocks)):
        encrypted_blocks[i] = symbol_from_index(encrypted_blocks[i])
    for i in encrypted_blocks:
        encrypted_message += i
    return encrypted_message
```

```
def horner_scheme(block, a, m):
    result =[]
    n = len(block)
    b = [0] * n
    encrypted_block = []
    b[0] = block[0]
    for s in range(1, n+1):
        for i in range(1, n):
            b[i] = (b[i - 1] * a + block[i]) % m
        block = b
        encrypted_block.append(b[-s])
    for i in range(1,len(encrypted_block)+1):
        result.append(encrypted_block[-i])

    return result

# Пример использования
alphabet = 'абвгдеёжзийклмнопрстуфхцчшщьыъэюя *'
message = input('Введите сообщение: ')
n = 5
a = 7
m = len(alphabet)

encrypted_message = polynomial_encryption(message, n, a, m)
if encrypted_message is not None:
    print(encrypted_message)
else:
    print("Шифрование не удалось из-за недопустимых символов в сообщении.")
```

Пример:
исходное сообщение: многочленное шифрование сообщения (33 символа)
шифрованное сообщение: мфбйбчл нжо шпфгбпфниелшозб щнияёё (35 символов)

Программа-дешифратор

```
def symbol_from_index(index):
    return alphabet[index - 1]

def alphabet_index(symbol):
    if symbol in alphabet:
        return alphabet.index(symbol) + 1
    else:
        raise ValueError(f"Символ '{symbol}' не найден в алфавите.")

def polynomial_decryption(encrypted_message, n, a, m):
    # Перевод зашифрованного сообщения в индексы
    encrypted_index = []
    for i in encrypted_message:
        encrypted_index.append(alphabet_index(i))

    # Разбиение на блоки длины n
    blocks = [encrypted_index[i:i + n] for i in range(0, len(encrypted_index), n)]

    # Дешифрование каждого блока
```

```
    decrypted_blocks = []
    for block in blocks:
        decrypted_block = inverse_horner_scheme(block, a, m)
        decrypted_blocks.extend(decrypted_block)

    # Преобразование чисел в символы
    message = ''.join(symbol_from_index(num) for num in decrypted_blocks)

    # Удаление дополнительных символов '*'
    message = message.rstrip('*')

    return message

def inverse_horner_scheme(block, a, m):
    result = []
    n = len(block)
    b = [0] * n
    encrypted_block = []
    b[0] = block[0]
    for s in range(1, n + 1):
        for i in range(1, n):
            b[i] = (b[i - 1] * a + block[i]) % m
        block = b
        encrypted_block.append(b[-s])
    for i in range(1, len(encrypted_block) + 1):
        result.append(encrypted_block[-i])

    return result

# Пример использования
alphabet = 'абвгдеёжзийклмнопрстуфхцчшщьыъэюя *'
n = 5
a = 7
m = len(alphabet)
encrypted_message = input(‘Введите зашифрованное сообщение: ‘)
# Замена a на m - a
a = m - a

decrypted_message = polynomial_decryption(encrypted_message, n, a, m)
print("Дешифрованное сообщение:", decrypted_message)
```

Пример:
исходное сообщение: мфбйбчл нжо шпфгбпфниелшозб щнияёё
шифрованное сообщение: многочленное шифрование сообщения

Заключение

Итогом работы является компьютерная реализация на Python многочленного шифрования сообщений на основе разложения с применением ступенчатой схемы Горнера. Используя обобщения схемы Горнера [4, с. 40–42], можно предложить другие схемы многочленного шифрования, аналогичные рассмотренному.

Литература

1. *Винберг Э. Б.* Алгебра многочленов / Э. Б. Винберг. – Москва : Просвещение, 1980. – 176 с.

2. Введение в криптографию / Под общей ред. В. В. Ященко. – Санкт-Петербург : Питер, 2001. – 288 с.

3. *Лутц М.* Изучаем Python / М. Лутц. – Санкт-Петербург : Символ-Плюс, 2011. – 1280 с.

4. *Гриншпон С. Я.* Многочлены над областями целостности (теория и приложения) / С. Я. Гриншпон, И. Э. Гриншпон. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – 152 с.

УДК 004.94

МОДЕЛИРОВАНИЕ СУБЪЕКТИВНОГО ИГРОВОГО ОПЫТА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЛАБИРИНТОВ В КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГРАХ

В. Ю. Евсеенко, Е. В. Трофименко

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается моделирование субъективного игрового опыта в дизайне игр. В отличие от традиционного игрового дизайна, который опирается на фиксированную механику и статическую сложность, данный подход направлен на создание персонализированного, динамичного опыта, основанного на том, как игроки чувствуют и реагируют на игру. В статье рассматриваются ключевые компоненты субъективного моделирования и проводится анализ применения моделирования на практике.
Ключевые слова: субъективный опыт, моделирование, персонализация, генерация лабиринтов, вовлечение, доступность, поведение игрока.

Введение

Игровой дизайн часто рассматривается как единое целое, основанное на механиках игр, сценарии и графике. Хотя эти аспекты имеют решающее значение, часто упускается из виду еще одно важное измерение — субъективный опыт игрока. Концепция моделирования субъективного игрового опыта — это предметная область, которая стремится понять и смоделировать то, как отдельные игроки воспринимают и взаимодействуют с игрой, смещая фокус с универсальных профилей игроков на более персонализированный, динамичный опыт.

Субъективный игровой опыт представляет восприятие игроком игрового процесса. Этот опыт включает в себя спектр реакций, таких как эмоциональные и психологические, которые испытывает игрок при взаимодействии с игровыми элементами. В отличии от объективных показателей (время, проведённое за игрой, или процент её завершения), субъективный опыт отличается для каждого отдельного игрока, на него влияют такие факторы как настроение человека, личные предпочтения, предыдущий игровой опыт и общее эмоциональное состояние [1].

По мере того, как игры становятся всё более сложными в своём устройстве и требуют всё больших бюджетов, разработчикам приходится находить новые подходы к привлечению более широкой аудитории. Одним из таких подходов и является моделирование субъективного опыта игроков. Принимая во внимание субъективный опыт отдельных игроков, разработчики могут:

1. **Персонализировать игровой процесс:** игры могут динамически адаптироваться предпочтениям игрока. Например, если игрок совершает много ошибок, в игре может быть реализована возможность предложения игроку более простого сценария прохождения игрового уровня на основе анализа игрового процесса.

2. **Увеличить удержание игроков:** игры могут поддерживать интерес в течение более длительного времени, подстраиваясь под предпочтения и поведение игроков [2].

3. **Улучшить доступность:** субъективное моделирование игры позволяет адаптировать сложность и настраивать интерфейсы, делая игры более доступными для игроков с разным уровнем навыков и предпочтениями.

1. Ключевые компоненты моделирования субъективного игрового опыта

1.1. Профилирование игрока и персонализация

Игры, в которых используется моделирование субъективного опыта, зачастую пытаются в первую очередь понять игрока отслеживая такие параметры как:

• **предпочитаемый стиль игры** (например, агрессивный или стратегический)

• **внутриигровые решения** (то, как игрок выполняет задачи, поставленные игрой)

Анализируя эти параметры, алгоритм игра может подстраиваться под игровой стиль пользователя. Например, такие игры, как The Witcher 3 и Mass Effect, позволяют игрокам делать выбор, который влияет на сюжетную линию, персонализируя опыт на основе индивидуальных решений (рис. 1).

Рис. 1. Пример сюжетного выбора в The Witcher 3

Данные о поведении игрока:

• **принятие решений игроком:** в играх с разветвленным повествованием или множественным выбором объективные данные могут использоваться для понимания того, какие пути выбираются чаще и почему;

• **прямая конфронтация против скрытности:** в играх, которые предлагают несколько стилей игры (например, Dishonored), анализ субъективных данных может помочь определить, какой подход предпочитают игроки, и соответствующим образом адаптировать баланс игры;

• **взаимодействие с игровыми системами:**

a) **использование инвентаря:** отслеживание того, как игроки используют ресурсы, такие как зелья, улучшения или специальные предметы;

b) **использование навыков и способностей:** на какие способности игроки полагаются чаще всего, и какие механики используются большинством игроков;

1.2. Измерение показателей удержания игроков

Отслеживание того, как долго игроки остаются вовлеченными в игру и когда они прекращают играть, имеет решающее значение для понимания того, работоспособности различных компонент. Также в эту категорию входит замер того, как много игроки проводят времени за игрой каждый отдельный сеанс, что помогает измерить, насколько увлекательной остаётся игра со временем [3].

Инструменты для моделирования объективного игрового опыта:

• **телеметрические системы:** в игровом дизайне телеметрические системы собирают данные о том, как игроки взаимодействуют с игрой. Популярные движки, такие как Unity и Unreal Engine, имеют телеметрические системы, которые позволяют разработчикам собирать показатели производительности, поведения и прогресса игроков:

• **тепловые карты:** это визуальное представление данных [4], обычно используемое для того, чтобы показать, где игроки проводят больше всего времени или сталкиваются с наибольшим количеством смертей (рис. 2). Красным цветом обозначены места, в которых персонажи

игры погибают чаще всего, зелёным — места, в которых концентрация гибели персонажей меньше, но всё ещё превышает средний показатель на карте. Как видно на этом примере, использование тепловых карт может помочь в анализе того, какие области игры нуждаются в переработке и балансировке.

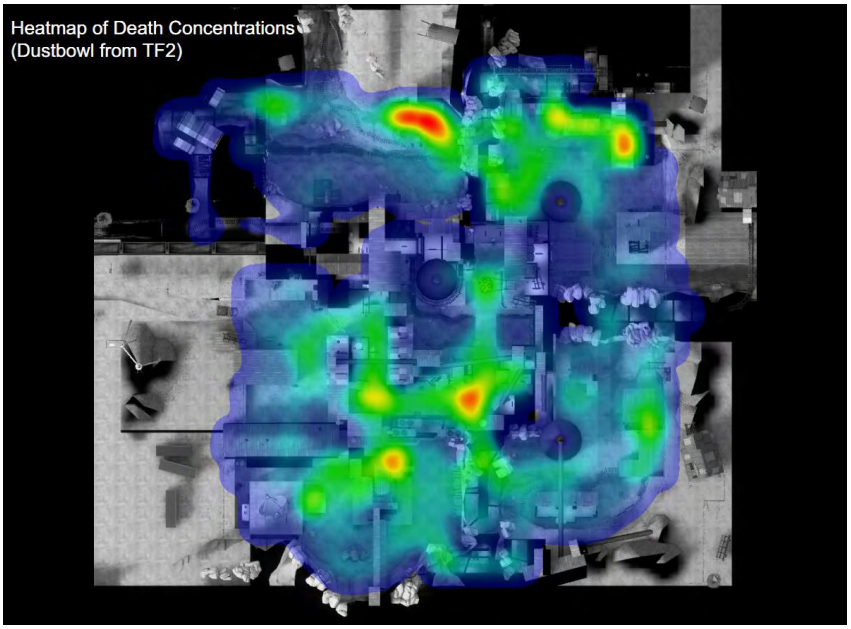


Рис. 2. Пример тепловой карты для Team Fortress 2

2. Применение моделирования субъективного опыта при генерации лабиринтов

В рамках данного исследования была реализована игра с помощью игрового движка Unity. Для создания разнообразных лабиринтов, которые смогут адаптироваться под каждого игрока в работе был использован анализ субъективного опыта, который был реализован в специальном скрипте, отслеживающем действия игрока. В нём отслеживается количество побеждённых врагов и собранное игроком золото, а также количество посещённых комнат. Далее эти данные обрабатываются генератором, который выбирает комнаты, подходящие под предпочтения игрока.

В случае, если игрок победил большое количество врагов, выбирается комната с врагами, а если он собрал много золота, выпадает комната с сокровищами. Если игрок не проявил особых предпочтений, генератор выбирает комнату случайно. В зависимости от процента посещённых комнат лабиринт может увеличиться в размере на следующей итерации.

На графике представлена зависимость генерации различных комнат от анализа поведения игрока.

На примере этого графика видно, что в каждом уровне лабиринта игра учитывает поведение игрока и старается подстроиться к нему.

Такой подход обладает следующими особенностями:

1.Так как каждый новый лабиринт отличается от предыдущего, у игрока возникает стимул исследовать новые уровни, пробовать новые пути и возможности;

2.Лабиринт создаётся согласно действиям игрока на предыдущем уровне, таким образом игрок не столкнётся со слишком сложным или слишком простым для него лабиринтом;

Альтернативой данному подходу является анализ в реальном времени. При такой реализации данные так же собираются на протяжении уровня, но их учёт и изменение переменных лабиринта происходит в реальном времени. Данный алгоритм так же был реализован на Unity. Алгоритм учитывает победу над врагами и собранное золото в реальном времени и изменя-

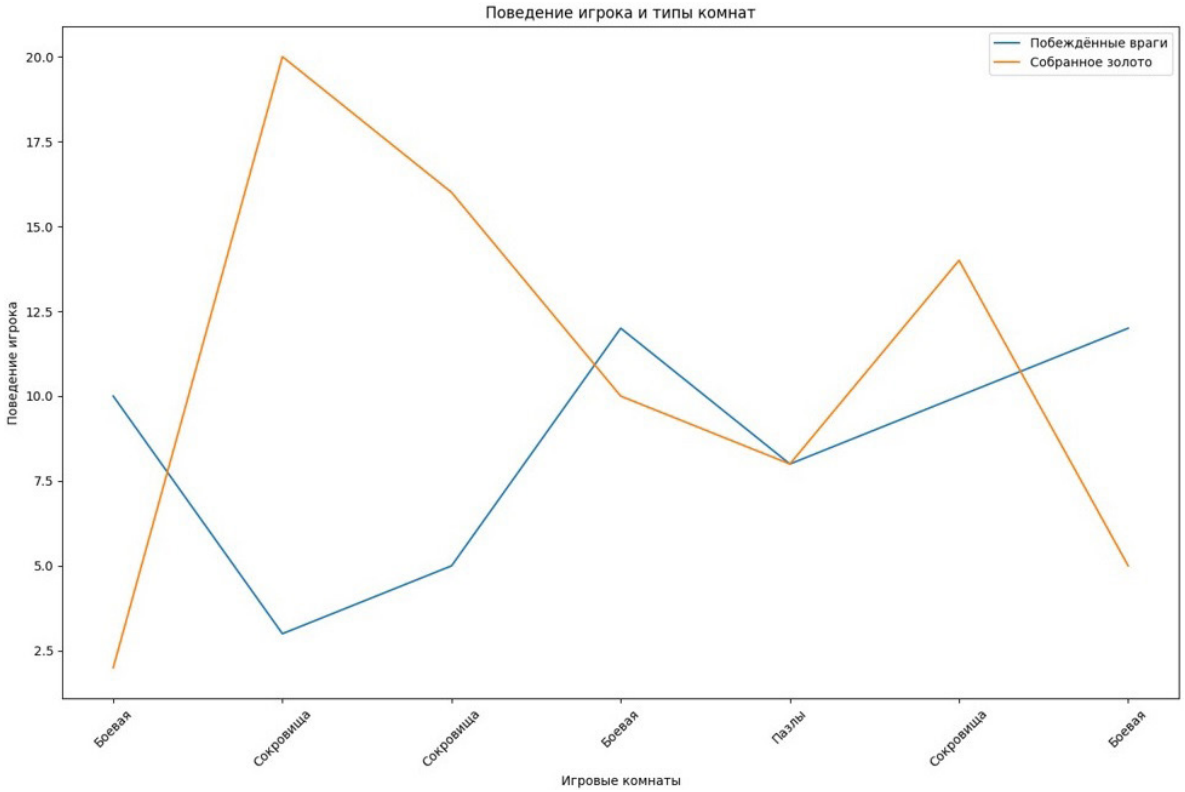


Рис. 3. Пример работы генератора

ет показатели для подстраивания под действия игрока. При использовании такого подхода вырастает нагрузка на устройство, но для небольшого количества переменных такой вариант может подойти лучше. Пример разницы в производительности можно увидеть в табл. 1.

Таблица 1

	Анализ в конце уровня	Анализ в реальном времени
Среднее число кадров в секунду	312	276
Нагрузка на ОЗУ	562 Mb	658 Mb

Исходя из данных таблицы видно, что преимуществом анализа в конце уровня является его производительность и стабильность, ведь лабиринт меняется только после перехода на следующий уровень и сам анализ использует меньшее количество ресурсов. В то же время анализ в реальном времени позволяет более динамически реагировать на действия игрока, что позволяет внести в игру элемент неожиданности и увеличить вовлечённости игрока.

Подводя итог, можно сказать, что выбор правильного подхода к отслеживанию зависит от целей игры, технических ограничений и желаемого игрового опыта.

Заключение

Использование моделирования субъективного опыта в игровом дизайне позволяет создавать более захватывающие и персонализированные впечатления, адаптируясь к поведению игроков. Этот подход основан на анализе данных, что позволяет разработчикам не только тонко настраивать игровую механику, но и формировать эмоциональное путешествие игроков, повышая удержание. Используя данный тип моделирования игрового опыта, разработчики лучше понимают игроков, что помогает им создавать более увлекательные игры, которые находят отклик на индивидуальном уровне.

Литература

1. Development and validation of the player experience inventory – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1071581919301302 (дата обращения 19.11.2024)

2. Too Many Questionnaires: Measuring Player Experience Whilst Playing Digital Games -URL: https://www-users.york.ac.uk/~pc530/pubs/Nordin_YDS2014.pdf (дата обращения 19.11.2024)

3. Game metrics without players – URL: https://www.kmjn.org/notes/analytical_metrics.html (дата обращения 19.11.2024)

4. A Heatmap guide for game level analysis– URL: https://medium.com/@dariarodionovano/a-heatmap-guide-for-game-level-analysis-68cb6a7bcb2b (дата обращения 19.11.2024)

5. Unity Game Engine – URL: https://unity.com/ru (дата обращения 19.11.2024)

6. AwesomeUnityCommunityLibrary–URL:https://github.com/sickq/AwesomeUnityCommunity (дата обращения 19.11.2024)

7. Matplotlib: Visualization with Python – URL: https://matplotlib.org/ (дата обращения 19.11.2024)

УДК 004.01

ОСНОВЫ, ПРИНЦИПЫ И ОСОБЕННОСТИ LIQUIBASE

Н. В. Желтиков

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрены ключевые аспекты работы liquibase — подключение, настройка и выполнение миграций. Описаны принципы работы инструмента, организация «ченджлога» (*changelog*) и управление «ченджсетом» (*changeset*). Разобраны интеграция liquibase в CI/CD-контейнеры, автоматическая генерация changelog, роллбеки, использование «Formatted SQL» и проверка синхронизации базы данных. Исследование направлено на систематизацию знаний о liquibase и демонстрацию его роли в оптимизации процессов разработки и развёртывания.
Ключевые слова: liquibase, миграции, changelog, changeset, rollback, база данных, контроль изменений, автоматизация, синхронизация, databasechangelog, databasechangelock.

Введение

Liquibase — инструмент для управления миграциями базы данных, обеспечивающий отслеживание, версионирование и автоматизацию изменений. Его основная цель — синхронизация схемы базы данных с кодовой базой и упрощение процесса развёртывания. Liquibase широко используется благодаря поддержке нескольких форматов описания изменений (XML, YAML, SQL и JSON), возможности отмены изменений на уровне отдельных релизов, возможности работы с конкретными SQL-диалектами, интеграции с популярными СУБД и современными CI/CD-платформами.

Таблица 1

Основные характеристики liquibase

Характеристика	Описание
Форматы	XML, YAML, SQL, JSON
Типы изменений	Структура базы данных, данные
Совместимость	PostgreSQL, MySQL, Oracle, SQLite и др.
Интеграция	Возможность внедрения в CI/CD инструменты (Jenkins, GitLab CI, GitHub Actions)
Универсальность	Поддержка работы за пределами Java-экосистемы
Доступность	Открытый исходный код

1. Подключение liquibase

Liquibase легко интегрируется с проектами на Java и другими экосистемами благодаря поддержке стандартных инструментов сборки и конфигурации. Для запуска liquibase преимущественно используются Maven или Gradle.

1.1. Добавление зависимости

Для проектов на Java добавление зависимости происходит через инструменты сборки:

• Maven:

```
<dependency>
    <groupId>org.liquibase</groupId>
```

```
        <artifactId>liquibase-core</artifactId>
        <version>4.x.x</version>
    </dependency>
```
• Gradle:
```
implementation 'org.liquibase:liquibase-core:4.x.x'
```

Для других языков (Python, .NET, Node.js) доступны плагины, которые можно использовать в DevOps-конвейерах.

1.2. Настройка подключения к базе данных

Liquibase рассматривает и, при наличии, использует файл liquibase.properties для конфигурации подключения:

```
url = jdbc:postgresql://localhost:5432/your_database
username = username
password = password
changelogFile = classpath:db/changelog/changelog.yaml
liquibase.hub.mode=off
```

Файл описывает URL базы данных, учётные данные, основной changelog-файл, где описаны миграции и интеграцию с Liquibase Hub.

В Spring-приложениях для конфигурации liquibase может быть использован файл application.properties или application.yaml. Пример application.yaml файла:

```
spring:
  datasource:
    password: password
    username: username
    url: jdbc:postgresql://localhost:5432/ your_database
  liquibase:
    change-log: classpath:db/changelog/changelog.xml
    defaultSchema: public
```

2. Принципы работы Liquibase

2.1. Changelog и Changeset

Liquibase работает с двумя основными концепциями:

• changelog — файл, описывающий последовательность изменений базы данных;

• changeset — блок изменений, содержащий уникальный идентификатор, имя автора и инструкции.

Пример XML-формата changeset:

```
<databaseChangeLog xmlns=»http://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog»
    xmlns:xsi=»http://www.w3.org/2001/XMLSchema-instance»
    xsi:schemaLocation=»http://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog
    http://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog/dbchangelog-4.0.xsd»>

    <changeSet id=»1» author=»user»>
        <createTable tableName=»users»>
            <column name=»id» type=»int» autoIncrement=»true»>
                <constraints primaryKey=»true»/>
            </column>
```

```
            <column name=»username» type=»varchar(255)»/>
            <column name=»created_at» type=»timestamp»/>
        </createTable>
    </changeSet>
</databaseChangeLog>
```

Пример XML-формата changelog:

```
<?xml version=»1.0» encoding=»UTF-8»?>
<databaseChangeLog
        xmlns=»http://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog»
        xmlns:xsi=»http://www.w3.org/2001/XMLSchema-instance»
        xsi:schemaLocation=»http://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog
            http://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog/dbchangelog-4.2.xsd»>

    <include file=»migrations/V2024_22_11_18_00_init_db.sql» relativeToChangelogFi
le=»true»/>
</databaseChangeLog>
```

Считывается changelog-файл, далее происходит проверка, какие изменения применены и какие необходимо выполнить. Одновременно с выполнением в таблицу databasechangelog записывается контрольная сумма (MD5-хэш) этого ченджсета.

Перед запуском liquibase пересчитывает контрольные суммы для всех ченджсетов и сравнивает их с ранее сохранёнными значениями в таблице. Если содержимое файла было изменено, новая контрольная сумма не совпадёт с исходной, что приведёт к остановке выполнения приложения.

2.2. Архитектура работы

При первом запуске liquibase автоматически создаёт две специальные таблицы — databasechangelog и databasechangelock, которые используются для управления миграциями:

• liquibase сохраняет данные о выполненных ченджсетах в таблице databasechangelog;

• при выполнении команды обновления (liquibase update), liquibase анализирует содержимое таблицы databasechangelog и применяет только те изменения, которые ещё не были зафиксированы;

• уникальные идентификаторы каждого ченджсета гарантируют, что миграции не будут выполнены повторно;

• таблица databasechangelock отвечает за блокировку, обеспечивая работу только одного экземпляра liquibase одновременно.

Одновременное использование нескольких экземпляров liquibase для одной базы данных может приводить к конфликтам. Для их предотвращения используется таблица databasechangelock, которая содержит поле locked (boolean). При запуске liquibase проверяет значение этого поля — если оно установлено в true, приложение ожидает, пока флаг не изменится на false. Однако в случае принудительного завершения программы на раннем этапе работы поле может остаться в состоянии true, что блокирует дальнейшие операции. Для устранения этой проблемы значение поля необходимо вручную изменить в базе данных на false.

3. Выполнение миграций

3.1. Базовые команды

Liquibase CLI предоставляет следующие команды:

• *update* — применяет изменения, описанные в changelog:

```
liquibase update
```

• *rollback* — отменяет одно или несколько изменений:
`liquibase rollbackCount 1`
• *status* — отображает список изменений, которые ещё не применены:
`liquibase status`

3.2. Интеграция в CI/CD

Liquibase интегрируется с CI/CD-платформами (Jenkins, GitHub Actions, GitLab CI). Пример выполнения миграций в Jenkins:

```
pipeline {
    stages {
        stage('Migration') {
            steps {
                sh 'liquibase update'
            }
        }
    }
}
```

4. Преимущества использования Liquibase

4.1. Контроль версий базы данных

Liquibase предоставляет встроенный механизм контроля версий базы данных, который исключает возможность повторного применения одного и того же ченджсета, позволяет отслеживать историю изменений, а также выявлять конфликтующие изменения.

4.2. Модульность

Liquibase поддерживает модульную структуру миграций, это позволяет сильно упростить управление изменениями в многокомпонентных системах. При помощи директивы include можно разделить общий changelog на несколько файлов. Это полезно в следующих случаях:

1. Работа с несколькими модулями или компонентами. В каждом модуле может храниться определённый changelog.

2. Читаемость. Крупные changelog-файлы трудно поддерживать, поэтому их разделение на модули улучшает структуру проекта и облегчает работу с ним.

3. Переиспользование. Отдельные миграции можно включать в разные проекты или компоненты.

4.3. Rollback

Liquibase предоставляет механизм отката изменений (rollback). Основные сценарии использования rollback:

• Исправление ошибок. Если новая миграция вызывает сбои, есть возможность её откатить, вернув базу данных в стабильное состояние.

• Тестирование миграций. На этапе разработки rollback позволяет многократно применять и откатывать изменения, проверяя их корректность.

Способы отката изменений:

• Откат определённого количества изменений:
`liquibase rollbackCount 2`

• Откат до конкретной точки во времени:

```
liquibase rollbackToDate 2024-11-22T18:00:00
```

• Откат изменений до определённой версии:

```
liquibase rollback version_tag_1.0
```

5. Расширенные возможности

5.1. Генерация начального Changelog

Liquibase может автоматически сгенерировать changelog, это полезно для внедрения liquibase в проекты с уже существующими базами данных:

```
liquibase generateChangeLog
```

5.2. Динамическое управление миграциями

Liquibase позволяет использовать динамические параметры для миграций, переменные заменяются значениями из файла конфигурации или окружения:

```
databaseChangeLog:
  - changeSet:
      id: 1
      author: user
      changes:
        - createTable:
            tableName: ${tableName}
```

5.2. Использование «Formatted SQL»

Liquibase поддерживает форматирование миграций непосредственно в SQL-файлах с использованием особого синтаксиса, называемого *Formatted SQL*. Это позволяет писать миграции в привычной форме SQL-запросов, добавляя специальные комментарии для управления миграциями.

Форматированный SQL использует комментарии для обозначения metadata ченджсетов. Пример:

```
--liquibase formatted sql

--changeset nzheltikov:1
CREATE TABLE users (
id INT AUTO_INCREMENT PRIMARY KEY,
username VARCHAR(255) NOT NULL,
created_at TIMESTAMP DEFAULT CURRENT_TIMESTAMP
);

--changeset nzheltikov:2
ALTER TABLE users ADD COLUMN email VARCHAR(255);
```

• `--liquibase formatted sql` — указывает, что файл содержит формализованные SQL-миграции.

• `--changeset <author>:<id>` — определяет уникальный идентификатор миграции.

Liquibase читает SQL-файл и интерпретирует специальные комментарии как метадату для управления миграциями. Комментарии обрабатываются liquibase как инструкции для опреде-

ления ченджсетов. Все изменения после тега `--changeset` считаются принадлежащими этому ченджсету до следующего такого тега или до конца файла.

Заключение

Liquibase — универсальный инструмент для контроля изменений базы данных, сочетающий простоту использования, удобство управления и функциональную гибкость. Благодаря поддержке различных форматов описания изменений, гибкости работы с SQL-диалектами и интеграции с CI/CD, liquibase является важной частью современных процессов разработки. Использование liquibase помогает снизить риски, повысить производительность команд и обеспечить согласованность между базой данных и приложением.

Литература

1. Liquibase Documentation. – URL: https://www.liquibase.org/documentation.

2. Миграции схемы базы данных с Liquibase. – URL: https://struchkov.dev/blog/ru/get-started-liquibase.

3. Using Liquibase. – URL: https://docs.oracle.com/en/database/oracle/sql-developer-command-line/23.4/sqcug/using-liquibase.html#GUID-4CA25386-E442-4D9D-B119-C1ACE6B79539.

4. Use Liquibase to Safely Evolve a Database Schema. – URL: https://www.baeldung.com/liquibase-refactor-schema-of-java-app.

5. Ambler W. Refactoring Databases: Evolutionary Database Design / W. Ambler, J. Sadalage. – Addison Wesley Professional, 2006. – 384 p.

УДК 004.42, 519.683

РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ «РАСПИСАНИЕ ВГУ». РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕРФЕЙСА

Е. А. Загородных

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается разработка мобильного приложения «Расписание ВГУ», предназначенного для обеспечения удобного доступа студентов и абитуриентов к актуальной информации о расписании занятий и других важных данных университета. Описаны этапы проектирования, включая анализ существующих решений и формулировку технического задания. Представлена структура приложения, функциональные возможности и особенности реализации пользовательского интерфейса.
Ключевые слова: программирование, мобильное приложение, расписание, пользовательский интерфейс, проектирование, разработка, студенты, информационные технологии, оптимизация, взаимодействие с сервером.

Введение

На сегодняшний день все больше людей предпочитают мобильный и быстрый доступ к информации. С каждым годом процент пользователей мобильных версий сайтов растет, а, следовательно, полные версии становятся все менее популярны.

Согласно информации сайта I-tech.ru, количество различных мобильных устройств в 2024 году достигло уровня 5,6 миллиарда, что составило 69,4 % от общего населения планеты. Статистика сайта Cossa.ru говорит о том, что мобильным телефоном в России владеет 98 % населения. Следовательно, всё более перспективной представляется адаптация информации именно под смартфоны, а не под персональные компьютеры.

В современном мире быстрый доступ к информации играет ключевую роль в образовательном процессе. Студенты и абитуриенты стремятся получать нужные данные в удобной и оперативной форме. Однако на данный момент мобильного приложения для расписания ВГУ не существует (или оно мне неизвестно), что создаёт неудобства для пользователей, которым приходится искать информацию через браузер или полные версии сайта. В связи с этим, разработка мобильного приложения является актуальным путем для повышения доступности информации об университете.

Поэтому, было принято решение разработать мобильное приложение для расписания ВГУ, содержащее в себе часто используемую информацию с сайта.

1. Анализ существующих решений

Анализ предметной области выявил значительные преимущества мобильного приложения в сравнении с традиционной верстkой сайтов, такие как улучшенное восприятие информации на мобильных устройствах и сокращение времени на получение нужных данных.

При разработке приложения был использован современный инструментарий, включая Android Studio и язык программирования Kotlin, что позволило создать эффективный и удобный продукт. Jetpack Compose был отобран как главный инструмент для создания пользовательского интерфейса не только из-за его удобства в интеграции с другими системами, но и благодаря более простому и интуитивно понятному декларативному подходу.

Анализ аналогичных приложений показал, что они имеют схожую структуру ключевых элементов, реализация которой необходима в программном продукте для его корректного и быстрого взаимодействия с пользователем.

2. Техническое задание

В соответствии с алгоритмом разработки, перед началом процесса сбора данных и написания кода было сформулировано техническое задание на создание мобильного приложения, состоящее из следующих пунктов:

Цели и задачи приложения. Целью разработки приложения является оперативное обеспечение студентов необходимой информацией и привлечение абитуриентов за счет удобства и простоты доступа к информации университета. Приложение должно содержать данные о расписании занятий, расположении корпусов университета, контактах и ссылках на официальные электронные ресурсы.

Язык реализации. Для приложения используется русский язык. Кроме того, предусмотрена возможность реализации интерфейса на английском языке для иностранных студентов и абитуриентов.

Ориентация экрана. Предполагаемая ориентация экрана при работе приложения на мобильных телефонах – портретная, но переключение на альбомную ориентацию не должно вызывать критических ошибок.

Стартовый экран. Стартовый экран содержит информацию о расписании выбранной группы, загружаемую с удаленного сервера.

Операционная система и устройства, обеспечивающие работу приложения. Приложение должно функционировать с операционной системой Android версии 8.1 и выше.

Языки программирования. При разработке приложения используются следующие языки программирования: Kotlin, Python. Взаимодействие с сервером осуществляется путем HTTP-запроса.

Оформление. Дизайн создаваемого приложения должен соответствовать корпоративному стилю университета.

3. Структура приложения

Для разработки приложения продумана и разработана схема взаимного расположения его частей. Приложение «Расписание ВГУ» состоит из четырех экранов, переходы между которыми осуществляются посредством взаимодействия с управляющим элементом (рис. 1). При такой структуре приложение показывает наилучшие результаты производительности и удобства. От схемы напрямую зависит, сможет ли пользователь найти интересующий его материал.

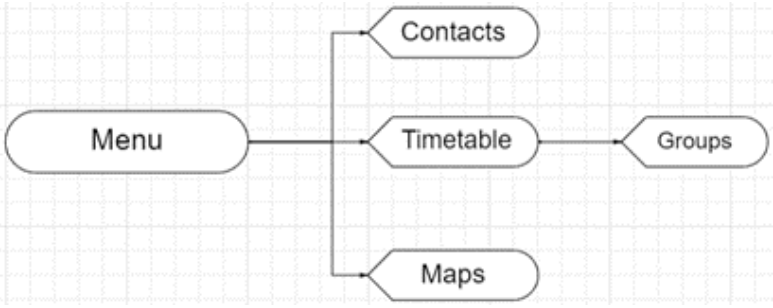


Рис. 1. Структура приложения

Приложение содержит следующие разделы, доступные для всех пользователей:

- «Расписание» — мобильная версия расписания занятий;
- «Группы» — список доступных для выбора групп;
- «Контакты» — раздел, содержащий основные контактные данные, такие как телефон, сайт, адрес;
- «Корпуса» — раздел с информацией о корпусах ВУЗа.

4. Описание разработанного приложения

Общим элементом для всех экранов является панель навигации с тремя элементами (Расписание, Корпуса, Контакты), каждый из которых имеет иконку и текстовую метку. При нажатии на элемент происходит навигация к соответствующему маршруту, а цвет иконки и текста изменяется в зависимости от того, выбран элемент или нет.

Экран расписания включает в себя верхнюю панель, проверку состояния подключения и отображение расписания с возможностью прокрутки. Заполнение экрана расписания производится данными, полученными с удаленного сервера. Экземпляры расписаний хранятся на нем в виде файлов с разрешением XML.

Для удобства отображения данных расписания в сети, на сервере размещены несколько документов HTML, формирующих таблицу архива расписаний и предоставляющих возможность просмотра данных в понятном пользователю виде с помощью технологии Github Pages.

Для загрузки файла с расписанием используется технология Retrofit 2. Важно отметить, что при наличии нескольких файлов на сервере, загружается актуальный экземпляр расписания. После загрузки файл преобразуется функцией в формат JSON. Полученный результат становится хранилищем неструктурированных данных. Затем информация заполняется в локальное хранилище с использованием классов. Это позволяет структурировать данные и оптимизировать доступ к ним. Номера групп хранятся в упорядоченном списке класса, который отличается от других тем, что содержит только номера групп для выбора, но не для самого расписания.

Верхнюю панель оборудована инструментами для выбора четности недели, обновления информации по расписанию, навигации к текущему дню и переходу к экрану для выбора учебной группы. В работе основной части экрана предусмотрены различные состояния отображения информации (рис. 2):

– При отсутствии данных или соединения с интернетом выводится уведомление о невозможности получить расписание из-за проблемы с JSON файлом или подключением к сети.

– Во время загрузки данных пользователю показывается индикатор загрузки и элементы для выбора группы.

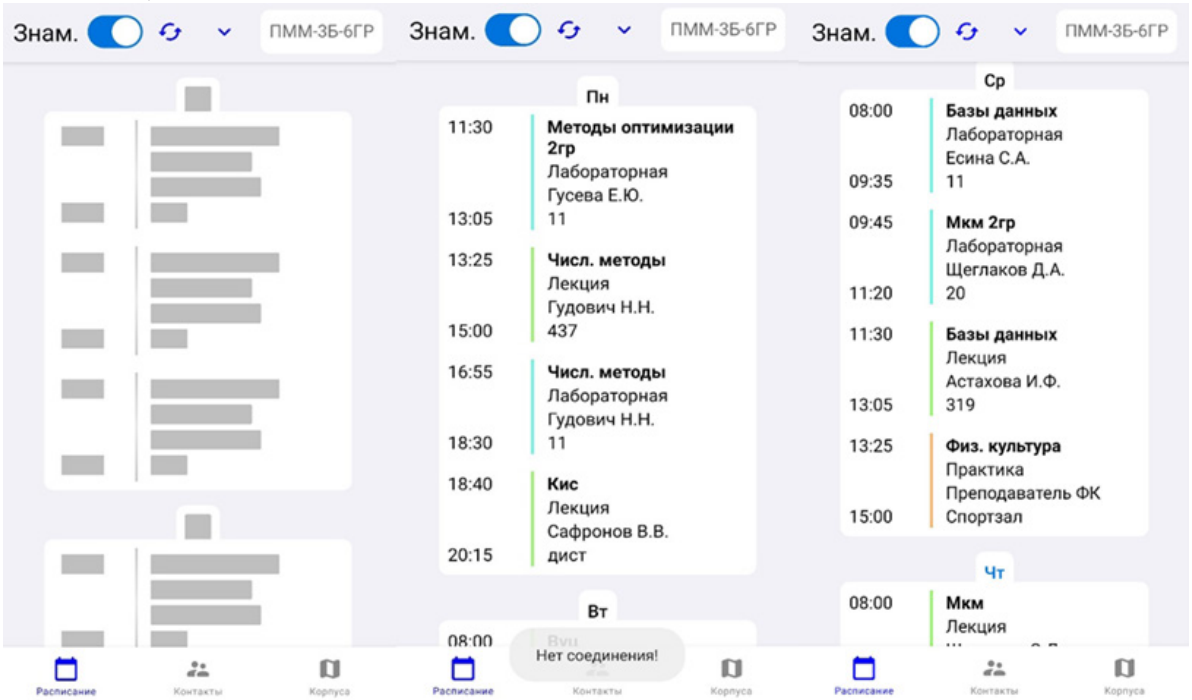


Рис. 2. Различные состояния экрана «Расписание»

– После загрузки данные фильтруются и на экран выводится расписание для конкретной группы и указанной недели.

Отдельно создается экран для выбора группы. Обеспечивает возможность поиска и фильтрации групп. В верхней панели задаются кнопка для возвращения на экран с расписанием и поле с поиском группы. Если список групп пуст, пользователю будет показано сообщение «No groups found».

Для отображения экрана со списком контактов (рис. 3) используется инструмент LazyColumn. С его помощью элементы списка загружаются по мере прокрутки, что уменьшает нагрузку на процессор. Также на некоторые контакты добавлены ссылки, чтобы пользователь смог быстро перейти на нужный ему сервис.

Для быстрой валидации полученных данных используется сущность, состоящая из названия контакта, его описание и ссылки (опционально).

Для отображения экрана с карточками корпусов ВГУ (рис. 4) реализована Composable-функция. Чтобы отобразить список корпусов также используется инструмент LazyColumn. Для создания карточки с информацией создается сущность, состоящая из названия корпуса, его фотографии, адреса и ссылки на геолокацию.

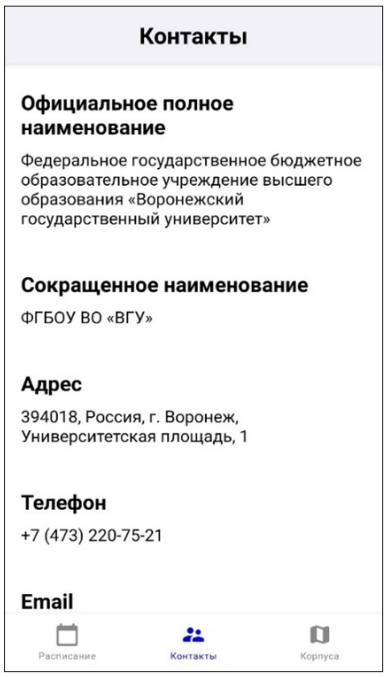


Рис. 3. Экран «Контакты»

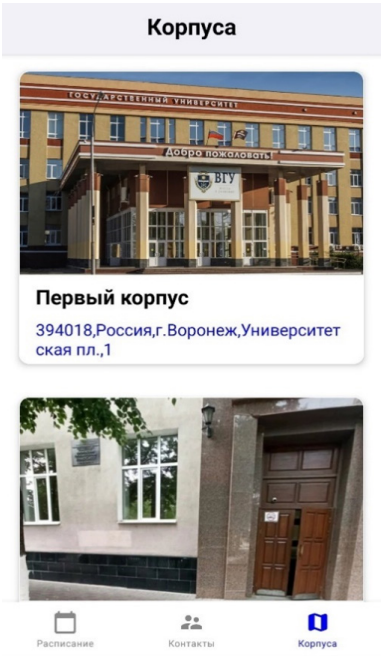


Рис. 4. Экран «Корпуса»

Заключение

Разработанное мобильное приложение «Расписание ВГУ» представляет собой мощный инструмент, обеспечивающий студентов оперативным доступом к необходимым данным. Учитывая его структуру и функционал, пользователи могут легко находить информацию о расписании, корпусах и контактных данных университета. Использование современных языков программирования и технологий, таких как Kotlin и Jetpack Compose, позволило добиться высокой производительности и удобства взаимодействия.

Приложение не только упрощает процесс получения информации, но и создает положительный имидж университета, способствуя привлечению новых абитуриентов. В дальнейшем планируется развитие функционала и интеграция дополнительных возможностей для улучшения пользовательского опыта.

Литература

1. Рынок мобильных приложений в России и мире. – (URL: http://www.json.ru/poleznye_materialy/rynok_mobilnyh_prilozhenij_v_mire) (дата обращения: 15.05.2024).

2. Приложения в Google Play – NinjaMirea. – (URL: https://play.google.com/store/apps/details?id=ninja.mirea.mireaapp&hl=ru) (дата обращения: 15.05.2024).

3. *Дэрси Л.* Разработка приложений для Android-устройств. Т. 1. Базовые принципы / Л. Дэрси, Ш. Кондер. – Москва : Эксмо, 2014. – 598 с.

4. Официальный сайт ВГУ. – (URL: https://www.vsu.ru/) (дата обращения: 15.05.2024).

5. *Майер Р.* Программирование приложений для планшетных компьютеров и смартфонов / Р. Майер. – Москва : Эксмо, 2013. – 816 с.

6. *Гриффитс Р. Д.* Head First. Программирование для Android / Р. Д. Гриффитс. – Санкт-Петербург : Питер, 2016. – 704 с.

УДК 004.424.5

АНАЛИЗ ВЫБОРА ОПОРНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ БЫСТРОЙ СОРТИРОВКИ СПИСКА

И. А. Клюев, М. С. Ефремов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Данная работа посвящена анализу алгоритма быстрой сортировки с использованием списковых структур данных. В работе проводится анализ возможных случаев деградации скорости работы алгоритма. Подымается проблема выбора необходимых структур данных при использовании нестандартных распределителей памяти. Предлагается возможный вариант выбора опорного элемента для быстрой сортировки при последовательном доступе к данным.
Ключевые слова: сортировка, упорядочивание, быстрая сортировка, быстрая сортировка списка, сортировка списка, quick sort, qsort.

Введение

В работе любой информационной системы может возникнуть задача упорядочивания данных, поэтому скорость выполнения данной операции является важной характеристикой. Для решения данной задачи разработано множество алгоритмов сортировок.

Самые распространённые способы упорядочивания основаны на непосредственном сравнении двух записей. Такие алгоритмы легко обобщать на разные типы данных, использовав специальную функцию сравнения — компаратор. Такие подходы в основном используют в встроенных средствах языков программирования, так как заранее неизвестно с какими данными необходимо работать программисту.

Одним из самых известных алгоритмов упорядочивания является быстрая сортировка или сортировка Хоара (qsort). В большинстве практических случаев данный способ упорядочивания показывает хорошие результаты. Так, в исследовании [1] авторы производят сравнение сортировки слиянием и быстрой сортировки, где вторая показывает более высокую скорость работы.

Хотя быстрая сортировка обычно демонстрирует хорошую производительность, также возможна и её деградация в некоторых случаях. Это хорошо рассмотрено в пособии Никлауса Вирта [2] в соответствующем разделе.

В большинстве программных пакетов алгоритм быстрой сортировки реализован только для непрерывных данных, таких как массивы, где возможно быстро осуществить доступ к произвольному элементу. Однако, не во всех информационных системах можно представить непрерывный набор данных. Как правило это касается систем, использующие нестандартные распределители памяти, которые в пользу некоторых оптимизаций накладывают ограничения на их использование. В работе [3] рассматривается сложность представления непрерывной памяти в одной из таких систем.

В таком случае известные алгоритмы надо адаптировать под определенную архитектуру программного обеспечения. В описанном ранее случае одним из вариантов решения является использование списковых структур данных, в которых выделяемые блоки памяти ограничены в наборе возможных значений. В данной работе предлагается метод быстрой сортировки с использованием односвязного списка, который обладает хорошей устойчивостью к возможным деградациям скорости.

1. Метод быстрой сортировки

В начале работы один из элементов исходного набора выбирается в качестве «опорного элемента». Далее происходит деление исходного набора на две части, так чтобы в одной из частей все элементы были не больше опорного, а в другой не меньше. Такая операция рекурсивно повторяется для каждого полученного набора пока не останется одна запись.

Как правило, для уменьшения глубины рекурсии используется гибридный подход с переключением на другой метод сортировки при достижении определенных условий. Например, данный подход лежит в основе сортировки Introsort, реализованной в стандартных библиотеках некоторых языков программирования [4].

Одной из самых известных оптимизация алгоритма является деление упорядочиваемого набора на три части. Отдельно выбирается набор с данными, которые равны опорному элементу. Такой набор по определению является отсортированным, поэтому достаточно рекурсивно обработать другие два набора. Данный подход хорошо подходит в случае, когда сортируется выборка с большим числом одинаковых элементов.

При использовании массивов данных для разделения на наборы производится обмен необходимых элементов «на месте». То есть, полученные наборы представляют независимые отрезки данных в пределах входного массива. Таким образом, алгоритм потребляет память только для обеспечения рекурсивного прохода.

В рассматриваемом случае предлагается каждый набор представлять как отдельный односвязный список, хранящий указатель на начальный и конечный узлы. Узлы входного списка будут распределяются по необходимым наборам. После упорядочивания каждого такого набора, предлагается их объединить в итоговый список. Именно для быстрого выполнения данной операции и требуется хранение указателя на конечный узел. Как и в случае сортировки массивов, алгоритм требует дополнительную память только для обеспечения рекурсии.

2. Проблема выбора опорного элемента

Худший случай работы быстрой сортировки — это когда каждый раз в качестве опорного будет выбираться минимальный или максимальный элемент. В такой ситуации за один проход по набору будет происходить упорядочивание всего одной записи, а алгоритмическая сложность всей сортировки будет квадратичной.

Для того чтобы предотвратить упадок скорости очень важно правильно выбирать опорный элемент. Для лучшего распределения по полученным наборам выгоднее всего выбирать медиану — средний элемент из всего входного потока. Однако, точный поиск медианы затрачивает слишком много дополнительных операций.

Для уменьшения сопутствующих затрат медиану можно выбирать только из нескольких записей сортируемой выборки. Даже при таком раскладе риски выбрать опорный элемент неудачно будут минимальны. Чем больше сортируемый набор, тем больше элементов стоит взять для нахождения медианы. При сортировке массива можно выбрать медиану из случайных элементов или равномерно распределенных.

При упорядочивании списка выбор опорного элемента затрудняется. Список поддерживает только последовательный доступ к данным. Получается, что без дополнительного прохода по списку невозможно выбрать опорный элемент без рисков падения скорости сортировки. Однако, дополнительный просмотр списка неприемлем с точки зрения скорости работы. Для решения этой проблемы далее предлагается один из возможных способов выбора опорного элемента.

3. Способ нахождения опорного элемента

Предлагается выбирать опорный элемент как медиану из 9 элементов входного потока. Далее всё будет анализироваться для этого случая. При необходимости алгоритм можно обобщить и на другие размеры наборов. Основная идея – выборка опорного элемента в процессе сортировки. Во время разделения исходного набора уже делается проход по списку. Во время выполнения данного процесса можно выбрать опорный элемент и использовать его при дальнейшей работе алгоритма.

Для этого следует использовать вспомогательный массив из 9 элементов, где один элемент — это указатель на запись в сортируемом списке. Необходимо аккумулировать ссылки на упорядочиваемые записи в этот массив с определённым шагом. В качестве начального шага предлагается взять значение 4. То есть каждая четвертая запись должна быть помещена в рассматриваемый массив. Для обеспечения этого процесса каждому элементу списка будет присвоен порядковый номер. Номера в списке и индексы в массиве будут начинаться с нуля.

После того как следующая запись не может поместиться в массив, осуществляется удаление элементов из массива с нечётными номерами, а также смещение элементов с чётными номерами вперёд. Получается свободное пространство в конце массива, где на первое освободившиеся место добавляется новый элемент. После того как произойдёт такая процедура, шаг увеличивается в 2 раза. То есть, после первого выполнения данной процедуры, будет аккумулироваться каждый восьмой элемент, потом каждый шестнадцатый и так далее.

После просмотра входного потока данных опорный элемент выбирается среди записей из рассматриваемого массива. Так как рекурсивная сортировка происходит для нескольких полученных наборов, то процесс выбора опорного элемента следует провести для каждого из них.

Однако, до сих пор неизвестно каким образом выбирать опорный элемент перед первым проходом алгоритма. В таком случае опорный элемент можно выбрать из первых записей списка, хоть это и не гарантирует удачность выбора. Если же данные приходят извне из некоторого потока, то выбор можно произвести в период чтения этого потока.

4. Ленивая сортировка

Одним из примечательных достоинств быстрой сортировки в том, что можно откладывать упорядочивание неиспользуемых данных.

Во время процесса сортировки исходный набор данных делится на наборы меньшего объема. Далее каждый такой набор упорядочивается независимо друг от друга. Сортировку некоторых полученных наборов можно откладывать, пока данные из них не будут запрошены. Также это ускоряет получение первой порции упорядоченных данных. Примечательно, что использование данной особенности не увеличивает время работы для получения полного результата.

Эта позволяет отдавать данные порционно в потоковом режиме Такая возможность довольно привлекательна в большом ряде задач. Например, при представлении данных с помощью пользовательского интерфейса, где записи загружаются по мере их просмотра.

Заключение

В результате данной работы был исследован алгоритм быстрой сортировки с использованием односвязного списка. В ходе работы было проанализировано возможное падение скорости работы алгоритма в случае неудачного выбора опорного элемента. Была предложена идея по выбору данного элемента в случае последовательного доступа к данным. Данный под-

ход возможно использовать в системах с нестандартными распределителями памяти, где есть ограничение на используемые структуры данных.

Литература

1. *Nunes-Harwitt A.* Quick-Sort: A Pet Peeve / A. Nunes-Harwitt, M. Gambogi, T. Whitaker // SIGCSE '18: Proceedings of the 49th ACM Technical Symposium on Computer Science Education (Baltimore Maryland, February 21-24, 2018). – New York : Association for Computing Machinery, 2018 – P. 547–549.

2. *Вирт Н.* Алгоритмы и структуры данных. Новая версия для Оберона. / Н. Вирт ; пер. с англ. В. Ф. Ткачева – Москва : ДМК Пресс, 2016. – 272 с.3. *Клюев И. А.* Поразрядная сортировка строк для систем с дискретно-страничной организацией памяти / И. А. Клюев, М. С. Ефремов // Сборник трудов Международной научной конференции Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики (Воронеж, 4–6 декабря 2023 г). – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 864–869.

4. *David R. M.* Introspective sorting and selection algorithms / R. M. David // Software: Practice and Experience. – 1997. – Vol. 27, № 8. – P. 983–993.

УДК 004.415.2

ПРОЕКТИРОВАНИЕ WEB-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ СПОРТСМЕНОВ

О. О. Корнева, М. В. Матвеева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается проектирование веб-приложения для представления данных спортсменов. В статье сформулированы требования к приложению, а также приводится спроектированная модель данных для хранения информации и структура серверной части веб-приложения.
Ключевые слова: программирование, веб-приложение, веб-разработка, java, проектирование веб-приложения, легкая атлетика.

Введение

В условиях повышенной конкуренции и необходимости оптимизации тренировочного процесса спортсмены сталкиваются с ситуациями, требующими доступа к структурированной информации о результатах соперников и предстоящих соревнованиях. В связи с этим возникает потребность в разработке специализированного веб-приложения, которое позволит спортсменам получать актуальные данные, которые могут поспособствовать улучшению результатов за счет более точного подхода к подготовке на основании представленной информации.

В статье будет описано проектирование приложения, предоставляющего возможность просмотра данных о спортсменах легкоатлетах, предстоящих соревнованиях и рейтинговых списках. Доступ к этим данным позволит пользователям самостоятельно анализировать информацию о результатах завершившихся спортивных мероприятий, строить тренировочные планы на основе календаря соревнований и оценивать свои силы, ориентируясь на рейтинги других спортсменов.

1. Анализ существующих решений

На данный момент существует только один ресурс, предоставляющий доступ к данным и результатам легкоатлетов VFLA [1].

При анализе существующего решения были выявлены следующие недостатки:

• Отсутствие возможности поиска спортсмена по комбинации «Имя, Фамилия». Данная функциональность создает ограничения поиска и затрудняет доступ к информации, что делает взаимодействие пользователя с системой менее удобным.

• Отсутствие разграничения функций для спортсменов и судей. Большая часть пользователей веб-приложения является спортсменами, для которых информация для судей является не актуальной.

• Некорректное отображение данных в столбцах личного кабинета спортсмена. При взаимодействии с системой данные представлены не структурированно, что затрудняет восприятие информации пользователями.

• Главная страница не отображает сущности веб-приложения. Кратко не изложена основная задача системы, обилие вкладок затрудняет работу с приложением.

Исходя из вышесказанного, возникла необходимость с в разработке веб-приложения, которое бы учитывало все недочеты рассмотренного ресурса и развивало уже имеющуюся функциональность, повысив удобство взаимодействия пользователей с системой.

2. Требования к приложению

Веб-приложение должно предоставлять следующие возможности:
• регистрация в системе;
• аутентификация в системе;
• просмотр личных данных спортсмена:
– ФИО;
– дата рождения;
– разряд;
– тренерский штаб спортсмена;
– соревнования, в которых было принято участие с указанием результата;
• просмотр данных о предстоящих соревнованиях и итогах уже прошедших:
– название мероприятия;
– дата проведения;
– итоговые протоколы соревнований;
• просмотр топ-листов:
– сортировка по возрастной группе и дистанции;
– сортировка по очкам соревновательного сезона.

Основная функциональность приложения доступна только авторизованным пользователям. Неавторизованный пользователь должен пройти регистрацию или войти в систему, если был зарегистрирован раннее.

3. Модель данных

Для хранения пользовательской информации, сведений о спортивных мероприятиях, разрядах и тренерском составе была разработана база данных [2]. На рис.1 изображена логическая модель.

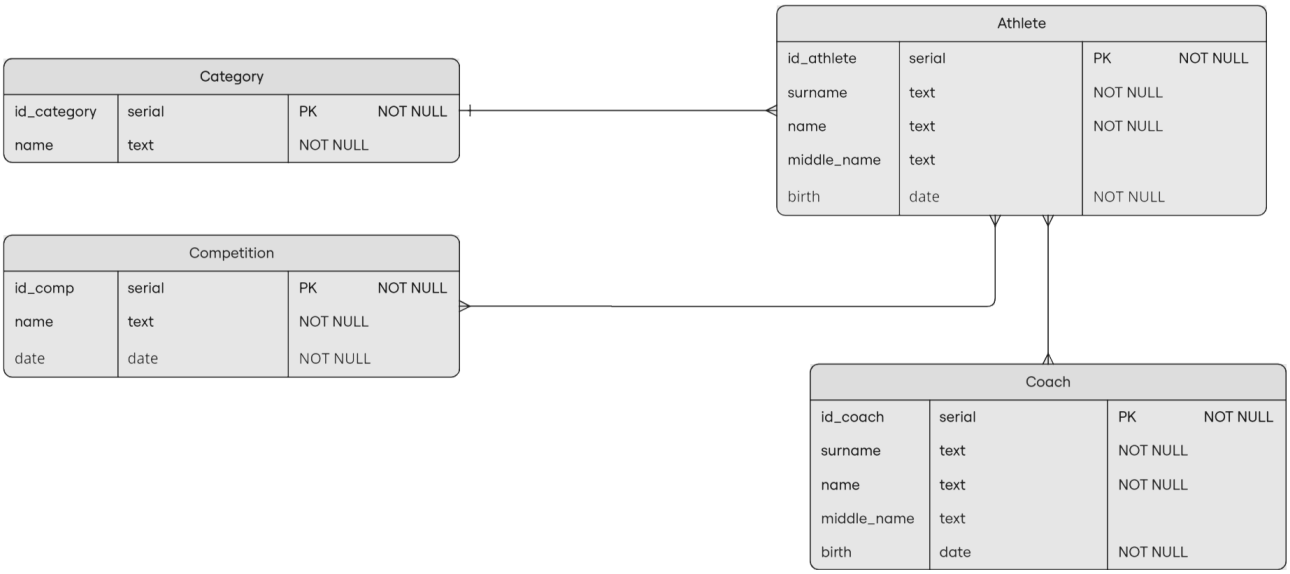


Рис. 1. Логическая модель данных

Сущность Athlete содержит личные данные спортсмена, ее структура представлена в табл. 3.1.

Сущность *Coach* содержит данных о тренерском составе и состоит из повторяющегося набора атрибутов таблицы *Athlete*.

Таблица 3.1

Сущность Athlete

Имя атрибута	Тип данных	Назначение	Ограничения
id_athlete	serial	Уникальный идентификатор. Новые значения автоматически генерируются при вставке данных в таблицу	Первичный ключ, NOT NULL
surname	text	Фамилия спортсмена	NOT NULL
name	text	Имя спортсмена	NOT NULL
middle_name	text	Отчество спортсмена	Допускается NULL значение
birth	date	Дата рождения спортсмена	NOT NULL

Coach соединены с отношением *Athlete* связью «многие-ко-многим». Это спроектировано данным образом с целью учесть наличие у тренера нескольких спортсменов, а также большого тренерского штаба, работающего с одним спортсменом.

Сущность *Category* содержит сведения о разрядах, ее структура приведена в табл.3.2.

Category соединена связью «один-ко-многим» с сущностью *Athlete*, так как специфика легкой атлетики подразумевает наличие только одного действующего разряда у спортсмена.

Таблица 3.2

Сущность Category

Имя атрибута	Тип данных	Назначение	Ограничения
id_category	serial	Уникальный идентификатор. Новые значения автоматически генерируются при вставке данных в таблицу	NOT NULL, Первичный ключ
name	text	Название разряда	NOT NULL

Сущность *Competition* содержит информацию о соревнованиях, ее структура представлена в табл.3.3.

Competiton соединена с сущностью *Athlete* связью «многие-ко-многим» для того, чтобы учесть многочисленные участия спортсмена в соревнованиях.

Таблица 3.3

Сущность Competition

Имя атрибута	Тип данных	Назначение	Ограничения
id_comp	serial	Уникальный идентификатор соревнования. Новые значения автоматически генерируются при вставке данных в таблицу	Первичный ключ, NOT NULL
name	integer	Название соревнования	NOT NULL
date	date	Дата проведения соревнования.	NULL значение допускается

4. Архитектура серверной части веб-приложения

Под архитектурой приложения понимается структура проекта и его компоненты. Разрабатываемое веб-приложение включает в себя следующие части:

- services (сервисы) — содержат бизнес-логику, выполняют *CRUD* операции [3];
- controllers (контроллеры) — отвечают за обработку HTTP-запросов;
- repository (репозиторий) — обеспечивают единый интерфейс доступа к данным для других компонентов;

• entity (сущности) — представляют собой объекты данных, которые используются в приложении для хранения информации;

• dto (англ. data transfer objects) — используются для передачи информации между компонентами, оптимизируют процесс за счет исключения избыточности [4];

• mappers (мапперы) — управляют преобразованием объектов между различными форматами;

• exceptions (исключения) — отвечают за обработку различных ошибок, возникающих при валидации и авторизации;

• security (безопасность) — обеспечивают защиту от атак, управление правами доступа к ресурсам приложения.

Структура java-проекта представлена на рис. 2.

Такой набор используемых компонентов позволяет наиболее гибко и с минимальными затратами подойти к разработке веб-приложения для представления данных спортсменов.

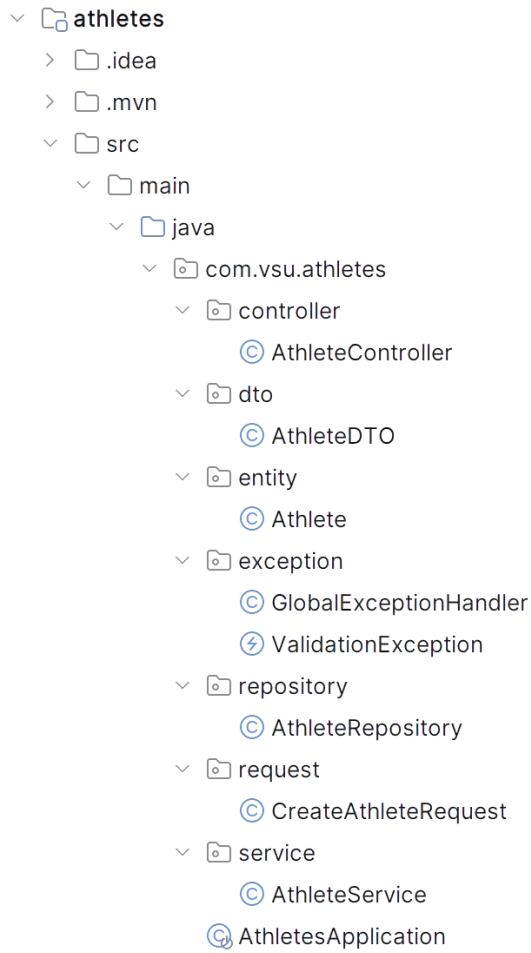


Рис. 2. Структура серверной части проекта

5. RESTful-сервис

REST API — набор правил взаимодействия веб-приложения с сервером, которые применяются в тех случаях, когда пользователю нужно предоставить данные с сервера, а также они отвечают за унификацию и стандартизацию взаимодействия компьютеров в одной сети.

В ходе разработки были использованы следующие принципы *REST API*:

• Обмен данными осуществляется с использованием стандартных HTTP-методов: GET, PUT, POST, DELETE.

• Унификация интерфейса. Для каждого ресурса был выбран индивидуальный идентификатор (URI).

•Использование набора гиперссылок. Сервер направляет клиент на следующие возможные шаги.

•При взаимодействии используются статус-коды ответов *API*. На положительный ответ от сервера указывают статус-коды 200, при ошибке обработки запроса используются коды 400, внутренняя ошибка обладает статус-кодом 500.

•При передаче данных использовался формат JSON. Преимуществом такого формата является легковесность и простота читаемости данных.

6. Интерфейс веб-приложения

При реализации клиентской части приложения использовались:

• Язык гипертекстовой разметки — HTML.

• Язык описания стилей — CSS.

• Среда разработки Microsoft Visual Studio 2022.

Интерфейс пользователя должен быть интуитивно понятным и отражать основную идею приложения.

При создании интерфейса использовался уже существующий логотип «ВФЛА», так как федерация является узнаваемой общественной общероссийской организацией.

В структуре интерфейса были определены основные страницы:

– Страница просмотра ближайших соревнований. Отображает спортивные мероприятия, которые сформированы в соответствии с календарем.

– Страница отображения топ-листа. Предоставляет пользователю рейтинговый список по заданным критериям.

– Страница поиска спортсменов. Отображает окно поиска спортсменов, для дальнейшего ознакомления с его личными данными и результатами по итогам прошедших соревнований.

Самой частой по запросам спортсменов является страница просмотра ближайших соревнований, которая представлена на рис.3. В верхней части страницы расположено меню, которое помогает пользователю сориентироваться в разделах.

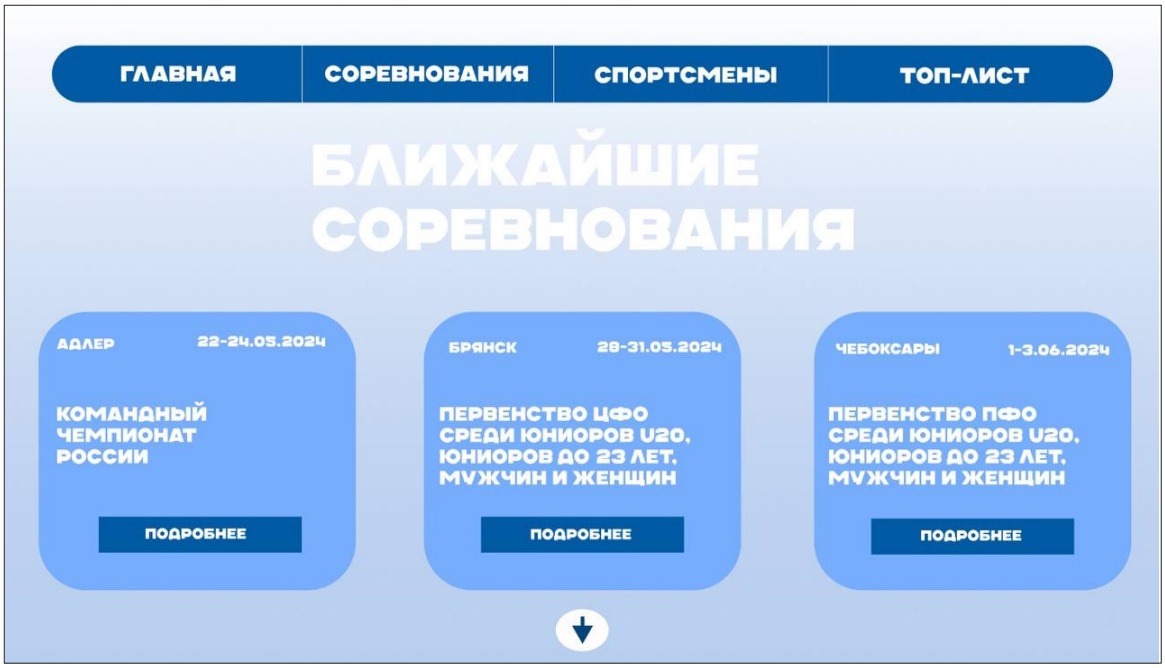


Рис. 3. Страница просмотра ближайших соревнований

На рис.4 представлена страница авторизованного пользователя. Данная страница отображает основные задачи веб-приложения, тем самым повышая удобство при взаимодействии пользователя с системой.

Рис. 4. Страница авторизованного пользователя

Заключение

Результатом работы является проект веб-приложения для представления данных спортсменов. Были разработаны требования к приложению, база данных и структура его серверной части. На данный момент приложение находится на стадии реализации. Планируется реализовать клиентскую часть, разработать улучшенную функциональность для серверной части, а также перенести ресурс на хостинг и ввести его в эксплуатацию.

Литература

1. Vfla – URL: https://vfla.lsport.net (дата обращения: 17.11.2024).
2. *Конноли Т.* Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика / Т. Конноли, К. Бегг пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильяме», 2003. – 1440 с.
3. *Блох Д.* Java Эффективное программирование / Д. Блох. – Москва : Лори, 2016. – 440 с.
4. *Шилдт Г.* Java: Руководство для начинающих. – М. : Эксмо, 2018.

УДК 004.428.4

РАЗРАБОТКА СЕРВЕРНОЙ ЧАСТИ ВИДЕОХОСТИНГА НА ЯЗЫКЕ JAVA

М. С. Кравцова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной работе рассматривается проектирование веб-приложения видеохостинга, а также реализация серверной части данного приложения на языке программирования Java. В статье кратко рассмотрена функциональность приложения, приведен анализ библиотек в Java, предназначенных для backend-разработки, представлена модель базы данных видеохостинга, а также рассмотрены функциональные слои серверной части веб-приложения и их взаимодействие между собой.

Ключевые слова: веб-приложение, программирование, язык Java, backend-разработка, Spring Framework, Java Servlet API, серверная часть приложения, проектирование веб-приложения, видеохостинг.

Введение

На протяжении всей истории человек нуждается в получении различной информации. В наше время источниками информации служат не только газеты и книги, а также статьи в Интернете, различные аудио и видеоматериалы. Очень большую популярность сейчас набирают именно видеоматериалы, потому что они несут как звуковую, так и визуальную информацию. Поэтому в наше время появились такие сервисы, как видеохостинги, на которых каждый человек может найти необходимый материал по интересующей теме. Также каждый человек может загрузить свой видеоматериал, который окажется полезным или развлекательным для огромного числа других пользователей системы.

На данный момент существует немалое количество видеохостингов, но, в основном, они являются зарубежными ресурсами. Некоторые из них не доступны в нашей стране. Видеохостингов, разработанных в России, сейчас очень мало. По данным причинам очень актуально создать сервис такого рода, имеющий происхождение и использование именно в нашей стране.

1. Функциональность приложения видеохостинга

Веб-приложение должно обладать следующей функциональностью:

– регистрация, создание или удаление существующего канала;

– обзор страницы существующего канала, своего или чужого;

– обзор видео, загруженных пользователем;

– обзор видео, просмотренных пользователем;

– обзор видео, оцененных пользователем;

– обзор видео, создателями которых являются пользователи, на которых подписан данный пользователь;

– обзор каналов пользователей, на которых подписан данный пользователь;

– обзор плейлистов пользователя;

– обзор видео, находящихся в определенном плейлисте;

– обзор комментариев, оставленных под конкретным видео;

– поиск видео по его названию;

– поиск видео по названию его создателя;

– обзор видео, принадлежащих к определенной категории;

– загрузка видео на свой канал или удаление видео с канала;

– просмотр видео;
– оценка видео или удаление своей оценки;
– создание или удаление комментария к видео;
– оценка комментария, оставленного к видео или удаление оценки;
– подписка на канал или осуществление отписки;
– создание или удаление плейлиста с видео;
– добавление видео в плейлист или исключение его из плейлиста.

2. Анализ библиотек в Java, предназначенных для backend-разработки

2.1. Анализ технологии Java Servlet API

В языке программирования Java существует множество библиотек, предназначенных для реализации серверной части приложений. Для анализа были взяты такие технологии, как Java Servlet API и Spring Framework.

Java Servlet API — это набор интерфейсов и классов, который позволяет разработчикам создавать серверные приложения на Java, динамически генерирующие контент в ответ на HTTP-запросы [1]. Существуют несколько типов сервлетов, такие как GenericServlet — базовый класс для всех сервлетов, HttpServlet — класс, который используется для обработки HTTP-запросов, Filter — класс, который используется для перехвата и обработки HTTP-запросов и ответов.

Плюсы данной технологии: полный контроль над серверными ресурсами и создание приложения любой сложности, обеспечение высокой производительности, возможность работать на любой платформе, поддерживающей Java Servlet API, комбинация с другими технологиями Java, большое сообщество разработчиков, множество библиотек, инструментов и учебных материалов.

Минусы данной технологии: большое количество кода, ручная обработка многих деталей, нет многих функций, таких как аутентификация, авторизация и маршрутизация URL, работа только в web-контейнере, устаревшая технология, новые функции и обновления не добавляются.

Можно сделать вывод, что Java Servlet API — это мощный инструмент для создания веб-приложений Java. Он обеспечивает гибкость и контроль над созданием динамического контента. Но данная технология уже устарела. Сейчас существует множество новых технологий, обеспечивающих удобную и гибкую разработку, например, Spring Framework.

2.2. Анализ технологии Spring Framework

Spring Framework — это открытый, объектно-ориентированный фреймворк для разработки корпоративных Java-приложений [2]. Он предоставляет набор функций, которые упрощают разработку, развертывание и управление такими приложениями. Данная технология основывается на принципах, таких как: Inversion of Control — Spring управляет жизненным циклом объектов приложения и их зависимостями [3], Dependency Injection — объекты получают свои зависимости через их внедрение, а не создают их самостоятельно, Aspect-Oriented Programming — Spring позволяет внедрять поперечные сечения, такие как безопасность, логирование и транзакции, в код приложения без изменения самого кода.

Очень важную роль в данной технологии имеют аннотации — это мощный инструмент, который позволяет разработчикам добавлять метаданные к классам, методам и полям, что делает более удобным разработку.

Плюсы данной технологии: сокрытие сложных деталей разработки, разработчики могут сосредоточиться на бизнес-логике, обеспечение высокой производительности приложений,

модульная структура и внедрение зависимостей, возможность разработки масштабируемых приложений, большое и активное сообщество разработчиков, возможность найти множество библиотек, инструментов и учебных материалов, поддержка широкого спектра технологий, таких как JPA, Hibernate, JMS и веб-сервисы.

Минусы данной технологии: много функций и концепций, что может усложнить освоение для начинающих разработчиков.

Можно сделать вывод, что Spring Framework — это мощный и популярный фреймворк с широким набором функций, которые могут помочь разработчикам создавать надежные, масштабируемые и безопасные приложения.

2.3. Сравнение двух проанализированных технологий

После рассмотрения каждой из технологий можно сравнить их по различным критериям (табл. 1).

Таблица 1

Сравнение Java Servlet API и Spring Framework

Критерий	Java Servlet API	Spring Framework
Функциональность	Только базовые возможности для создания веб-приложений.	Широкий набор функций, таких как AOP, IoC, Dependency Injection, транзакции, безопасность и тестирование.
Объем разработки	Рукописный код для многих задач, таких как обработка запросов, маршрутизация и MVC.	Сосредоточение разработчиков на бизнес-логике
Масштабируемость разработанных приложений	Не подходящий выбор для создания сложных, масштабируемых веб-приложений.	Отличный выбор для разработки масштабируемых приложений.
Тестируемость	Низкая тестируемость	Высокая тестируемость
Поддержка и сообщество	Не обновляемая документация, малое количество учебных материалов.	Множество документации и учебных материалов, которые со временем добавляются.

В итоге, можно сказать, что в настоящее время Java Servlet API уже не обладает достаточным количеством функциональности, необходимой для удобной разработки. Spring Framework будет более удобным и простым для разработки. По многим анализируемым параметрам он превосходит Java Servlet API. Поэтому данная технология является наиболее удачной для использования в проекте.

3. Модель данных видеохостинга

Для работы веб-приложения необходима база данных для хранения различной информации. Модель данных видеохостинга представлена на рис. 1. В табл. 2 описывается назначение таблиц базы данных, а также перечень их столбцов.

Таблица 2

Таблицы базы данных видеохостинга

Таблица	Столбцы	Описание таблицы
Категория видео	Id (PK), название категории	Справочная таблица, хранит категории видео

Видео в категории	Id категории (PK, FK), id видео (PK, FK)	Таблица содержит данные о том, какое видео к какой категории относится
Видео	Id (PK), id пользователя (FK), название, продолжительность, описание, дата выхода	Таблица содержит информацию о видео
Просмотр видео	Id (PK), id пользователя (FK), id видео (FK), дата просмотра	Таблица содержит данные о просмотре пользователями видео
Оценка видео	Id (PK), id пользователя (FK), id видео (FK), дата оценки, наличие положительной оценки	Таблица содержит информацию об оценке пользователями видео
Видео в плейлисте	Id (PK), id плейлиста (FK), id видео (FK), дата добавления	Таблица содержит информацию о том, какие видео в каких плейлистах содержатся
Комментарий	Id (PK), id пользователя (FK), id видео (FK), текст комментария, время создания комментария	Таблица содержит данные о комментарии к видео
Пользователь	Id (PK), электронная почта, название канала, описание, дата регистрации, пароль	Таблица содержит данные о пользователе, зарегистрированном на видеохостинге
Плейлист	Id (PK), id пользователя (FK), название плейлиста, дата создания плейлиста	Таблица содержит информацию о плейлисте
Оценка комментария	Id (PK), id пользователя (FK), id комментария (FK), наличие положительной оценки	Таблица содержит информацию об оценке пользователями комментариев
Подписка	Id пользователя, осуществившего подписку (PK, FK), id пользователя, на которого подписались (PK, FK)	Справочная таблица. Показывает какой пользователь имеет подписку на других пользователей

4. Функциональные слои серверной части видеохостинга

Backend-часть веб-приложения содержит в себе три функциональных слоя: репозиторий, сервис и контроллер.

4.1. Слой репозитория

Репозиторий нужен для работы с хранилищем данных. В классах-репозиториях содержатся методы, отправляющие запросы в базу данных и возвращающие ответ на слой сервиса.

В реализуемом приложении репозитории представлены интерфейсами.

На данном слое используются классы-сущности (entity), предоставляющие поля, которые являются атрибутами соответствующих отношений в базе данных. Примеры таких классов:

1. **Класс User.** Данный класс предоставляет информацию о пользователе и содержит поля: private Long idUser, private String email, private String channelName, private String description, private Timestamp dateOfRegistration, private String password, private List<User> subscriptions, private List<Video> videos, private List<Playlist> playlists.

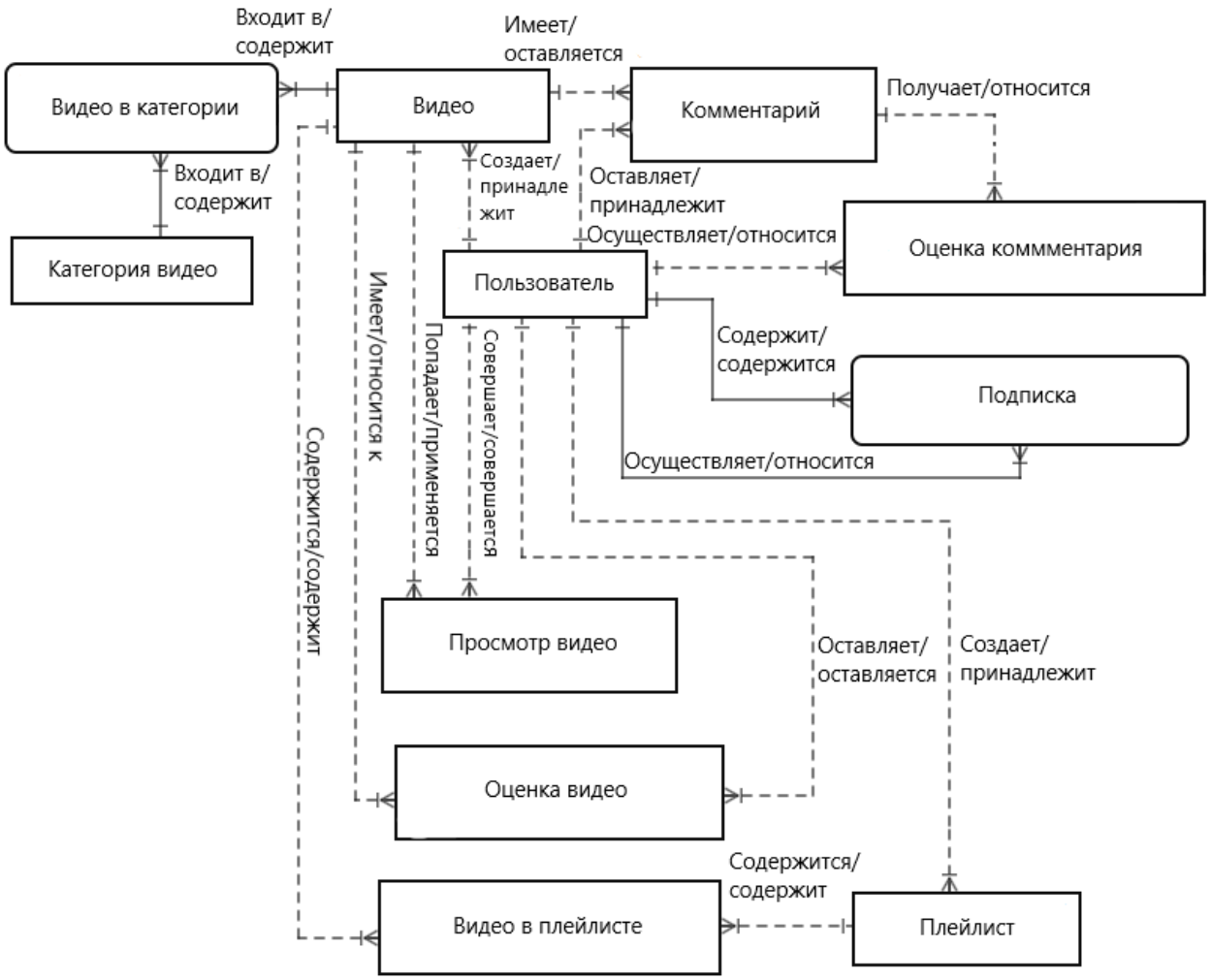


Рис. 1. Модель данных видеохостинга

2. **Класс Video.** Данный класс предоставляет информацию о видео и содержит поля: private Long idVideo, private User user, private String name, private Long duration, private String description, private Timestamp releaseDateTime, private List<Category> categories.

Примеры репозиториев:

1. **Интерфейс UserRepository.** Данный интерфейс наследует интерфейс JpaRepository<User, Long> и имеет методы:

– Long getSubscribersCountByIdUser(Long idUser) — возвращает количество подписчиков для пользователя с id, равным параметру idUser.

– User getUserByEmail(String email) — возвращает пользователя по его email, который равен параметру email.

Помимо указанных методов репозиторий использует методы родительского класса: save (User entity), deleteById (ID id), findById (ID id).

2. **Интерфейс VideoRepository.** Данный интерфейс наследует интерфейс JpaRepository<Video, Long> и имеет методы:

– List<Video> getVideosBySubscriptions(Long idUser) — возвращает список видео, принадлежащих пользователю с id, равным параметру idUser.

– List<Video> findByNameContaining(String videoName) — возвращает список видео, в название которых входит строка из параметра videoName.

– List<Video> findByUser_ChannelNameContaining(String name) — возвращает список видео, у которых в названии канала автора присутствует строка из параметра name.

– List<Video> findDistinctByCategories_NameIn(List<String> categories) — возвращает список видео, у которых хотя бы одна из категорий входит с список категорий из параметра categories.

Также, помимо указанных методов, репозиторий использует методы родительского класса: save (Video entity), deleteById (ID id), findById (ID id).

4.2. Слой сервиса

Сервис реализует бизнес-логику приложения. В классах-сервисах выполняется проверка данных на соответствие бизнес-правилам, установленным для приложения. Данные классы используют объекты классов-репозиториев, преобразуют ответы их методов, а далее отправляют преобразованные ответы на слой контроллера.

Слой сервиса использует классы (model), имеющие такие же поля, как и в соответствующих entity-классах. Также имеются дополнительные поля, которые требует бизнес-логика приложения. Примеры таких классов:

1. Класс UserModel. Данный класс содержит такие же поля, как и класс User, но имеет дополнительное поле: private Long countSubscribers.

2. **Класс VideoModel.** Данный класс содержит такие же поля, как и класс Video, но имеет дополнительные поля: private Long countViewing, private Long countLikes, private Long countDislikes.

Примеры классов-сервисов:

1. **Класс UserService.** Данный класс содержит поля: private final UserRepository userRepository, private final ViewedVideoRepository viewedVideoRepository, private final PlaylistWithVideosRepository playlistWithVideosRepository, private final UserMapper userMapper, private final PasswordEncoder passwordEncoder, private final MediaService mediaService, private final Logger logger.

Класс содержит методы:

– public UserModel insert(UserModel userModel, MultipartFile imageHeader, MultipartFile imageIcon) — метод для сохранения нового пользователя, а также его файлов;

– public UserModel update(UserModel userModel, MultipartFile imageHeader, MultipartFile imageIcon) — метод для изменения данных о пользователе, а также его файлов;

– public UserModel addSubscription(UserModel userModel) — метод для добавления подписки пользователя на другой канал;

– public UserModel deleteSubscription(UserModel userModel) — метод для удаления подписки пользователя на другой канал;

– public void delete(Long id) — метод для удаления пользователя по его id;

– public UserModel findUserById(Long id) — метод для поиска пользователя по его id.

2. **Класс MediaService.** Данный класс содержит методы, которые производят загрузку видео и картинок. Класс имеет поля: private String mediaRoot — корневой путь, по которому сохраняются все видео и картинки, private final Logger logger.

Методы класса:

– public void saveMedia(MultipartFile file, String filePath) — сохранение файла из параметра file. Путь сохранения находится в параметре filePath;

– public Resource getMedia(String filePath) — получение файла по пути filePath;

– public void deleteMedia(String filePath) — удаление файла по пути filePath;

– public Long getDuration(String videoPath) — получение продолжительности видео в секундах. Путь к видео находится в параметре videoPath.

4.3. Слой контроллера

Контроллер отвечает за прием и обработку HTTP-запросов от клиентов, а также возврат ответа клиенту, помещая в тело ответа необходимые данные. Классы данного слоя используют объекты классов слоя сервиса. Классы-контроллеры определяют конечные точки приложения и связывают запросы с соответствующими методами сервиса для обработки.

Слой контроллера использует классы (DTO), которые несут информацию о данных запросов (request) и ответов (response). Примеры таких классов:

1. **Класс UserResponse.** Данный класс содержит информацию о пользователе, которую необходимо отправить на сторону клиента. Класс имеет поля: private Long idUser, private String email, private String channelName, private String description, private Timestamp dateOfRegistration, private Long countSubscribers.

2. **Класс CreateVideoRequest.** Данный класс содержит информацию, которая нужна для создания видео и соответствующей записи в базе данных. Класс имеет поля: private Long idUser, private String name, private String description, private List<String> categories.

Примеры классов-контроллеров:

1. **Класс UserController.** Данный класс имеет адрес "/user" и содержит поля: private final UserService userService, private final UserMapper userMapper, private final VideoService videoService, private final VideoMapper videoMapper, private final ViewedVideoMapper viewedVideoMapper, private final PlaylistMapper playlistMapper.

Некоторые методы класса:

– public ResponseEntity<UserResponse> putUser(@Valid @RequestPart(value = "request", required = true) String request, @RequestPart(value = "icon", required = true) MultipartFile icon, @ RequestPart(value = "header", required = true) MultipartFile header, Authentication authentication) — HTTP-метод PUT. Данный метод принимает запрос на изменение данных о пользователе. В теле ответа метод возвращает информацию о пользователе, с учетом изменений.

– public ResponseEntity<UserResponse> postSubscription (@Valid @RequestBody UpdateSubscriptionsRequest request, Authentication authentication) — HTTP-метод POST, эндпоинт "/subscription". Данный метод принимает запрос на добавление подписки пользователя. В теле ответа метод возвращает информацию о пользователе, который совершил подписку.

2. **Класс VideoController.** Данный класс имеет адрес "/videos", а также содержит поля: private final VideoService videoService, private final VideoMapper videoMapper, private final AssessmentVideoMapper assessmentVideoMapper, private final ViewedVideoMapper viewedVideoMapper, private final CommentService commentService, private final CommentMapper commentMapper.

Некоторые методы класса:

– public ResponseEntity<VideoResponse> putVideo(@Valid @RequestPart(value = "request", required = true) String request, @RequestPart(value = "preview", required = true) MultipartFile preview) — HTTP-метод PUT, эндпоинт "/updateVideo". Данный метод принимает запрос на изменение данных о видео. Метод возвращает данные о видео, с учетом измененной информации.

– public ResponseEntity<List<CommentResponse>> getCommentsOnTheVideo (@PathVariable Long idVideo) — HTTP-метод GET, эндпоинт «"/{idVideo}/comments". Данный метод принимает запрос на получение информации о комментариях, оставленных к конкретному видео. В теле ответа метод возвращает список необходимых комментариев.

Заключение

В результате работы была разработана функциональность приложения видеохостинга, также проанализированы технологии для backend-разработки, существующие в языке программирования Java, спроектирована модель данных для видеохостинга, реализованы функциональные слои серверной части веб-приложения.

Литература

1. Servlet-technology // oracle.com : [сайт]. – 2024. – URL: https://www.oracle.com/java/technologies/servlet-technology.html (дата обращения: 22.11.2024)

2. Spring Framework Overview // docs.spring.io : [сайт]. – 2024. – URL: https://docs.spring.io/spring-framework/reference/overview.html (дата обращения: 22.11.2024)

3. Introduction to the Spring IoC Container and Beans // docs.spring.io : [сайт]. – 2024. – URL: https://docs.spring.io/spring-framework/reference/core/beans/introduction.html (дата обращения: 22.11.2024)

УДК 004.67:004.932.2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАННЫХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОПАСНЫХ ПРИРОДНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Б. А. Крынецкий[1], А. В. Калач[1,2], А. А. Парамонов[1]

[1]РТУ МИРЭА
[2]Воронежский институт ФСИН России

Аннотация. При обработке графических данных исследователь сталкиваться с проблемами, вытекающими из представления данных в виде строго структурированной матрицы, столбцы и строки которой соответствуют координатам пикселя изображения, выраженными в том, что исследуемые объекты могут носить закономерности, не синхронизированные с прямоугольной системой координат. Для преобразования систем координат существуют типовые анаморфозы, однако для частных случаев необходимо применение обобщенного подхода, способного выполнять спрямления произвольных форм.
Ключевые слова: анализ изображений, обработка изображений, анализ лавин, анализ оползней, анализ циклонов.

Введение

При анализе изображений с применением почтипериодического анализа закономерно определение изображения как наборов рядов строк и столбцов системы координат, описывающей изображение. Так, было показано, что при исследовании структуры пространственно-временных характеристик в изображениях тропических циклонов имеет место применение декартовой и полярной систем координат [1–4]. Полученные результаты определяют фундаментальные структурные шаблоны, формирующие чрезвычайные явления циклонов.

Среди чрезвычайных явлений, обладающих фиксируемыми с помощью фото и видеосъемки процессами протекания и последствиями, можно выделить явления, связанные с движением масс разного рода — такие, как селевые потоки, лавины, оползни. Специфика этих явлений заключается в коротком времени жизни, а также в зависимости пространственной зависимости формы развития процесса от окружающей среды. Так, в случае прохождения лавины в горах массы могут сходить как по открытому склону, так и быть ограниченными рамками естественных неровностей структуры возвышенности — хребтами и расщелинами. Пример прогнозируемой области развития лавины из [5] приведён на рис. 1.

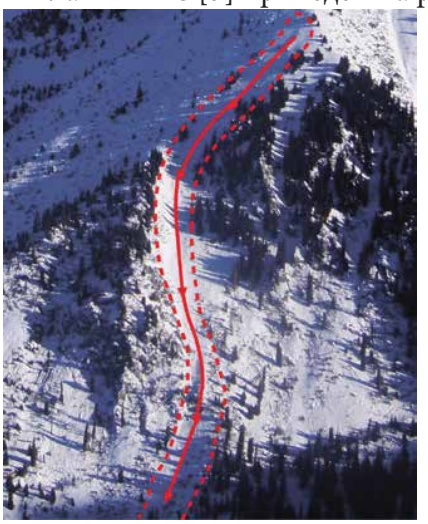


Рис. 1. Модельный лавинный очаг в долине реки Малая Алматинка

Описание алгоритма

Таким образом, очевидно, что применение почтипериодического анализа в декартовых координатах может содержать априорные потери информации, связанные со специальным видом структуры исследуемого объекта — возникает нужда в алгоритме, реализующем преобразование координат, выражающее характер данных и формы произвольной природы.

Преобразование данных предлагается проводить с применением представления исследуемого пространства в виде набора линейных полигонов, которые внутри будут разбиты на мелкую сетку. Выдвигаемое требование к формируемым внутри полигонов сеткам заключается в сохранении одной из размерностей — количества разбиений по ширине. Это условие необходимо для того, чтобы в спрямлении данных по сетке сохранялась возможность конкатенации сеток. Пример структуры полигонов и сеток, которая ожидается в результате произвольного построения, приведён на рис. 2.

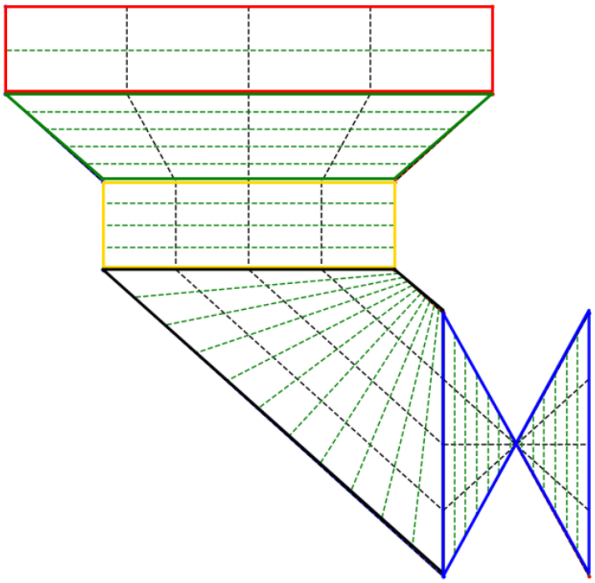


Рис. 2. Пример структуры полигонов с разметкой внутренних узлов интерполяции

Полигоны на изображении определяются последовательностью узлов, задаваемых координатами в системе изображения — шириной и высотой. Форма полигонов может быть любой плоской фигурой, обладающей 4 вершинами — так, на рис. 2 красный и жёлтый полигоны имеют прямоугольную форму, но количество поперечных делений в них отличаются. Зелёный и чёрный полигоны носят трапециевидную форму, однако основаниями одной трапеции являются стороны полигона, сонаправленные с последовательностью, а другого — направлены поперёк. Синий полигон демонстрирует, что в общем случае не исключено и самостоятельных пересечений структуры.

После разметки полигонов на плоскости изображения определяется общая величина — количество разделений полигонов в направлении вдоль последовательности — пунктирные чёрные линии на рис. 2. Количество поперечных делений может быть определено уникально для каждого полигона, и определяться либо произвольно, либо пропорционально длине полигона, либо из соображений эксперта — в целях более подробного исследования конкретных сегментов изображения.

Для дальнейшего описания предполагается обработка изображения в его представлении в виде матрицы значений яркости чёрно/белой гаммы — обобщение до представления в тензорном виде с учётом RGB составляющих усложняет вычисления кратно размерностям анализа данных. Таким образом, алгоритм преобразования и его математическое сопровождение

требует дополнительных разработок в области применения целевого метода и приводится в следующем виде.

Для матрицы $\boldsymbol{A}$ размерности $m \times n$ определить набор узлов полигонов — тензор

$$P_{i,j,r},\ i \in [1, \dim(K)],\ j \in [1..2],\ r \in [1..\dim(A)],$$

где i — номер полигона,

$\dim(K)$ — количество полигонов,

j — указатель на сторону полигона (левая/правая),

r — номер координаты пространства матрицы A (в рассматриваемом случае принимает значения от 1 до 2)

Так же из соображений эксперта определяется вектор K — содержащий количество индивидуальных разделений полигонов и общее значение продольных разделений полигонов L. Тогда после преобразований область изображения, описанная структурой тензора P, представляется в виде матрицы $\boldsymbol{B}$ размерности

$$L \times \sum_{i=1}^{\dim(K)} K_i.$$

Далее матрица B заполняется с применением метода билинейной интерполяции по узлам сетки, организованной полигонами. Координаты точки в пространстве изображения в зависимости от номера строки и столбца матрицы $\boldsymbol{B}$ можно определить по алгоритму, приведённому на блок-схеме на рис. 3.

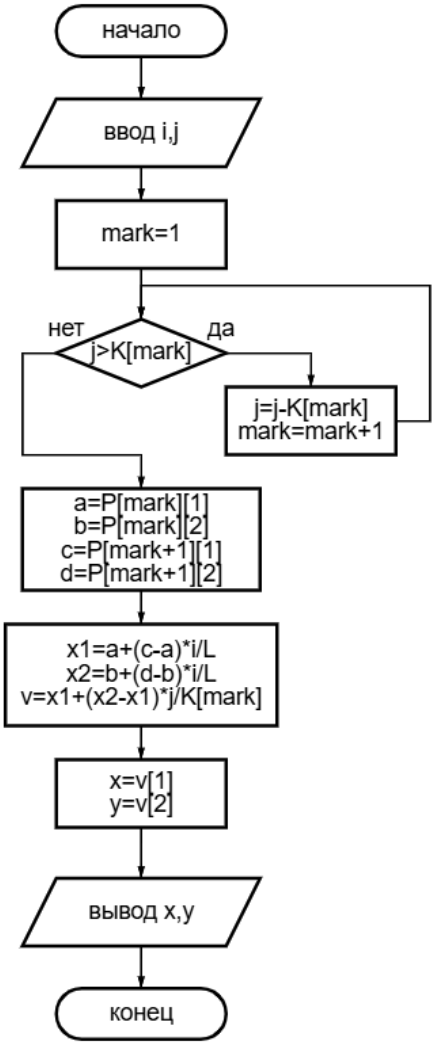


Рис. 3. Схема алгоритма расчёта координат

Таким образом, в результате преобразования для каждого элемента матрицы $\boldsymbol{B}$ рассчитывается интерполированное значение яркости изображения в точке с координатами, рассчитываемыми по алгоритму, приведённому на рис. 3.

В качестве демонстрации преобразования предлагается обработка фотографии последствия оползня, приведенное на рис. 4.

Определим последовательность полигонов, перекрывающих исследуемую область. На рис. 5 приводится выделение последовательности полигонов.

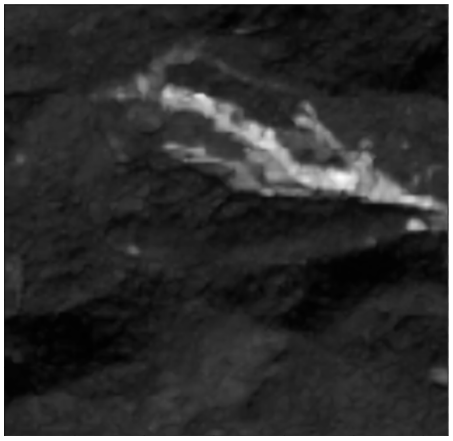


Рис. 4. Исходные данные. Последствия схода оползня (светлая область)

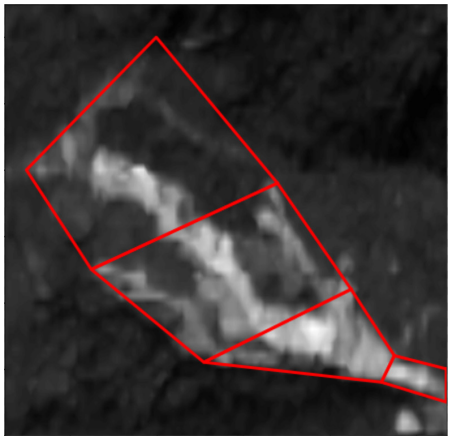


Рис. 5. Выделение анализируемой области

После приведения данных к спрямлённым координатам системы полигонов получается матрица значений интерполированной яркости. Её графическое представление приводится на рис. 6 — пунктирная красная линия разделяет соответствующие полигоны:

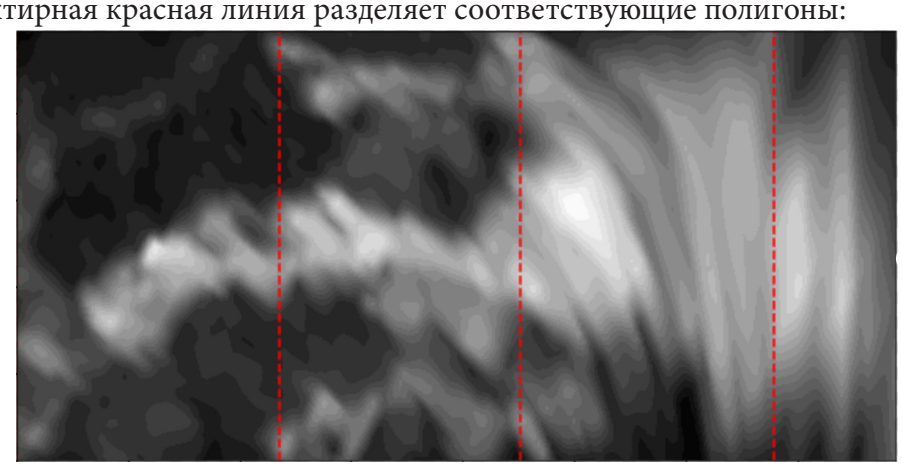


Рис. 6. Результат преобразования данных

Таким образом, удалось перейти к новым спрямлённым координатам. Такой набор данных становится пригодным для дальнейшего анализа за счёт лучшей синхронизации наглядных направлений развития явления с новой системой координат. Искажения на рис. 6 в правой части можно связать с существенной разностью в ширине полигонов в структуре, исследование их влияния на результаты дальнейшего анализа является предметом дальнейших научных работ.

Заключение

В статье приводится алгоритм, предлагаемый к использованию в решении задач анализа графических данных в геоинформатике. Продемонстрированы результаты работы алгоритма,

реализованного на языке программирования Python. Определены области дальнейших исследований.

Литература

1. *Парамонов А. А.* Практическая значимость почти-периодического анализа / А. А. Парамонов, Б. А. Крынецкий, Т. Е. Смоленцева // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – 2024. – Т. 1. – С. 227–230. – EDN ACEALJ.

2. *Калач А. В.* Применение почти-периодического анализа изображений динамики активности циклонов в целях выработки управленческих решений по повышению устойчивости территорий в чрезвычайных ситуациях / А. В. Калач, А. А. Парамонов // Теория и практика повышения устойчивости урбанизированных территорий в чрезвычайных ситуациях : Сборник материалов международного круглого стола (в рамках проведения XV Международного салона средств обеспечения безопасности «Комплексная безопасность-2024»), Конгрессно-выставочный центр «Патриот», г. Кубинка, Московская обл., 30 мая 2024 года. – Москва : Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России, 2024. – С. 106–112. – EDN UUIGZQ.

3. *Малыгин И. Г.* Почти-периодический анализ накопленной энергии тайфунов при исследовании развития чрезвычайных ситуаций, обусловленных активностью тропических циклонов / И. Г. Малыгин, А. В. Калач, А. А. Парамонов // Проблемы управления рисками в техносфере. – 2024. – № 3(71). – С. 55-62. – DOI 10.61260/1998-8990-2024-3-55-62. – EDN IBPLCG.

4. *Крынецкий Б. А.* Анализ моделей периодических структур пространственно-временных процессов / Б. А. Крынецкий // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года. – Воронеж : Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 497–501. – EDN VBSJNL.

5. *Благовещенский В. П.* Калибровка математических моделей лавин по данным о реальных лавинах в Иле (Заилийском) Алатау / В. П. Благовещенский, М. Э. Эглит, В. В. Жданов, Б. Б. Аскарбеков // Лёд и снег. – 2017. – Т. 57, № 2. – С. 213–220. – DOI 10.15356/2076-6734-2017-2-213-220. – EDN YPMGGL.

УДК 539.3:519.6

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА И ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ СРЕД

А. А. Лаптева, О. В. Дудко, В. Е. Рагозина

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. Разработан программный комплекс, предназначенный для решения краевых задач ударного деформирования разномодульной полуограниченной среды при различных режимах нестационарного одноосного нагружения. В основу вычислительного модуля комплекса заложен оригинальный алгоритм, использующий кусочно-линейную аппроксимацию функции граничного перемещения, изначально заданной в гладкой форме. Алгоритм позволяет получить обобщенное решение нестационарной краевой задачи деформирования разномодульной среды с учетом всех эффектов столкновения и отражения разнотипных фронтов сильных разрывов, не обращаясь при этом к приближенным методам малого параметра.

Ключевые слова: математическое моделирование, программный комплекс, упругость, полуограниченная разномодульная среда, нестационарное одноосное нагружение, квазилинейное уравнение движения, нелинейное краевое условие, кусочно-линейная аппроксимация, сильный разрыв, ударная волна, столкновение и отражение волн.

Введение

Материалы с переменными упругими свойствами, зависящими от типа деформированного состояния, в механике сплошных сред называют разносопротивляющимися или разномодульными. Подобные материалы с сингулярностью механического поведения существуют как в естественной природной форме (грунты, горные породы, связные сыпучие среды, кость, дерево и др.), так и среди современных конструкционных металлических сплавов, неоднородных и волокнистых композитов и т. п. Учитывая практическую ценность и широкую распространенность разномодульных материалов во многих отраслях человеческой деятельности (от горнодобывающей промышленности и тяжелого машиностроения до медицины и микроэлектроники), изучение особенностей их механического поведения в различных условиях является актуальной задачей. Наиболее существенно разномодульность проявляется при динамическом деформировании таких сред, когда их механические параметры могут скачком измениться, например, при смене направления граничной нагрузки.

Проведение динамических экспериментов для исследования физико-механических свойств разномодульных материалов часто требует слишком больших финансовых и временных затрат. Традиционным решением данной проблемы является математическое и компьютерное моделирование, но даже в этом случае могут возникнуть существенные затруднения, связанные, в частности, с сингулярностью модельных соотношений. В [1, 2] положено начало разработке эффективного подхода к решению нестационарных краевых задач одномерной динамики разномодульных и пористых сред. Предложенный подход, основанный на одновременной кусочной линеаризации модельных соотношений и краевых условий, позволяет воспользоваться формализмом и известными решениями линейной теории упругости, однако его «ручное применение» по-прежнему остается достаточно трудоемкой задачей. Закономерным развитием такого подхода является его алгоритмизация и разработка вычислительного комплекса, автоматизирующего процесс формирования систем краевых условий на возникающих волновых фронтах и проведение вычислительных экспериментов при различных нестационарных режимах граничного нагружения.

1. Упрощающие положения модели

Для описания изотропной упругой разномодульной среды используем физически нелинейную модель [3], где модули упругости сингулярным образом зависят от типа деформаций. В одномерном случае малых деформаций модельные соотношения разномодульной упругой среды [3] максимально упрощаются до кусочно-линейной формы с особенностью в точке свободного состояния. С одной стороны, такое упрощение не мешает описывать различные нелинейные эффекты, характерные для динамики деформировании разномодульной среды [4]: «быстрые» волны сжатия и «медленные» волны растяжения, ударные волны и движущиеся жесткие слои. С другой стороны, линеаризация модельных соотношений может оказаться недостаточной для отказа от приближенных методов (типа метода малого параметра) при учете столкновений и отражений разнотипных волновых фронтов, которые движутся в разномодульной среде с разными скоростями. В задачах нестационарного одноосного деформирования эту проблему можно устранить дополнительным упрощением — заменой гладкого нестационарного краевого условия на его кусочно-линейную аппроксимацию [1]. В этом случае нелинейное решение исходной динамической задачи аппроксимируется связной последовательностью локальных линейных решений, каждое из которых определено в своих интервалах пространства и времени.

2. Постановка нестационарной задачи с кусочно-линейным краевым условием и алгоритм ее решения

Рассмотрим разномодульную полуограниченную среду (полупространство или стержень), изначально недеформированную. Положим, что с нулевого момента времени на границу среды начинает действовать нестационарная нормальная нагрузка, при этом точки полупространства (до этого момента неподвижные) начинают двигаться с ненулевой скоростью. Необходимый режим нестационарного нагружения задаем функцией граничного перемещения, зависящей от времени. Такая функция может быть изначально кусочно-линейной или гладкой. Во втором случае предварительно (до решения задачи) строим ее кусочно-линейное приближение, располагая основные узловые точки в «критических» моментах времени изменения направления и интенсивности граничной нагрузки. Дополнительные точки разбиения можно добавлять из соображений повышения точности аппроксимации.

При описанном режиме нагружения решение краевой задачи принимает обобщенную форму, когда искомая функция перемещений оказывается почти всюду гладкой, дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей дифференциальным законам сохранения за исключением конечного числа фронтов сильных разрывов, где выполняются интегральные законы сохранения [5]. Разнотипные фронты сильных разрывов делят всю область деформирования на локальные зоны постоянства деформаций, в каждой из которых разномодульная среда с кусочно-линейными определяющими соотношениями ведет себя линейным образом. Таким образом, обобщенное решение нашей задачи есть объединение цепочки локальных линейных решений, которые могут появляться как при изменении режима движения граничных точек, так и в результате попутных и встречных столкновений волновых фронтов, движущихся в разномодульной среде с различными скоростями. Узловые точки граничного перемещения и моменты времени столкновения волновых фронтов между собой и с границей среды в процессе решения задачи включаются в множество точек, разбивающих непрерывный полуоткрытый интервал времени на отдельные этапы, где начало каждого этапа соответствует появлению нового локального решения. Для «склеивания» локальных решений на фронтах сильных разрывов используем условия Гюгонио [5].

Теперь опишем алгоритм построения последовательности локальных решений подробнее.

1) Начиная с нулевого момента времени, поэтапно строим локальные решения первичной волновой картины. Каждое скачкообразное изменение скорости граничного перемещения порождает первичный волновой фронт, уходящий от границы среды. Тип каждого первичного сильного разрыва (медленная волна растяжения, быстрая волна сжатия или ударная волна) определяем по уже известной предварительной деформации перед ним и неизвестному состоянию за ним, которое определяется по актуальной части граничного перемещения. Действуем таким образом до тех пор, пока в решении не появится хотя бы одна пара сильных разрывов, состоящая из убегающей медленной волны растяжения и догоняющей быстрой волны сжатия. Именно с этого момента начинают действовать эффекты взаимодействия и отражения волновых фронтов.

2) Анализируем актуальную волновую картину и находим все пары подходящих для столкновения фронтов (таких пар может оказаться больше одной). Если в актуальной волновой картине нет подходящих для столкновения волн, то процесс решения останавливаем.

3) Приравнивая координаты пары взаимодействующих фронтов, вычисляем время и координату столкновения для каждого возможного инцидента, обнаруженного на шаге 2. Затем из всех возможных инцидентов выбираем единственный с наименьшим значением времени столкновения. Прогнозируем его результат (т.е. типы расходящихся сильных разрывов и деформированное состояние в новой растущей зоне между ними). При прогнозе учитываем свойства взаимодействующих волн, диктуемые условиями Гюгонио, а также известные решения слева и справа от координаты столкновения.

4) Находим новое локальное решение, возникающее в результате выбранного инцидента. Неизвестные параметры этого решения вычисляем из системы условий Гюгонио, записанных на подвижных границах его интервала определения. Затем проверяем эволюционность этих границ [6]. При нарушении эволюционности какой-либо из границ корректируем прогноз, заменяя неэволюционный сильный разрыв на жесткий слой, ограниченный быстрым передним и медленным задним фронтами (можно показать, что такой слой является бездиссипативным процессом, удовлетворяющим требованию неубывания энтропии). Если обе границы интервала определения нового локального решения эволюционны, то возвращаемся к шагу 2 и выбираем следующий инцидент в обновленной волновой картине.

3. Описание программного комплекса

Предложенный алгоритм решения одномерных краевых задач динамики деформирования разномодульной упругой среды включен в вычислительный модуль программного комплекса [7]. В качестве средства реализации программного комплекса выбрана свободная система компьютерной алгебры Maxima, позволяющая не только выполнять численные расчеты, но и автоматизировать выбор систем уравнений для каждого локального решения, а также сохранять результаты вычислений, в том числе и в графической форме.

Программный комплекс состоит из трех основных модулей:

1) модуль обработки исходных данных;

2) модуль обмена данными;

3) вычислительное ядро (модуль – «решатель»).

В модуле обработки исходных данных пользователю предоставляется возможность задавать механические параметры нагружаемой среды и координаты узлов кусочно-линейного приближения функции перемещения граничных точек. Результатом работы модуля является график аппроксимации функции граничного перемещения (рис. 1). Введенные исходные данные и координаты узловых точек функции граничного перемещения сохраняются во внешнем файле, который передается в модуль обмена данными.

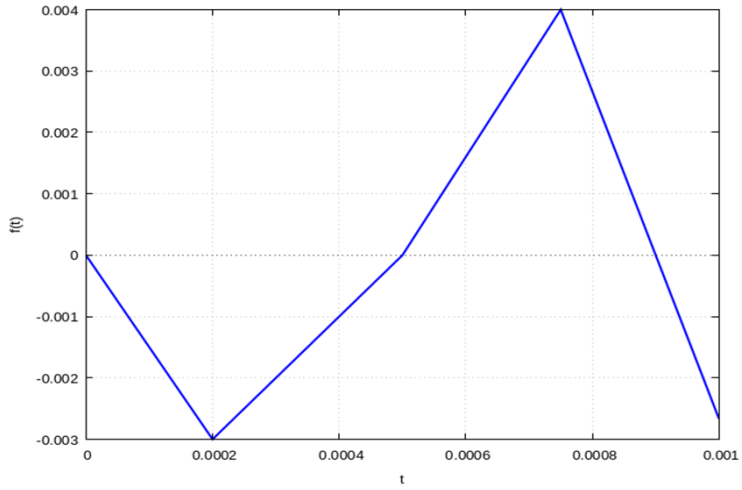
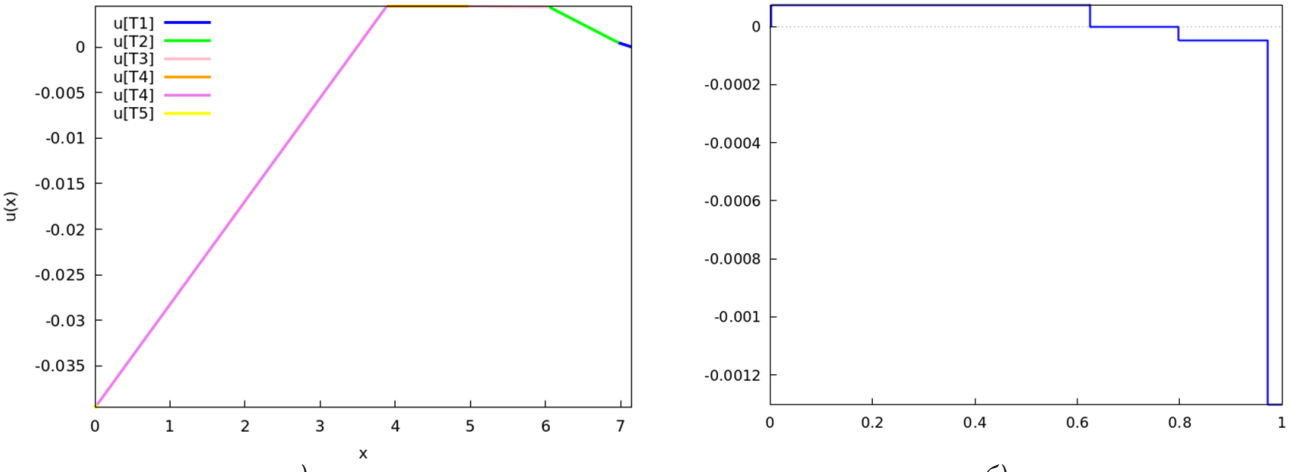


Рис. 1. Пример работы модуля обработки исходных данных

Модуль обмена данными управляет поэтапной передачей необходимой информации «решателю», а также принимает от него готовые решения в численной и графической форме. На каждом такте работы модуль обработки данных передает «решателю» только ту часть информации, которая необходима для построения очередного локального решения. Обратный поток данных от «решателя» к модулю обмена данными состоит из вычисленных значений деформаций, параметров функции перемещений очередного локального решения, а также пакета форматированных данных для построения мгновенных диаграмм полей перемещений (рис. 2а) и деформаций (рис. 2б). Модуль обмена данными накапливает результаты работы «решателя», на основе которых поэтапно строит и возвращает пользователю графическую форму обобщенного решения задачи — изображение характеристической плоскости с диаграммами сильных разрывов и областей различных деформированных состояний (рис. 3).



а) *б)*

Рис. 2. Примеры работы модуля обмена данными: мгновенные диаграммы полей перемещений и деформаций

Вычислительное ядро (модуль — «решатель») работает автономно от пользователя и содержит набор функций, необходимых для автоматизации решения задачи:

– вычисление скоростей ударных волн;

– вычисление времени и координаты столкновения волновых фронтов;

– вычисление скоростей волн, возникающих в результате столкновений, определение их количества и типов (включая проверку эволюционности и корректировку волновой картины по необходимости);

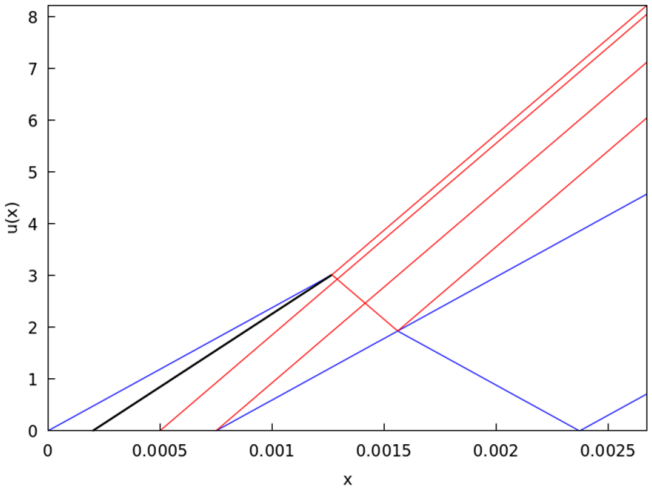


Рис. 3. Пример работы модуля обмена данными: характеристическая плоскость с диаграммами сильных разрывов

– вычисление параметров функции перемещений, вычисление деформаций в определенные моменты времени;

– сохранение результатов работы в численном виде;

– формирование пакета форматированных данных и передача их в модуль обмена данными.

Все три модуля являются самостоятельными программными единицами, которые при необходимости можно модифицировать независимо друг от друга.

Преимуществом использования СКА Maxima для реализации описанного алгоритма является ее способность кешировать результаты символьных вычислений и за счет этого существенно сокращать время получения обобщенных решений выбранного класса краевых задач.

Заключение

Итак, результатом нашей работы является программный комплекс для решения краевых задач нестационарного одноосного деформирования полуограниченной разномодульной среды при различных режимах граничного нагружения. В настоящий момент реализованы случаи с кусочно-линейными функциями граничного перемещения, соответствующими нестационарной нагрузке с растяжением на первом этапе: «растяжение-сжатие» [1], циклическое знакопеременное нагружение «растяжение-сжатие-растяжение» [8], принудительное удержание границы после импульса растяжения-сжатия [9]. Перечень режимов нагружения может быть легко дополнен путем минимальной модификации вычислительного модуля.

Разработанное программное обеспечение автоматизирует проведение масштабных вычислительных экспериментов и позволяет пользователю отказаться от трудоемких аналитических вычислений, тем самым сокращая время получения качественных результатов в исследованиях особенностей динамики одномерного деформирования разномодульных упругих сред.

Литература

1. *Дудко О. В.* Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, В. Е. Рагозина // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 4. – С. 37–47.

2. *Дудко О. В.* Эволюция волновой картины кусочно-линейного растяжения и сжатия разномодульного упругого стержня / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, В. Е. Рагозина // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2022. – Т. 25, № 4. – С. 54–70. DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.405

3. *Ляховский В. А.* О поведении упругой среды с микронарушениями / В. А. Ляховский, В. П. Мясников // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1984. – № 10. – С. 71–75.

4. *Дудко О. В.* О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, К. Т. Семенов // Дальневост. матем. журн. – 2005. – Т. 6, No 1-2. – С. 94–105.

5. *Маслов В. П.* Общая теория уравнений движения разномодульной среды / В. П. Маслов, П. П. Мосолов // Прикладная математика и механика. – 1985. – Т. 49, вып. 3. – С. 419–437.

6. *Куликовский А. Г.* Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – Москва : Московский Лицей, 1998. – 412 с.

7. Bimodular Dynamics — вычислительный комплекс для моделирования динамики одномерного деформирования разномодульных сред: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2023667828 Российская Федерация / А. А. Лаптева, О. В. Дудко; правообладатель ИАПУ ДВО РАН. – № 2023666274/69; заявл. 02.08.23; опубл. 18.08.23, Бюл. № 8. – 1 с.

8. *Dudko O. V.* Solving nonstationary boundary value problem with piecewise linear boundary condition for one-dimensional dynamics of deformable heteromodular elastic solid / O. V. Dudko, A. A. Lapteva, V. E. Ragozina // AIP Conference Proceedings. – 2021. – V. 2448, Iss. 1, Paper 020003. – P. 1–5.

9. *Лаптева А. А.* Нестационарное одномерное деформирование разномодульного упругого полупространства в циклическом режиме / А. А. Лаптева, О. В. Дудко, В. Е. Рагозина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12-14 декабря 2022 г. – Воронеж, 2023. – С. 1066–1070.

УДК 004.4’233

РЕАЛИЗАЦИЯ НОВОГО ПОДХОДА ИНСТРУМЕНТИРОВАНИЯ КОДА, ОСНОВАННОГО НА ГРАФЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДАННЫХ

М. В. Любопытнов, М. С. Ефремов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается реализация нового метода инструментирования кода основанного на использовании графа зависимостей данных для программного комплекса (ПК) *AFL-VIZIR* с целью увеличения процента покрытия ветвей и повышении эффективности обнаружения ошибок.
Ключевые слова: инструментирование, фазз-тестирование, динамический анализ, покрытие кода, покрытие ветвей, граф зависимостей, граф потока управления, битовая карта, базовый блок, LLVM.

Введение

Инструментирование — это процесс модификации исходного или скомпилированного кода приложения с целью добавления специальной логики, которая позволяет наблюдать за его поведением во время выполнения. Инструментирование используется при фазз-тестировании [1].

Фазз-тестирование — это техника динамического анализа, которая заключается в подаче на вход программы различных вариаций входных данных с целью выявления и обнаружения потенциальных проблем, обеспечивая максимальное покрытие кода [2].

Покрытие кода — это метрика, измеряющая, какие части программного кода были выполнены или протестированы. Это важное понятие, поскольку позволяет оценить степень тестирования программы и указать на участки кода, которые требуют дополнительного внимания [3].

Для измерения покрытия кода в фаззере *AFL-VIZIR* используется покрытие ветвей.

Покрытие ветвей — это метрика, используемая для оценки того, насколько хорошо тесты, либо тестовые данные покрывают все возможные ветви (условия перехода) в программном коде [4].

С целью повышении эффективности обнаружения ошибок в коде различных программ было принято решение использовать граф зависимостей данных совместно с уже существующим решением ПК *AFL-VIZIR*, а именно — графа потока управления, по той причине, что граф зависимостей позволяет получать дополнительную обратную связь для фаззера, в отличие от графа потока управления.

Граф зависимостей — это структура данных, которая моделирует зависимости между различными операциями или элементами данных в программе. Граф зависимостей полезен для анализа зависимостей данных в программном коде, что позволяет понять, какие данные используются или модифицируются в различных частях программы [5].

В данной работе представлено описание основных шагов реализации нового подхода инструментирования кода.

1. Реализация алгоритма

1.1. Построение графа зависимостей

Основная идея состоит в том, чтобы анализировать только часть переменных *LLVM*, учитывая их определение и использование в байт-коде, и восстанавливать зависимости данных,

относящиеся исключительно к этой части. Это требует определения, какие инструкции будут считаться определениями (*def*), а какие — использованиями (*use*).

На уровне машинного кода, передача данных между различными частями системы происходит только тогда, когда память читается или записывается. На уровне промежуточного представления *LLVM IR* это привело к использованию инструкций *load* в качестве возможного источника и *store* в качестве возможного приёмника потоков данных, инструкции вызова функций *call*, связанной с отслеживанием зависимостей параметров вызова функции и инструкции *alloca* в качестве источника связи между определением (*def*) и использованием (*use*). Хотя оптимизационные проходы компилятора удаляют большинство переменных, определённых через *alloca*, отслеживание зависимостей этих переменных может быть полезным, когда они остаются в сгенерированном байт-коде.

На рис. 1 отображен итоговый алгоритм.

```
1  function BuildDDG(module)
2      blocks ← GetBasicBlocks(module)
3      DDG ← {}, ∀ b ∈ blocks
4      DFT ← {}
5      for b ∈ blocks do
6          instructions ← GetInstructions(b)
7          for i ∈ instructions do
8              if IsDefinition(i) then
9                  val ← GetValue(i)
10                 DFT ← {}
11             if IsGeneric(i) then
12                 val ← GetValue(i)
13                 ops ← GetOperands(i)
14                 InsertDataFlow(DFT, val, ops)
15             for u ∈ GetUses(i) do
16                 def ← QueryDataFlow(DFT, u)
17                 src ← GetParentBlock(def)
18                 DDG ← AddToSet(src)
```

Рис. 1. Итоговый алгоритм графа зависимостей данных

Для построения графа используются две основные структуры:

• *DDG* — граф зависимостей данных;

• *DFT* — структура отслеживания потока данных, которая представляет собой карту множеств, где ключом является *LLVM*-значение, и каждый ключ получает набор *LLVM*-значений, зависящих от этого ключа.

Описание алгоритма:

1. Получить базовый блок, а также инициализировать структуры графа зависимостей данных (*DDG*) и структуры отслеживания потока данных (*DFT*).

2. Перебрать все полученные базовые блоки во внешнем цикле.

3. Извлечь инструкции для каждого полученного базового блока.

4. Перебрать все полученные инструкции, полученные из базового блока, и выполнить ряд проверок:

– если встретилась определяющая инструкция (*def*), например, *alloca* и *load*, то добавить записи в *DFT*;

– если встретилась инструкция, которая не является ни источником, ни приемником, то извлечь операнды и возвращаемое значения инструкции, а также вызвать процедуру *InsertDataFlow*, принимающую на вход *DFT*, значение инструкции и операнд, и отвечает за вставку зависимости данных между операндом и результатом инструкции.

5. Перебрать в последнем вложенном цикле все инструкции использования *u*. Для каждого использования *u*, вызвать функцию *QueryDataFlow*, принимающую на вход *DFT* и инструкцию использования *u*. Эта функция вернет место в коде, где переменная *u* была определена и присвоит его *def*. Вызвать функцию *GetParentBlock* принимающую на вход определение *def* и вернуть родительский блок кода, в котором это определение находится, также сохранить результат в *src*. Последним шагом добавить родительский блок *src* в множество *DDG*, тем самым восстановить зависимости.

1.2. Фильтрация зависимостей

На этапе фильтрации происходит отбрасывание зависимостей, которые не предоставляют дополнительную обратную связь, поскольку связанные с ними переходы уже включены в покрытие ребер. Зависимости внутри одного и того же блока кода не учитываются, а также несколько зависимостей, соединяющие два базовых блока не считаются значимыми, так как в дальнейшем будут объединяться в один.

Именно поэтому граф зависимостей работает совместно с стандартным механизмом покрытия краев, что позволяет получать два разных сигнала:

1. Первый сигнал полезен для тестирования различных зависимостей.
2. Второй сигнал необходим для дальнейшего изучения кода приложения.

Однако это также означает о возможных пересечениях покрытий графа зависимостей и графа потока управления, что в свою очередь может привести к дублированию обратной связи.

С целью устранения избыточных зависимостей данных были внедрены два ключевых правила:

1. Исключать те потоки данных в графе потока управления, где существует зависимость между двумя связанными базовыми блоками, где один базовый блок является преемником второго базового по той причине, что в данном случае зависимость между базовыми блоками не добавит никакой дополнительной информации, которая не была бы уже захвачена покрытием ребер, а также увеличит накладные расходы.

2. Второе правило расширяет первое и включает другие случаи, когда зависимость от данных уже охвачена покрытием ребер.

На рис. 2. изображен алгоритм фильтрации зависимостей на примере определений *Def1* и *Def2*.

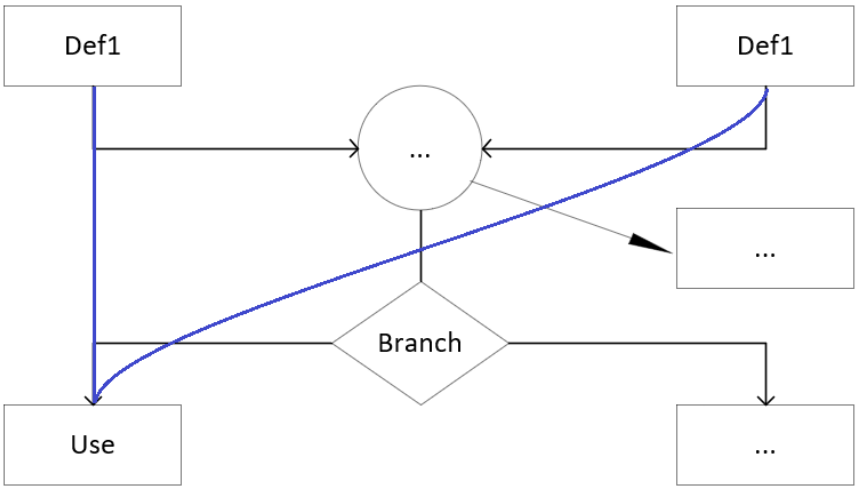


Рис. 2. Схема фильтрации зависимостей

На данном рисунке черные стрелки представляют ребра графа потока управления, а синие стрелки — ребра графа зависимостей данных. В этом случае фаззер может достичь 100-процентного покрытия ребер и при этом сработать только на одну из двух пар *def-use*.

В результате этот тип зависимости является единственным типом потока, который следует сохранять, с целью получения нового способа обратной связи для фаззера по сравнению со стандартным механизмом ПК *AFL-VIZIR*.

1.3. Инструментирование цели

Первый инструментальный слой сохраняется подход, который уже реализован и имеется в ПК *AFL-VIZIR*. Данный подход включает в себя регистрацию посещенных ребер, где вычисляется *XOR* между идентификаторами текущего и предыдущего местоположения. Полученное значения используется в качестве индекса для доступа к битовой карте, которая хранит количество посещений каждого конкретного ребра [6].

Битовая карта — структуру данных, которая состоит из массива байтов, где каждый байт представляет информацию о выполнении определенного участка кода, например, базового блока или ребра в графе и используется для отслеживания покрытия кода во время выполнения программы [7].

Однако в контексте графа зависимостей это решение не работает, так как два места, которые необходимо использовать в качестве входа для *XOR*, не являются последовательными, и выполнение может пройти через множество промежуточных базовых блоков, прежде чем достигнет того, который содержит использование, зависящее от данных.

Для решения данной проблемы было принято решение добавить дополнительную вспомогательную переменную, первоначально установленную в 0 для каждого базового блока, содержащего определение (*def*), которое необходимо отслеживать. В последствии, при достижении блока, значение маркера будет изменяться по средствам инструментирования на идентификатор этого блока.

В дальнейшем происходит инструментирование каждого базового блока, содержащего использование (*use*), создавая новый индекс битовой карты, полученный путем выполнения операции *XOR* над соответствующими переменными-маркерами и идентификатором конечного блока. Поскольку при выполнении операции *XOR* между *N* и 0 будет *N*, то результат будет учитывать только определение (*def*), которое было фактически выполнено, что приведет к разным значениям, когда один и тот же базовый блок достигается разными путями потока данных.

Пример алгоритма инструментирования представлен на рис. 3.

Описание алгоритма, представленного на рис. 3:

1. Создание вспомогательных переменных. Инициализировать вспомогательные переменные block_A и block_B значением ноль, и вставить для каждого блока определения (def), который необходимо отследить.

2. Установка вспомогательных переменных в блоках определения (def). Установить для идентификации блока соответствующую переменную (в данном примере это A и B соответственно) в базовых блоках, содержащих определения.

3. Инструментирование блока использования (use). Базовый блок, содержащий использование (use) переменной, инструментировать для вычисления хэша переменных, связанных с переменной val, и идентификатором текущего блока. В данном примере это C.

4. Использование хэша. Полученный хэш использовать в качестве индекса в битовой карте ПК AFL-VIZIR.

Заключение

В ходе работы был создан инструмент, направленный на повышение безопасности программного обеспечения. Этот инструмент учитывает зависимости данных и улучшает возможности тестирования, что позволяет выявлять уязвимости и ошибки на ранних этапах разработки.

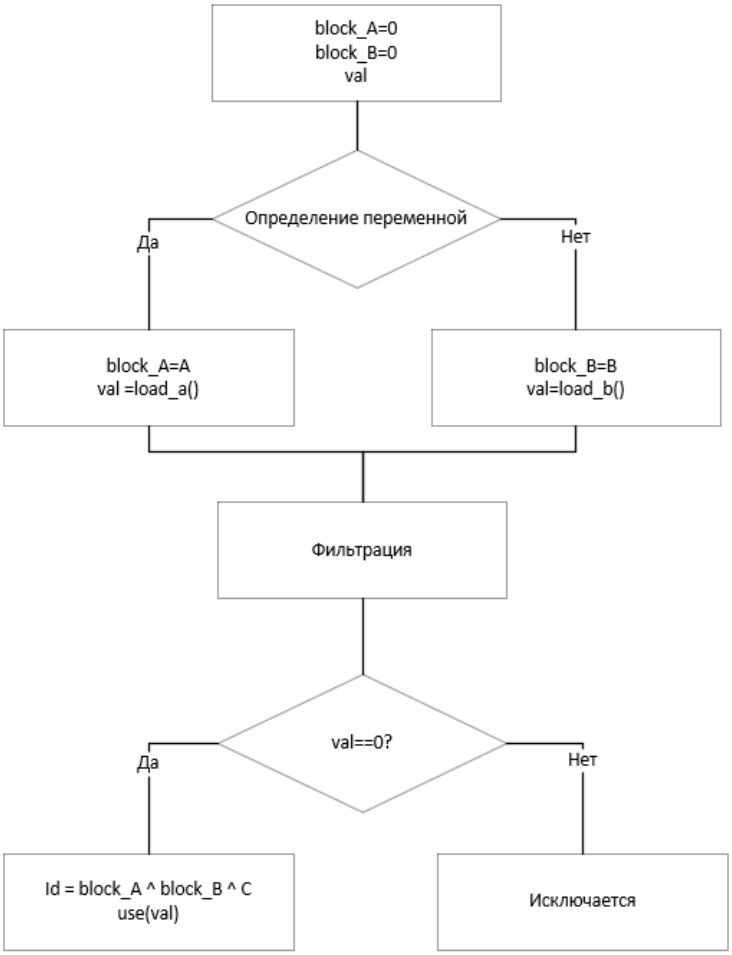


Рис. 3. Схема алгоритма инструментирования

Литература

1. Инструментирование кода // Википедия : [сайт]. – 2024. – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/instrumentation (дата обращения: 22.11.2024)

2. *Саттон М., Грин А., Амини П.* Fuzzing: Исследование уязвимостей методом грубой силы, «Символ Плюс». – СПб. – Москва, 2009. – 560 с.

3. Покрытие кода // Википедия : [сайт]. – 2024. – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/code_coverage (дата обращения: 22.11.2024)

4. Покрытие ветвей // TestEngineer : [сайт]. – 2024. – URL: https://testengineer.ru/code-coverage/ (дата обращения: 22.11.2024)

5. *Cytron R. K., Ferrante J., Rosen B. K., Wegman M. N., Zadeck F. K.* Efficiently computing static single assignment form and the control dependence graph // ACM Trans. on Programming Languages and Systems. – 1991. – Vol. 13, N 4. – P. 451–490.

6. Операция Xor // LoginRadius : [сайт]. – 2024. – URL: https://www.loginradius.com/blog/engineering/how-does-bitwise-xor-work/ (дата обращения: 24.11.2024)

7. Битовая карта // Википедия : [сайт]. – 2024. – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/bitmap (дата обращения: 25.11.2024)

УДК 004.9

ВЕБ-СЕРВИС ДЛЯ ИНФОРМАЦИОННОГО МОНИТОРИНГА КРИМИНОГЕННОЙ ОБСТАНОВКИ

А. М. Мельников, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача разработки веб-сервиса для мониторинга криминогенной обстановки и обеспечения взаимодействия между пользователями, государственными органами и правоохранительными структурами. Веб-сервис предоставляет доступ к актуальным новостям о преступности, информации о зонах повышенного риска, а также возможность обмениваться сообщениями в защищенных чатах, выполнять мониторинг статистических данных. Используются прогнозирующие алгоритмы на базе машинного обучения.

Ключевые слова: веб-сервис, безопасность, мониторинг, криминогенная обстановка, ролевой доступ, предсказание преступлений, чат, карта горячих точек, интеграция, тестирование, аналитика данных, бот, машинное обучение.

Введение

Цифровизация привнесла в повседневную жизнь новые механизмы взаимодействия в различных областях. В частности, задачи мониторинга криминогенной обстановки может стать доступным для использования различными группами населения. Однако среди пользователей таких систем остаются два ключевых запроса: защищенность информации и точность аналитики [1]. Важным шагом для построения открытой и безопасной среды могла бы стать разработка веб-сервиса, который мог бы объединить в себе как функциональность для информирования, так и интерактивные возможности взаимодействия. Кроме того, интеграция алгоритмов прогнозирования позволила бы не только получать сводку текущей криминогенной ситуации, но и заранее предсказывать потенциальные зоны риска, помогая в принятии превентивных мер.

Предлагаемый веб-сервис для мониторинга безопасности ориентирован на ряд задач, решающих как индивидуальные, так и общественные потребности. Во-первых, это систематизированный доступ к актуальным новостям и криминальной статистике, что повысит уровень информированности граждан. Во-вторых, пользователи будут получать доступ к статистическим данным в режиме реального времени через интерактивную карту горячих точек, позволяющую оценить ситуацию в конкретных регионах. В-третьих, система может предоставить защищенные каналы для обмена сообщениями, что особенно важно для органов правопорядка. Ролевая модель системы, в рамках которой каждому пользователю присваивается определенный уровень доступа, позволит надежно защитить конфиденциальные данные и оптимизировать взаимодействие между участниками сервиса [2].

Эффективность работы сервиса можно обеспечить за счет внедрения алгоритмов машинного обучения, анализирующих данные и формирующих прогнозы на основе большого массива информации. Это позволит не только ретроспективно оценивать ситуацию, но и предсказывать её развитие. Подобная технология полезна для служб, занимающихся вопросами безопасности, так как предсказание зон потенциального риска позволяет быстрее реагировать на угрозы, планировать меры профилактики и снижать вероятность правонарушений [3].

1. Цель и задачи разработки

Основная цель разработки заключается в создании доступного и удобного веб-сервиса для пользователей, нуждающихся в оперативной информации о безопасности и обмене данными с органами правопорядка. Сервис ориентирован на несколько групп пользователей: граждане, сотрудники государственных органов и правоохранительных структур, что требует создания ролевой модели с разграничением прав доступа [2].

В ходе разработки необходимо было решить ряд задач:

1. Разработать ролевую модель доступа, обеспечивающую безопасность данных и контроль за действиями пользователей в соответствии с их ролью [1, 2].

2. Создать разделы для мониторинга новостей, актуальных данных о преступности, чат для обмена сообщениями, а также администраторский интерфейс для управления пользователями.

3. Интегрировать сервис с внешними источниками новостей и данных по криминогенной обстановке [4, 5].

4. Разработать прогнозирующие алгоритмы на базе машинного обучения для анализа и прогнозирования криминогенной активности [3].

5. Обеспечить защиту данных через систему сессий и JWT токенов, а также создать гибкую систему уведомлений [1].

2. Функциональность веб-сервиса

Главная страница веб-сервиса представлена разделами для ознакомления и регистрации. Пользователи могут просмотреть описание сервиса и часто задаваемые вопросы. Процесс регистрации предусматривает создание личного аккаунта, который впоследствии позволяет получить доступ к расширенной функциональности сервиса.

Кабинет администратора предоставляет функции управления пользователями, назначение ролей и прав, а также возможность контролировать доступ к различным функциям сервиса. Администраторы могут создавать учетные записи для новых сотрудников, изменять пароли и настраивать доступ к разделам.

Пользователи могут управлять личными данными в разделе профиля. В настройках можно включить уведомления о новых сообщениях, новостях, обновлениях сервиса и других событиях, что повышает удобство использования

Раздел помощи включает часто задаваемые вопросы и ответы, руководство пользователя, а также форму для обращения в службу технической поддержки. Для каждой роли предусмотрены отдельные руководства, которые можно скачать и использовать для работы.

Раздел новостей служит для предоставления пользователям актуальной информации по теме преступности и безопасности. Новости поступают из государственных источников, через API интеграцию с фильтрацией по ключевым словам. Новостные карточки содержат краткое описание и изображение, а также возможность раскрыть полное содержание новости для ознакомления с деталями [4].

Существуют чаты для всех пользователей, а также закрытые чаты для госорганов и правоохранительных структур. Закрытые чаты обеспечивают защиту шифрованием данных и конфиденциальное общение, а также позволяют оперативно реагировать на ситуации, требующие внимания.

Журнал преступлений предоставляется в рамках расширенной функциональности и имеет ограниченный доступ. Работникам правоохранительных органов предоставлена возможность добавлять, изменять и удалять записи о преступлениях. Данные представляются в виде таблицы с функцией фильтрации и поиска. Для удобства пользователей предусмотрены экспорт и импорт данных в стандартных форматах, а также возможность загрузки данных для офлайн-работы.

Существует возможность просмотра карты, так называемой «горячих точек», которая отображает статистику по криминогенной ситуации в различных регионах. Карта позволяет визуально оценить уровень преступности в разных областях, а также отслеживать динамику по категориям преступлений. Данные доступны за интересующий период, что делает анализ простым и доступным [5].

Сервис оснащен ботом, который обучен на массиве данных и способен прогнозировать риск совершения преступлений по заданным критериям. Бот предоставляет пользователям информацию, основываясь на актуальной статистике, что позволяет использовать его в качестве вспомогательного инструмента для правоохранительных органов [3].

3. Примеры использования веб-сервиса

Рассмотрим функциональность страницы «Журнал преступлений» веб-сервиса. Основные функции страницы дополняются визуальными иллюстрациями.

На главной странице «Журнала преступлений» (рис. 1) представлена информация, содержащая записи о преступлениях. Каждая запись имеет раскрывающийся слой с детальными данными, такими как описание инцидента, местоположение, информация о преступнике, жертве и других деталях. Для удобства пользователей реализована система фильтрации записей по типу преступления, дате и статусу. Нажатие кнопки «Очистить фильтры» позволяет сбросить ранее установленные параметры фильтрации, возвращая таблицу к исходному состоянию.

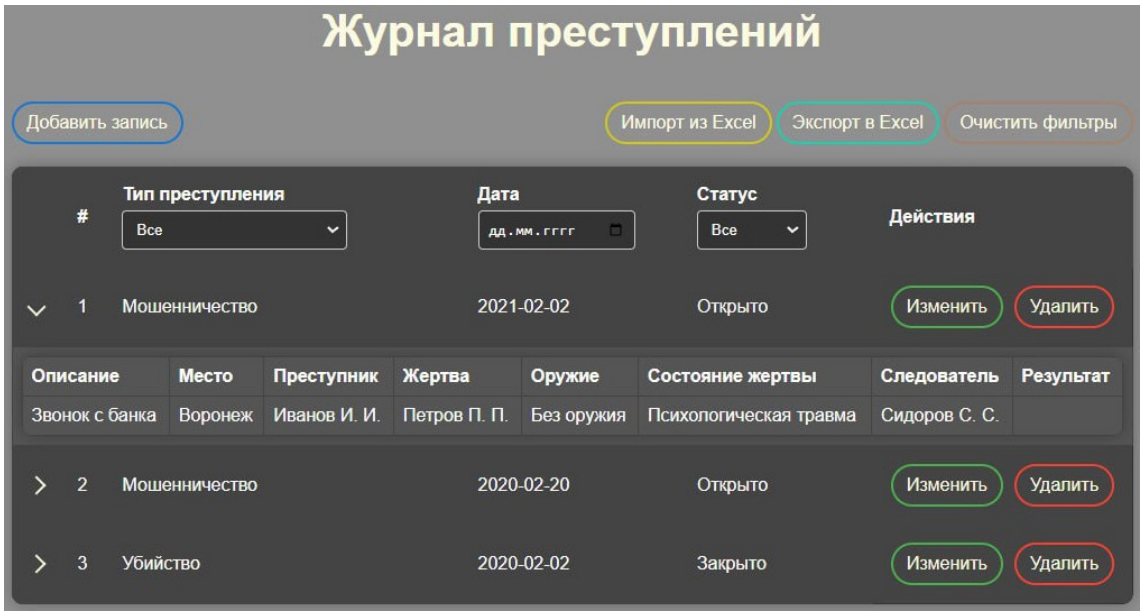


Рис. 1. Главная страница «Журнала преступлений»

Пользователи могут добавлять новые записи, а также редактировать или удалять существующие. Для создания и редактирования записей разработаны интуитивно понятные формы, которые включают обязательные поля для ввода информации. Пример интерфейсов добавления и редактирования записей приведен на рис. 2.

Данные из «Журнала преступлений» могут быть экспортированы в формате Excel для дальнейшего анализа или архивного хранения. Выгружаемый файл содержит структурированную таблицу с актуальными данными из базы. Для полей с ограниченным числом вариантов предусмотрены выпадающие списки, автоматически генерируемые на основе базы данных. Пример экспортируемой таблицы представлен на рис. 3.

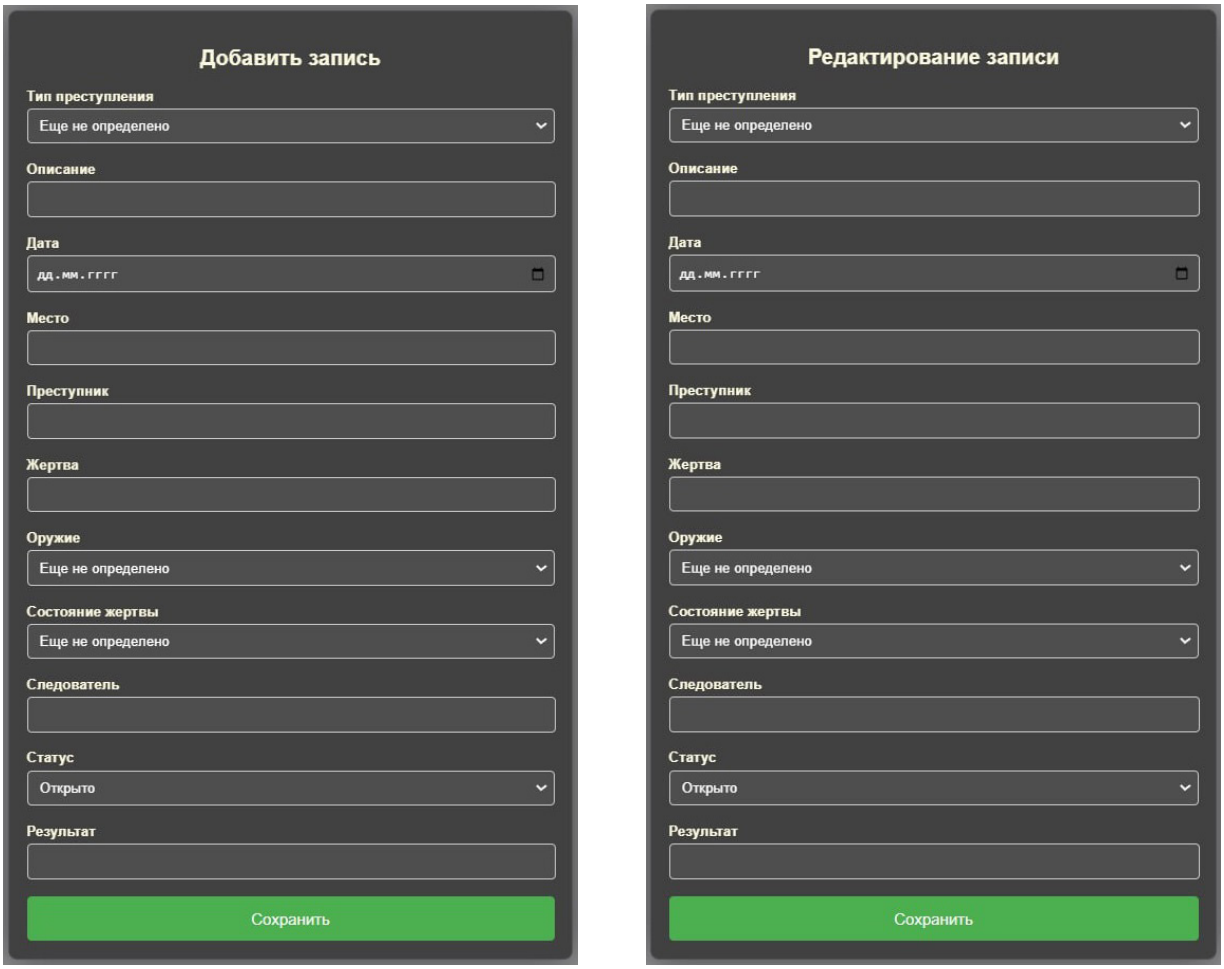


Рис. 2. Добавление и редактирование записей

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Тип преступления	Описание	Дата	Место	Преступник	Жертва	Оружие	Состояние жертвы	Следователь	Результат
2	Мошенничество	онок с банка	2021-02-02	Воронеж	Иванов И. И.	Петров П. П.	Без оружия	Психологическая травма	Сидоров С. С.	
3	Еще не определено	ман в магазине	2020-02-20	Липецк	Щестуков В. П.	Евкопин Р. Л.	Без оружия	Без травм	Костомалов А. П.	
4	Кража	ийство розочкой	2020-02-02	Ростов	Гудилин Р. В.	Куполин Е. Д.	Бутылка	Летальный исход	Никулин А. В.	
5	Убийство									
6	Мошенничество									
7	Нарушение ПДД									
	Грабеж									

Рис. 3. Таблица данных в Excel

Кроме того, система поддерживает импорт данных из шаблонного файла Excel. Данная функция значительно упрощает массовую загрузку записей и работу в офлайн-режиме. Для импорта данных используется специальная форма (рис. 4).

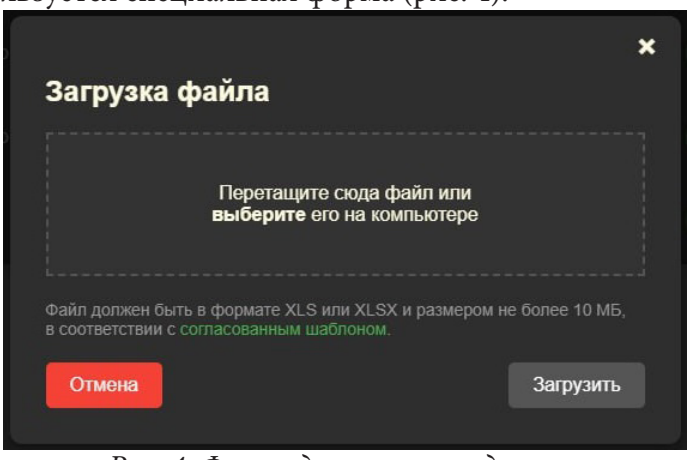


Рис. 4. Форма для импорта данных

Реализованные функции обеспечивают интуитивно понятное управление данными и способствуют повышению эффективности работы с информацией о преступлениях.

4. Технические аспекты разработки

Проект выполнен в монолитной архитектуре, что позволяет снизить сложность поддержки и разворачивания системы. Основные инструменты включают Java 17, Apache Tomcat, PostgreSQL для хранения данных, а также сервлеты и JSP для обработки данных на стороне сервера.

Ролевая система сервиса обеспечивает доступ пользователей к функциям на основании их роли (граждане, сотрудники спецслужб, сотрудники госорганов). Для защиты данных используются токены сессий, реализованные на базе JWT (access и refresh токены), что обеспечивает безопасность и контроль за действиями пользователей [1].

Тестирование API проводилось с использованием Postman: были разработаны коллекции и моковый сервер для проверки функциональности API и обработки ошибок. Веб-сервис также прошел нагрузочное тестирование, тестирование на обратную совместимость и регрессионное тестирование, оптимизированное с помощью автоматизированных тестов [6]. В рамках тестирования были выполнены проверки безопасности, UI/UX тестирование, а в некоторых модулях использовалась методология разработки через тестирование (TDD).

Заключение

Разработанный веб-сервис обеспечивает эффективное и комплексное решение для мониторинга криминогенной обстановки, обмена информацией и поддержки взаимодействия между гражданами и государственными структурами. Реализация многоуровневой ролевой системы, позволяющей разграничивать права доступа для разных категорий пользователей, обеспечивает защиту данных. Правоохранительные органы получают рабочий инструмент для мониторинга криминогенной ситуации с целью своевременного реагирования, а обычные пользователи — аналитический инструмент.

Формирование прогнозов и выявление потенциальных зон риска открывает возможности для превентивных мер. Кроме того, сервис может способствовать улучшению взаимодействия между гражданами и органами правопорядка, создавая безопасную информационную среду для всех участников.

Литература

1. *Ховард М.* Защищенный код / М. Ховард, Д. Леблан. – 2-е изд., испр. – М. : Русская Редакция, 2005. – 704 с.

2. *Хрущев Д. Г.* Ролевые модели доступа в информационных системах / Д. Г. Хрущев // Форум молодых ученых. – 2017. – № 3. – С. 634–636.

3. *Флэч П.* Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных / П. Флэч. – М. : ДМК Пресс, 2015. – 400 с.

4. *Иванов А. М.* Интеграция новостных API в веб-приложения / А. М. Иванов // Вестник информационных технологий. – 2022. – № 3. – С. 45–52.

5. *Клишков В. В.* Геоинформационные системы в криминологии / В. В. Клишков. – Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский университет МВД России, 2010. – 256 с.

6. *Савин Р.* Тестирование dot com / Р. Савин. – М. : Дело, 2007. – 312 с.

УДК 004.42

АДАПТАЦИЯ ПРИМЕНЕНИЯ КОНКУРЕНТНОСТИ В ЗАДАЧЕ РЕИНЖИНИРИНГА ДЕСКТОПНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЕ

И. Ю. Полеводин, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача реинжиниринга десктопного приложения в веб-приложение, а именно адаптация исходного кода, использующего при выполнении своих функций конкурентность. Решение основано на адаптации применения асинхронности и параллелизма.
Ключевые слова: реинжиниринг, веб-приложение, десктопное приложение, конкурентность, асинхронность, параллелизм, многопоточность.

Введение

Группа компаний «Экологический центр» (ГК «ЭКО ЦЕНТР») — крупнейший проектный институт, практическая деятельность которого связана с разработкой и сопровождением природоохранной документации, а также специализированных программных комплексов. Одним из таких программных продуктов является десктопный программный комплекс «Методики», позволяющий рассчитывать выбросы загрязняющих веществ в атмосферу во время работы определенного завода или предприятия. В расчете учитываются особенности производственных процессов и нюансы технологических операций предприятия. Программный комплекс разработан на основе соответствующих нормативных документов. Примерами модулей, которые входят в комплекс, являются:

- «Котельная» (расчет выбросов в атмосферный воздух загрязняющих веществ при сжигании твердого, жидкого и газообразного топлива);
- «Ферма» (расчет выбросов загрязняющих веществ от объектов животноводства и птицеводства).

Анализ пользовательского опыта, особенностей областей экологического и гидрогеологического проектирования, проведения изыскательских работ, а также опыта разработки и сопровождения программного комплекса «Методики» показал, что:

1. Часто пользователям требуется доступ к системе вне их рабочего места с установленным программным обеспечением (ПО). Удобно решать некоторые задачи, находясь непосредственно на предприятии, а иногда требуется выполнить (доделать) определенные работы в дороге, дома или в любом другом месте.

2. Узкая специализация программного комплекса требует регулярной обратной связи от пользователей. Для того, чтобы ПО помогало решать их задачи корректно и эффективно, часто выпускаются обновления, которые пользователям необходимо каждый раз устанавливать. На частоту обновлений комплекса также влияет публикация новых и обновление существующих нормативных документов. Поэтому необходимо решить задачу автоматического получения новых версий ПО пользователями.

Наличие доступа к системе через браузер, установленный на устройстве пользователя, позволит решить вышеперечисленные проблемы. Таким образом, актуальна задача реинжиниринга программного комплекса «Методики» из десктопного приложения в веб-приложение.

Одной из подзадач реинжиниринга десктопного приложения в веб-приложение является задача адаптации исходного кода, использующего при выполнении своих функций конкурентность, так как принцип работы десктопного приложения, установленного на устройстве

пользователя, отличается от веб-приложения, запущенного на сервере и обрабатывающего входящие запросы.

1. Особенности решения задачи реинжиниринга

Десктопное приложение устанавливается локально на устройство пользователя. Этот пользователь является единственным для данной программы. Веб-приложение развертывается на сервере и эксплуатируется многими пользователями, отправляющими запросы с помощью браузера на своем устройстве. Таким образом, в распоряжении нескольких пользователей оказывается одни и те же ресурсы сервера: центральный процессор, память и др. Серверная часть кода приложения должна учитывать это, имея некоторые ограничения на написание компонентов кода и пользуясь возможностями, которые предлагает выбранная платформа для улучшения производительности.

Реинжиниринг десктопного приложения в веб-приложение должен включать в себя адаптацию кода, использующего конкурентность. Рассмотрим необходимые определения [1].

1. Конкурентность — выполнение сразу нескольких действий в одно и то же время.

2. Многопоточность — форма конкурентности, использующая несколько программных потоков выполнения.

3. Параллельная обработка — выполнение большого объема работы за счет распределения ее между несколькими потоками, выполняемыми одновременно.

4. Асинхронное программирование — разновидность конкурентности, использующая обещания или обратные вызовы для предотвращения создания лишних потоков.

Десктопное приложение часто может свободно использовать параллельную обработку, поскольку все потоки, необходимые для нее, не могут потребоваться для задач другого пользователя (все происходит локально). Их, разумеется, не должно быть слишком много, чтобы не снижалась производительность. Но для десктопного приложения при создании новых потоков такое снижение менее вероятно, чем для веб-приложения, которое выделяет потоки для обработки отдельных запросов разных пользователей. Поэтому хорошей рекомендацией при написании веб-приложения является сведение использования параллелизма к минимуму там, где это возможно [2].

При этом, асинхронность может быть более востребована в веб-приложении, чем в десктопном, поскольку она позволяет освобождать потоки во время выполнения определенных операций (например, ввода-вывода), что не влияет на скорость ответа текущему пользователю, но положительно сказывается на общей производительности, так как освобожденный поток может заняться обработкой другого запроса. В десктопном приложение тоже может потребоваться освободить поток, чтобы он, например, будучи UI-потоком, продолжил реагировать на действия пользователя, но не всегда это необходимо.

Также при реинжиниринге десктопного приложения в веб-приложение следует соответствующим образом скорректировать работу со статическими компонентами (классами, членами), поскольку они будут являться общими для нескольких (возможно, всех) пользователей, и при обращении к ним возникнет конкурентность. Для таких компонентов можно использовать потокобезопасные структуры.

Необходимо учесть, что память сервера, на котором развернуто веб-приложение, ограничена и используется для множества пользователей, поэтому следует минимизировать загрузку и хранение данных в памяти [3].

2. Общие сведения о технологиях программного комплекса «Методики»

Программный комплекс «Методики» разработан на платформе .NET Framework на языке C# и является приложением Windows Forms. Пользователь скачивает установщик программы с сайта компании и устанавливает ПО на устройство. Далее программа активируется и используется для расчета выбросов загрязняющих веществ, создания отчетов, экспорта в различные форматы и т. п. Пользователь указывает данные о своем предприятии (площадки, цеха, источники загрязнения, их режимы работы и многое другое), и приложение выполняет подробный расчет для всех или для определенных данных. Основным значением в расчете является скорость выброса загрязняющего вещества, измеряющаяся в г/с (грамм в секунду) или в т/г (тонн в год).

Веб-версия программного комплекса должна обладать той же функциональностью, но с доступом из браузера и системой аккаунтов, в рамках которых будет осуществляться работа. В качестве платформы будет использоваться ASP.NET Core (язык C#), в качестве ORM — Entity Framework Core.

3. Асинхронность в программном комплексе «Методики»

Программный комплекс «Методики» является десктопным приложением, то есть рассчитан на одного пользователь в каждый момент времени, поэтому наличие асинхронности при выполнении различных операций не является фактором, критично влияющим на производительность или на пользовательский опыт. Большинство операций выполняется синхронно, то есть поток выполнения не освобождается на время каких-либо длительных операций, в которых он не принимает участие. Также не предусмотрена возможность отмены каких-либо действий во время их выполнения или любое другое взаимодействие с интерфейсом, пока не закончится текущая обработка.

В веб-приложении асинхронность более востребована, так как пользователей одновременно несколько. Поэтому при реинжиниринге программного комплекса «Методики» необходимо добавить асинхронность в соответствующих местах.

Примерами операций, для которых требуется асинхронность в веб-приложении, являются чтение и запись в базу данных (БД). Как правило, это происходит почти при каждом запросе пользователя. В десктопной версии программного комплекса «Методики» такие операции выполняются синхронно.

Рассмотрим добавление в БД данных о площадке (объединяющей цеха предприятия).

```
public void AddArea(Area area)
{
    _db.Add(area);
    _db.SaveChanges();
}
```

Для работы с БД используется Entity Framework. Сущность добавляется в контекст, представляющий сеанс с БД, и затем выполняется сохранение всех внесенных в контекст изменений. Операция сохранения (записи в БД) является относительно длительной по времени и не требующей участия выполняемого потока, поэтому если она будет выполняться на сервере веб-приложения, то желательно сделать ее асинхронной.

Entity Framework Core поддерживает асинхронные операции. У многих методов есть асинхронные аналоги. В том числе, у синхронного SaveChanges есть асинхронный аналог SaveChanesAsync.

Рассмотрим добавление в БД данных о площадке, адаптированное под выполнение на сервере веб-приложения.

```
public async Task AddArea(Area area)
{
    _db.Add(area);
    await _db.SaveChangesAsync();
}
```

Когда приходит запрос от пользователя для добавления площадки, начинает выполняться асинхронный обработчик этого запроса (с модификатором async), который вызывает (с помощью выражения await) асинхронный метод добавления площадки в БД, внутри которого вызывается асинхронный метод записи в БД. И при непосредственном начале записи выполнение кода возвращается в вызывающий метод, из него — в его вызывающий метод, и т. д. И в конце поток, выделенный для обработки этого запроса, возвращается в пул потоков для обработки других входящих запросов [4]. Когда запись в БД закончится, какой-нибудь поток из пула продолжит выполнение кода, и в итоге пользователю вернется ответ об успешном добавлении площадки (либо информация об ошибке).

Таким образом, производительность приложения повышается за счет того, что потоки не простаивают, а освобождаются для выполнения других задач.

4. Параллелизм в программном комплексе «Методики»

Ключевой функцией программного комплекса «Методики» является расчет выбросов загрязняющих веществ. Расчет выполняется на основе введенных пользователем данных. Таких данных может быть очень много, при этом значительную часть алгоритма можно выполнять, обрабатывая фрагменты данных независимо друг от друга. Поэтому в десктопной версии приложения для расчета выбросов применяется параллелизм.

В веб-приложении параллелизм, предполагающий выделение нескольких потоков для одного пользователя, может оказаться неэффективным в контексте того, что приложение также обрабатывает запросы других пользователей с помощью потоков из того же пула потоков.

Рассмотрим расчет выбросов загрязняющих веществ (методы находятся в разных классах).

```
public CalcResult Calc()
{
    var calcInput = GetCalcInput();
    return _calc.Calc(calcInput);
}
public CalcResult Calc(CalcInput calcInput)
{
    // Реализация алгоритма, в рамках которой данные для расчета
    // обрабатываются параллельно
}
```

Помимо того, что при расчете используется параллелизм, данные для расчета загружаются из БД синхронно. Необходимо адаптировать код так, чтобы, выполняясь на сервере веб-приложения, расчет проводился достаточно быстро, и при этом не снижалась общая производительность приложения.

Особенности эксплуатации программного комплекса таковы, что активность использования может сильно различаться в разные периоды, поскольку клиентам необходимо формировать отчетность примерно в одни и те же сроки, и происходит это, как правило, ближе к окончанию этих сроков. Соответственно, количество одновременных пользователей веб-приложения также будет сильно различаться. Опираясь на это количество, можно принимать решение, выделять дополнительные ресурсы для обработки запроса или нет. Если пользователей мало, то для расчета допустимо применить параллелизм. Если много — выделять потоки не стоит.

Рассмотрим фрагмент компонента для подсчета пользователей веб-приложения, активных в данный момент.

```
private static readonly ConcurrentDictionary<string, bool> _allKeys = new();
public Task InvokeAsync(HttpContext context, IMemoryCache memoryCache)
{
    if (!context.Request.Cookies.TryGetValue(CookieName, out var userGuid))
    {
        userGuid = Guid.NewGuid().ToString();
        // Добавление cookie к ответу пользователю
    }
    memoryCache.GetOrCreate(userGuid, cacheEntry =>
    {
        if (!_allKeys.TryAdd(userGuid, true))
        {
            cacheEntry.AbsoluteExpiration = DateTimeOffset.MinValue;
        }
        else
        {
            cacheEntry.SlidingExpiration =
                TimeSpan.FromMinutes(LastActivityMinutes);
            cacheEntry.RegisterPostEvictionCallback(RemoveKeyWhenExpired);
        }
        return string.Empty;
    });
    return _next(context);
}
public static int Count() => _allKeys.Count(p => p.Value);
```

Для каждого пользователя (при его первом запросе) генерируется GUID, который хранится на устройстве пользователя и отправляется вместе с каждым запросом. На сервере хранится список таких ключей, который периодически обновляется. Если пользователь определенное время не отправлял запросы серверу, то его ключ удаляется, соответственно, пользователь не учитывается в подсчете. Для хранения ключей используется потокобезопасная коллекция, потому что она, являясь статическим членом класса, может использоваться из разных потоков одновременно. Класс ConcurrentDictionary позволяет обеспечить корректную работу с объектом.

Теперь рассмотрим расчет выбросов загрязняющих веществ, адаптированный под выполнение на сервере веб-приложения (методы находятся в разных классах).

```
public async Task<CalcResult> Calc(int onlineUsersCount)
{
    var calcInput = await GetCalcInput();
    return _calc.Calc(calcInput,
        useParallelism: onlineUsersCount < MaxOnlineUsersCountForParallelism);
}
public CalcResult Calc(CalcInput calcInput, bool useParallelism)
{
    if (useParallelism)
    {
        // Реализация алгоритма, в рамках которой данные для расчета
        // обрабатываются параллельно
    }
    else
    {
```

```
        // Реализация алгоритма, в рамках которой данные для расчета
        // обрабатываются последовательно
    }
}
```

При расчете учитывается количество пользователей, активных в данный момент (как показатель загруженности сервера). Если это количество меньше определенного значения, то применяется параллелизм, иначе данные обрабатываются последовательно. Также данные для расчета загружаются из БД асинхронно.

Таким образом, производительность приложения повышается за счет того, что количество потоков, выполняемых на сервере, сохраняется достаточно небольшим.

Заключение

В рамках решения задачи реинжиниринга десктопного приложения в веб-приложение был проведен анализ подзадачи адаптации исходного кода, использующего при выполнении своих функций конкурентность. Определены основные аспекты подзадачи, для каждого из которых рассмотрены конкретные примеры из программного комплекса «Методики», и для каждого предложено решение, обеспечивающее корректную работу веб-приложения.

Литература

1. *Стивен Клири.* Конкурентность в C# / Стивен Клири. – Санкт-Петербург : Питер, 2020. – 17 с.

2. Джеффри Рихтер. CLR via C# / Джеффри Рихтер. – Санкт-Петербург : Питер, 2022. – 250 с.

3. CodeGuru. WinForms to Web – URL: https://www.codeguru.com/csharp/winforms-to-web (дата обращения: 10.10.2024).

4. *Эндрю Лок.* ASP.NET Core в действии / Эндрю Лок. – Москва : ДМК Пресс, 2021. – 122 с.

УДК 004.413.5

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОИМОСТИ РАЗРАБОТАННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

К. Е. Полянская, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается нетривиальная задача определения стоимости разработанного программного обеспечения. Представлен анализ существующих алгоритмических методов оценки стоимости разработки: рассмотрены преимущества и недостатки методик, а также возможность их применения для оценки стоимости уже разработанного программного обеспечения.
Ключевые слова: оценка, стоимость, трудозатраты, трудоёмкость, размер программного продукта, LOC, функциональные точки, модель оценки, методика.

Введение

Оценка стоимости разработки программного обеспечения (ПО) является одной из ключевых задач в управлении проектами и планировании ресурсов. Стоимость программного обеспечения определяется множеством факторов: уровнем сложности и уникальностью разработки, объёмом кода, качеством документации, возможностями для поддержки и адаптации, а также рядом других показателей, которые часто бывают трудно поддающимися точной оценке.

Особую сложность представляет собой оценка стоимости уже разработанного ПО. С развитием технологий задача оценки стоимости уже существующего ПО становится весьма актуальной. Ситуация, когда требуется такая оценка, возникает, например, в случаях судебных разбирательств по государственным контрактам, когда конечный продукт не соответствует ожиданиям заказчика, или возникает подозрение в завышении его стоимости. При решении данной задачи требуется адаптация традиционных методов оценки к новым условиям, поскольку зачастую отсутствуют подробные данные о процессе разработки, использованных методах и затратах на промежуточных этапах. Во многих случаях оценка стоимости может основываться в большей мере только на анализе исходного кода, что значительно усложняет сам процесс оценивания и понижает точность результата, так как программный код не всегда может полностью отражать затраты на проектирование, тестирование, интеграцию и другие важные аспекты разработки.

Поскольку сама по себе задача оценки стоимости разработанного ПО относится к разряду нетривиальных, необходимо проанализировать существующие алгоритмические методы оценки стоимости разработки программного обеспечения, их преимущества и недостатки, а также возможности их применения для оценки стоимости уже разработанных систем.

1. COCOMO II

Методика COCOMO [1] позволяет оценить трудоемкость и время разработки программного продукта.

Различаются две стадии оценки проекта: предварительная оценка на начальной фазе и детальная оценка после проработки архитектуры. Формула оценки трудоемкости проекта в чел.*мес. имеет следующий вид:

$$PM = A \times SIZE^{E} \times \sum_{i=1}^{n} EM_i, \;\; E = B + 0.01 \times \sum_{j=1}^{5} SF_j.$$

Здесь $SIZE$ — размер продукта в KSLOC; EM_i — множители трудоемкости; SF_j — факторы масштаба; $A = 2{,}94$; $B = 0{,}91$; $n = 7$ — для предварительной оценки; $n = 17$ — для детальной оценки.

В контексте решаемой задачи имеет смысл акцентировать внимание на модели детальной оценки, хотя обе модели используют один и тот же подход к определению размеров продукта и коэффициентов масштабирования.

Основной метрикой объёма продукта, применяемой в данной методике, является размер программного продукта в тысячах строках исходного кода (KSLOC, Kilo Source Lines Of Code). Определение термина «строка кода» имеет некоторые сложности, поскольку подсчёт исполняемых элементов в разных языках программирования сильно различается в связи с особенностями объявления переменных, конструкций языка и т. п. В модели COCOMO II в качестве единицы строки кода были выбраны логические строки (т. е. строки кода, которые содержат конкретную операцию или выражение, что позволяет учесть особенности языка, в отличие от физических строк без разбиения на операции).

Для минимизации проблем, связанных с оценкой количества строк кода, Институт программной инженерии (Software Engineering Institute — SEI) разработал специальный анкетный лист, по результатам которого можно оценить размер кода. На основе данной информации становится проще выделить логические строки и подсчитать их общее количество.

Альтернативным способом подсчёта размера продукта может быть применение метода функциональных точек, основная идея которого заключается в подсчёте количества реализованных функций, которые система предоставляет пользователям. В таком случае подсчитанные функциональные точки конвертируются в KSLOC с помощью исторических данных организации по уже выполненным проектам, либо среднестатистическим показателям по отрасли.

Одним из аспектов, учитываемых в методике COCOMO II, является подсчёт повторно используемого, адаптированного и автоматически генерируемого кода. Эффективный размер таких компонентов корректируется таким образом, чтобы он был эквивалентен новому коду. Для этого используются такие показатели, как процент автоматически генерируемого кода, фактор трудоёмкости перевода компонентов в повторно используемые, процент модифицируемых для повторного использования проектных моделей, процент модифицируемого для повторного использования кода, процент затрат на интеграцию и тестирование повторно используемых компонентов, фактор понятности повторно используемого кода.

В методике используются пять факторов масштаба SF_j которые определяются следующими характеристиками проекта: прецедентность, наличие опыта аналогичных разработок; гибкость процесса разработки; архитектура и разрешение рисков; сработанность команды; зрелость процессов.

В рамках пост-архитектурной модели методики необходимо провести оценку 17-ти множителей трудоёмкости: надёжность продукта, сложность продукта, размер базы данных разрабатываемого приложения, требуемый уровень повторного использования, требуемый уровень документированности, опыт работы команды в данной предметной области, опыт работы команды с используемыми платформами и др.

COCOMO II является мощным инструментом для оценки стоимости разработки ПО, так как позволяет учитывать не только объём кода, но и такие параметры, как качество программных процессов, зрелость технологий, опыт команды и требования к надёжности продукта. Однако его применение ограничено в случаях, когда для анализа представлен только исходный код. Значительным преимуществом данной методики можно считать наличие достаточно тщательного подхода к оценке размера продукта, позволяющего скорректировать размер повторно использованного и автоматически генерируемого кода. Но качество подсчёта бюджета в рамках модели COCOMO II сильно зависит от адекватности количественных показателей её факторов, соответственно от опыта и информированности ответственного за расчёт.

В рамках задачи определения стоимости разработанного ПО возникает трудность в оценке данных показателей, т. к. как уровень зрелости команды, сложность требований, взаимодействие с заказчиком и многие другие факторы, которые учитываются в COCOMO II, не могут быть оценены на основе только исходного кода, а усреднённые значения данных коэффициентов могут дать значительную погрешность в оценке. Кроме того, стоит сказать об ограниченной применимости для современных методологий: несмотря на то, что COCOMO II поддерживает многие современные подходы, её применение в рамках Agile и других гибких методологий может быть затруднительным из-за отсутствия фиксированных требований и итерационного характера разработки. Хотя модель обновлялась для учёта новых технологий, некоторые её предположения могут быть неактуальны для проектов, использующих самые современные инструменты и практики (например, DevOps, CI/CD).

2. Метод функциональных точек (IFPUG FPA)

Одной из ключевых особенностей моделей семейства COCOMO является зависимость их результата от размера самого программного комплекса, выраженного в строках исходного кода. Стоит понимать, что количество строк зависит от технологий и синтаксических особенностей конкретного языка программирования, применяемого при разработке приложения, а также стиля программирования, характерного для конкретной команды разработчиков, поэтому такая метрика не может в полной мере отражать количество трудозатрат при написании заданного объёма кода.

Альтернативным способом подсчёта размера продукта, который применяется во многих других моделях оценки трудозатрат, является метод функциональных точек [2].

Суть метода состоит в том, что размер компонентов программного обеспечения можно оценивать в терминах количества и сложности функций, реализованных в данном программном коде. Оценка числа функциональных точек для программного продукта выводится на основе данных, которые определяются в результате анализа информационной области программного продукта и изучения особенностей его будущего функционирования.

При анализе методом функциональных точек надо выполнить следующую последовательность шагов: определение типа оценки; определение области оценки и границ продукта; подсчёт функциональных точек, связанных с данными; подсчёт функциональных точек, связанных с транзакциями; определение суммарного количества не выровненных функциональных точек (UFP); определение значения фактора выравнивания (FAV); расчёт количества выровненных функциональных точек (AFP).

Общее число функциональных точек программы зависит от количества элементарных процессов пяти типов:

1) входящие транзакции (External inputs (EI)) — получают данные от пользователя;

2) исходящие транзакции (External outputs (EO)) — передают данные пользователю;

3) взаимодействия с пользователем (External inquiries (EQ)) — интерактивные диалоги с пользователем;

4) файлы внутренней логики (Internal logical files (ILF)) — файлы (логические группы информации), использующиеся во внутренних взаимодействиях системы;

5) файлы внешних взаимодействий (External interface filese (EIF)) участвуют во внешних взаимодействиях с другими системами. В данной терминологии транзакция — элементарный неделимый замкнутый процесс, имеющий значение для пользователя и переводящий продукт из одного консистентного состояния в другое.

Каждому числовому значению параметра присваивается соответствующий весовой коэффициент, который учитывает, насколько сложно реализовать рассматриваемый параметр. Очевидно, что подобная оценка сложности является экспертной и достаточно субъективной.

Для окончательного подсчёта количества функциональных точек, требуется дополнительно учесть 14 факторов, для которых установлена шкала весовых коэффициентов, отражающих степень влияния того или иного фактора при функционировании программного изделия, таких как: связи данных (как много связей используется для передачи данных внутри системы), распределённая обработка данных, требования по производительности, требования по аппаратной части и др.

Метод функциональных точек — это полезный инструмент для оценки размеров и усилий разработки программного обеспечения на основе функциональности системы. Он особенно эффективен для крупных систем и на ранних стадиях планирования, когда требуется оценка затрат без учёта деталей внутренней реализации. С одной стороны, при оценке размера продукта данный метод позволяет абстрагироваться от конкретной технологической платформы, на которой разрабатывается продукт, и обеспечивает единообразный подход к оценке его размера. Однако нельзя утверждать, что при наличии исходного кода программного продукта, стиль написания кода которого соответствует стандартам языка, подсчёт его функциональных точек даст более точный результат, чем определение количества логических строк кода. Стоит понимать, что метод анализа функциональных точек ничего не говорит о трудоёмкости разработки оцененного продукта, он позволяет определить размер программного продукта, а временные затраты оцениваются исходя из статистики реализации аналогичных функциональных точек, либо при помощи соответствующих моделей оценки. Кроме того, данный метод достаточно трудоёмкий в использовании, т. к. трудозатраты при его использовании пропорциональны объёму оцениваемого программного продукта и количеству функций, реализуемых в нём, а также точность оценки сильно зависит от правильности классификации функций и опыта оценщика.

3. SLIM

Модель Путнэма (SLIM) — это алгоритмическая модель оценки трудоёмкости разработки ПО, предложенная в 1978 г. и основанная на распределении Рэлея [3]. Модель основывается на утверждении, что затраты на разработку ПО распределяются согласно кривым Рэлея, которые являются графиками функции, представляющей распределение рабочей силы по времени. Эта модель строится на основании исторической базы данных (БД) по выполненным в данной организации проектам и поэтому полнее учитывает её специфику.

Трудоёмкость в данной модели рассчитывается по следующей формуле:

$$PM = \left(\frac{Size}{P \times T^{4/3}} \right)^3 \times B.$$

Здесь $Size$ — размер программного обеспечения, P — технологический фактор/продуктивность, способность организации разрабатывать ПО требуемого объёма и качества, T — ограничения на время разработки, B — масштабируемый коэффициент.

Технологический фактор включает в себя характеристику проекта в следующих аспектах: методы управления и понимание процесса, качество используемых методов инженерии ПО, уровень используемых языков программирования, уровень развития среды, навыки и опыт команды разработчиков, сложность приложения.

Одним из этапов применения данной модели является определение значения производительности. Если предположить, что в стабильном коллективе разработчиков, работающих по налаженному технологическому процессу, производительность практически не меняется от проекта к проекту, то можно выписать $n-1$ уравнений для уже выполненных проектов. Подставляя в эти уравнения значения $Размер_кода_i$, $Срок_i$ и $Трудоёмкость_i$ из исторической базы данных уже выполненных n проектов, можно получить значения множителя B в n точках

Размер_кода$_i$ $(1 \le i \le n)$, по которым его можно аппроксимировать для нового $n+1$ проекта. Вместе с этим можно получить и значение производительности, после чего по уже известным значениям B и *Производительности* можно получить уравнение, связывающее оценки значений *Срок* и *Трудоёмкость* для нового проекта.

К преимуществам модели SLIM можно отнести широкие возможности по калибровке модели, простая зависимость, связывающая затраты на программное обеспечение и трудоёмкость на его разработку, а также то, что для расчёта используется меньше параметров по сравнению с моделями семейства COCOMO. К недостаткам модели SLIM можно отнести чувствительность её оценок к изменениям в параметрах разработки, а также слабую применимость этой модели к малым проектам (не рекомендуется использование данной модели для проектов объёмом меньше 70 000 строк кода).

В условиях решения поставленной задачи использование модели SLIM затруднительно, поскольку модель строится на основании исторической БД по выполненным в данной организации проектам, однако доступ к историческим данным может отсутствовать.

4. PERT

PERT — метод оценки трудоёмкости проекта, основанный на анализе задач, необходимых для его выполнения [4]. PERT был разработан главным образом для упрощения планирования и составления графиков больших и сложных проектов, давая возможность разработать рабочий график проекта без точного знания деталей и необходимого времени для всех его составляющих.

Входом для данного метода оценки служит список элементарных пакетов работ. Диапазон неопределённости характеризуется тремя оценками: M_i — наиболее вероятная оценка трудозатрат; O_i — минимально возможные трудозатраты на реализацию пакета работ; P_i — пессимистическая оценка трудозатрат (реализация всех рисков).

Средняя трудоёмкость по каждому пакету:

$$E_i = (P_i + 4M_i + O_i) / 6.$$

Далее подсчитываются суммарная трудоёмкость, среднеквадратичная ошибка оценки каждого пакета, среднеквадратичная ошибка суммарной оценки и гарантированная оценка с вероятность 95 %.

Применение метода PERT после завершения разработки и при наличии исходного кода не является типичным. Однако, можно использовать некоторые аспекты PERT для сравнения запланированных и фактических затрат и сроков, что может помочь в улучшении будущих оценок. Например, замена единицы измерения реализации компонентов в PERT (время) на количество строк кода (соответственно оптимистическое, пессимистическое, наиболее вероятное) может быть альтернативным способом определения размера программного продукта, однако при наличии исходного кода данная задача не является актуальной.

Стоит понимать, что при использовании метода PERT необходимо предъявлять строгие требования к статистической независимости оценок, компетентности эксперта, т. к. чрезвычайный оптимизм, или, наоборот, необоснованный пессимизм оценок серьёзно влияет на результирующую оценку.

5. SEER-SEM

SEER-SEM — автоматизированная система расчета стоимости разработки программного обеспечения с помощью параметрического моделирования [5].

Одним из этапов использования данной модели является определение размера программного продукта. Данная метрика трансформируется во внутренний программный показатель

S_e (1), который позволяет провести анализ процесса разработки нового или уже готового к коммерческому использованию кода.

$$S_e = NewSize + ExistingSize * (0.4 * Redesign + 0.25 * Reimpl + 0.35 * Retest) \quad (1)$$

S_e увеличивается прямо пропорционально количеству нового ПО, а также зависит от объёма работ по перепроектированию, повторному использованию и тестированию.

Измерение количества функциональных точек может намного повысить точность прогноза. Модель SEER-SEM не просто вносит поправки в соответствии с особенностями языка программирования, но также учитывает такие факторы, как фазу оценки, операционное окружение, тип приложения и его сложность с использованием показателя энтропии в зависимости от типа разрабатываемого ПО.

Модель учитывает взаимную связь трудоёмкости и сроков проекта по формуле (2).

$$K = D^{0.4} * \left(\frac{S_e}{C_{te}} \right)^E . \quad (2)$$

Здесь S_e — размер, приведенный ранее; C_{te} — эффективность технологии — составной показатель, который отражает продуктивность или эффективность людей, процессов, вовлечённых в развитие проекта; D — степень интеграции сотрудников, показатель сложности проекта с точки зрения количества вовлечённых человек; E — энтропия.

Модель SEER-SEM является частью коммерческого программного обеспечения, алгоритмы вычислений которого не раскрыты, в связи с чем модель невозможно использовать в независимых программных продуктах. Из-за недоступности алгоритмов SEER-SEM возникает неясность, касающаяся поддержки некоторых типы входных данных и определения значений используемых параметров. А также нет опубликованных независимых исследований, касающихся использовании этой модели.

6. Методика расчёта планируемой стоимости работ по созданию информационных систем Московской области

В методике расчёта планируемой стоимости работ по созданию, развитию и сопровождению информационных систем (ИС) Московской области расчёт затрат на создание ИС представлен следующими последовательно выполняемыми этапами [6]: оценка функционального размера ИС, оценка базовой трудоёмкости создания ИС, оценка итоговой трудоёмкости работ по созданию ИС, расчёт средней стоимости человеко-месяца работы разработчика ИС, расчёт затрат на создание ИС.

Оценка функционального размера ИС производится на основе функциональных требований ИС, содержащихся в технических требованиях. Функциональный размер задается набором из шести элементов:

1) количество подсистем ИС (Subsystem) — S;
2) количество функций подсистем ИС (Function) — F;
3) количество микрофункций (возможностей функций) ИС (Tool) — T;
4) количество уникальных информационных объектов ИС (Entity) — E;
5) количество атрибутов информационных объектов ИС (Attribute) — A;
6) количество свойств атрибутов информационных объектов ИС (Properties) — P.

Далее оценивается базовая трудоёмкость разработки ИС (Basic labor intensity — B) как сумма произведений единиц измерения функционального размера и значений коэффициентов трудоёмкости с учётом поправочных коэффициентов трудоёмкости по формуле:

$$B = w_1 * (S * i_1 + F * i_2 + T * i_3) + w_2 * (E * i_4 + A * i_5 + P * i_6), \text{ где}$$

$\{S, F, T, E, A, P\}$ — функциональные единицы размера ИС, определённые на основании анализа функциональных требований к ИС, содержащихся в технических требованиях; $i_1 - i_6$ —

коэффициенты трудоёмкости — функциональные единицы измерения, определенные на основании анализа функционального размера разработанных ИС Московской; w_1 и w_2 — поправочные коэффициенты трудоемкости — функциональные единицы измерения, определённые на основании анализа функционального размера разработанных ИС Московской области.

Процесс создания и развития ИС, согласно методике, состоит из следующих видов работ (type of work – tw), представленных в табл. 1.

Таблица 1

Виды работ по созданию ИС

Наименование вида работ по созданию ИС	Условное обозначение	Коэффициент трудоёмкости работ
Разработка технического задания на создание ИС	tw_1	0,05
Разработка документации технического проекта ИС	tw_2	0,07
Разработка СПО	tw_3	0,7
Разработка рабочей документации на ИС	tw_4	0,05
Пусконаладочные работы	tw_5	0,05
Проведение предварительных испытаний ИС	tw_6	0,01
Подготовка (обучение) персонала ИС	tw_7	0,02
Проведение опытной эксплуатации ИС	tw_8	0,03
Проведение приемочных испытаний ИС	tw_9	0,02

Каждый из перечисленных в табл. 1 типов работ рассчитывается по определённым в рамках методике формулам с учётом поправочных коэффициентов.

Главным преимуществом методики является то, что подсчёт трудозатрат каждого типа работ по созданию ИС основывается на базовой трудоёмкости, которая, в свою очередь, определяется на основе размера ИС. В условиях поставленной задачи данный подход обладает значительным преимуществом, так как функциональные единицы размера ИС могут быть подсчитаны при наличии исходного кода. Недостатком данной методики является то, что значения всех поправочных коэффициентов, используемых в рамках методики, определялись на основе анализа разработанных ИС Московской области, что накладывает ограничения на применение данного метода для любых информационных систем.

Заключение

Проведённый анализ алгоритмических методов оценки стоимости ПО с точки зрения их применения для оценки разработанных программных продуктов показал, что на данный момент не существует универсальной модели, позволяющей получить оценку затрат, основанную исключительно на анализе исходного кода.

Модель COCOMO II предоставляет широкие возможности для оценки размера продукта, в т. ч. с точки зрения наличия в нём повторно используемого и автоматически сгенерированного кода. Однако в рамках поставленной задачи возникает трудность в оценке факторов масштаба и множителей трудоёмкости., т. к. они не могут быть оценены на основе исходного кода, а усреднённые значения данных коэффициентов могут дать значительную погрешность в оценке.

Метод функциональных точек является альтернативным способом определения размера ПО, который может повысить точность оценки при использовании его в других методиках в случаях, когда исходный код программного продукта не отражает трудозатраты на его создание.

Метод PERT не может использоваться в данной задаче как самостоятельная модель, однако в комбинации с другими методиками может помочь улучшить оценку посредством сравнения запланированным и фактических трудозатрат и сроков.

Метод SLIM ограничивает своё применение использованием данных из исторической базы данных организации, разработавшей программный продукт.

Модель SEER-SEM является частью коммерческого программного обеспечения, алгоритмы вычислений которого не раскрыты, в связи с чем модель невозможно использовать в независимых программных продуктах.

Методика оценки, утверждённая постановлением Правительства Московской области, основывается на подсчёт базовой трудоёмкости ПО, которая в свою очередь определяется на основе размера ИС. В условиях поставленной задачи данный подход обладает значительным преимуществом, но используемые в методике поправочные коэффициенты накладывают ограничения на применения данного метода для любых информационных систем.

Задача оценка стоимости разработанного ПО является нетривиальной и не имеет простого решения. Сравнительный анализ алгоритмических методов подчеркивает важность создания гибридного метода, либо принципиально нового подхода в оценке существующих программных продуктов.

Литература

1. *Boehm B.* Software Cost Estimation with COCOMO II. / B. Boehm, C. Abts. – New Jersey : Prentice Hall Press, 2009. – 544 p. – ISBN 978-0-13-702576-3.

2. Function Point Analysis (FPA). – URL: https://ifpug.org/ifpug-standards/fpa (дата обращения: 30.09.2024).

3. *Hamayoon G.* The review of software cost estimation model: SLIM / G. Hamayoon, A. Faqeed S. // International Journal of Advanced Academic Studies. – 2020. – Vol. 2. – P. 511–515.

4. *Алиев Х. Р.* Модель планирования и управления разработкой сложных программных систем на основе комбинированной методики оценки трудозатрат : автореф. дис. ... канд. экон. наук : 08.00.13 / Алиев Хаджимурад Расулович; СПбГУ. – Санкт-Петербург, 2010. – 25 с.

5. SEER for Software (SEER-SEM) – Cost Estimation. – URL: https://galorath.com/cost-estimation/seer-sem-software/ (дата обращения: 05.10.2024).

6. Об утверждении Методики расчета планируемой стоимости работ по созданию, развитию и сопровождению информационных систем Московской области : постановление Правительства МО от 11.11.2022 № 1251/38.

УДК 004.415.2

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО АНГЛИЙСКОГО ЯЗЫКА

С. М. Проняева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье представлено описание процесса создания веб-приложения для изучения технического английского языка. Рассматриваются основные этапы разработки приложения — проектирование, реализация, тестирование. Проводится анализ требований к приложению, выбираются технологии для разработки, описывается архитектура приложения и реализуется бизнес-логика.
Ключевые слова: веб-приложение, архитектура приложения, ER-модель, база данных, миграция, интерфейс JDBC, внедрение зависимостей, REST-архитектура, API.

Введение

В настоящее время английский язык встречается во многих сферах жизни, и область информационных технологий — не исключение. Так как в русском языке среди IT-терминов встречаются заимствованные слова и синтаксис всех популярных языков программирования написан на английском языке, владение соответствующей терминологией помогает быстрее изучать новые технологии и лучше ориентироваться в языке при написании программ. При изучении английского языка IT-специалисты обычно прибегают к общедоступным ресурсам, таким как онлайн-курсы, лекции на видео-платформах, словари и переводчики и т. д. Данные инструменты, как правило, предназначены для изучения общего языка, а не терминов той или иной области. Поэтому становится актуальным вопрос о создании приложения для изучения технического английского, позволяющего IT-специалистам в короткие сроки освоить необходимую им терминологию.

Статья посвящена проектированию и реализации серверной части веб-приложения для изучения технических терминов английского языка в области информационных технологий.

1. Постановка задачи

1. Спроектировать веб-приложение, предназначенное для изучения технических терминов английского языка в области информационных технологий, обладающее следующей функциональностью:

– регистрация;

– выполнение заданий для усвоения терминологии (выбор перевода слова, вставка слова в предложение, образование фраз с помощью соединения слов, кроссворд);

– сохранение прогресса и отслеживание его в профиле;

– поиск перевода и значения слов во встроенном словаре и формирование на их основе собственного.

2. Реализовать серверную часть приложения.

2. Сравнительный анализ разрабатываемого приложения и существующих решений

Существует несколько приложений-аналогов, например, «Английский для айтишников», «Английский для IT», проект «Разработка веб-приложения для изучения английского языка

IT-специалистами». Последний проект находится на стадии разработки, из-за чего не представляется возможным оценить его преимущества и недостатки.

Обзорная оценка предоставляемых приложениями функций и некоторых других критериев представлена в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение приложений-аналогов с предлагаемыми решениями

Приложение / Критерий	«Английский для айтишников»	«Английский для IT»	Разрабатываемый продукт
Наличие интерактива с пользователем	+/–	+/–	+
Выбор перевода	+	+	+
Вставка слова в предложение	+	–	+
Решение кроссворда	–	–	+
Образование фраз	–	–	+
Общий словарь	–	+	+
Словарь пользователя	–	+	+
Отслеживание прогресса	–	+	+
Платное	+	–	–

Таким образом, можно сделать вывод о том, что разрабатываемый продукт обладает рядом преимуществ, среди которых основными являются большой выбор заданий, наличие словаря, а также то, что приложение является полностью бесплатным.

3. Проектирование приложения и реализация его серверной части

Данный раздел посвящен описанию процесса проектирования веб-приложения и реализации его серверной части.

3.1. Средства реализации

В качестве средств реализация были использованы: Figma — приложение для создания UX-дизайна, СУБД PostgreSQL, язык программирования Java, приложение Postman — HTTP-клиент для тестирования API.

3.2. Архитектура приложения

Для данного проекта была выбрана многослойная архитектура. Она работает по методу разделения ответственностей. Программное обеспечение состоит из слоёв (слой представления, слой бизнес-логики, слой передачи данных), которые накладываются один на другой и у каждого из которых есть своя обязанность.

3.3. Проектирование и создание базы данных приложения

Для структурирования данных на этапе логического проектирования строится ER-модель, описывающая то, какие объекты в приложении можно выделить, какими свойствами они обладают и как связаны между собой [1].

В результате, была построена модель данных (рис. 1).

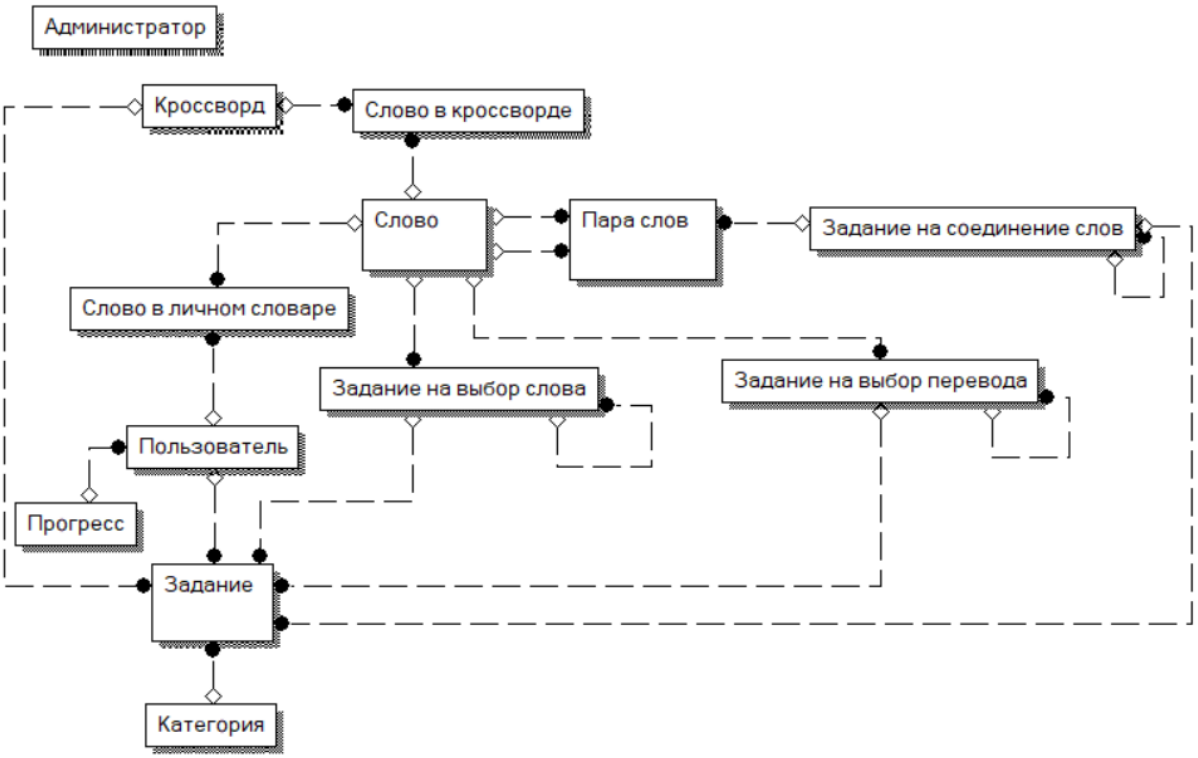


Рис. 1. Модель данных

В данной системе «Пользователь» кроме личных данных (имя, почта, пароль и др.), имеет свой «Прогресс», содержащий информацию о количестве пройденных заданий каждого типа.

Всего существует четыре типа заданий: задание на выбор слова, на выбор перевода, на соединение слов и кроссворд.

«Задание на выбор слова» содержит предложение с пропущенным словом, которое нужно подобрать, и 4 варианта ответа.

«Задание на выбор перевода» содержит слово, необходимое перевести, и 4 варианта ответа.

«Задание на соединение слов» содержит несколько «Пар слов», которые требуется составить из предложенных в задании слов.

Все описанные выше задания содержат номер (ссылку) следующего задания соответствующего типа.

В «Кроссворде» есть список «Слов».

У «Пользователя» есть список выполненных «Заданий», которые могут относиться к той или иной «Категории» (в данном случае под «категорией» понимают определенный раздел информационных технологий, например, «Компьютерная безопасность»).

Кроме того, «Пользователь» имеет свой личный словарь, состоящий из «Слов».

Само же «Слово» имеет основной и дополнительный переводы, значение на английском, транскрипцию и примеры использования в предложении.

Этап физического проектирования предполагает создание описания реализации базы данных. Для этой задачи обычно используют SQL-скрипты, которые создают базу данных один раз при проектировании. Однако в связи с тем, что определить конечную структуру базы данных в начале разработки приложения — задача непростая, целесообразно использовать миграции, благодаря которым проще при необходимости вносить изменения в модель. Одним из инструментов для настройки миграций является Liquibase. Это открытая независимая от базы данных библиотека для отслеживания, управления и применения изменений схемы, поддерживаемая различными СУБД и работающая с такими форматами, как XML, YAML, JSON и SQL.

Для каждой таблицы был создан отдельный файл со скриптом Liquibase.

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<databaseChangeLog xmlns="http://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog"
xmlns:xsi="http://www.w3.org/2001/XMLSchema-instance" xsi:schemaLocation="http://
www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog
https://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog/dbchangelog-latest.xsd">

<changeSet id="create-words-table" author=»postgres">
      <preConditions onFail="WARN">
            <sqlCheck expectedResult="0">SELECT COUNT(*) FROM words</sqlCheck>
      </preConditions>
      <createTable tableName="words">
            <column autoIncrement="true" name="word_id" type="serial">
                  <constraints primaryKey="true" nullable="false"/>
            </column>
            <column name="word" type="text">
                  <constraints nullable="false» unique="true"/>
            </column>
            <column name="main_translation" type="text">
                  <constraints nullable="false"/>
            </column>
            <column name="additional_translation" type="text">
            </column>
            <column name="meaning" type="text">
                  <constraints nullable="false"/>
            </column>
            <column name="examples" type="text">
            </column>
            <column name="transcription" type="text">
                  <constraints nullable="false" unique="true"/>
            </column>
      </createTable>
</changeSet>
</databaseChangeLog>
```

Затем в корневой файл с настройками базы данных db.changelog-master.xml были импортированы миграции.

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<databaseChangeLog xmlns="http://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog"
xmlns:xsi="http://www.w3.org/2001/XMLSchema-instance"
xsi:schemaLocation="http://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog
https://www.liquibase.org/xml/ns/dbchangelog/dbchangelog-latest.xsd">
      <include file="changeset/create-changeset-words-table.xml"
               relativeToChangelogFile="true"/>
</databaseChangeLog>
```

3.4. Реализация слоя доступа к данным

В первую очередь для последующей реализации слоя доступа к данным для каждой таблицы базы данных был создан соответствующий ей класс с теми же столбцами (полями) [2].

Далее был задействован центральный класс JdbcTemplate прикладного интерфейса JDBC (Java Database Connectivity API), предназначенного для взаимодействия Java-приложений с

различными СУБД [3]. JdbcTemplate выполняет SQL-запросы, отвечает за высвобождение ресурсов, открывает и закрывает соединение с базой данных.

В данном приложении был создан IRepository<T> — интерфейс, описывающий методы обращения к данным, присущие всем объектам системы (например, поиск всех записей таблицы или обновление какой-либо записи).

Для каждого объекта системы был написан класс, имплементирующий этот интерфейс и привносящий некоторые специфические методы, присущие только тому объекту, для которого он написан.

Так как выполненный запрос возвращает данные в виде объекта типа ResultSet, необходим метод, конвертирующий полученные строки в объекты предметной области. С целью решения данной задачи для каждой модели данных системы был создан класс, имплементирующий интерфейс RowMapper<T>. Класс содержит единственный метод, который переводит запись базы данных в объект модели данных:

```
public class WordRowMapper implements RowMapper<Word> {

    @Override
    public Word mapRow(ResultSet rs, int rowNum) throws SQLException {

        Word word = new Word();
        word.setId(rs.getLong("word_id"));
        word.setWord(rs.getString("word"));
        word.setMainTranslation(rs.getString("main_translation"));
        word.setAdditionalTranslation(rs.getString("additional_translation"));
        word.setMeaning(rs.getString("meaning"));
        word.setExamples(rs.getString("examples"));
        word.setTranscription(rs.getString("transcription"));
        return word;
    }
}
```

3.5. Реализация слоя бизнес-логики

В данном блоке расположена практически вся бизнес-логика приложения. Для каждого класса модели был создан интерфейс сервисов и его реализация, которая использует объект Repository-класса, описанного ранее и отвечающего за взаимодействие с базой данных. Внедрение зависимостей [4] осуществляется с помощью аннотации @Autowired:

```
@Service
public class WordService {
    private static final Logger logger = LogManager
                          .getLogger(WordService.class);
    @Autowired
    private WordRepository repository;

    public Word findWordById(Long id) {
        logger.info("Вызвана функция поиска слова по id");
        return repository.findById(id).orElseThrow(
                    () -> new ResourceAccessException("Word not found"));
    }
    /* реализация других методов */
}
```

3.6. Реализация слоя контроллеров

Концепция REST-архитектуры заключается в том, что сервис получает HTTP-запросы от клиента, обрабатывает их и отправляет обратно ответы. Для этого используются REST-контроллеры — специальные классы для обработки клиентских запросов, которые обращаются к методам классов сервисов. Каждый контроллер возвращает объект типа ResponseEntity — HTTP-ответ, включающий статус, тело и заголовки. При этом в качестве тела ответа может выступать любой тип.

```
@Controller
@RequestMapping("/words")
public class WordController {
    private static final Logger logger = LogManager
                                .getLogger(WordController.class);
    @Autowired
    private WordService service;

    @GetMapping("/translation")
    public ResponseEntity<List<Word>> findByTranslation(
@RequestParam("translation") String translation) {
        logger.info("End point for word: GET (by translation)");
        var words = service.findByTranslation(translation);
        return new ResponseEntity<>(words, HttpStatus.OK);
    }
    /* реализация других методов */
}
```

Заключение

Таким образом, в ходе данной работы:

1. Было спроектировано веб-приложение, предназначенное для изучения технических терминов английского языка в области информационных технологий, обладающее следующей функциональностью:

– регистрация;

– выполнение заданий для усвоения терминологии (выбор перевода слова, вставка слова в предложение, образование фраз с помощью соединения слов, кроссворд);

– сохранение прогресса и отслеживание его в профиле;

– поиск перевода и значения слов во встроенном словаре и формирование на их основе собственного.

2. Была реализована серверная часть приложения.

Литература

1. *Коннолли Т.* Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика / Т. Коннолли, К. Бегг. – 3-е изд. : Пер. с англ. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1440 с.

2. *Фаулер М.* Архитектура корпоративных программных приложений / М. Фаулер. : Пер. с англ. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 544 с.

3. *Хорстманн Кей С.* Java. Библиотека профессионала. В 2 т. Т. 2. Расширенные средства / Кей С. Хорстманн, Г. Корнелл. – 9-е изд. : Пер. с англ. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2014. – 1008 с.

4. *Нейгард М.* Release it! Проектирование и дизайн ПО для тех, кому не всё равно / М. Нейгард. – Санкт-Петербург : Питер, 2016. – 320 с.

УДК 004.9

ПРОГРАММИРУЕМЫЙ АППАРАТНЫЙ МИКШЕР ГРОМКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ESP32 И .NET

Е. В. Проценко, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача создания физического микшера громкости на базе микроконтроллера ESP32 и программы на .NET для управления звуком на уровне ОС. Микшер позволяет изменять громкость различных аудиосессий и уровня мастер-громкости. Применяются OLED дисплеи для визуализации громкости в реальном времени, а также отслеживание подключений через USB для автоматического обнаружения устройства. Разработка может быть полезна для упрощения и автоматизации управления звуком на компьютере.
Ключевые слова: физический микшер, громкость, ESP32, .NET, аудиосессии.

Введение

Физический микшер громкости — это устройство, которое позволяет управлять уровнем громкости разных источников звука, объединяя их в одном компактном устройстве. В отличие от программных решений, физический микшер обеспечивает интуитивное и быстрое управление.

Микшер особенно полезен для людей, работающих с мультимедийным контентом (стримеров, музыкантов, звукорежиссеров, геймеров и др.), поскольку позволяет легко и точно регулировать баланс звука.

Однако, использование стандартного микшера часто порождает ряд неудобств, например, пользователи сталкиваются с трудностями при настройке громкости нескольких источников звука, таких как программы для общения, медиаплееры, игры и т.д., поскольку переключение между ними и настройка громкости каждой программы через системные настройки требует времени и неудобна. Таким образом, актуальна задача создания собственного микшера, реализующим более удобное управление звуком, которое обходит ограничения, связанные с использованием стандартных программных регуляторов громкости.

1. Особенности реализации

Рассмотрим задачу создания компактного физического устройства для управления громкостью на уровне операционной системы, которое предоставляет интуитивный и простой способ контроля звука на компьютере. Такое решение должно поддерживать настройку громкости, как для каждой аудиосессии, так и для общей, так называемой мастер-громкости.

Рассмотрим требования к физическому микшеру громкости:

1. Аппаратное управление:

• использование OLED дисплеев: для визуализации громкости каждого аудиоканала в реальном времени. Это позволит пользователю быстро оценить уровень громкости каждого источника звука;

• набор физических элементов управления (фейдеры): для удобной настройки громкости с интуитивной тактильной обратной связью, которая позволяет менять настройки быстро и не отвлекаясь от других задач.

2. Программная часть:

• программа на .NET: взаимодействует с операционной системой и обрабатывает команды с ESP32 для управления громкостью;

• программное обеспечение (микроконтроллера): основной цикл, выполняющий чтение данных слайдеров и обновление значений на дисплеях. Код также включает функции для обработки графики на дисплеях и вывода числовых значений.

Пользователь получит возможность:

• управлять громкостью отдельных программ или устройств, и общей громкостью с помощью физического микшера;

• быстро подключить устройство без дополнительных настроек;

• получить доступ к удобной визуализации уровня громкости в реальном времени.

Для решения задачи предлагается использовать микроконтроллер ESP32. Основание: низкая стоимость, возможность, достаточно простым способом, осуществить перепрошивку. Такое решение позволит объединить аппаратное и программное управление и реализовать необходимую функциональность.

2. Аппаратные компоненты

На рис. 1 приведена простая наглядная схема подключения компонентов к модулю микроконтроллера ESP32.

1. Модуль микроконтроллера ESP32 — используется для обработки данных с потенциометров (фейдеров) и вывода информации на дисплеи. Обеспечивает связь с ПК.

2. Модуль расширения интерфейса I2C — плата для коммутации и подключения нескольких I2C-устройств.

3. Монохромный OLED-дисплей 0,96 дюйма (4 шт.) — I2C-дисплей с разрешением 128x64 для вывода текстовой и графической информации.

4. Скользящий потенциометр (фейдер) 10K (4 шт.) — линейный потенциометр, используемый для регулировки громкости.

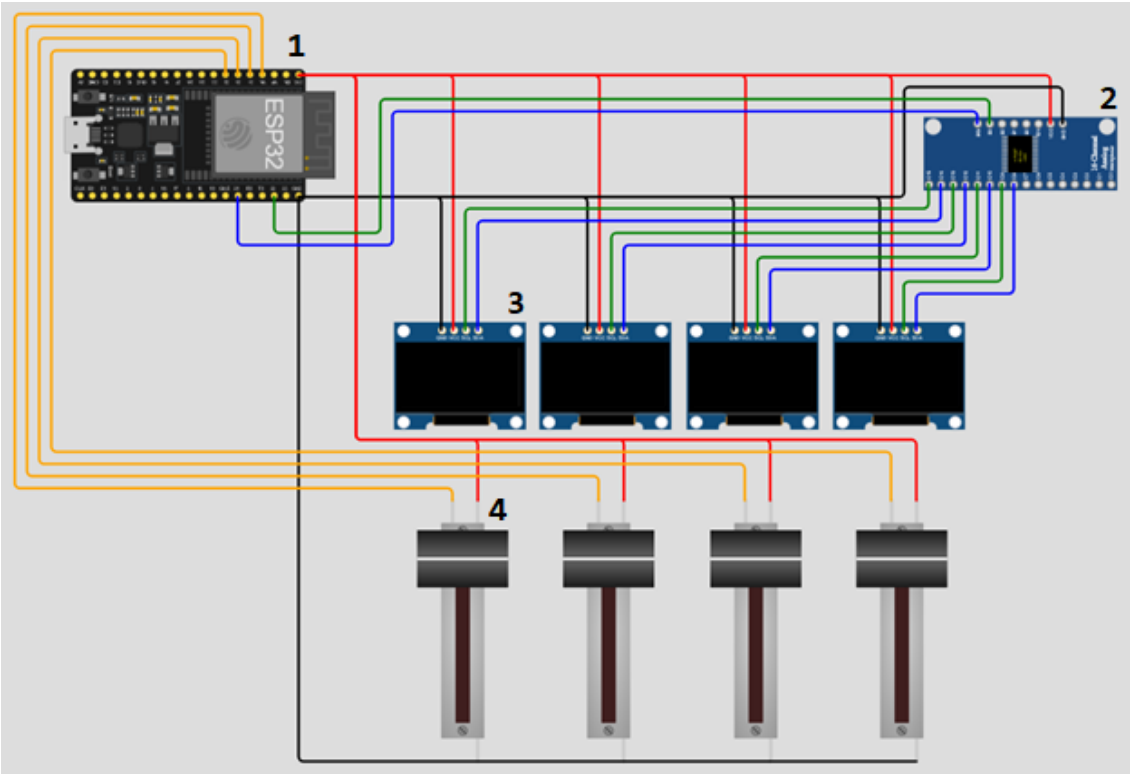


Рис. 1. Схема подключения компонентов

3. Реализация для микроконтроллера ESP32

В каждой прошивке (скетче) для микроконтроллера ESP32 обязательно должны быть определены две функции: setup() и loop(). Функция setup() вызывается однократно при запуске устройства. Функция loop(), напротив, выполняется в бесконечном цикле и отвечает за основную логику работы программы. В функции setup() выполняются следующие действия:

1. Инициализация последовательного порта и шины I2C:

```
Serial.begin(115200);
Wire.begin();
```

2. Инициализация OLED-дисплеев, с помощью библиотеки Adafruit_SSD1306 [2], по I2C с указанием канала и адреса экрана:

```
setupDisplayOled(oled1, OLED_CHANNEL_1, OLED_ADDRESS_C);

void setupDisplayOled(Adafruit_SSD1306 &pDisplay, int8_t pChannel, uint8_t
pScreenAddress)
{
    selectI2CChannel(pChannel);
    if (!pDisplay.begin(SSD1306_SWITCHCAPVCC, pScreenAddress)) {
        Serial.println(F(«SSD1306 allocation failed»));
        for (;;); // Бесконечный цикл при ошибке
    }
    pDisplay.fillScreen(SSD1306_BLACK); // Очистка экрана
}
```

В функции loop() выполняются следующие действия:

1. Обновляем массив, хранящий значения фейдеров

`previousSliderValues` — массив хранящий значения потенциометров;
`NUM_SLIDERS` — число потенциометров;

```
updateSliderValues(previousSliderValues, NUM_SLIDERS);
```

2. Отправляем данные на ПК и выводим значение на дисплей:

```
sendSliderValues(previousSliderValues, NUM_SLIDERS);
updateNumber(oled1, OLED_CHANNEL_1, previousSliderValues[0], 5, 3,
globalHeaderHeight);
```

4. Интеграция с .NET приложением

Код использует библиотеку NAudio для доступа к аудиосессиям Windows, управляя громкостью через MMDevice и AudioSessionManager [1].

Обработчик данных из последовательного порта: данные с ESP32 принимаются на последовательном порте, парсятся и преобразуются для установки уровня громкости на различных аудиосессиях.

На рис. 2 представлен интерфейс пользователя, пользователю выводятся все приложения, у которых активна аудиосессия, для каждого приложения есть трекбар, для регулировки громкости, а также кнопка, которая заглушает звук. Приложение также включает автоматическое обнаружение USB-устройства для быстрого подключения микшера.

Таким образом, пользователю в простой, удобной форме доступно управление громкостью приложений и выбор COM-порта, к которому подключено устройство.

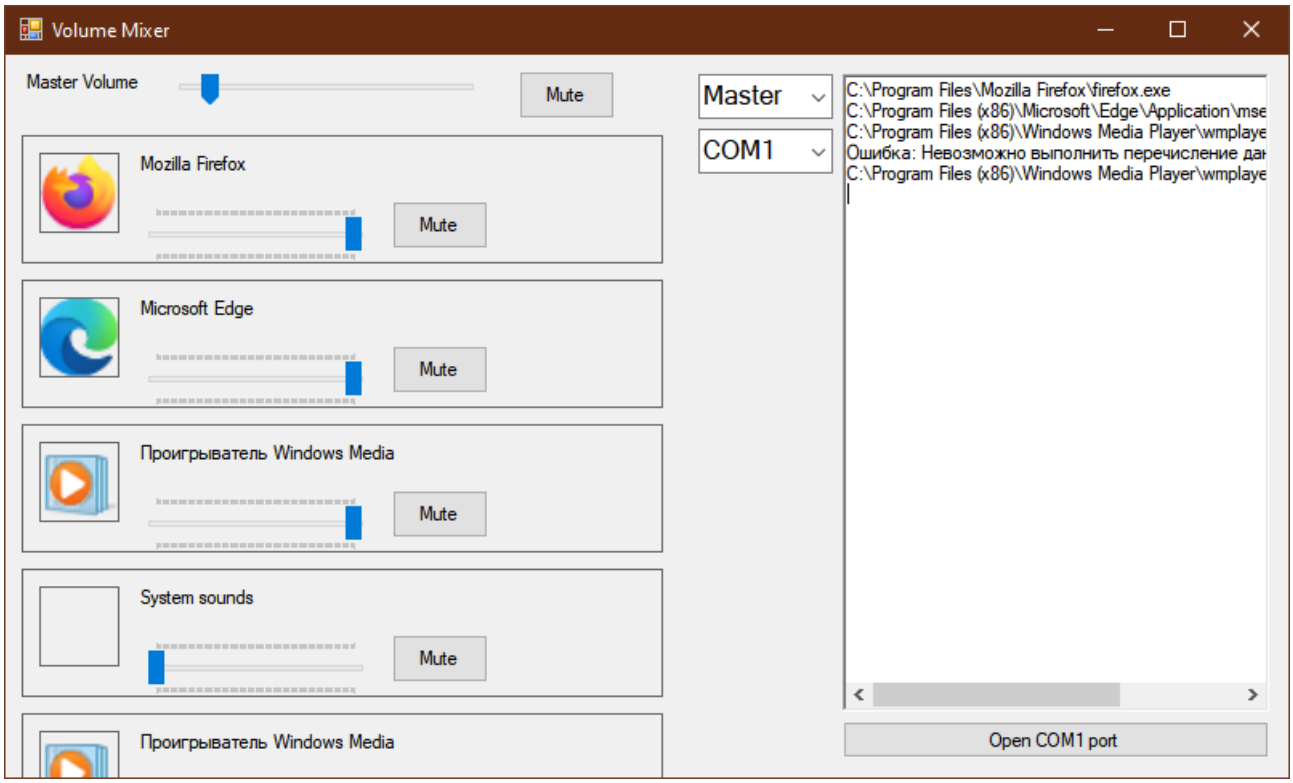


Рис. 2. Интерфейс пользователя

Заключение

Разработанный микшер громкости на базе микроконтроллера ESP32 с интеграцией в операционную систему через программное обеспечение на платформе .NET позволяет простым и удобным способом управлять уровнем громкости, позволяя регулировать громкость как общей аудиосистемы, так и отдельных приложений. Использование OLED дисплеев обеспечивает наглядную визуализацию громкости в реальном времени.

Перспективы дальнейшего развития устройства включают добавление новых функций, таких как настраиваемые профили громкости, улучшенная совместимость с различными операционными системами и расширение функциональности программного обеспечения для еще более гибкого управления аудиосистемой.

Литература

1. Аудио и MIDI-библиотека для .NET : NAudio. – URL: https://github.com/naudio/NAudio (дата обращения: 31.10.2024).

2. Библиотека для монохромных OLED-дисплеев на базе драйвера SSD1306 : Adafruit_SSD1306. – URL: https://github.com/adafruit/Adafruit_SSD1306 (дата обращения: 31.10.2024).

УДК 004.92

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ОБЪЕКТОВ В ТРЁХМЕРНУЮ СЦЕНУ

И. Б. Рахимов, О. Г. Корольков

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается задача корректной интеграции двумерных векторных объектов в трёхмерную сцену, что представляет особый интерес в условиях активного использования комбинированной графики в современной мультипликации. Приводится анализ основных трудностей, возникающих при визуализации векторной графики с учётом глубины и перспективных искажений. Описаны два подхода к решению данной задачи: использование полигональных моделей с текстурированием и применение буфера глубины для векторных объектов. Проведён сравнительный анализ преимуществ и недостатков каждого метода, а также обсуждены минимальные требования к графическим системам. Сделаны выводы о применимости подходов в зависимости от требований к визуализации и производительности.

Ключевые слова: векторная графика, комбинированная графика, трёхмерная графика, визуализация трёхмерных сцен, текстурирование, тест глубины, мультипликация.

Введение

Классическая двумерная анимация, в которой каждый кадр создаётся художниками вручную, — достаточно трудоёмкая задача, которая ушла в прошлое из-за своей дороговизны, длительности производства и развития более быстрых и дешёвых инструментов трёхмерной компьютерной графики. Даже такие гигантские студии, как «DreamWorks Animation» и «Walt Disney Animation Studios», которые, казалось бы, имеют неограниченные запасы ресурсов для производства мультфильмов, перешли на использование трёхмерной графики. Последний раз они выпускали фильмы в двумерной технике в 2003 и 2011 году соответственно.

В настоящее время двумерная анимация всё же применяется, но для её создания используются более дешёвые инструменты и техники, основным из которых является векторная графика. Векторная графика имеет множество преимуществ: одним из главных является гибкость: векторные объекты могут легко изменены — трансформированы, масштабированы и т. д. — без потери качества. Это позволяет вносить быстрые и эффективные изменения на любом этапе производства, сокращая время и ресурсы. Также эти трансформации будут более плавными в сравнении с растровой графикой.

Но векторная графика имеет и недостатки, основной из которых — проблемы с вращением камеры вокруг произвольной оси, кроме направленной от экрана к зрителю (такой поворот называют «креном»). Пытаясь реализовать любой простейший поворот, который не является креном (рысканье, тангаж или любые комбинации этих трёх поворотов), например, облёт камеры вокруг персонажа, художники возвращаются к классической покадровой анимации, так как векторная графика не позволяет аффинными преобразованиями создавать такие проекции камеры.

Также векторная графика не учитывает глубину сцены: очень часто векторные объекты визуализируются с использованием алгоритма художника, когда новые объекты накладываются поверх старых. В таких случаях для упрощения работы художников используется подход, объединяющий визуализацию трёхмерных и векторных плоских объектов, когда покадрово анимировать необходимо только некоторые двумерные объекты, трёхмерные же проецируются для произвольной позиции камеры. В последнее время такой подход используется во многих

анимационных фильмах и мультфильмах. Например, в трёхмерной сцене могут использоваться двумерные эффекты (такие, как искры, взрывы и т. д.), а также двумерные персонажи.

В контексте сказанного выше интерес представляет задача разработки методов и алгоритмов интеграции векторных объектов в трёхмерную сцену, сохраняющих преимущества векторной графики. Важным требованием к таким алгоритмам являются корректный тест глубины для векторных плоских и трёхмерных объектов любой формы, а также корректная перспективная и ортогональная проекции.

В работе предлагается два подхода к решению поставленной задачи интеграции векторных объектов в трёхмерную сцену, проводится анализ их достоинств и недостатков, а также анализ минимальных требований к графическим системам векторной и трёхмерной визуализации.

1. Подход, основанный на текстурировании полигональных моделей и использовании теста глубины трёхмерной сцены

В основе первого подхода лежит приём, использующий наложение заранее подготовленных векторных текстур на полигональные модели. При этом во время этой подготовки все искажения камеры игнорируются, а векторная текстура, соответственно, визуализируется без искажений и перспективы. Искажения же камеры учитываются на следующем этапе, при визуализации полученных текстурированных моделей трёхмерным полигональным рендером. Таким образом, данный подход позволяет достаточно легко решить проблему глубины и проекции камеры за счёт трёхмерной визуализации.

Этапы предложенного подхода представлены на рис. 1. Векторный рендер представлен как «чёрный ящик», трёхмерный полигональный рендер изображён, для наглядности, с использованием стандартных шагов графического конвейера OpenGL (впрочем, допустимо применение любого трёхмерного полигонального рендера, для которого выполняется единственное требование к полигональной визуализации — поддержка текстурирования полигональных объектов).

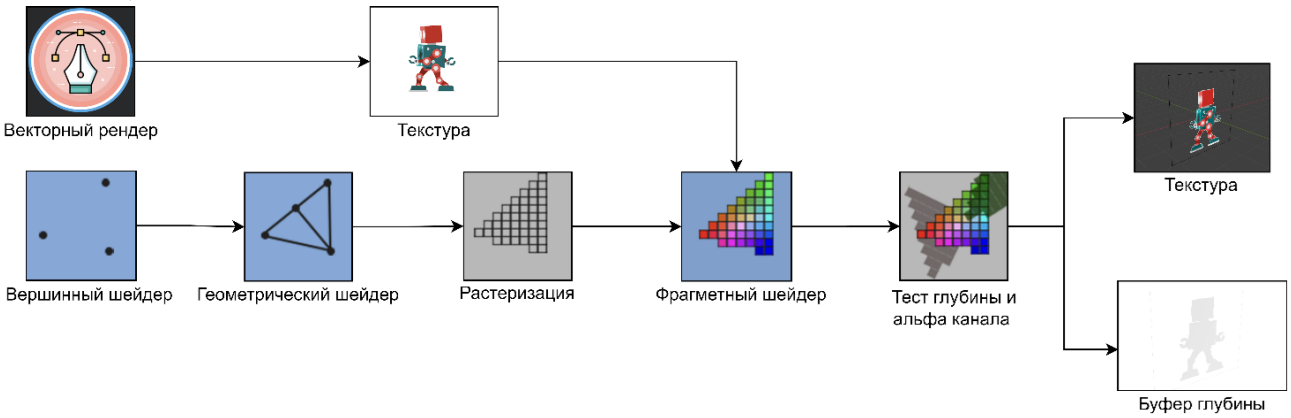


Рис. 1. Конвейер трёхмерного полигонального и векторного рендеринга с использованием текстурирования плоскостей

Заметим, что подход, основанный на текстурировании полигональных моделей, имеет несколько недостатков, которые связаны со сложностью выбора как размера (в пикселях) выходного буфера векторного рендеринга, так и размера (в единицах масштаба трёхмерной сцены) полигональной плоскости, на которую накладывается текстура.

Необходимость изменения размера выходного буфера векторного рендеринга обусловлена условием сохранения качества изображения при масштабировании и других трансформациях полигональной модели, на которую накладывается векторная текстура. Следовательно, процесс подготовки текстуры должен учитывать такие факторы, как размер полигональной

модели, а также её удалённость от камеры. Однако решение данной задачи весьма неочевидно. Во-первых, постоянное выделение памяти для буфера изображения — весьма трудоёмкий процесс [4]. Во-вторых, подбор алгоритма, определяющего размер векторного буфера, — достаточно сложная и неоднозначная задача, которая должна учитывать большое количество факторов, включая ограниченность оперативной памяти или видеопамяти.

Также существует проблема сложности выбора размера полигональной плоскости в координатах сцены. Для векторного объекта могут быть применены различные эффекты или модификаторы, которые потребуют пересчёта ограничивающего прямоугольника и создания новой полигональной плоскости подходящего размера (или увеличение текущей) для визуализации всей видимой части векторного изображения. Например, увеличение толщины векторных линий (рис. 2) или применение аффинного преобразования поворота не к векторной плоскости, а к векторной текстуре, изменяет ограничивающий объём модели — и для сложных векторных объектов расчёт может занимать значительное время.

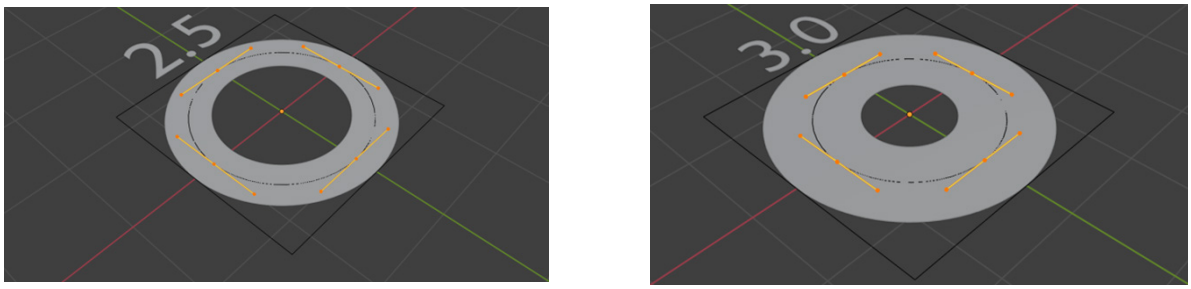


Рис. 2. Пример, демонстрирующий изменение ограничивающего прямоугольника при изменении ширины векторных линий.
Слева — векторная окружность с толщиной линии 0.25 и ограничивающим квадратом со стороной 2.5.
Справа — векторная окружность с толщиной линии 0.5 и ограничивающим квадратом со стороной 3.0

2. Подход, основанный на вычислении буфера глубины для векторных объектов и его применении для теста глубины

Как было сказано в предыдущем разделе статьи, важным недостатком первого подхода являются трудности, связанные с постоянными изменениями размеров буферов, используемых для хранения векторных текстур, которые могут быть вызваны, например, изменением положения камеры. Данную проблему позволяет решить использование единого буфера постоянного размера (в пикселях), равного размеру кадра при итоговой визуализации. Данный подход вполне корректен, поскольку при создании любых фильмов размер кадра всегда постоянен.

Использование постоянного буфера, с одной стороны, решает проблемы, имевшиеся в первом подходе: исчезает необходимость дополнительных выделений памяти, а также необходимость вычислять ограничивающий объём векторного объекта и создание полигональной плоскости. С другой стороны, возникает необходимость вычисления перспективы и глубины векторных объектов.

Данную задачу предлагается решать в два этапа:

- предварительная подготовка цветного векторного изображения с корректными трёхмерными преобразованиями, но без учёта глубины;
- формирование буфера глубины для векторных объектов и его применение для теста глубины.

Предварительная подготовка векторного изображения не вызывает затруднений: большинство современных движков для визуализации векторных изображений поддерживают любые трёхмерные трансформации, но даже если такой возможности нет, мы можем эмулировать их

с помощью добавления третьей координаты, равной нулю, применения к новым координатам трансформаций модели, вида и проекции, и, наконец, отбрасывания третей координаты.

На данном этапе мы имеем три буфера с корректными трёхмерными преобразованиями:

- буфер с итогом визуализации векторных объектов;
- буфер с итогом визуализации трёхмерной сцены;
- буфер глубины трёхмерной сцены.

Для корректной визуализации векторных объектов в трёхмерной сцене необходимо вычисление буфера глубины для векторных объектов. В этом случае задача вычисления буфера глубины и визуализации решается при помощи следующего алгоритма:

1. На вход алгоритма подаются:

- результат визуализации трёхмерной сцены (буфер с цветом и буфер глубины);
- положение векторной плоскости в пространстве сцены, заданное, например, точкой и нормалью;
- подготовленное цветное векторное изображение, учитывающее перспективные искажения камеры.

2. Для каждого непрозрачного пикселя векторного изображения вычисляется глубина как глубина плоскости, занимающей всё изображение. Её без труда можно вычислить как пересечение луча с началом в позиции камеры в трёхмерной сцене и направлением от камеры до текущего пикселя и векторной плоскости [5].

3. Вычисленная на втором шаге глубина сравнивается с глубиной трёхмерного изображения и, в зависимости от неё, определяется цвет итогового пикселя.

Графический конвейер, соответствующий данному алгоритму, представлен на рис. 4.

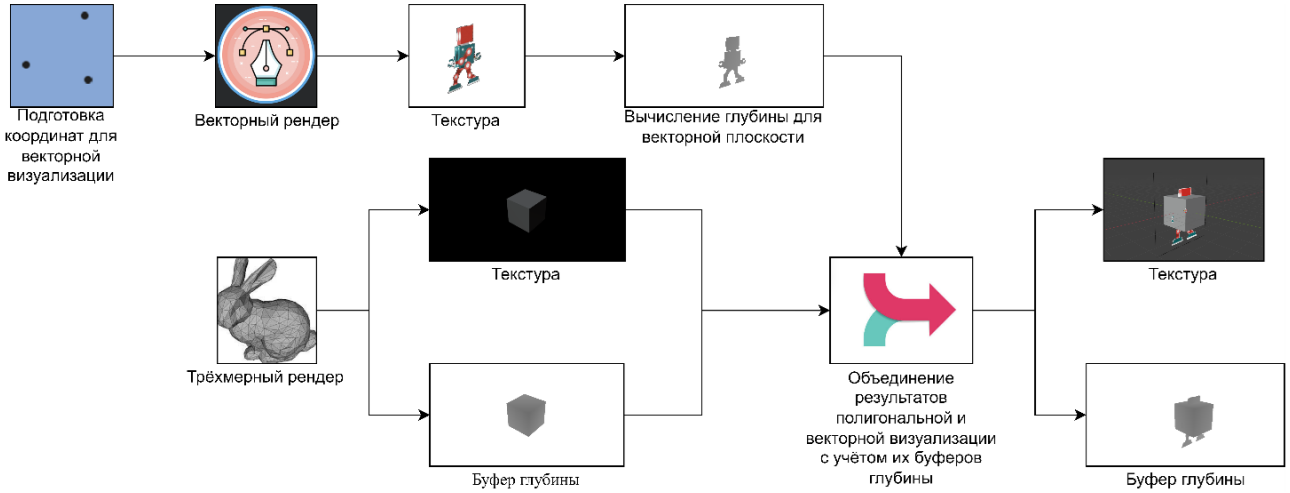


Рис. 4. Конвейер трёхмерного и векторного рендеринга, основанного на вычислении буфера глубины для векторных объектов и его применении для теста глубины

3. Анализ предложенных подходов

Перед анализом предложенных подходов кратко перечислим их достоинства и недостатки. К достоинствам первого подхода относятся:

- простота реализации: зачастую трёхмерная визуализация уже поддерживает текстурирование, и использовать для этого дополнительно созданную текстуру не составит труда;
- скорость визуализации: текстурирование обычно осуществляется через графический процессор, который заточен под быстрое решение данной задачи.

К недостаткам первого подхода относятся:

- дополнительные требования для трёхмерной визуализации: поддержка рендера полигональных моделей и их текстурирования;

• неочевидный размер выходного буфера векторного рендеринга в пикселях;

• неочевидный размер векторной плоскости, на которую накладывается текстура в координатах сцены;

• вероятные дополнительные аллокации при устранении двух предыдущих недостатков.

Достоинства второго подхода:

• отсутствие требований для видов визуализации;

• отсутствие дополнительных аллокаций за счёт одного размера векторного буфера;

Недостатки второго подхода:

• дополнительные операции над векторными координатами, в случае, если векторный рендер не поддерживает трёхмерные преобразования;

• поскольку описанный алгоритм вычисления буфера глубины применяется к каждому векторному объекту отдельно, это замедляет скорость визуализации: каждая операция отрисовки является ресурсоёмкой и значительно увеличивает нагрузку на процессор.

При анализе двух предложенных подходов можно отметить, что первый отличается простотой реализации и высокой скоростью визуализации благодаря использованию возможностей графического процессора. Однако он имеет существенные ограничения, связанные с дополнительными требованиями для трёхмерной визуализации, сложностями в определении размеров выходных данных и возможными дополнительными аллокациями.

Второй подход, напротив, лишён этих ограничений, так как не предъявляет специфических требований к визуализации и не требует дополнительных аллокаций. Однако он требует дополнительных операций с векторными координатами и отличается высокой затратностью ресурсов, что может существенно замедлять процесс визуализации, особенно при большом числе вызовов операции отрисовки.

Таким образом, выбор подхода зависит от конкретных задач: первый подходит для случаев, где важна скорость и простота, а второй — для универсальности и гибкости в работе с векторной графикой.

Заключение

В рамках работы были предложены подходы для решения задачи визуализации векторных объектов в трёхмерной сцене, сохраняющие преимущества векторной графики, такие как гибкость трансформаций и отсутствие потерь качества при масштабировании, а также проведён их анализ.

Комбинированное использование двумерных и трёхмерных элементов в сценах значительно упрощает процесс анимации и предоставляет новые возможности для аниматоров. Этот подход уже успешно применяется в современных мультфильмах, и его развитие открывает перспективы для дальнейшего совершенствования анимационных технологий, объединяющих лучшие стороны двумерной и трёхмерной графики.

Литература

1. *Watt M.* Multithreading for Visual Effects / M. Watt, E. Coumans, G. ElKoura, R. Henderson, M. Kraemer, J. Lait, J. Reinders. – CRC Press, 2014. – 255 p.

2. *Engel K.* Real-Time Volume Graphics / K. Engel, M. Hadwiger, J. Kniss, C. Rezk-Salama, D. Weiskopf. – Taylor & Francis, 2006. – 497 p.

3. *Pharr M.* Physically Based Rendering: From Theory to Implementation / M. Pharr, W. Jakob, G. Humphreys. – The MIT Press, 2023.

4. Gregory J. Game Engine Architecture / J. Gregory. – CRC Press, 2017. – 1052 p.

5. *Laszlo M. J.* Computational Geometry and Computer Graphics in C++ / M. J. Laszlo. – Prentice Hall, 1996. – 266 p.

УДК 004.056.53

ПРИМЕНЕНИЕ TOKEN HANDLER PATTERN ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ТОКЕНАМИ В SPA

Д. А. Рудаков

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена анализу и применению Token Handler Pattern для обеспечения безопасности взаимодействия между клиентом и сервером в веб-приложениях. В статье рассматриваются основные проблемы, связанные с безопасностью хранения и использования токенов (access и refresh токены) в современных SPA (Single Page Application). Предложенный подход позволяет централизованно управлять токенами, минимизируя их хранение на стороне клиента. Статья анализирует архитектуру Token Handler, её преимущества, а также рассматривает взаимодействие с внешними сервисами аутентификации.
Ключевые слова: веб-приложения, безопасность веб-приложений, Token Handler Pattern, Single Page Application, авторизация, OAuth2, JWT, Identity Provider, HTTP-only cookies, Proof of Key for Code Exchange.

Введение

На сегодняшний день SPA (Single Page Applications) стали стандартом для разработки современных веб-приложений. Они обеспечивают высокую производительность, интерактивность и плавность работы за счёт загрузки единственной загрузки HTML страницы и динамического обновления её содержимого. Основная логика приложения исполняется на стороне клиента, а данные запрашиваются с сервера через API.

Для защиты взаимодействия между SPA и серверной частью чаще всего применяются токены, которые используются для проверки прав доступа к ресурсам. Наиболее популярными стандартами для управления такими токенами являются OAuth2, OpenID Connect и JSON Web Token (JWT). На рис. 1 изображена схема взаимодействия при использовании JWT токенов для микросервисной архитектуры.

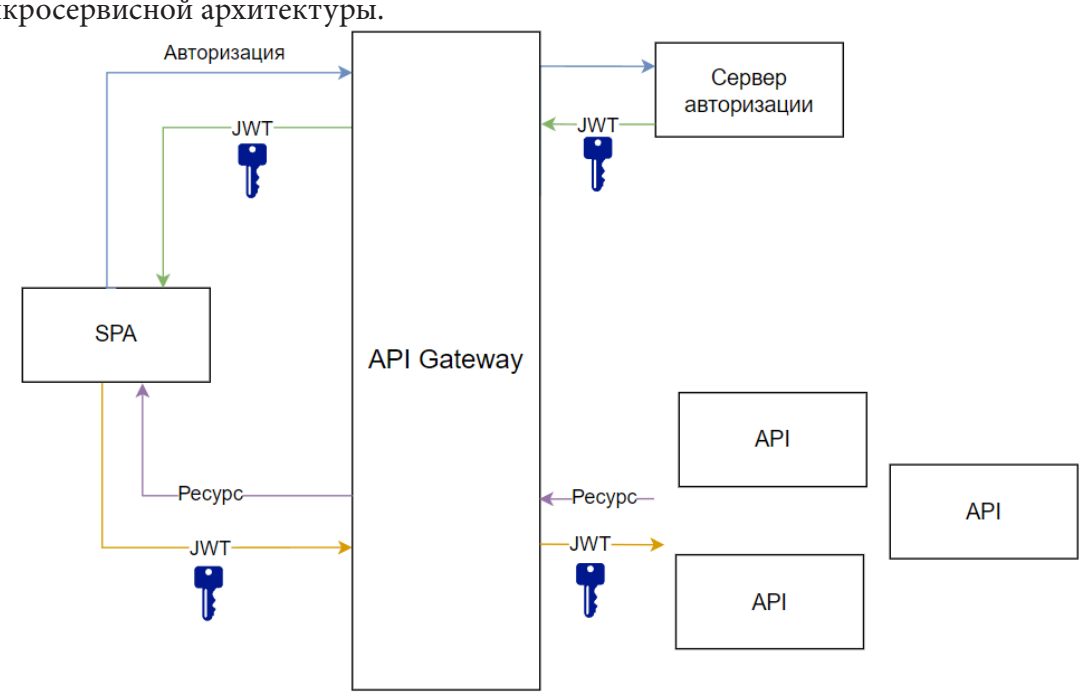


Рис. 1. Схема взаимодействия SPA при использовании access токена

Однако, такая схема взаимодействия имеет слабые места. Основной проблемой является то, что SPA работает в небезопасной среде — браузере пользователя. Помимо access токена, в браузере часто хранится refresh токен, который необходим для обновления access токен после истечения срока его действия. Это делает приложение уязвимым для XSS-атак (Cross-Site Scripting). Злоумышленник, внедрив вредоносный код, может получить доступ к обоим токенам, что позволит ему выполнять любые действия от имени пользователя.

Даже тщательная защита от XSS-атак не гарантирует полной безопасности, поскольку сторонние библиотеки или зависимости могут содержать уязвимости. В качестве альтернативы вышеописанному подходу может быть предложен Token Handler Pattern.

1. Token Handler Pattern

Token Handler Pattern обеспечивает централизованное управление токенами, исключая необходимость обработки токенов непосредственно в SPA. Общая схема взаимодействия для этого подхода представлена на рис. 2.

Схема отображает лишь ключевые аспекты взаимодействия между компонентами, подробные детали опущены для упрощения дальнейшего анализа. Важно отметить, что в данной архитектуре SPA больше не хранит JWT токены. Вместо этого после успешной авторизации пользователю в браузере устанавливается HTTP-only, SameSite=strict куки. Такой подход исключает возможность доступа к токенам через JavaScript в контексте SPA, значительно повышая защиту от XSS-атак.

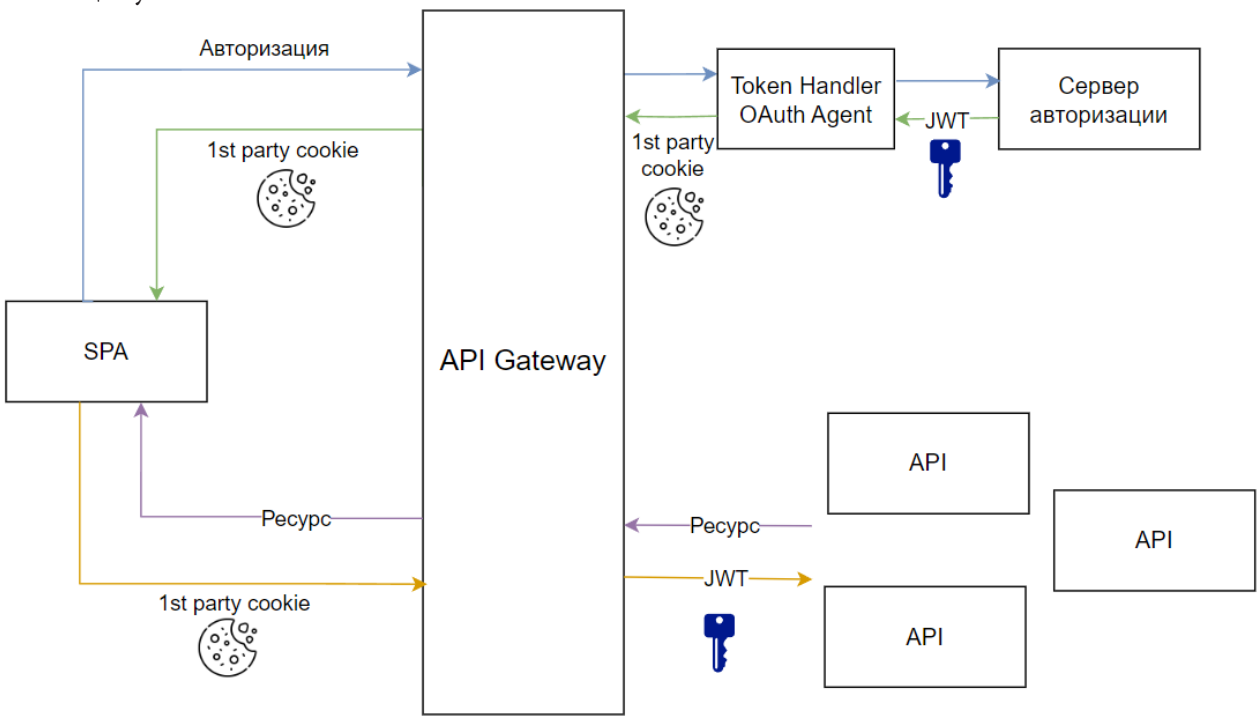


Рис. 2. Общая схема взаимодействия Token Handler Pattern

Token Handler OAuth Agent работает здесь, как BFF компонент (Backend for Front-end) — компонент, который является прокси-сервисом для клиентского приложения, он занимается отправкой запросов за клиента и преобразует ответ в вид, понятный для фронтенда.

Таким образом, вместо того чтобы SPA напрямую отправляло запрос на сервер авторизации для входа или выполнения других операций, запросы направляются в сервис Token Handler OAuth Agent, который обрабатывает их, добавляет необходимую информацию о пользователе, если это необходимо, и уже затем перенаправляет запросы на сервер авторизации.

Основной API, предоставляемый сервисом Token Handler OAuth Agent, включает следующие эндпоинты:

• POST /login/start — инициирует процесс авторизации, устанавливая временный куки для SPA;

• POST /login/end — завершает процесс авторизации, устанавливая в браузере зашифрованный HTTP-only куки для пользователя;

• POST /refresh — обновляет access токен;

• POST /logout — удаляет куки и завершает сессию на сервере авторизации.

Следует отметить, что процесс авторизации реализован в два этапа. Это позволяет после ввода учетных данных на стороне сервера авторизации корректно вернуть зашифрованный JWT токены в виде зашифрованного HTTP-only куки, который устанавливается в браузере пользователя. Временные куки, созданный на первом этапе, связывает пользователя с началом его сессии и обеспечивает дальнейшую безопасную обработку запросов.

Рассмотрим данный процесс с конкретной реализацией, где в качестве сервера авторизации будет выступать Keycloak. Диаграмма авторизации представлена на рис. 3.

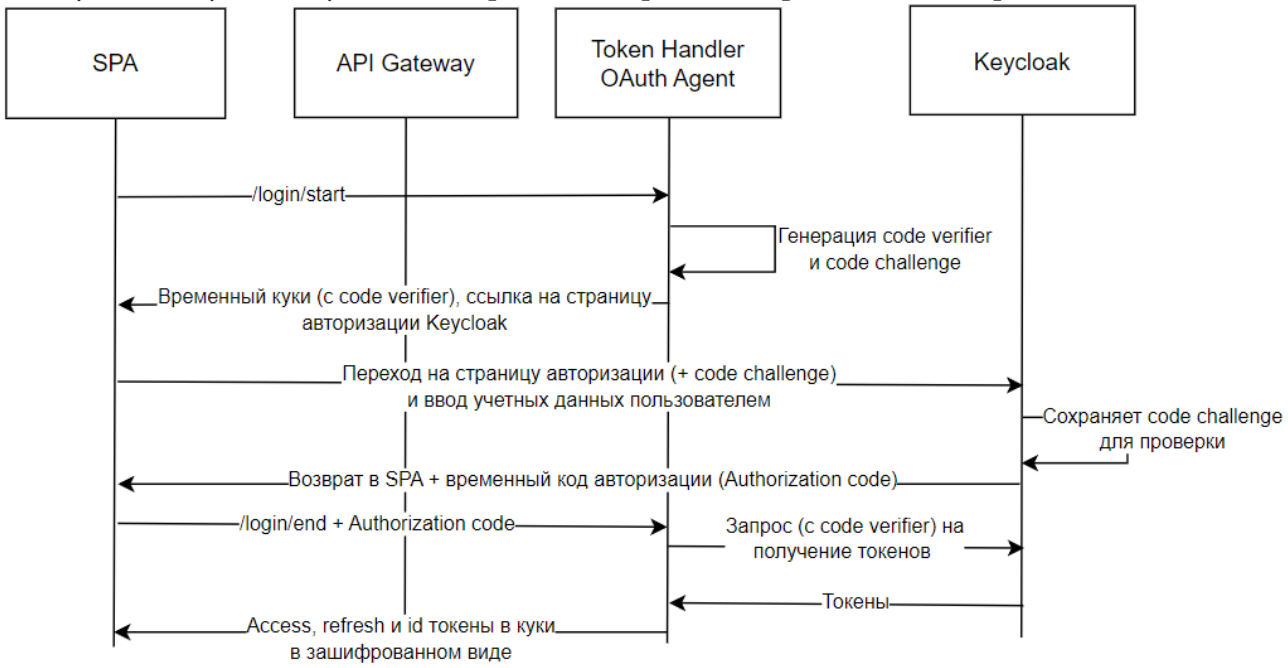


Рис. 3. Диаграмма авторизации

Следует отметить, что представленная диаграмма соответствует механизму PKCE (Proof of Key for Code Exchange), который является расширением Authorization Code Flow. Основная задача PKCE — защита от атак, таких как CSRF (Cross-Site Request Forgery) и Code Injection. PKCE добавляет дополнительный уровень безопасности за счёт использования уникального кода подтверждения (code verifier) и его хэша (code challenge). Этот код генерируется OAuth Agent, и проверяется Keycloak на этапе обмена временного кода авторизации на токены. Таким образом, даже если злоумышленник перехватит временный код авторизации, он не сможет использовать его без уникального кода подтверждения, известного только OAuth Agent. При этом данный подход является всё ещё stateless, т. к. code verifier хранится во временных куки пользователя.

После успешного получения токенов процесс доступа к защищённым ресурсам в Token Handler Pattern мало чем отличается от стандартной схемы использования access токена. Основное различие заключается в том, что обработка и использование токенов сосредоточены на стороне OAuth Agent, минимизируя риски, связанные с их хранением и передачей в клиентском приложении.

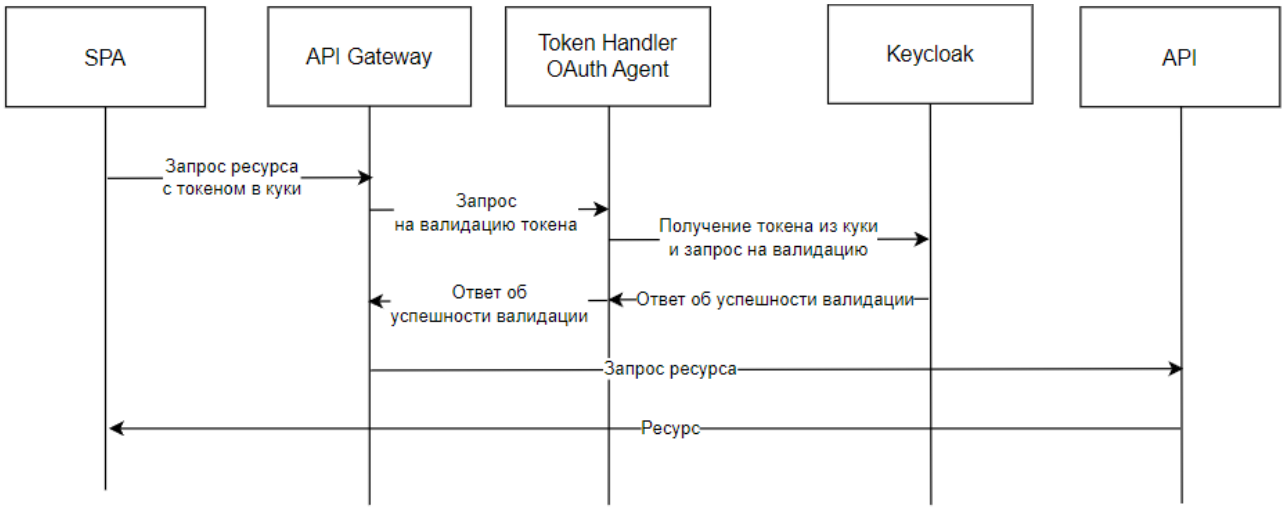


Рис. 4. Диаграмма получения защищенного ресурса

Заключение

Хранение access и refresh токенов в SPA представляет значительную угрозу безопасности. Token Handler Pattern решает эту проблему, убирая токены из SPA и передавая управление ими в отдельный сервис Token Handler OAuth Agent. Этот подход делает взаимодействие между клиентом и сервером безопасным, сохраняя удобство для пользователей и надёжно защищая их данные.

Литература

1. RFC 6749. The OAuth 2.0 Authorization Framework. – 2012. – URL: https://datatracker.ietf.org/doc/rfc6749/ (дата обращения: 20.11.2024).

2. OpenID Connect Core 1.0. – 2014. – URL: https://openid.net/specs/openid-connect-core-1_0.html (дата обращения: 20.11.2024).

3. RFC 7519. JSON Web Token (JWT). – 2015. – URL: https://datatracker.ietf.org/doc/rfc7519/ (дата обращения: 20.11.2024).

4. OWASP Foundation. Cross Site Scripting Prevention Cheat Sheet. – URL: https://cheatsheetseries.owasp.org/cheatsheets/Cross_Site_Scripting_Prevention_Cheat_Sheet.html (дата обращения: 21.11.2024).

5. OWASP Foundation. Cross-Site Request Forgery (CSRF). – URL: https://cheatsheetseries.owasp.org/cheatsheets/Cross-Site_Request_Forgery_Prevention_Cheat_Sheet (дата обращения: 21.11.2024).

6. Документация Auth0. – URL: https://auth0.com/docs (дата обращения: 21.11.2024).

7. The Backend for Frontend Pattern. – URL: https://auth0.com/blog/the-backend-for-frontend-pattern-bff/ (дата обращения: 21.11.2024).

8. RFC 6265. Cookies: HTTP State Management Mechanism. – URL: https://datatracker.ietf.org/doc/draft-ietf-httpbis-rfc6265bis/ (дата обращения: 21.11.2024).

9. RFC 7636. Proof key for Code Exchange by OAuth Public Clients. – 2015. – URL: https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc7636 (дата обращения 21.11.2024).

УДК 004.056

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РИСКОВ ИНФРАСТРУКТУРНОГО ДЕСТРУКТИВИЗМА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ЖУРНАЛОВ СОБЫТИЙ ОБЛАЧНОЙ ПЛАТФОРМЫ OPENSTACK

А. М. Русаков

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В статье рассмотрен способ прогнозирование рисков инфраструктурного деструктивизма на основе анализа журналов событий облачной платформы OpenStack. Описан эффект инфраструктурного деструктивизма как деструктивное воздействие на инфраструктуру, в результате которого проявляется непредвиденное и(или) нежелательное событие неконтролируемого саморазрушения инфраструктуры. Проводится экспериментальное исследования данных журналов событий для обнаружения эффектов инфраструктурного деструктивизма. Показана пропорциональная зависимость между «отрицательным» межсервисным взаимодействием и вероятностью появления эффектов инфраструктурного деструктивизма.
Ключевые слова: инфраструктурный деструктивизм, деструктивные воздействия инфраструктурного генеза, анализа журналов событий, облачная платформа OpenStack.

Введение

Постоянно растущие объёмы информации и необходимость её обработки в режиме реального времени предъявляют всё новые требования к производительности и эффективности инфраструктур организаций [1–3]. В современных условиях многие организации сталкиваются с тем, что постоянно увеличивавшийся объём обрабатываемой информации требует использование дополнительных сложных технологических решений, связанных с распределением и масштабирование нагрузки на инфраструктуру. Для этого применяются различные балансировщики и оптимизаторы запросов, средства кеширования и виртуализации, горизонтальное и вертикальное масштабирование, а также другие средства, которые приводят к увеличению сложности мониторинга и управления инфраструктурой [1, 3]. Возрастающая сложность инфраструктур многократно повышает риски информационной безопасности организации.

Наиболее востребованными методами обеспечения кибербезопасности инфраструктур являются методы, связанные с обнаружением и реагированием на события безопасности, антивирусная защита конечных точек, различные системы обнаружения вторжений, системы реагирования на сложные угрозы и целевые атаки [2]. Повсеместно применяются интеллектуальные методы анализа поведенческой активности пользователей и сущностей (UEBA). Одним из перспективных направлений поведенческой аналитики и обеспечения кибербезопасности инфраструктур является исследование эффектов инфраструктурного деструктивизма [4].

Современные исследователи характеризуют эффект инфраструктурного деструктивизма как деструктивное воздействие на инфраструктуру, в результате которого проявляется непредвиденное и(или) нежелательное событие, вызванное совокупностью факторов и условий инфраструктурного генеза, создающих опасность неконтролируемого саморазрушения инфраструктуры и нарушения информационной безопасности [4]. Также исследователи необходимость исследования межобъектных взаимосвязей инфраструктуры, как источников деструктивных воздействий, способных привести к эффекту инфраструктурного деструктивизма, т. е. к саморазрушению инфраструктуры. При наличии эффектов инфраструктурного деструктивизма появляются серьезные аномалии поведенческой активности объектов инфраструктуры (замедленнее или ускорение информационных процессов), которые нуждаются в

прогнозировании и оценке. Поведенческие особенности объектов инфраструктуры с различными уязвимостями могут оказывать синергетический эффект совместного ухудшения уровня информационной безопасности. Для поведенческой аналитики применяются статистические методы, методы прогнозирования и анализа временных рядов, а также методы машинного обучения, которые позволяют по-новому оценивать риски возникновения инфраструктурного деструктивизма и снижать риски кибератак и саморазрушения инфраструктуры.

Однако, недостаточное рассмотрение эффектов инфраструктурного деструктивизма в научных трудах, а также отсутствие на рынке готовых программных продуктов, делают актуальной разработку моделей и алгоритмов оценки динамики рисков инфраструктурного деструктивизма в качестве средства повышения уровня информационной безопасности инфраструктуры.

1. Антропоморфическая модель оценки деструктивных воздействий инфраструктурного генеза

В основе антропоморфической модели оценки деструктивных воздействий инфраструктурного генеза, лежит предположение о возможности описания процесса взаимодействия элементов инфраструктуры с позиции «живых» микроорганизмов [5, 6]. Опишем данную модель использую теоретико-множественное представление. Пусть: $O_1, O_2, ..., O_n$ — взаимодействующие элементы инфраструктуры; $S_1, S_2, ..., S_n$ — взаимосвязанные моногенные подсистемы инфраструктуры; D_1 и D_2 — источники деструктивных воздействий; R_1 и R_2 — результаты воздействий D_1 и D_2 соответственно;. Информационное взаимодействие между элементами инфраструктур является важным процессом, прямо отражающимся на процессе функционирования инфраструктуры в целом. Охарактеризуем виды имеющихся взаимодействий и воздействий между элементами инфраструктуры.

Под негативным (отрицательным) воздействием на инфраструктуру будем понимать различные уязвимости, вирусы, кибератаки, и другие негативные воздействия, которые могут вывести информационную инфраструктуру из строя, обозначим данные воздействия через источники деструктивных воздействий D_1 и D_2, в количественном отношения будем обозначать как $-1d_1...0$ и $-1d_2...0$.

Под позитивным (положительным) воздействием на инфраструктуру будем понимать различные эффекты от деструктивных воздействий D_1 и D_2, которые приводят к положительным эффектам на информационную инфраструктуру в целях информационной безопасности при этом данные воздействия в количественном отношения будем обозначать как $-1d_1...0$ и $-1d_2...0$ соответственно.

Модель основывается на допущении о том, что взаимодействие деструктивных воздействий инфраструктурного генеза принципиально схоже со взаимодействием биологических микроорганизмов. Согласно широко распространенному в науке делению отношений организмов известны следующие типы их взаимодействий: симбиоз (облигатный и факультативный симбиоз, комменсализм, паразитизм, хищничество) — когда хотя бы один из организмов получает выгоду, антибиоз (аменсализм, аллелопатия, конкуренция) — когда один из организмов ограничивает возможности другого, и нейтрализм — сосуществования организмов без взаимного влияния [7, 8]. В этой работе приведем два крайних случая, когда деструктивные воздействия образуют факультативный симбиоз и аллелопатию, которые дают максимальный и минимальный антропоморфический эффект.

Рассмотрим факультативный симбиоз деструктивных воздействий, который в природе характеризуется взаимной выгодой от совместного сосуществования организмов, но без необхо-

димости как таковой. То есть деструктивные воздействия влияют на информационную инфраструктуру, но при этом деструктивный эффект от их совместного взаимодействия возрастает.

Положим, что эффект возрастает со знаком минус $-2d_1$ при условии наличия деструктивных воздействий $-1d_2$ и $-2d_2$ при условии $-1d_1$ соответственно. Таким образом общий эффект от факультативного симбиоза составит $-2d_1 - 2d_2$, что соответствует следующей формуле: $-2(d_1 - d_2)$, которая подтверждается механизмами существования микроорганизмов в живой природы. Схематически отобразим данное явление на рис. 1.

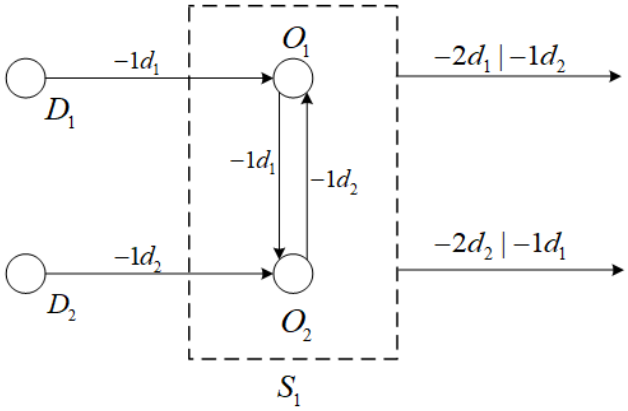


Рис. 1. Схема факультативный симбиоз деструктивных воздействий

Рассмотрим аллелопатию деструктивных воздействий. С позиции живой природы данный тип взаимодействия биологических организмов характеризуется их взаимно-вредным влиянием друг на друга. То есть деструктивные воздействия влияют на информационную инфраструктуру, но при этом они сами себя уничтожают.

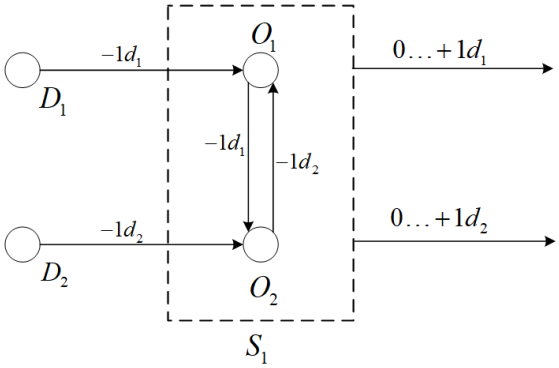


Рис. 2. Схема аллелопатия деструктивных воздействий

Таким образом общий эффект от аллелопатии деструктивных воздействий составит в худшем случае 0 и в лучшем случае составит $1d_1 + 1d_2$, что также подтверждается механизмами существования живой природы. Описав данные процессы для всех антропоморфических механизмов взаимодействия деструктивных воздействий стало возможным качественно и количественно оценить каждый из них как по отдельности, так и в совокупности. Это позволяет оценить взаимное влияние сервисов инфраструктур и оценить их по антропоморфическим типам.

2. Описание облачной платформы OpenStack

Облачная платформа OpenStack представляет собой комплекс проектов свободного программного обеспечения для создания инфраструктурных облачных сервисов, центров обработки данных, облачных хранилищ, разработки и предоставления приложений. Облачная платформа OpenStack может использоваться как для публичных, так и частных облачных

сервисов. В данной исследовании используется данные журналов событий системы фрагмент представлен на рис. 3.

StartTime	EndTime	URL	SpanType	Service	SpanId	TraceId	Peer	ParentSpan	Component	IsError
1628884697515	1628884697523	SpringAsync	Local	ts-cancel-service	a8ac2bc13e5c423d83743ee2d661482b.58.16288846975150062.0	a8ac2bcl3e5c423d83743ee2d661482b42.16288846975100029	ts-cancel-service	a8ac2bc13e5c423d83743ee2d661482b.42.16288846975100028.0	SpringAsync	False
1628884697515	1628884697523	/api/v1/inside_pay_service/inside_payment/drawback/4d2a46c7-71cb-4cf1-b5bb-b68406d9da6f/	Exit	ts-cancel-service	a8ac2bc13e5c423d83743ee2d661482b.58.16288846975150062.1	a8ac2bcl3e5c423d83743ee2d661482b42.16288846975100029	ts-inside-payment-service	a8ac2bcl3e5c423d83743ee2d661482b.58.16288846975150062.0	SpringRestTemplate	False
1628884697518	1628884697524	{GET}/api/v1/inside_pay_service/inside_payment/drawback/{userId}	Entry	ts-inside-payment-service	e011366013074feda29701dc14e41305.44.16288846975180094.0	a8ac2bcl3e5c423d83743ee2d661482b42.16288846975100029	ts-inside-payment-service	a8ac2bc13e5c423d83743ee2d661482b.58.1628 8846975150062.1	SpringMVC	False
1628884697520	1628884697520	MongoDB/FindOperation	Exit	ts-inside-payment-service	e011366013074feda29701dc14e41305.44.16288846975180094.0	a8ac2bcl3e5c423d83743ee2d661482b42.16288846975100029	ts-inside-payment-mongo	e011366013074feda29701dc14e41305.44.16288846975180094.0	mongodb-driver	False
1628884697523	1628884697524	MongoDB/UpdateOperation	Exit	ts-inside-payment-service	e011366013074feda29701dc14e41305.44.16288846975180094.0	a8ac2bcl3e5c423d83743ee2d661482b42.16288846975100029	ts-inside-payment-mongo	e011366013074feda29701dc14e41305.44.16288846975180094.0	mongodb-driver	False
1628884697515	1628884701520	SpringAsync	Local	ts-cancel-service	a8ac2bc13e5c423d83743ee2d661482b.59.16288846975150062.0	a8ac2bcl3e5c423d83743ee2d661482b42.16288846975100029	ts-cancel-service	a8ac2bc13e5c423d83743ee2d661482b.58.16288846975100028.0	SpringAsync	False
1628884701516	1628884701520	/api/v1/orderservice/order	Exit	ts-cancel-service	a8ac2bc13e5c423d83743ee2d661482b.59.1 6288846975150062.1	a8ac2bcl3e5c423d83743ee2d661482b42.16288846975100029	ts-order-service	a8ac2bc13e5c423d83743ee2d661482b.58.16288846975150062.0	SpringRestTemplate	False

Рис. 3. Фрагмент журналов событий облачной платформы OpenStack

В эксперименте использованы открытые данные «DeepTraLog» из лаборатории разработки программного обеспечения университета Фудань (Китай, Шанхай). Данные «DeepTraLog» использовались для проведения соревнований по обнаружению аномалий в журналах событий для инфраструктур, построенных на сервисах с использованием облачной платформы OpenStack.

3. Экспериментальное исследование и метода прогнозирования рисков инфраструктурного деструктивизма на основе анализа журналов событий

Основной целью экспериментального исследования является прогнозирование рисков и обнаружение аномалий в журналах событий инфраструктуры построенной облачной платформе OpenStack схожих по своей природе с описанной в данной работе эффектами инфраструктурного деструктивизма. Предложенная модель реализована в программном обеспечении [11]. Разработанное программное обеспечение визуализирует динамику работы процессов как показано на рис. 4.

В эксперименте использовались данные с 05.08.2021 по 26.12.2021 для 32 сервисов [10]. Проводилась оценка динамики взаимного влияния сервисов на основе антропоморфических моделей поведения. Вычислялись оценки положительного, нейтрального и отрицательного взаимного влияния сервисов как показано на рис. 5 и 6.

Проанализировав отображение множества и построив линейные тренды — красные, синие и зеленые линии на рис. 5 и 6. Сделан вывод, что эффекты инфраструктурного деструктивизма наиболее вероятны в момент после 10.12.2021. Данный вывод подтверждается практически, так как инфраструктура престала функционировать после 27.12.2021 без видимых на это причин [10].

Заключение

Полученные результаты еще раз подтверждают, что имеется пропорциональная зависимость между «отрицательным» межсервисным взаимодействием и вероятностью появления эффектов инфраструктурного деструктивизма. Вероятнее всего эффект инфраструктурного деструктивизма будет себя проявлять, когда возрастает показатель отрицательного» межсервисным взаимодействием (см. рис. 5). Предложенный подход прогнозирования инфраструктурного деструктивизма, возможно также использовать как метрику (показатель) «здоровья» инфраструктуры для прогнозирования и оценки рисков. Используя данную метрику возмож-

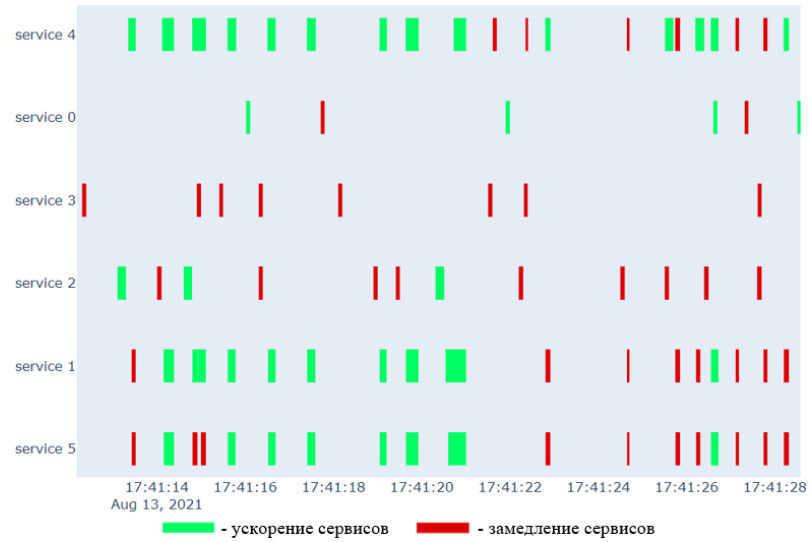


Рис. 4. Фрагмент визуализации динамики работы процессов

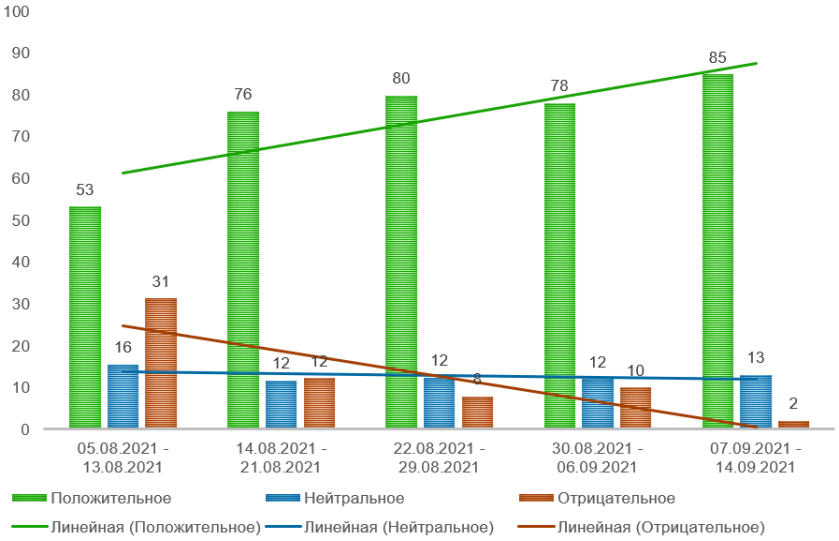


Рис. 5. Динамика взаимного влияния сервисов на основе антропоморфических моделей поведения за период с 05.08.2021 по 14.09.2021

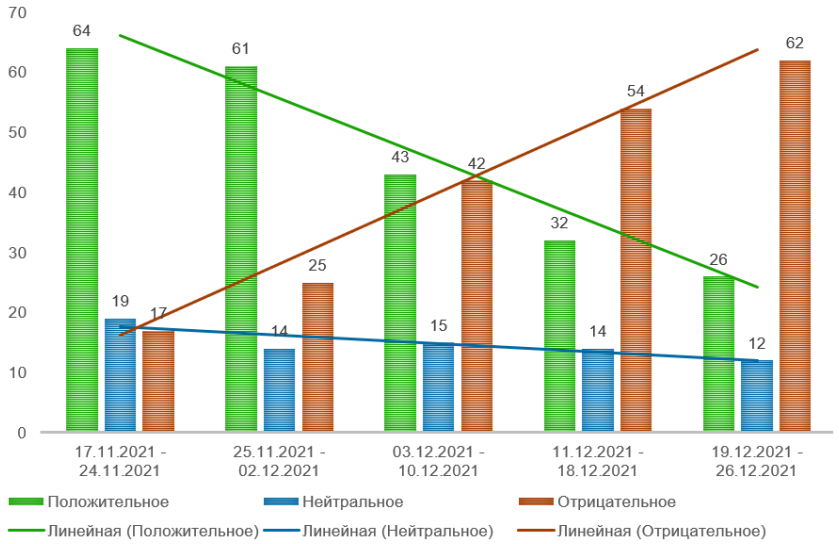


Рис. 6. Динамика взаимного влияния сервисов на основе антропоморфических моделей поведения за период с 17.11.2021 по 26.12.2021

но заранее прогнозировать эффекты возникновения инфраструктурного деструктивизма для сервисных архитектур облачных платформ таких как платформа OpenStack. Разработанная антропоморфическая модель является одним из перспективных подходов для анализа поведенческой активности сервисов в инфраструктурах.

Литература

1. *Головина Е. Ю.* Оценка состояния безопасности ИТ-инфраструктуры в организации / Е. Ю. Головина, А. В. Журавлева, Л. И. Татарникова // Молодежный вестник ИрГТУ. – 2022. – Т. 12, № 2. – С. 266–272.

2. *Качуров Е. И.* Подход к разработке модели угроз информационной безопасности для ИТ-инфраструктуры / Е. И. Качуров // Научная дискуссия: вопросы технических наук. – 2017. – № 6(46). – С. 74–80.

3. *Хрошин А. А.* Безопасность баз данных и алгоритмы анализа Big Data для мониторинга ИТ инфраструктуры предприятия / А. А. Хрошин // Научный аспект. – 2024. – Т. 21, № 5. – С. 2819–2823.

4. *Максимова Е. А.* Методы выявления и идентификации источников деструктивных воздействий инфраструктурного генеза / Е. А. Максимова // Электронный сетевой политематический журнал «Научные труды КубГТУ». – 2022. – № 2. – С. 86–99.

5. *Русаков А. М.* Анализ динамики рисков деструктивного воздействия инфраструктурного генеза / А. М. Русаков // Кибербезопасность: технические и правовые аспекты защиты информации: Сборник научных трудов I Национальной научно-практической конференции, Москва, 24–26 мая 2023 года. – Москва : МИРЭА - Российский технологический университет, 2023. – С. 85–87.

6. Anthropomorphic Model of States of Subjects of Critical Information Infrastructure Under Destructive Influences / E. A. Maksimova, A. M. Rusakov, M. A. Lapina, V. G. Lapin // Lecture Notes in Networks and Systems. – 2022. – Vol. 424. – P. 569–580.

7. *Буйневич М. В., Израилов К. Е.* Антропоморфический подход к описанию взаимодействия уязвимостей в программном коде. Часть 1. Типы взаимодействий // Защита информации. Инсайд. – 2019. – № 5 (89). – С. 78–85.

8. *Буйневич М. В., Израилов К. Е.* Антропоморфический подход к описанию взаимодействия уязвимостей в программном коде. Часть 2. Метрика уязвимостей // Защита информации. Инсайд. 2019. № 6 (90). С. 61-65.

9. *C. Zhang [et al.]* DeepTraLog: Trace-Log Combined Microservice Anomaly Detection through Graph-based Deep Learning, 2022 IEEE/ACM 44th International Conference on Software Engineering (ICSE), Pittsburgh, PA, USA. – 2022. – P. 623–634.

10. DeepTraLog: Trace-Log Combined Microservice Anomaly Detection through Graph-based Deep Learning. – 2024. – URL: https://github.com/FudanSELab/DeepTraLog (дата обращения: 26.10.2024)

11. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023683118 Российская Федерация. Антропоморфическая система моделирования деструктивных воздействий инфраструктурного генеза на объектах критической информационной инфраструктуры: № 2023682500: заявл. 24.10.2023 : опубл. 03.11.2023 / А. М. Русаков.

УДК 004.415.2.052.03

ПАТТЕРНЫ ОБРАБОТКИ ОШИБОК МЕЖСЕРВИСНОЙ КОММУНИКАЦИИ В МИКРОСЕРВИСНЫХ АРХИТЕКТУРАХ

С. Р. Сидельникова, Н. А. Каплиева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются часто используемые паттерны обработки ошибок в микросервисных архитектурах. Проанализированы причины возникновения сбоев при взаимодействии между сервисами и их влияние на устойчивость системы. Описаны принципы работы таких паттернов, как временное отключение (timeout), повторные попытки (retry), размыкатель цепи (circuit breaker), изоляция ресурсов (bulkhead) и ограничитель скорости (rate limiter). Особое внимание уделено проблемам, с которыми можно столкнуться при использовании паттернов и комбинированию паттернов между собой.
Ключевые слова: микросервисы, распределенные системы, отказоустойчивость, изоляция, обработка сетевых ошибок, паттерны устойчивости, retry, timeout, circuit breaker, bulkhead, rate limiter.

Введение

Современные программные системы стремительно переходят от монолитной архитектуры к распределённой, где микросервисы выступают отдельными строительными блоками цельной системы. Такой подход позволяет достичь масштабируемости, гибкости разработки и быстрой доставки новых функций. Однако вместе с преимуществами микросервисная архитектура привносит и новые сложности, в первую очередь — в области обработки ошибок.

Одним из ключевых источников сбоев становятся ошибки, возникающие в процессе коммуникации между сервисами. Даже кратковременная недоступность одного из компонентов может привести к сбоям в цепочке вызовов, каскадным отказам и снижению общей устойчивости системы. Причины таких ошибок могут быть самыми разными: от перегрузки и сетевых задержек до частичной деградации инфраструктуры. Несмотря на свою, как правило, временную природу, без должной обработки подобные сбои могут вызывать серьёзные последствия — от потери согласованности данных до снижения безопасности.

В данной статье рассматриваются некоторые современные подходы к обеспечению отказоустойчивости микросервисных систем, а также приводятся практические рекомендации по выбору и комбинированию этих решений.

1. Причины возникновения ошибок сетевого взаимодействия в микросервисных архитектурах

1.1. Сетевая нестабильность

Часто ошибки в микросервисных системах возникают из-за распределенной природы архитектуры, где взаимодействие сервисов зависит от надежности сетевой инфраструктуры. Каждый вызов между сервисами требует установления сетевого соединения, что подвержено различным видам сбоев. Эти проблемы могут включать в себя потерю пакетов, высокую задержку, снижение пропускной способности, а также полное отключение части сетевой инфраструктуры.

Потери пакетов могут происходить из-за перегрузки сетевых интерфейсов, ошибок на маршрутизаторах, проблем с буферизацией или недостаточной пропускной способности ка-

налов. Даже минимальная потеря пакетов может привести к повторной передаче данных, дополнительной задержке или ошибкам при восстановлении соединения.

Джиттер (нестабильная задержка) — случай, когда запрос выполняется разное количество времени, в зависимости от нагрузки сети. Это разрушает предсказуемость поведения системы и может привести к превышению установленных лимитов ожидания на клиентской стороне.

Разрывы соединений до завершения передачи данных могут быть связаны с перегрузкой сети, перезапуском инфраструктурных компонентов, (например, балансировщиков нагрузки), перезапуском контейнеров или миграцией виртуальных машин.

1.2. Недоступность узлов или их частичный отказ

Сервисы в микросервисной архитектуре взаимодействуют друг с другом через сеть, и недоступность одного из них может привести к каскадным последствиям для всей системы. Под недоступностью понимается не только полный отказ сервиса, но и его частичная деградация, когда он отвечает с большой задержкой, нестабильно или с ошибками. Такие сбои могут возникать по логическим причинам.

Бывают ситуации, когда нагрузка на определённый сервис может резко возрасти. Это может происходить из-за резких изменений в пользовательском трафике. Если сервис не масштабируется должным образом или не защищён от перегрузки (например, отсутствуют механизмы ограничения числа одновременных запросов), он начинает деградировать. В лучшем случае это проявляется в увеличении времени отклика, в худшем — в полной недоступности.

Особенно опасны ситуации, когда зависимые сервисы продолжают направлять запросы к деградировавшему компоненту, не распознавая его состояние. В таком случае вызывающий сервис продолжает ожидать ответа, занимая свои ресурсы и блокируя последующие вызовы других сервисов к себе. Таким образом, даже один проблемный сервис может вызвать «цепную реакцию», в результате которой вся система становится нестабильной или недоступной.

1.3. Гетерогенность протоколов и технологий

Ещё одной важной причиной сбоев на сетевом уровне является технологическая разнородность микросервисной среды. Микросервисы проектируются как изолированные компоненты, и команды разработчиков часто выбирают для каждого сервиса индивидуальные подходящие инструменты. В результате в рамках одной системы может одновременно использоваться множество форматов передачи данных (JSON, XML, Protocol Buffers), транспортных протоколов (HTTP/1.1, HTTP/2, gRPC, AMQP), а также библиотек сериализации и фреймворков.

Такое разнообразие увеличивает гибкость системы, но в то же время порождает множество потенциальных точек несовместимости. Даже незначительные отличия в реализации протоколов, обработке ошибок могут привести к некорректному обмену данными, ошибкам десериализации и потере связи между сервисами.

Например, сервис на базе GraphQL может вернуть ошибку логики в теле ответа с HTTP статусом 200 OK, что нарушает ожидания клиента, ориентированного на REST и стандартные коды ошибок.

Особенно остро проявляется эта проблема при использовании асинхронных средств коммуникации — очередей сообщений, брокеров (RabbitMQ, Kafka и др.), где необходимо соблюдать строгую совместимость между схемами сообщений и их обработкой на стороне получателя.

1.4. Ограниченная гибкость системы

Одной из распространённых причин сбоев в микросервисных системах является недостаточная гибкость инфраструктуры при изменении нагрузки. В условиях динамичного трафика

и высокой распределённости система должна уметь оперативно адаптироваться — масштабироваться, перераспределять ресурсы, перенастраивать маршруты вызовов.

Масштабируемость — это способность системы адаптироваться к изменению объёма нагрузки. Система должна уметь правильно реагировать на увеличение или снижение трафика, например, регулируя количество инстансов. Но даже при наличии автоматического масштабирования новые инстансы сервисов могут запускаться с опозданием, что не избавит работающие сервисы от перегрузки.

Даже если система контролируется балансировщиком нагрузки, равномерно распределяющим трафик среди нескольких серверов или сервисов, она не застрахована от проблем. Если схема балансировки не учитывает реальную загрузку, то все узлы получают равное количество запросов, независимо от своей производительности. Это особенно критично, если инстансы работают, например, в разных регионах. Также медленная реакция балансировщика на изменения может быть причиной того, что запросы будут продолжать направляться на уже неработающие какое-то время узлы.

Результат этих проблем — образование «горячих точек» в системе, где одни инстансы перегружены и возвращают ошибки, а другие недогружены и простаивают. Это, опять же, может привести к каскадным отказам, рассмотренным выше.

2. Паттерны обработки ошибок

Микросервисные архитектуры подвержены множеству факторов, способных нарушить устойчивость сетевого взаимодействия. Для повышения устойчивости таких систем применяются особые архитектурные паттерны. Эти паттерны не устраняют первопричины — например, не могут предотвратить отключение сервиса или перегрузку сети — но обеспечивают корректную реакцию на сбои, минимизируют их влияние на другие компоненты и помогают системе продолжать работу.

2.1. Timeout

Паттерн Timeout (интервал ожидания) является одним из самых базовых паттернов. Его основная цель — ограничить время ожидания ответа от удалённого сервиса или компонента, чтобы избежать «зависания» вызывающей стороны и высвобождать ресурсы в случае сбоев или чрезмерных задержек.

Паттерн работает следующим образом: для каждого вызова задается максимальное время ожидания ответа (например, 2 секунды). Если ответ не получен за это время, операция отменяется. Клиент получает уведомление (например, HTTP 504 Gateway Timeout) и может самостоятельно решать, какие дальнейшие действия предпринимать. Таким образом, клиент не окажется заблокированным, если сервис не доступен.

Можно выделить следующие рекомендации по работе с паттерном:

1. По возможности использовать адаптивные таймауты — динамически изменяющие свое значение в зависимости от текущих характеристик системы. Если значение таймаута жесткое и фиксированное, при временных всплесках задержки все рабочие запросы будут отклонены, хотя они могли бы быть выполнены, но немного медленнее.

2. Разделять таймауты по контексту. Разные типы операций требуют разного уровня терпимости к задержкам. Универсальный таймаут для всех вызовов — грубая ошибка.

3. Ставить таймаут не на вызов конкретного метода, а на логически объединенную операцию. Необходимо прекратить бессмысленные действия внизу цепочки вызовов, если общий таймаут уже истекает;

4. Нет единого «правильного» значения таймаута — его нужно подбирать опытным путем индивидуально для каждого сервиса и сценария.

2.2. Retry

Паттерн Retry (повторная попытка) — это стратегия обработки ошибок, при которой система автоматически повторяет неудачный запрос. Этот подход эффективен, когда кратковременная недоступность или перегрузка сервисов могут носить эпизодический характер из-за сетевых проблем. Он часто используется совместно с паттерном Timeout.

Сначала система определяет, что запрос завершился неудачей (например, HTTP 503 Service Unavailable). Решение о повторе принимается только для ошибок, которые могут не возникнуть при повторном запросе (как правило, запросы с кодом 5xx). Если ошибочный запрос является таким, то операция выполняется повторно через заданный интервал. Также устанавливаются ограничения на количество повторных попыток, чтобы избежать бесконечных циклов. По достижении максимального количества попыток система фиксирует окончательную неудачу выполнения запроса.

Существует несколько распространённых стратегий задержек между попытками при использовании Retry. Некоторые из них:

1. Фиксированная задержка

$$delay(n) = \text{const}.$$

Каждая попытка выполняется через одинаковый интервал времени.

2. Линейная задержка

$$delay(n) = \text{const} * n.$$

Интервал увеличивается линейно с каждой попыткой.

3. Экспоненциальная задержка

$$delay(n) = \text{const} * (2^{n-1})).$$

Интервал увеличивается экспоненциально с каждой попыткой.

Рекомендации по использованию паттерна:

1. Не все операции можно безопасно повторить. Повторный вызов метода, который изменяет состояние (например, списание средств, создание заказа), может привести к дублирующим транзакциям.

2. Retry имеет смысл только для временных и восстанавливаемых ошибок.

3. Массовые повторные запросы могут усугубить проблему, создавая еще большую нагрузку. Вместо восстановления, Retry может стать причиной окончательного отказа сервиса.

4. Совместное использование Retry и Timeout предполагает два варианта расчета временной задержки: Timeout устанавливается суммарно для всех попыток или для каждой попытки по отдельности. Можно не выполнять третью (или даже вторую) попытку, если общий порог тайм-аута уже превышен.

2.3. Circuit Breaker

Circuit Breaker (автоматический выключатель) — это шаблон, предназначенный для предотвращения повторных неудачных попыток взаимодействия с компонентом, находящимся в нестабильном состоянии. Он действует как автоматический «предохранитель», который прерывает поток вызовов к проблемному сервису и дает ему время на восстановление. Тем временем вместо реальных вызовов к сервису клиент может обратиться к кэшу. Блокируя вызовы к упавшему сервису, Circuit Breaker защищает и остальные компоненты от перегрузки.

Паттерн использует три состояния (рис. 1):

• closed (закрытое) — все запросы к сервису выполняются. Ошибки накапливаются. Если процент ошибок превышает заданный порог (например, 50 % за последние 60 секунд), Circuit Breaker переходит в состояние open;

• open (открытое) — вызовы к сервису блокируются. Сразу возвращается ошибка или заглушка. В этом состоянии система даёт время на восстановление. Через заданный интервал (например, 30 секунд) Circuit Breaker переходит в состояние half-open;

• half-open (полуоткрытое) — разрешается ограниченное число «пробных» вызовов. Если они успешны, предохранитель переходит в состояние closed и разрешает доступ к сервису. При повторных сбоях возврат в open и продолжение прерывания запросов.

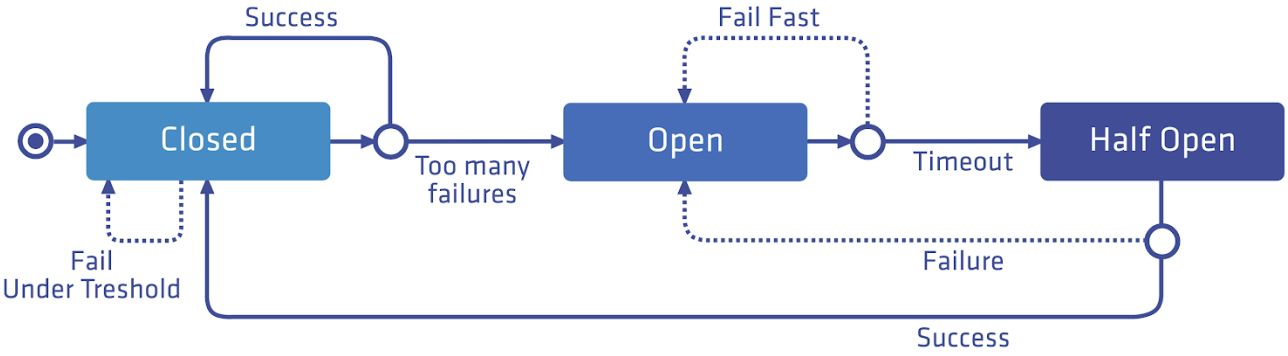


Рис. 1. Схема работы Curcuit Breaker

Основная сложность при работе с паттерном — это правильный выбор параметров, которые будут регулировать состояние Circuit Breaker. Например, если количество допустимых подряд ошибок слишком мало, то это приведёт к частым ложным срабатываниям, а если слишком высоко — к долгому реагированию на реальную проблему. Также не нужно слишком быстро отключать автоматический выключатель, и нельзя допустить, чтобы его отключение занимало слишком много времени.

Нужно координировать работу Timeout + Retry + Circuit Breaker. Например, если каждый повторный вызов будет восприниматься как отдельная ошибка, то Circuit Breaker быстро перейдёт в открытое состояние. А если таймаут будет дольше, чем время ожидания перед переходом в новое состояние предохранителя, Circuit Breaker может не увидеть реальные проблемы, потому что ошибки просто будут в ожидании и не посчитаются сбоями.

2.4. Bulkhead

Bulkhead (перегородка) — это архитектурный паттерн, направленный на локализацию сбоев внутри системы. Он предполагает разделение компонентов или ресурсов для ограничения влияния сбоев или перегрузок в одной области на остальную часть системы. Такая изоляция гарантирует, что сбой в одной части системы не выведет ее целиком из строя.

Паттерн основан на использовании отдельных пулов потоков для выполнения задач разных типов. Идентифицируются вызовы или компоненты, которые потенциально могут создавать нагрузку или быть нестабильными, каждой такой группе выделяется отдельный пул ресурсов. Примерами могут быть отдельный пул потоков для обработки входящих HTTP-запросов от пользователей и отдельный пул для запросов к внешнему API. Для каждого пула задаются индивидуальные лимиты, в зависимости от ожидаемой рабочей нагрузки. Если лимит исчерпан, новые запросы отклоняются или ставятся в очередь. Это предотвращает истощение общих ресурсов и конкуренцию за них между различными частями системы, а также всю систему от полной деградации.

Следует обратить внимание на несколько ключевых особенностей при внедрении паттерна в систему:

1. Непросто заранее определить, какие ресурсы стоит изолировать. Нужно проанализировать, какое влияние оказывает на бизнес-логику потеря каждой конкретной функциональности и стремиться к разделению ресурсов на основе логики: формировать отдельные пулы для критических и фоновых задач.

2. Паттерн может быть реализован на разных уровнях системы. Наиболее распространённый способ применения — изоляция в рамках отдельных пулов потоков приложения. Но также могут быть установлены отдельные пулы на количество подключений к базе данных или отдельные очереди или потоки обработки сообщений в очередях сообщений. Например, можно задать очередь с транзакциями, которая будет обрабатываться с высоким приоритетом, и очередь с логами, которая может быть обработана с некоторыми задержками.

2.5. Rate Limiter

Rate Limiter (ограничитель скорости) — это паттерн, направленный на управление нагрузкой и предотвращение перегрузки системы путем ограничения частоты запросов или операций, которые могут быть выполнены за определённый промежуток времени. Другими словами, он помогает контролировать пропускную способность.

Основная идея паттерна — отслеживать количество запросов от клиента/сервиса. Фиксируется каждый запрос от клиента в течение какого-то времени, и если их количество превышает допустимый лимит, то дальнейшие запросы блокируются. Как правило, возвращается ошибка HTTP 429 Too Many Requests.

Некоторые возможные реализации паттерна:

1. Алгоритм Fixed Window (фиксированное окно) — вводятся ограничения на количество запросов, которые могут быть выполнены за фиксированное время (например, 1000 запросов в минуту). Простой в реализации, но может приводить к пикам нагрузки на границе окон времени.

2. Алгоритм Sliding Window (скользящее окно) — работает по тому же принципу, но с более динамичным учётом запросов. Для каждого нового запроса система проверяет, сколько запросов было выполнено за последние N секунд с момента последнего запроса, а не в фиксированном промежутке.

3. Token-bucket — метод, при котором система выдает пользователю определенное количество токенов с фиксированной скоростью, при этом каждый запрос расходует один токен. Если токены закончились — запрос отклоняется.

Паттерн Rate Limiter используется для защиты сервисов от перегрузки. Примеры использования включают защиту API от злоупотреблений, регулирование нагрузки на серверы, а также защиту от атак типа DoS (Denial of Service), когда злоумышленники пытаются перегрузить систему запросами.

Выбор правильных параметров также является существенным, как и для других рассмотренных выше паттернов. Ограничение на количество запросов может быть настроено как для отдельных пользователей, так и для всех пользователей системы. Поэтому важно разделять глобальные лимиты для системы и индивидуальные лимиты для каждого клиента.

Также необходимо координировать работу паттерна совместно с другими паттернами. Например, Retry-запросы могут быстро исчерпать лимит, особенно при высокой нагрузке, а потому должны использовать экспоненциальная задержку.

Заключение

Микросервисная архитектура предоставляет широкие возможности для масштабирования и гибкости разработки, но одновременно предъявляет повышенные требования к надёжности взаимодействия компонентов системы между собой. Сетевые ошибки и временные сбои являются неизбежными в распределённых системах, и потому требуют системного подхода к их обработке.

Рассмотренные в статье паттерны позволяют повысить устойчивость системы к отказам и минимизировать негативные последствия временных сбоев. Однако выбор конкретных решений должен основываться на характеристиках системы, частоте и природе ошибок, а также на допустимых компромиссах между доступностью, консистентностью и производительностью.

Литература

1. *Ньюмен С.* Создание микросервисов / Сэм Ньюмен. – СПб. : Питер, 2023. – 624 с.

2. *Ричардсон К.* Микросервисы. Паттерны разработки и рефакторинга / Крис Ричардсон. – СПб. : Питер, 2019. – 554 с.

3. *Нейгард М.* Release it! Проектирование и дизайн ПО для тех, кому не все равно / Майкл Нейгард. – СПб. : Питер, 2016. – 320 с.

4. Язык шаблонов для микросервисов // Что такое микросервисы: [сайт]. – URL: https://microservices.io/patterns/index.html (дата обращения: 05.02.2025).

5. What is Circuit Breaker Pattern in Microservices? // GeeksForGeeks: [сайт]. – URL: https://www.geeksforgeeks.org/what-is-circuit-breaker-pattern-in-microservices (дата обращения: 06.02.2025).

6. Bulkhead Pattern // GeeksForGeeks: [сайт]. – URL: https://www.geeksforgeeks.org/bulkhead-pattern (дата обращения: 06.02.2025).

7. Rate Limiting Algorithms – System Design // GeeksForGeeks: [сайт]. – URL: https://www.geeksforgeeks.org/rate-limiting-algorithms-system-design (дата обращения: 06.02.2025).

УДК 004.42

АВТОМАТИЗАЦИЯ ОЦЕНКИ ТРУДОЗАТРАТ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Р. Е. Скиданов, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается применение методов машинного обучения для оценки трудозатрат в проектах по разработке программного обеспечения. Традиционные методы оценки, такие как экспертные оценки и аналогии, часто оказываются недостаточно точными из-за высокой степени неопределенности и изменчивости в процессе разработки. Предлагается новый подход, основанный на анализе исторических данных о выполненных проектах с использованием алгоритмов машинного обучения для предсказания временных затрат с учетом различных факторов, таких как сложность задачи, опыт команды и используемые технологии.
Ключевые слова: машинное обучение, оценка трудозатрат, управление проектами, организация работ, автоматизация.

Введение

Оценка времени выполнения задачи в области разработки программного обеспечения (ПО) является актуальной задачей, поскольку непосредственно влияет на эффективность управления проектами и ресурсами. В условиях современного быстро меняющегося мира, где сроки выполнения задач становятся все более жесткими, точная оценка времени позволяет избежать задержек и перерасхода ресурсов. Кроме того, правильная оценка времени способствует улучшению планирования и координации между командами, что особенно важно в многозадачных и междисциплинарных проектах.

Практический опыт показывает, что ошибки в оценке времени могут привести к значительным финансовым потерям и снижению качества конечного продукта.

Кроме того, с развитием технологий и методов анализа данных возникает необходимость в разработке более точных алгоритмов для оценки времени выполнения задач. Это особенно актуально в таких областях, как программирование, строительство и научные исследования, где временные рамки имеют критическое значение.

Таким образом, исследование методов оценки времени выполнения задач не только способствует повышению общей продуктивности, но и помогает формировать более реалистичные ожидания у всех участников процесса. В конечном итоге, это может привести к более успешным проектам и улучшению качества жизни работников.

1. Важные аспекты задачи оценки трудозатрат

При разработке ПО, во многих фирмах используется система управления проектами Jira [1] или ее аналоги, созданные в том числе и в рамках программы импортозамещения. В системе управления проектами существуют задачи — информационный объект с некоторыми характеристиками, который подразумевает под собой некоторое задание, выполнение которого приблизит программу к желаемому состоянию. Оценить трудозатраты на выполнение задачи достаточно сложно даже для опытных разработчиков, но это важная часть работы, так как это позволяет оценивать приоритет разных задач с учетом приносимой ими пользы в соотношении ко времени разработки (например, может быть сложная и долгая задача без особой выгоды для компании или простая и рентабельная).

Выделим основные характеристики каждой задачи в системе управления проектами:

• описание — текст, содержащий в себе полную формулировку задачи для выполнения;

• дата создания — дата создания задачи;

• дата завершения — дата перевода задачи в терминальный статус;

• название — краткий текст для описания задачи;

• статус — для задач существует предопределенная (или пользовательская) статусная модель с допустимыми переходами между ними;

• тип задачи — предопределенный (или пользовательский) словарь различных типов задач. В основном выделяются следующие типы задач: «Ошибка», «Новая функциональность», «Эпик»;

• приоритет — предопределенный (или пользовательский) словарь различных уровней важности задачи;

• вложения — дополнительные материалы для конкретизации постановки задачи (это могут быть скриншоты, файлы с логами системы, документация системы и т.д.);

• комментарии — при необходимости конкретизировать постановку задачи пользователи могут общаться между собой для уточнения аспектов, если при этом используется комментарии, история общения остается привязанной к задаче и все договоренности будут фиксированы.

На основании представленных характеристик задачи можно ввести некоторые производные характеристики:

• количество слов в описании — в зависимости от типа задачи и принятых на проекте (или в организации практик), может быть корреляция между длиной описания и трудозатратами на выполнение задачи (например, если описание короткое, то это может означать как короткую задачу, так и сложную исследовательскую задачу без четких временных границ выполнимости);

• количество новых введенных сущностей — в методологии Domain Driven Development [2] почти каждое существительное, используемое заказчиком ПО относительно его понимания процесса, должно отражаться в коде в виде сущности, что ведет к увеличению трудозатрат. Однако в описании задачи могут встречаться не только термины бизнеса, но и общие термины разработки ПО, а также принятые внутри команды/проекта/организации шаблоны описания определенных типов задач или свойственные только конкретным авторам задач существительные;

• количество новых связей между сущностями — при употреблении нескольких существительных в рамках одного предложения/абзаца/задачи можно с некоторой долей вероятности утверждать, что в рамках выполнения задачи между этими терминами будет осуществляться добавление/редактирование/ удаление связи, что в свою очередь влияет на сложность выполнения задачи, и, как следствие, на трудозатраты.

При оценке количества новых сущностей и связей следует учитывать не только новизну этих объектов, но и как давно эти объекты были затронуты в последний раз. Известно, что человеческая память способна удерживать от 5 до 9 предметов в кратковременной памяти [3]. Похожий эффект есть и с долговременной памятью — сущности программы могут вытесняться другими сущностями, если прошло достаточно много времени. Процесс вытеснения дополнительно усугубляется тем, что над разработкой ПО обычно трудится целая команда, каждый из членов которой может внести правки в объекты, написанные другим человеком. В результате может оказаться так, что даже если прошло не так много времени с момента создания некоторых объектов, они были видоизменены настолько, что разбор их новой логики работы можно будет приравнять к реализации этого же объекта с нуля.

2. Вычислительный эксперимент

Был проведен вычислительный эксперимент по прогнозированию оценки трудозатрат на задачи с использованием методов машинного обучения, в частности многослойной нейронной сети для задачи нелинейной регрессии. Результаты эксперимента приведены на рис. 1.

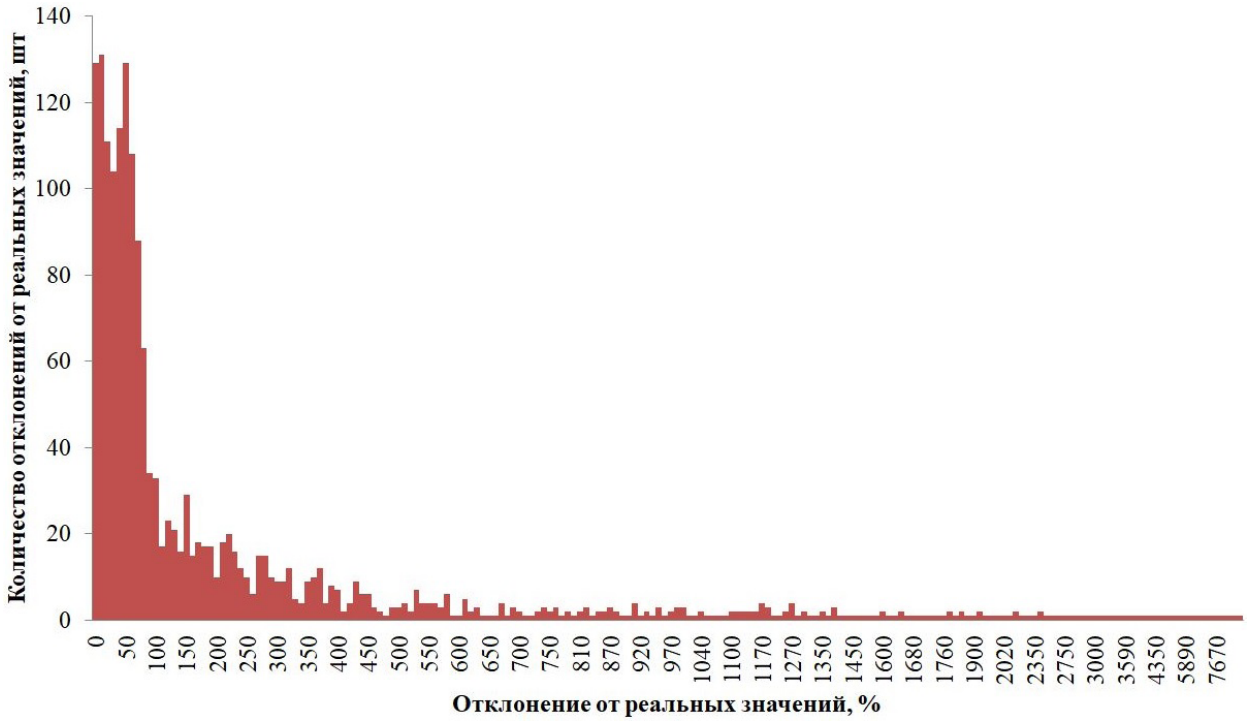


Рис. 1. Оценка количеств отклонений от реальных значений в процентах

Общий объем обучающей выборки составляет 1707 объектов. Количество объектов, на которых отклонение составило не больше 100 %, равно 1011. Максимальное отклонение от фактического результата составляет 17570 %, а минимальное — 0 %. Для практического применения предложенной модели необходимо понизить максимальное отклонение или научиться отделять такие задачи, на которых отклонение будет превышать некоторое пороговое значение, которое должно определяться на каждом проекте индивидуально или в рамках компании. В процессе проведения вычислительного эксперимента в обучающей выборке были найдены задачи, которые напрямую не относятся к разработке ПО, что негативно сказывается на качестве модели.

Выявлены следующие виды задач:

- разработка ПО;
- управление командой;
- тестирование ПО;
- подбор инструментов для разработки;
- написание документации;
- проведение совещаний;
- проведение сдачи проекта.

Для дальнейшего улучшения необходимо добавить автоматическую фильтрацию задач или очистить обучающие данные вручную.

Заключение

Результатом работы является приложение, которое позволяет провести оценку трудозатрат для задачи разработки ПО на основании исторических данных. На текущем уровне приложение не может применяться для оценки трудозатрат на практике из-за значительного отклонения от реальных значений. В дальнейшем планируется улучшить качество оценки путем добавления новых характеристик и улучшения качества данных.

Следует также заметить, что психологические аспекты, такие как оптимизм и предвзятость при оценке, также играют важную роль в данной проблеме, что делает ее интересной для междисциплинарного подхода.

Литература

1. Jira | Issue & Project Tracking Software | Atlassian. – Atlassian, 2024. – URL: https://www.atlassian.com/software/jira (дата обращения 09.09.2024).

2. Domain Driven Design на практике. – Habr, 2024. – URL: https://habr.com/ru/articles/334126/ (дата обращения 03.10.2024).

3. Семь плюс минус два (7 ± 2). Кошелек Миллера. – 4BRAIN, 2024. – URL: https://4brain.ru/blog/семь-плюс-минус-два/ (дата обращения 17.09.2024).

УДК 501,533, 004.021

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСАЖДЕНИЯ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Д. А. Тукмаков

Казанский научный центр РАН, Институт механики и машиностроения

Аннотация. В данной работе моделировались процессы гравитационного осаждения аэрозоля состоящего из частиц одинакового размера. Актуальность исследования связана с различными практическими приложениями осаждения дисперсной фазы газодисперсных сред. В работе получены математические модели, описывающие осаждение частиц на основе одномерных нестационарных уравнений диффузии с учетом и без учета конвективного слагаемого. Новизна работы заключается в том, что проводится сопоставление математических моделей, основанных на уравнения в частных производных и дискретной математической модели. Без учета, конвективного слагаемого гравитационное осаждение также происходит, но за существенно более долгий промежуток времени, чем при учете конвективного слагаемого. Также получена дискретная математическая модель осаждения частиц аэрозоля. Сопоставление демонстрирует, что наиболее интенсивно осаждение дисперсных частиц происходит по дискретной модели осаждения.
Ключевые слова: аэрозоли, гравитационное осаждение, уравнение диффузии, гравитационное осаждение, математическое моделирование.

Введение

Одним из разделов механики жидкости и газа является динамика неоднородных сред [1–14]. Частным случем неоднородных сред являются аэрозоли — взвешенные в газе твердые частицы или жидкие капли. В монографии [1] разработаны общие принципы теории динамики неоднородных сред. В монографии [2] численно иследованы одномерные течения моно и полидисперсных газовзвесей. В монографии [3] представлены различные математические модели течений запыленных сред. Монография [4] посвящена разработке теоретических основ осаждения дисперсных частиц. Результаты эксперементального наблюдения параметров седементации частиц позволяют определить свойства дисперсной системы [5]. В статье [11] математически моделируется гравитационная седементация дисперсных частиц. В исследовании [12] эксперементально изучается гравитационное осаждение аэрозоля в акустическом резонаторе. В работе [13] исследовано осаждение дисперсной фазы газовзвеси в аэродинамическом и электрическом поле.

В статье [14] рассматриваются вопросы прменения процессов диффузии в ядерной физике.

В данной работе проводится сопоставление математических моделей диффухии на освнове обыкновенного одномерного уравненя диффузии и уравнения диффузии с конвективным слагаемым, также предложена математическая модель предполагающая дискретность процесса осаждения дисперсных частиц.

Математическая модель

На рис. 1 представлено схематическое изображение гравитационного осаждения аэрозоля в емкости.

Для описания процесса изменения концентрации частиц применяется уравнение одномерной диффузии (1):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

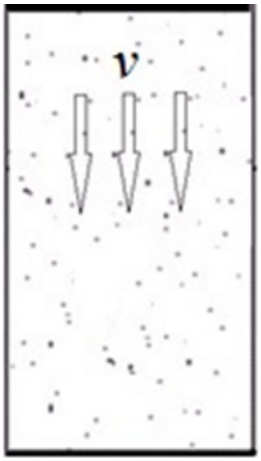


Рис. 1. Схематичное изображение емкости с осаждающимся аэрозолем

Уравнение (1) имеет частное решение (2), частное решение описывает постепенное уменьшение концентрации дисперсных частиц определяемое коэффициентом диффузии — a [15]:

$$c(x,t) = c_0 \exp\left(-ak^2 t\right)\cos(kx). \tag{2}$$

Одномерное уравнение конвективной диффузии имеет вид (3):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x}. \tag{3}$$

С помощью подстановки (4) [15] уравнение (3) приводится к уравнению (1) имеющему решение с учетом (4) в виде (5):

$$c^*(x,t) = \exp(2avx)\exp\left(tv^2/4a\right)c(x,t) \tag{4}$$

$$c(x,t) = c_0 \exp(-2avx)\exp\left(-tv^2/4a\right)\exp\left(-ak^2 t\right)\cos(kx) \tag{5}$$

Здесь k — подгоночный коэффициент, задаваемый из условия, что $c(x,0) \approx c_0$.

Скорость осаждения дисперсных включений определяется выражением (6) [4, 11]

$$v = \frac{gd^2(\rho - \rho_{10})}{18\mu}. \tag{6}$$

Здесь d — диаметр частицы, g — ускорение свободного падения ρ — плотность газа ρ_{10} — плотность материала частицы.

Коэффициент диффузии сферической частицы определяется выражением [5, 16]:

$$a = \frac{Tk}{3\pi\mu d}. \tag{7}$$

T — температура среды, k — постоянная Больцмана.

Общее количество частиц монодисперсной газовзвеси для емкости объема — V и объемного содержания дисперсной фазы — α можно предположить равным — N_p определяется формулой (8); время осаждение дисперсных частиц — t_s (9):

$$N_p = \frac{6\alpha V}{\pi d^3} \tag{8}$$

$$t_s = L/u. \tag{9}$$

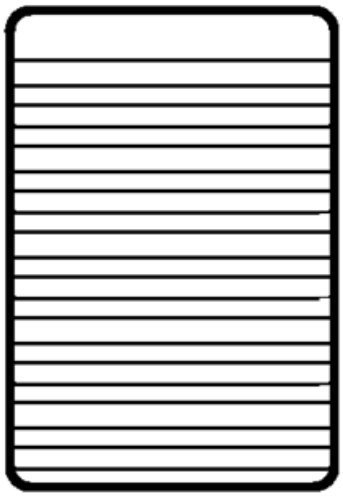


Рис. 2. Схематическое изображение слоев аэрозоля

Можно предположить, что в поперечном сечении в емкости дисперсные частицы распределены равномерно. Таким образом в емкости с аэрозолем образуется некоторое количество слоев, толщиной в диаметр одной частицы, расстояние между слоями также можно предположить равным одному диаметру частиц — рис. 2. Количество слоев — n определяется формулой (10), N_s — количество частиц в каждом слое.

$$n = L/2d \tag{10}$$

$$N_S = N_p/n. \tag{11}$$

В дискретной модели осаждения частиц предполагается, что за период времени t_{s0} (9*) осаждается N_s частиц:

$$t_{s0} = 2d/u. \tag{9*}$$

При описании процесса осаждения дисперсных частиц дифференциальными уравнениями количество осевших частиц определятся выражением (12):

$$N(t) = N_T - \alpha V \int_0^L c(x,t)\,dx. \tag{12}$$

Для моделей (1) и (3) скорости осаждения частиц определяются выражениями (13) и (14)

$$N(t) = N_T - \frac{6\alpha V e^{\left(-ak^2 t\right)} \sin(k)}{\pi d^3 k} \tag{13}$$

$$N(t) = N_T - \frac{6\alpha V}{\pi d^3}\left|\left(\frac{e^{-ak^2}}{a^2k^4+k^2}\right)\left(-ak^2\cos(k)+k\sin(k)\right)+\left(\frac{ak^2}{a^2k^4+k^2}\right)\right| e^{\left(-t\left(v^2/4a+ak^2\right)\right)}. \tag{14}$$

В расчетах предполагались следующие параметры несущей среды и дисперсной фазы — Физическая плотность дисперсной фазы $\rho_1 = 1000$ кг/м^3, диаметр частиц — $d = 5$ мкм, объемное содержание дисперсной фазы — $\alpha = 10^{-5}$. Длина области течения — $L = 1$ м, динамическая вязкость газа — $\mu = 1.72\ 10^{-5}$ Па·с, плотность несущей среды — $\rho = 1.29$ кг/м^3.

В начальный момент времени концентрации частиц, рассчитываемые по математической модели диффузии без учета конвективного слагаемого отличается несущественно, максимальное значение концентрации достигается вблизи нижней границы емкости, в последующие моменты времени распределению концентрации рассчитываемое по различным моделям существенно отличается — рис. 3 (*а–в*).

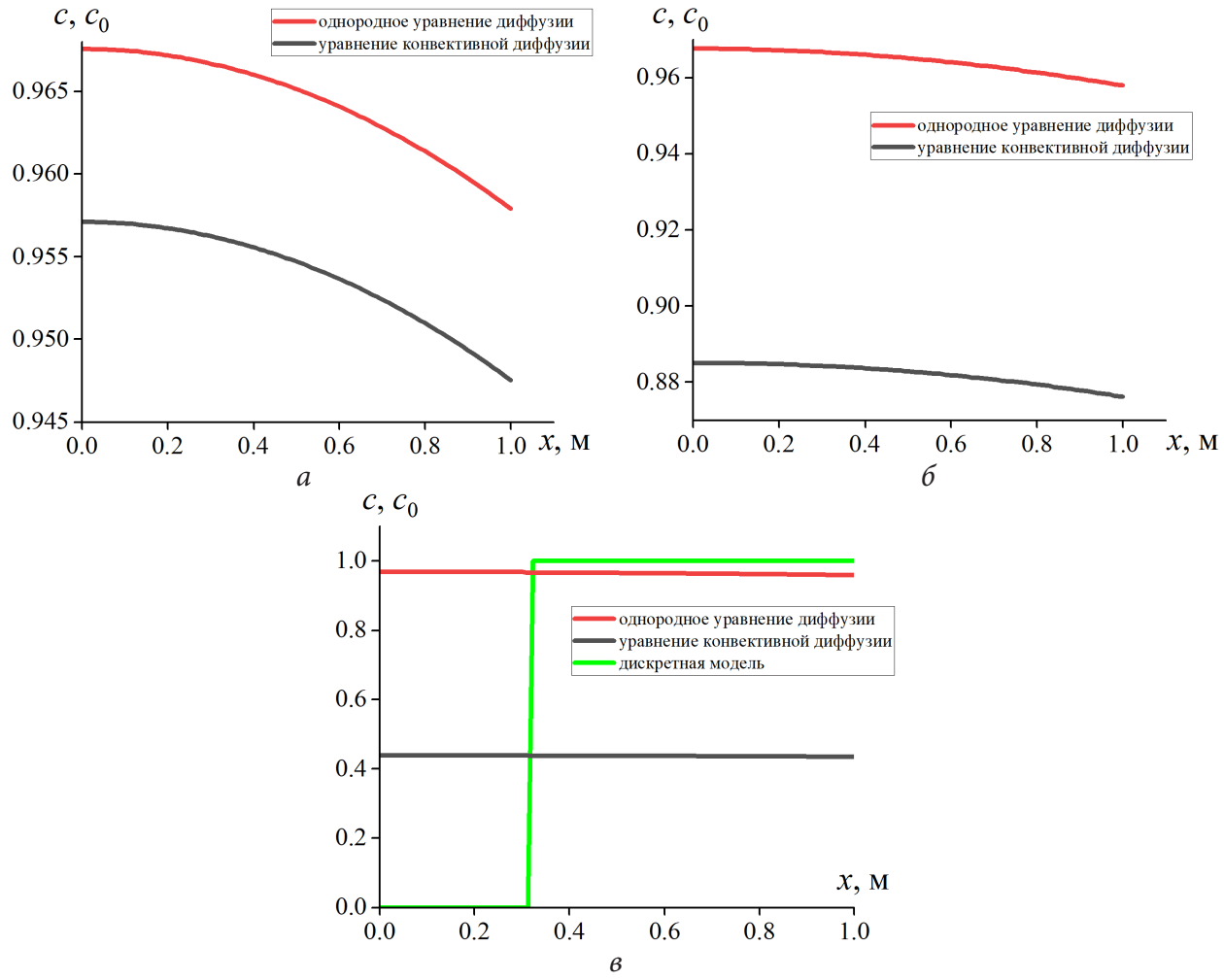


Рис. 3 Пространственные распределения концентрации частиц дисперсной фазы при расчете различными моделями в моменты времени: а — $t = 0.02t_S$; б — $t = 0.05t_S$; в — $t = 0.33t_S$

В расчетах отличие значений количества осевших частиц, за всё время осаждения при расчетах уравнение (1) и уравнением (3) составляет соответственно 90 % и 9 % количества осевших частиц по дискретной модели — рис. 4*а*. Полное осаждение описываемое однородным уравнением диффузии происходит за существенно более долгий период времни — рис. 4*б*.

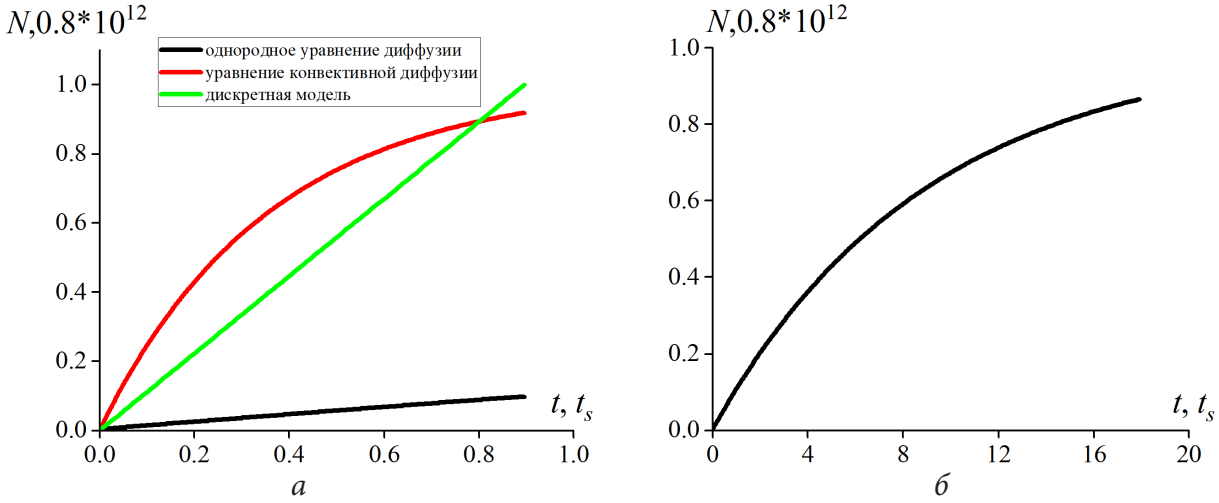


Рис. 4. Временные зависимости концентрации частиц для различных моделей расчета — а; временная зависимость для однородного уравнения диффузии — б

Заключение

В данной работе моделировались процессы гравитационного осаждения аэрозоля. Получены математические модели описывающие осаждение частиц с учетом и без учета конвективного слагаемого. Получена дискретная математическая модель осаждения частиц аэрозоля. Наиболее интенсивно осаждение частиц происходит при расчетах по дискретной математической модели.

Благодарности

«Работа выполнена за счет гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Республики Татарстан». (Соглашения № 84/2024-ПД от 16 декабря 2024 года).

Литература

1. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигмутулин. – Москва : Наука, 1978. – 336 с.

2. *Кутушев А. Г.* Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А. Г. Кутушев. – Санкт-Петербург : Недра, 2003. – 284 с.

3. *Федоров А. В.* Волновые процессы в газовзвесях частиц металлов / А. В Федоров, В. М. Фомин, Т. А. Хмель. – Новосибирск : Параллель, 2015. – 301 с.

4. *Ходаков Г. С.* Седиментационный анализ высокодисперсных систем / Г. С. Ходаков, Ю. П. Юдкин. – Москва : Химия, 1981. –192 с.

5. *Леушина А. П.* Молекулярно-кинетические свойства дисперсных систем / А. П. Леушина, Д. Н. Данилов. – Седиментационный анализ. Киров : Издатльство ВятГУ, 2008. – 54 с.

6. *Тукмаков Д. А.* Трехмерная нестационарная математическая модель загрязнения канала осаждающейся дисперсной примесью / Д. А. Тукмаков // Экологические системы и приборы. –2022. – № 11. – С. 26–35.

7. *Тукмаков Д. А.* Исследование загрязнения водотока взвесью с помощью стационарной двухмерной математической модели / Д. А. Тукмаков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная экология. Урбанистика. – 2022. – Т. 45, № 1. – С. 88–98.

8. *Тукмаков Д. А.* Численная модель течения аэрозоля, обусловленного взаимодействием частиц и газа // Д. А. Тукмаков // Сложные системы. – 2021. – № 1. – С. 64–71.

9. *Тукмаков Д. А.* Аналитическая модель одномерной нестационарной динамики одиночной частицы в акустическом и электрическом полях / Д. А. Тукмаков // Лесной вестник. – 2022. – Т. 26, № 5. – С. 135–144.

10. *Тукмаков Д. А.* Сопоставление численных моделей динамики электрически заряженных газовзвесей с массовой и поверхностной плотностями зарядов для различных дисперсностей частиц / Д. А. Тукмаков // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия Естественные науки. – 2022. – № 3. – С. 43–56.

11. *Студенов И. И.* Расчет гидравлической крупности взвеси при моделировании динамики концентрации взвешенных веществ в приустьевых районах арктических морей на примере Белого моря/ И. И. Студенов, Н. А. Шилова // Научные исследования в Арктике. – 2015. – № 3. – С. 40–47.

12. Осаждение дыма при нелинейных колебаниях в открытой трубе вблизи резонанса / Д. А. Губайдуллин, Р. Г. Зарипов, Л. А. Ткаченко, Л. Р. Шайдуллин // Теплофизика высоких температур. – 2019. – Т. 57, № 5. – С. 793–796.

13. *Тукмаков А. Л.* Модель движения и осаждения заряженной газовзвеси в электрическом поле / Д. А. Тукмаков // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 1. – С. 35–44.

14. Особенности формирования собственного электрического поля низкотемпературной кислород-метановой плазмы / А. В. Рудинский, А. В. Ягодников, С. В. Рыжков, В. В. Онуфриев // Письма в ЖТФ. – 2021. – Т. 47, № 10. – С. 42–45.

15. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

16. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. Ф. Лифшиц. – Москва : Наука, 1986. – 736 с.

УДК 517.9

СОЗДАНИЕ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ «МЕССЕНДЖЕР» НА КЛИЕНТ-СЕРВЕРНОЙ АРХИТЕКТУРЕ

А. С. Украинский

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается создание клиент-серверного приложения с помощью следующих технологий: Серверная часть: Java 17, Spring framework, а также компоненты Spring, такие как Spring Data JPA для работы с базами данных, Spring Web для работы с сетью. Клиентская часть: Javascript, ReactJS.
Ключевые слова: сервер, клиент, запрос, база данных, WebSocket, соединение, контроллер, метод, класс, аннотация.

Введение

Создание клиент-серверного приложения, такого как мессенджер, представляет собой увлекательную задачу, сочетающую в себе аспекты фронтенд- и бэкенд-разработки. В современном мире мессенджеры стали неотъемлемой частью повседневной жизни, обеспечивая быстрый и удобный способ общения. Однако их реализация требует глубокого понимания принципов работы клиент-серверной архитектуры, взаимодействия через API, обработки данных, а также обеспечения безопасности и масштабируемости.

В этой статье рассматривается процесс создания мессенджера с использованием современных технологий: Java и Spring Boot для серверной части и ReactJS для клиента. Также затрагиваются важные аспекты, такие как авторизация пользователей, организация чатов и обработка сообщений в реальном времени с помощью WebSocket. Пример поможет понять, как интегрировать эти компоненты в полноценное приложение, готовое к реальным нагрузкам.

Процесс создания приложения
Серверная часть

Первый этап создания приложения — подключение необходимых зависимостей. Java приложение имеет систему сборки Maven, поэтому для подключения зависимостей необходимо добавить в файл pom.xml следующий код:

```
<dependencies>
    <dependency>
        <groupId>org.springframework.boot</groupId>
        <artifactId>spring-boot-starter-web</artifactId>
    </dependency>
    <dependency>
        <groupId>org.springframework.boot</groupId>
        <artifactId>spring-boot-starter-websocket</artifactId>
    </dependency>
    <dependency>
        <groupId>org.springframework.boot</groupId>
        <artifactId>spring-boot-starter-data-jpa</artifactId>
    </dependency>
    <dependency>
        <groupId>org.projectlombok</groupId>
```

```
        <artifactId>lombok</artifactId>
        <optional>true</optional>
    </dependency>
    <dependency>
        <groupId>org.postgresql</groupId>
        <artifactId>postgresql</artifactId>
        <scope>runtime</scope>
    </dependency>
</dependencies>
```

Добавлены зависимости для создания подключения по протоколу WebSocket, для работы с базой данных на основе объектно-реляционной модели, а также для подключения серверного приложения к СУБД Postgres.

Далее необходимо создать классы, представляющие собой модели данных.

```
@Entity
@Table(name = "users")
@Data
@NoArgsConstructor
@AllArgsConstructor
public class User {
    @Id
    @GeneratedValue(strategy = GenerationType.IDENTITY)
    private Long id;

    private String username;

    private String password;
}

@Entity
@Data
@NoArgsConstructor
@AllArgsConstructor
public class FriendRequest {

    @Id
    @GeneratedValue(strategy = GenerationType.IDENTITY)
    private Long id;

    @ManyToOne
    private User user;

    @ManyToOne
    private User friend;

    private boolean accepted;
}

@Entity
@Data
@NoArgsConstructor
@AllArgsConstructor
public class Message {
    @Id
    @GeneratedValue(strategy = GenerationType.IDENTITY)
    private Long id;
```

```
    @ManyToOne
    private User sender;

    @ManyToOne
    private User recipient;

    private String content;
}
```

Аннотация @Entity — то, что позволяет программе преобразовать обычный класс в запись таблицы базы данных и обратно. @Id показывает, что помеченное данной аннотацией поле является первичным ключом таблица базы данных. Аннотация @ManyToOne позволяет создать связь «многие к одному» между таблицами.

Помимо этого для работы с базой данных необходимо создать интерфейсы-репозитории.

```
@Repository
public interface UserRepository extends JpaRepository<User, Long> {
    Optional<User> findByUsername(String username);

    List<User> findByUsernameContainingIgnoreCase(String username);

    @Query(value = """
        select new User(u.id, u.username, u.password) from User u
        join FriendRequest fr on fr.friend.id = u.id or
        fr.user.id = u.id
         where (fr.friend.id = ?1 or fr.user.id = ?1) and u.id != ?1 and accepted
= true""")
    List<User> findFriendsById(String id);
}
```

Методы `findByUsername()` и `findByUsernameContainingIgnoreCase()` представляют собой select-запросы к базе данных, написанные на языке JPQL. Это мощный язык запросов, который позволяет определять запросы к базе данных на основе модели объекта. JPQL является надстройкой над SQL, который позволяет более удобно работать с базой данных. Например, первый метод можно заменить на запрос:

```
select * from users u where u.username = username;
```

Второй метод — запрос для поиска пользователей, содержащих в логине заданную строку.

Третий метод помечен аннотацией @Query. Дело в том, что язык JPQL ограничен в своих возможностях и не позволяет писать длинные сложные запросы. В таком случае используется @Query. Эта аннотация связывает метод с явно заданным запросом, что позволяет создавать запросы к базе данных различной сложности. В данном случае реализован запрос с использованием join для объединения двух таблиц и поиска друзей пользователя с заданным id.

```
@Repository
public interface FriendRequestRepository extends JpaRepository<FriendRequest,
Long> {
    List<FriendRequest> findByFriendIdAndAcceptedFalse(Long id);

    List<FriendRequest> findByUserAndAcceptedTrue(User user);

    List<FriendRequest> findByUser(User user);

    Optional<FriendRequest> findByUserAndFriendAndAcceptedFalse(User user, User
friend);

    @Transactional
    void deleteAllByUserIdAndFriendId(Long userId, Long friendId);
}
```

Благодаря аннотации `@Transactional` метод `deleteAllByUserIdAndFriendId()` выполняется в транзакции.

```
@Repository
public interface MessageRepository extends JpaRepository<Message, Long> {
    List<Message> findAllBySenderIdAndRecipientId(Long senderId, Long recipientId);
}
```

Помимо приведенных выше методов, интерфейсы, расширяющие JpaRepository содержат базовые методы, необходимые для работы с базой данных, такие как: `save()`, `findById()`.

На следующем этапе для соблюдения объектно-ориентированной модели и принципа единой ответственности создаются классы-сервисы. Такие классы содержат бизнес-логику приложения и являются прослойкой между контроллерами и репозиториями.

```
@Service
@RequiredArgsConstructor
public class UserService {
    private final UserRepository userRepository;
    public User register(String username, String password) {
        if (userRepository.findByUsername(username).isPresent()) {
            throw new RuntimeException("Username is already taken");
        }
        User user = new User(null, username, password);
        return userRepository.save(user);
    }
    public User login(String username, String password) {
        return userRepository.findByUsername(username)
                .filter(u -> u.getPassword().equals(password))
                .orElseThrow(() -> new RuntimeException("Invalid credentials"));
    }
    public List<User> searchUsers(String username) {
        Return userRepository.findByUsernameContainingIgnoreCase(username);
    }
    public List<User> searchFriends(String id) {
        return userRepository.findFriendsById(id);
    }
    public Optional<User> getUser(Long id) {
        return userRepository.findById(id);
    }
}
```

Описание методов данного класса:

`register()` — поиск пользователя по логину. Если пользователь найден — вернуть ошибку, иначе создать нового пользователя.

`login()` — поиск пользователя по логину и паролю. Если пользователь не найден - вернуть ошибку.

`searchUsers()` — поиск всех пользователей, чьи логины содержат заданную строку.

`searchFriends()` — поиск пользователей, являющихся друзьями пользователя, имеющего заданное id.

`getUser()` — поиск пользователя по id.

```
@Service
@RequiredArgsConstructor
public class FriendRequestService {
```

```
    private final FriendRequestRepository friendRequestRepository;
    private final UserRepository userRepository;

    public void sendFriendRequest(Long userId, Long friendId) throws
RuntimeException {
        if (userId.longValue() == friendId.longValue()) {
            throw new RuntimeException("You can’t send friend request to
yourself");
        }

        Optional<User> user = userRepository.findById(userId);
        Optional<User> friend = userRepository.findById(friendId);
        user.orElseThrow();
        friend.orElseThrow();
        List<FriendRequest> requests = friendRequestRepository.findByUser(user.
get());
        if (requests.stream().anyMatch(fr -> fr.getFriend().equals(friend.get())
&& fr.isAccepted())) {
            throw new RuntimeException(«Already friends»);
        }
        if (requests.stream().anyMatch(fr -> fr.getFriend().equals(friend.get())
&& !fr.isAccepted())) {
            throw new RuntimeException("Friend request already sent");
        }

        FriendRequest request = new FriendRequest(null, user.get(), friend.get(),
false);
        friendRequestRepository.save(request);
    }

    public void acceptFriendRequest(Long requestId) {
        Optional<FriendRequest> request = friendRequestRepository.
findById(requestId);
        if (request.isEmpty()) {
            return;
        }

        request.get().setAccepted(true);
        friendRequestRepository.save(request.get());
    }

    public void rejectFriendRequest(Long requestId) {
        friendRequestRepository.deleteById(requestId);
    }

    public List<FriendRequest> getNonAcceptedRequests(Long id) {
        return friendRequestRepository.findByFriendIdAndAcceptedFalse(id);
    }

    public void deleteFriend(Long userId, Long friendId) {
        friendRequestRepository.deleteAllByUserIdAndFriendId(userId, friendId);
    }
}
```

Описание методов данного класса:

`sendFriendRequest()` — Отправить запрос в друзья. Если id отправителя и получателя совпадают — выдать ошибку. Если хотя бы по одному из id не найдено пользователя — выдать

ошибку. Если пользователи уже являются друзьями или для них сохранена не подтвержденная заявка — выдать ошибку.

`acceptFriendRequest()` — подтвердить заявку в друзья. Если заявка по заданному id не найдена — вернуть ошибку.

`rejectFriendRequest()` — отклонить заявку в друзья.

`getNonAcceptedRequests()` — поиск заявок в друзья, отправленных пользователю с заданным id.

`deleteFriend()` — удалить заявку в друзья между двумя пользователями.

```
@Service
public class MessageService {

    private final MessageRepository messageRepository;

    public MessageService(MessageRepository messageRepository) {
        this.messageRepository = messageRepository;
    }

    public Message saveMessage(Message message) {
        return messageRepository.save(message);
    }
}
```

`save()` — сохранить сообщение.

Теперь необходимо создать контроллеры. Контроллер - класс, содержащий методы, которые получают и обрабатывают запросы на сервер. Так как в данном случае сервер получает запросы и возвращает данные в формате JSON, классы необходимо пометить аннотацией @RestController.

```
@RestController
@RequestMapping("/api/users")
@RequiredArgsConstructor
public class UserController {
    private final UserService userService;

    @GetMapping("/get")
    public ResponseEntity<?> get(@RequestParam String id) {
        Optional<User> user = userService.getUser(Long.parseLong(id));
        if (user.isPresent()) {
            return new ResponseEntity<>(user.get(), HttpStatus.OK);
        } else {
            return new ResponseEntity<>("User not found", HttpStatus.NOT_FOUND);
        }
    }
    @PostMapping("/register")
    public ResponseEntity<User> register(@RequestBody User user) {
         return ResponseEntity.ok(userService.register(user.getUsername(), user.
getPassword()));
    }
    @PostMapping("/login")
    public ResponseEntity<User> login(@RequestBody User user) {
           return ResponseEntity.ok(userService.login(user.getUsername(), user.
getPassword()));
    }
```

```
    @GetMapping("/search")
    public ResponseEntity<List<User>> search(@RequestParam String query) {
        return ResponseEntity.ok(userService.searchUsers(query));
    }
    @GetMapping("/friends")
    public ResponseEntity<List<User>> searchFriends(@RequestParam String id) {
        return ResponseEntity.ok(userService.searchFriends(id));
    }
}
```

`@RequestMapping` — задает префикс url-адреса, по которому данный класс может получать запросы.

`@PostMapping` и `@GetMapping` — показывают, что метод соответствует HTTP методу POST или GET и задают конечную точку url-адреса. Например, запрос, отправленный с локальной машины на url `http://localhost/api/users/get` будет обработан методом `get()` из этого класса.

Параметры методов, помеченные аннотацией `@RequestParam` должны передаваться в url адресе в таком виде: `http://localhost/api/users/get?id=12345`.

Параметры, помеченные аннотацией @RequestBody должны передаваться в теле запроса. Например, чтобы передать объект класса User, тело запроса должно иметь вид:

```
{
    "id": 123,
    "username": "User1",
    "password": "1Qwerty"
}

@RestController
@RequestMapping("/api/friend-requests")
@RequiredArgsConstructor
public class FriendRequestController {
    private final FriendRequestService friendRequestService;
    @PostMapping("/send")
    public ResponseEntity<?> send(@RequestParam String senderId, @RequestParam
String recipientId) {
        try {
            friendRequestService.sendFriendRequest(Long.parseLong(senderId),
Long.parseLong(recipientId));
        } catch (NoSuchElementException e) {
            return new ResponseEntity<>(«User not found», HttpStatus.INTERNAL_
SERVER_ERROR);
        } catch (RuntimeException e) {
            return new ResponseEntity<>(e.getMessage(), HttpStatus.BAD_REQUEST);
        }
        return new ResponseEntity<>(HttpStatus.OK);
    }
    @GetMapping("/get")
    public ResponseEntity<List<FriendRequest>> get(@RequestParam String id) {
        return ResponseEntity.ok(friendRequestService.getNonAcceptedFalseRequests
(Long.parseLong(id)));
    }
```

```
    @PostMapping("/accept")
    public ResponseEntity<?> accept(@RequestParam String requestId) {
        friendRequestService.acceptFriendRequest(Long.parseLong(requestId));
        return new ResponseEntity<>(HttpStatus.OK);
    }
    @PostMapping("/reject")
    public ResponseEntity<?> reject(@RequestParam String requestId) {
        friendRequestService.rejectFriendRequest(Long.parseLong(requestId));
        return new ResponseEntity<>(HttpStatus.OK);
    }
    @PostMapping("/delete")
    public ResponseEntity<?> delete(@RequestParam String userId, String friendId)
{
        friendRequestService.deleteFriend(Long.parseLong(userId), Long.
parseLong(friendId));
        return new ResponseEntity<>(HttpStatus.OK);
    }
}
@RestController
@RequiredArgsConstructor
public class MessageController {
    private final SimpMessagingTemplate template;
    private final MessageService messageService;
    @GetMapping
    @ResponseBody
    public List<Message> getMessages(@RequestParam String user1, @RequestParam
String user2) {
        return messageService.getMessagesBetweenUsers(user1, user2);
    }
    @PostMapping
    @ResponseBody
    public Message sendMessage(@RequestBody Message message) {
        return messageService.saveMessage(message);
    }
    @MessageMapping("/send")
    public ResponseEntity<?> send(@Payload Message message) {
        messageService.saveMessage(message);
        System.out.println(message);
        template.convertAndSendToUser(
                message.getRecipient().toString(),
                "/messages",
                message);
        return new ResponseEntity<>(HttpStatus.OK);
    }
}
```

Методы контроллеров получают запросы на сервер с необходимыми параметрами, после чего вызываются методы соответствующего сервиса для обработки запроса. Сервис в свою очередь при необходимости обращается к базе данных, чтобы сохранить новые данные и получить уже имеющиеся.

В серверную часть осталось добавить возможность создания соединения по протоколу WebSocket. Дело в том, что обычный протокол HTTP работает по принципу вопрос-ответ. То есть сервер может отправить данные на клиент только в ответ на запрос. Такой вариант не подходит для реализации мессенджера. Протокол WebSocket позволяет отправлять данные на клиент не дожидаясь запроса.

Класс `WebSocketConfig` является конфигурационным классом для настройки WebSocket в Spring Boot. Он использует аннотацию `@EnableWebSocketMessageBroker`, которая включает поддержку WebSocket и брокера сообщений на основе STOMP (Simple/Streaming Text Oriented Messaging Protocol).

I. `configureMessageBroker(MessageBrokerRegistry registry)`

Этот метод настраивает брокер сообщений, который управляет маршрутизацией сообщений между клиентами через сервер.

Подробности:

1. `registry.enableSimpleBroker("/topic")`

• Включает встроенный брокер сообщений (in-memory broker), который будет обрабатывать сообщения, направленные на каналы с префиксом `/topic`.

• **Пример:** Если клиент подписывается на `/topic/chat`, он будет получать все сообщения, отправленные в этот канал.

• Это удобно для рассылки сообщений нескольким клиентам одновременно (например, уведомлений или сообщений в группах).

2. `registry.setApplicationDestinationPrefixes("/app")`

• Указывает префикс для сообщений, которые отправляются с клиента на сервер.

• **Пример:** Если клиент отправляет сообщение на /app/sendMessage, сервер обрабатывает его с помощью метода, аннотированного `@MessageMapping("/sendMessage")`.

3. `registry.setUserDestinationPrefix(«/topic/{userId}/messages»)`

• Устанавливает префикс для сообщений, направленных конкретным пользователям (point-to-point messaging).

• **Пример:** Сообщение отправляется на /topic/123/messages, где 123 — идентификатор пользователя. Только пользователь с этим идентификатором получит сообщение.

• Это полезно для реализации приватных сообщений.

II. `registerStompEndpoints(StompEndpointRegistry registry)`

Этот метод регистрирует конечные точки **WebSocket**, которые клиенты используют для подключения к серверу.

Подробности:

1. `registry.addEndpoint(«/ws»)`

• Регистрирует WebSocket-эндпоинт по адресу /ws, к которому клиенты могут подключаться.

• **Пример:** Клиент будет устанавливать соединение с сервером через WebSocket на ws://localhost:8080/ws.

2. `setAllowedOriginPatterns("*")`

• Разрешает подключение с любых источников (все домены и порты). Это используется для предотвращения проблем с CORS.

3. `withSockJS()`

• Включает поддержку SockJS, который используется как резервный механизм на случай, если WebSocket недоступен (например, в старых браузерах).

• SockJS автоматически переключается на другие протоколы, такие как AJAX Long Polling или XHR Streaming, чтобы обеспечить стабильную связь.

Заключение

Изучение динамики клеточных взаимодействий при различных значениях параметра η предоставляет важные сведения о том, как изменения в микроокружении могут влиять на поведение различных типов клеток. Этот анализ имеет особое значение для понимания процессов, связанных с онкологией, регенерацией тканей и патогенезом различных заболеваний.

Параметр η, скорее всего, отражает скорость взаимодействия между клетками или уровень их агрессивности. При малых значениях η (например, 0.1) системы остаются сбалансированными, где здоровые клетки способны сохранять свою численность без значительного влияния со стороны лейкозных клеток. Это может быть связано с тем, что в условиях низкой агрессивности лейкозные клетки не имеют достаточной силы, чтобы доминировать над здоровыми клетками. В такой среде здоровые клетки могут активно делиться и поддерживать свое количество, что важно для нормального функционирования организма.

С увеличением значения η (до 0.2 и 0.4) наблюдается изменение динамики: число лейкозных клеток начинает расти, а здоровые клетки начинают подвергаться более значительному стрессу. Это подчеркивает, что даже небольшие изменения в микросреде могут значительно повлиять на здоровье организма. Высокий уровень η может означать, что клетки начинают конкурировать за ресурсы, такие как питательные вещества и пространство, что ведет к ухудшению состояния здоровых клеток.

При ($\eta = 0.4$) мы видим, что лейкозные клетки становятся основным источником угрозы для здоровых клеток. Это может объясняться активной саморазмножающейся природой лейкозных клеток, которые начинают вытеснять здоровые клетки, что приводит к угнетению нормальных гематопоэтических процессов. Такие условия могут также способствовать развитию дополнительных мутаций и активизации других механизмов, которые еще больше усиливают малигнизацию клеток.

Наконец, при высоких значениях η (как 0.8) мы можем говорить о критической ситуации, когда лейкозные клетки практически полностью доминируют. Их присутствие может подавлять иммунный ответ организма, что делает его более уязвимым к инфекциям и другим заболеваниям. В таких условиях нормальная гомеостаза нарушается, и организм не может восстановить утраченные функции. Это драматический пример того, как высоко агрессивная среда приводит к быстрой эволюции злокачественных клеток, которые становятся устойчивыми к терапии и препятствуют нормальному функционированию организма.

Таким образом, исследование влияния параметра η на динамику клеточных взаимодействий является ключевым моментом в понимании сложных биологических систем. Эти знания могут не только помочь в лечении заболеваний, но и расширить наши представления о клеточной биологии, иммунологии и онкологии. В конечном итоге, глубокое понимание этих процессов может улучшить качество жизни пациентов и принести новые подходы в медицинскую практику.

Благодарности

Выражаю особую благодарность моему научному руководителю Половинкину Игорю Петровичу, доценту, доктору физико-математических наук, за значимые замечания и важнейшие советы при проведении исследования и оформления данной статьи.

Литература

1. *Глушков В. Г., Сергеев А. А.* Численные методы решения СЛАУ: Метод сеток и его применения. – Москва : Наука, 2021. – 280 с.

2. Математическая модель лейкоза [Электронный ресурс]. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=irj&paperid=225&option_lang=rus (дата обращения: 01.10.2024).

3. Метод конечных разностей [Электронный ресурс]. URL: https://portal.tpu.ru/SHARED/a/ALEX1479/study/Matmod/Tab1/Tab/11%20%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F%20%D0%9C%D0%B0%D1%82_%D0%BC%D0%BE%D0%B4_%D1%84%D0%B8%D0%B7_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81%D1%81%D0%BE%D0%B2.pdf (дата обращения 09.11.2024).

4. *Смирнова Е. Е., Кузнецов В. В.* Применение дифференциальных уравнений в биомедицинских исследованиях. — Новосибирск : Сибирское университетское издательство, 2019. – 300 с.

5. *Ковалев Д. Д.* Исследование моделей лейкемии с использованием численных методов. // Журнал прикладной математики. – 2023. – Т. 58, № 2. – С. 45–56.

6. *Глушков В. Г., Сергеев А. А.* Численные методы решения СЛАУ: Метод сеток и его применения. – Москва : Наука, 2021. – 280 с.

7. *Кузнецов И. И., Петрова Н. Н.* Методы численного решения линейных уравнений. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2020. – 320 с.

8. *Романов В. В.* Алгоритмы и программирование методов решения СЛАУ. – Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2023. – 180 с.

9. *Fuentes-Garí M.* A mathematical model of subpopulation kinetics for the deconvolution of leukaemia heterogeneity / M. Fuentes-Garí, R. Misener, D. García-Munzer and others // Journal of the Royal Society Interface. – 2015. – V. 12, № 108. – 20150276. – doi:10.1098/rsif.2015.0276.

10. *Berezansky L.* Stability and Controllability Issues in Mathematical Modeling of the Intensive Treatment of Leukemia / L. Berezansky, S. Bunimovich-Mendrazitsky, B. Shklyar // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2015. – V. 167, № 1. – P. 326–341. – doi:10.1007/s10957-015-0717-9.

11. *Rădulescu I. R.* A complex mathematical model with competition in Leukemia with immune response – An optimal control approach / I. R. Rădulescu, D. Cândea, A. Halanay // IFIP Advances in Information and Communication Technology. – 2016. – V. 494. – P. 430–441. – doi:10.1063/1.4765573

12. *Bunimovich-Mendrazitsky C.* Mathematical model of pulsed immunotherapy for bladder cancer / C. BunimovichMendrazitsky, H. Byrne, L. Stone // Bulletin of mathematical biology. – 2008. – V. 70, № 7. – P. 2055–2076. – doi:10.1007/s11538-008-9344-z.

13. *Clapp G.* A review of mathematical models for leukemia and lymphoma / G. Clapp, D. Levy // Drug Discovery Today: Disease Models. – 2015. – V. 16, № 2. – P. 1–6.

14. *Kolpak E. P.* Neoplasm Morbidity among the Population of Russia / E. P. Kolpak, I. S. Frantsuzova, K. V. Kuvshinova // International journal of advanced biotechnology and research. – 2017. – V. 8, № 3. – P. 2315–2322.

15. *Жукова И. В.* Математические модели злокачественной опухоли / И. В. Жукова, Е. П. Колпак // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2014. – № 3. – С. 5–18.

УДК 004.056.2

ПРОТОКОЛ RPC И ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ КАК СРЕДСТВА ОБЕСПЕЧЕНИЯ УДАЛЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЗЛОВ В СЕТИ

К. С. Ухина

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается средства обеспечения удаленного вызова процедур на примере реализаций протокола RPC.
Ключевые слова: удаленный вызов процедур, RPC, gRPC, RMI, HTTP/2, заглушка, маршалинг/демаршалинг, Protocol Buffer.

Задачи протокола RPC (Remote procedure Call)

Протокол RPC позволяет программам вызывать процедуры или функции, которые находятся на удаленном узле. При этом создается иллюзия, что процедура выполняется локально. Таким образом решаются следующие задачи:

1. Взаимодействие программ, которые написаны на разных языках.
2. Распределение вычислений между несколькими узлами.
3. Возможность повторного использования кода.
4. Возможность разрабатывать приложения в виде набора распределенных модулей.
5. Распределенное тестирование приложения на различных платформах.

Проблемы, возникающие при использовании протокола RPC:

1. Задержки в сети могут снизить производительность, увеличивая время отклика.
2. Сбои сети могут привести к потере запроса или ответа.
3. Обеспечение совместимости между клиентской и серверной версиями может быть сложной задачей при обновлении или обслуживании системы

Принцип работы протокола RPC

Маршалинг — это конвертирование данных и аргументов функции в формат, подходящий для передачи по сети.

Демаршалинг — это обратный процесс, при котором переданные данные преобразуются в значимые аргументы.

Заглушка — процедура, которая вызывается вместо фактического кода, реализующего логику. Заглушка выполняет маршалинг/демаршалинг данных и отправляет запрос/ответ между узлами.

Алгоритм выполнения удаленной процедуры (рис. ниже):

1. Процесс на клиентской машине вызывает процедуру-заглушку клиента.
2. Клиентская заглушка упаковывает данные о процедуре — имя и параметры — в структуру для отправки по сети.
3. Управление передается ядру ОС клиента, которое дополняет сообщение заголовками и метками, в которых содержится информация об адресе клиента, типе сообщения (запрос/ответ), идентификатор процедуры.
4. Сообщение передается ядру ОС сервера, которое передает управление серверной заглушке.
5. Серверная заглушка выполняет демаршалинг данных, распаковывает имя процедуры и параметры.

6. Данные передаются процессу на сервере, который выполняет процедуру.

7. Результат процедуры передается в обратном направлении по цепочке от серверной заглушки до клиентской [1].

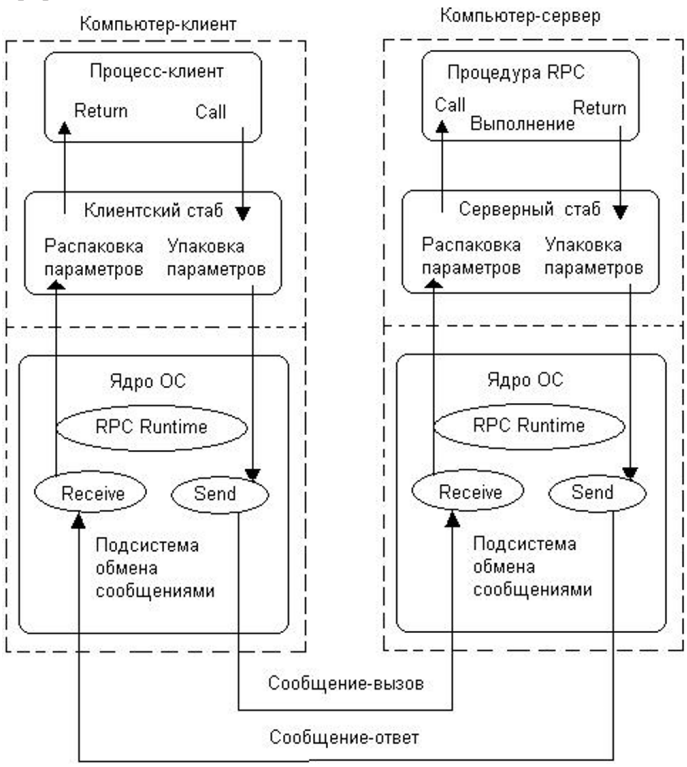


Рис. Схема выполнения удаленной процедуры

Обзор технологий для реализации удалённого взаимодействия между приложениями

• DCE/RPC — двоичный протокол на базе различных транспортных протоколов, в том числе TCP/IP и Named Pipes из протокола SMB/CIFS;

• DCOM — объектно-ориентированное расширение DCE/RPC, позволяющее передавать ссылки на объекты и вызывать методы объектов через таковые ссылки;

• Microsoft RPC;

• gRPC;

• ZeroC ICE;

• JSON-RPC — текстовый протокол на базе HTTP;

• .NET Remoting — двоичный протокол на базе TCP, UDP, HTTP;

• Java RMI — вызов удалённых методов для платформы Java;

• SOAP — текстовый протокол на базе HTTP;

• Sun RPC — двоичный протокол на базе TCP и UDP и XDR;

• XML RPC — текстовый протокол на базе HTTP.

Особенности фреймворка gRPC

GRPC — RPC-фреймворк с открытым исходным кодом, разработанный Google. Фреймворк поддерживается многими языками, что дает возможность разрабатывать клиент и сервер на разных языках.

В качестве транспортного протокола gRPC использует HTTP/2. По сравнению с HTTP/1.1 HTTP/2 повышает общую производительность, позволяя нескольким запросам и ответам передаваться параллельно в рамках одного соединения [4].

Для описания вида структурированных данных используется Protocol Buffers — язык описания механизма сериализации. Структура данных, которая будет использоваться для отправки сообщений между узлами, а так же сервисы с методами, которые будут вызываться, описываются в файлах специального типа *.proto. Из таких файлов генерируются клиентская и серверная заглушки, которые далее будут использоваться для реализации логики приложения [5]. Пример описания сервиса и метода в файле *.proto представлен ниже.

```
service SaveService{
    rpc SaveUserToDB(UserRequest) returns SaveResponse;
}
//тип параметра метода
message UserRequest{
    string name = 1;
    string age = 2;
}
//тип возвращаемого значения метода
message SaveResponse{
    boolean result = 1;
}
```

Из файлов *.proto генерируются Java файлы. В результате генерации будут получены следующие файлы:

- *UserRequest.java* — определение типа *UserRequest*;
- *SaveResponse.java* — определение типа *SaveResponse*;
- *SaveServiceImplBase.java* — абстрактный класс *SaveServiceImplBase*, который обеспечивает реализацию всех операций, которые определили в интерфейсе сервиса.

Недостатки использования фреймворка gRPC:

1. Сложность освоения из-за специфичности protobuf и HTTP/2;
2. Не поддерживается напрямую большинством браузеров, поэтому существует необходимость в использовании прокси;
3. Ограниченность форматом Protocol Buffer;
4. Необходимость настроить HTTP/2 на уровне сетевого интерфейса [5].

Особенности технологии RMI

RMI (Remote Method Invocation) — механизм взаимодействиями между двумя Java-машинами, позволяющий вызывать удаленные методы объекта.

Основные принципы RMI:

1. Объекты реализуют специальные интерфейсы (Remote), которые определяют методы, доступные для удалённого вызова.
2. Параметры метода и возвращаемое значение должны быть подвержены маршалингу.
3. Для того чтобы клиентский код мог найти удалённые объекты, RMI предоставляет реестр удалённых объектов.

Реестр RMI — это пространство имен, в котором размещаются все объекты сервера. Каждый раз, когда сервер создает объект, он регистрирует его в RMIregistry. Объекты зарегистрированы под уникальным именем (bind name) [3].

Одна из центральных и уникальных функций RMI является возможность загрузки определение class объекта, если class не определяется в виртуальной машине Java получателя. Все типы и поведение объекта, ранее доступного только в единственной виртуальной машине Java, могут быть переданы другой.

В RMI *удаленный* интерфейс — это интерфейс, который объявляет набор методов, которые могут быть вызваны с удалённой виртуальной машины Java. Удаленный интерфейс должен соответствовать следующим требованиям:

• Удаленный интерфейс должен наследовать, прямо или косвенно, интерфейс java.rmi. Remote.

• Каждое объявление метода в удалённом интерфейсе или его супер-интерфейсах должно соответствовать требованиям объявления *удалённого метода*, как показано ниже:

– Объявление удалённого метода должно включать исключение java.rmi.RemoteException;

– В объявлении удалённого метода удалённый объект, объявленный в качестве параметра или возвращаемого значения должен быть объявлен как удалённый *интерфейс*, а не как класс реализации этого интерфейса.

```
public interface HelloService extends java.rmi.Remote {
        public void sayHello(String name)
                        throws java.rmi.RemoteException;
}
```

Для клиента библиотека RMI будет динамически создавать заглушку. Далее на сервере необходимо описать реализацию удаленного интерфейса и добавить ее в реестр, чтобы клиент смог вызвать реализацию, используя заглушку. Получение из реестра заглушки и вызов метода представлен ниже [3].

```
Registry registry = LocateRegistry.getRegistry();
HelloService server = (HelloService) registry.lookup("HelloService");
server.sayHello("World");
```

Недостатки использования RMI:

1. Поддержка только одного языка программирования JAVA.
2. Собственный протокол взаимодействия.
3. Трудность интегрирования с существующими приложениями.
4. Плохая масштабируемость.

Заключение

При выборе метода и средств обеспечения удаленного взаимодействия необходимо опираться на целевую задачу. Каждый подход имеет свои особенности, которые могут пригодиться в той или иной ситуации. Так, например, RMI подходит для взаимодействия между Java-приложениями, однако если существует необходимость использовать другой язык программирования, можно рассмотреть другие подходы взаимодействия.

Литература

1. Что такое RPC удаленного вызова процедуры в ОС? : [сайт]. – 2023. – URL: https://andreyex.ru/stati/chto-takoe-rpc-udalennogo-vyzova-protsedury-v-os/ (дата обращения 10.10.2014).

2. Удалённый вызов процедур : [сайт]. – 2023. – URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/Удалённый_вызов_процедур (дата обращения 10.10.2014).

3. *Esmond Pitt, Kathy McNiff*. Java.rmi: The Remote Method Invocation Guide . – Addison-Wesley; First Edition, 2001. – 320 с.

4. Introduction to gRPC : [сайт]. – 2024. – URL: https://www.baeldung.com/grpc-introduction (дата обращений 13.10.2024).

5. *Kasun Indrasiri, Danesh Kuruppu*. gRPC: Up and Running . – O'Reilly Media, Inc., 2020. – 204 с.

УДК 004.415.2

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ХИМЧИСТКИ

Е. П. Хворостинина, М. В. Матвеева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе представлена задача проектирования и разработки клиентской части веб-приложения для химчистки, позволяющего клиентам самостоятельно заполнить форму квитанции.
Ключевые слова: веб-приложение, приложение, химчистка, квитанция, приложение для химчистки, онлайн заказ.

Введение

В сфере химчисток оформление заказов часто сопряжено с длительными процедурами и ручным заполнением квитанций. Отсутствие удобного инструмента для самостоятельного составления и проверки шаблонов квитанций замедляет процесс обслуживания клиентов и увеличивает трудозатраты персонала.

В настоящий момент не существует ни одного веб-приложения, где пользователь мог бы сам составить шаблон квитанции, который уже впоследствии проверялся бы и корректировался сотрудником химчистки. Создание приложения, позволяющего заполнять клиентские квитанции, ускорило бы процесс приема и оформления заказа. Пользователь сможет просматривать статус заказа, а сотрудники будут тратить меньше времени на создание и заполнение клиентской квитанции.

1. Анализ существующих приложений

Был проведен анализ имеющихся веб-приложений химчисток города Воронежа, а именно София, Стиралкин и Wash of Fame [1–3].

София предоставляет базовую функциональность: просмотр предлагаемых услуг, цен на эти услуги, проводимых акций, адресов пунктов приема-выдачи, собственную контактную информацию. Существует возможность фильтрации услуг. Недостатком является то, что ресурс не предоставляет возможности просмотра отзывов клиентов.

Стиралкин сервис также имеет классический набор функциональных действий таких как: просмотр предлагаемых услуг с указанием цен на эти услуги, адресов пунктов приема-выдачи, собственную контактную информацию, возможность просмотра отзывов и примерный срок оказания услуги. Недостатком является отсутствие фильтрации услуг.

Wash of Fame сервис предоставляет возможность просмотра предлагаемых услуг с указанием цен на эти услуги, существует возможность просмотра составляющей услуги, адресов пунктов приема-выдачи, собственную контактную информацию, проводимых акций и возможность просмотра выполненных работ. Недостатком является отсутствие фильтрации услуг.

Также на представленных сайтах нет возможности оформлять заказы в режиме онлайн.

В табл. 1 представлены результаты сравнения функциональности разрабатываемого приложения и существующих аналогов.

Таблица 1

Анализ существующих приложений

Название	Перегруженность страниц	Интуитивно-понятный интерфейс	Возможность заказа	Фильтрация услуг
София	+	+	–	+
Стиралкин	+	–	–	–
Wash of Fame	–	+	–	–
Разрабатываемое веб-приложение	–	+	+	+

2. Постановка задачи

Из вышесказанного следует, что разрабатываемое приложение должно предоставлять конечному пользователю удобный интерфейс, позволяющий осуществить:

- возможность фильтровать услуги;
- добавление товаров в клиентскую квитанцию;
- добавление дополнительных услуг в заказ;
- возможность отслеживать статус заказа;
- возможность оставить комментарий к заказу;
- возможность удалить уже добавленные услуги;
- возможность оформить заказ;
- со стороны администратора — вносить изменения в статус заказа;
- со стороны администратора — вносить скидку в заказ.

Для проектирования был использован язык графического описания UML. На рис. 1. представлена диаграмма вариантов использования, которая иллюстрирует функциональность веб-приложения и возможности пользователя.

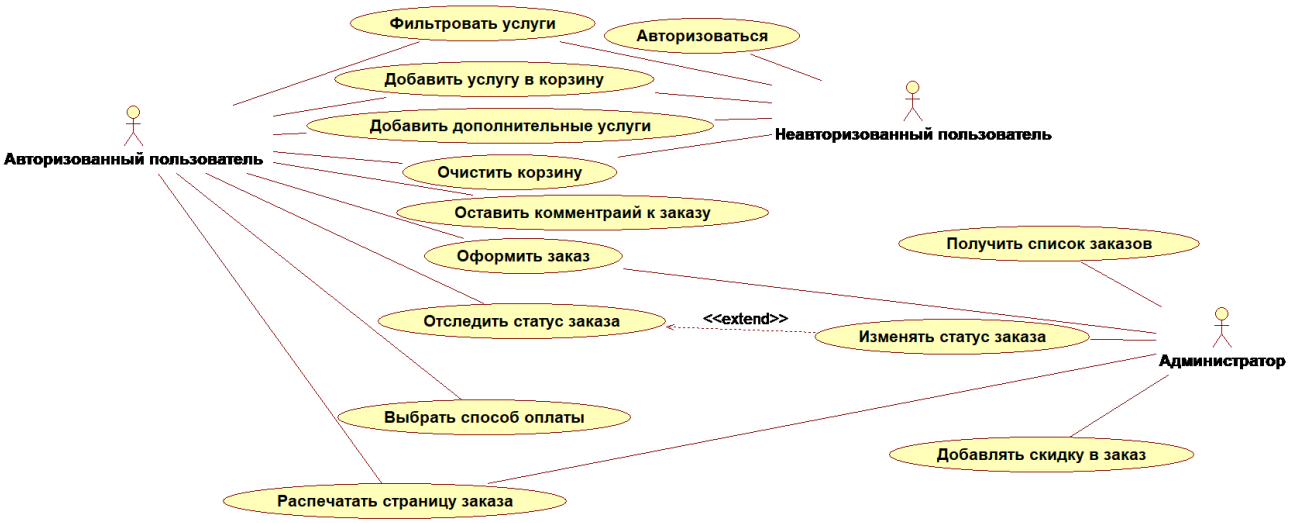


Рис. 1. Диаграмма вариантов использования

В данной системе представлено три актера.

Неавторизованный пользователь может совершать следующие действия.

1. Авторизоваться на стайте — пользователь может открыть страницу с регистрацией и создать аккаунт.

2. Фильтровать услуги — пользователь может, нажав на соответствующие кнопки, оставить только интересующие услуги.

3. Добавить услугу в корзину — пользователь может просмотреть услуги и добавить их в корзину.

4. Добавить дополнительные услуги — пользователь может добавить к заказу дополнительные услуги. Такие как: озонирование, покраска и замена бегунка.

5. Очистить корзину

Авторизованный пользователь может совершать следующие действия.

1. Фильтровать услуги.

2. Добавить услугу в корзину

3. Добавить дополнительные.

4. Очистить корзину.

5. Оставить комментарий к заказу — пользователь может написать комментарий во время оформления заказа.

6. Выбрать способ оплаты — пользователь может выбрать способ оплаты заказа.

7. Оформить заказ — пользователь может оформить заказ содержимого корзины.

8. Распечатать страницу заказа — пользователь может распечатать страницу заказа в формате PDF.

9. Отследить статус заказа — пользователь может отслеживать статус заказа в электронной квитанции.

Администратор может совершать следующие действия.

1. Получить список заказов — после входа сотрудник получает список всех оформленных пользователем заказов.

2. Изменять статус заказа — сотрудник химчистки может вносить изменения в статус заказа.

3. Добавлять скидку в заказ — сотрудник может добавить в заказ скидку.

4. Распечатать страницу заказа — сотрудник может распечатать страницу заказа в формате PDF.

3. Средства реализации

Поставленная задача будет реализована с использованием следующих средств:

• Visual Studio Code текстовый редактор для кроссплатформенной разработки веб- и облачных приложений [4];

• JavaScript, HTML, CSS [6, 7];

• СУБД PostgreSQL;

• библиотека Ulkit CSS [5].

Пример интерфейса (страница оформления заказа) представлена на рис. 2, 3.

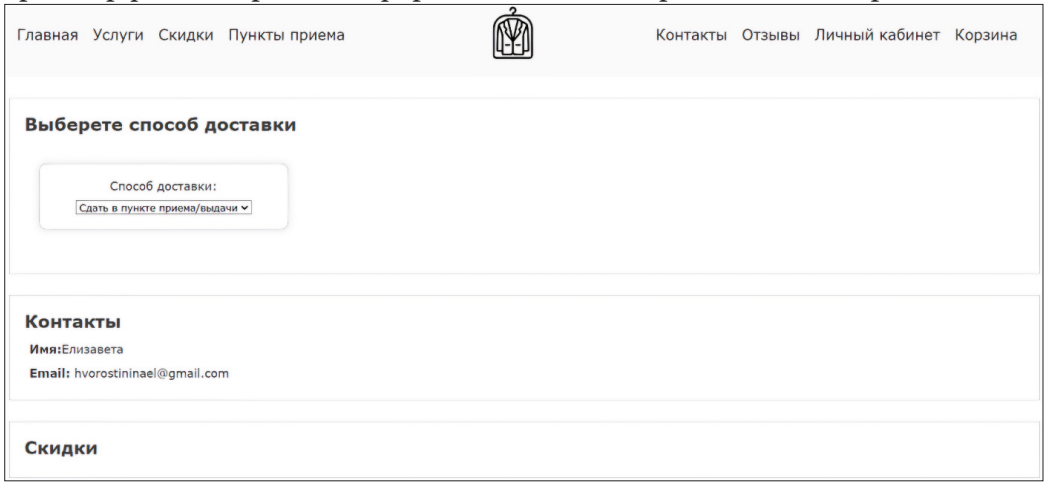


Рис. 2. Страница оформления заказа

Рис. 3. Страница оформления заказа

На рис. 4 представлен блок главной страницы, отвечающий за предоставляемые услуги. Каталог представляет собой адаптивную карусель с кнопками фильтрации сверху.

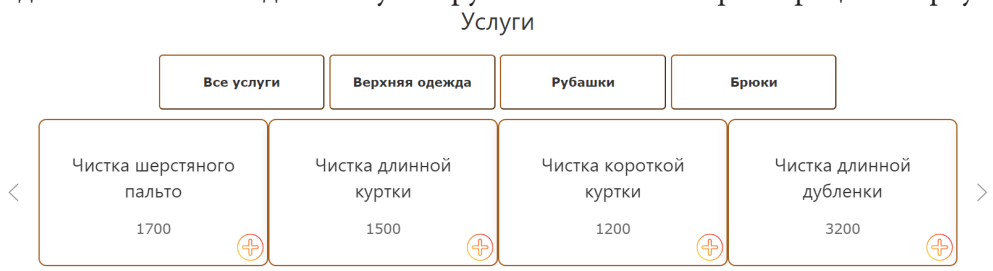


Рис. 4. Блок каталога

Пример работы фильтрации представлен на рис. 5.

Рис. 5. Пример фильтрации услуг

4. Архитектура приложения

Веб-приложение состоит из 5 основных компонентов: клиентской части, серверной части, базы данных, файлового сервера и JavaScript API Яндекс карт (рис. 6).

1. Компонент оформления заказ — компонент, отвечающий за оформление заказа клиентом.
2. Компонент контента — выводит информацию из базы данных на страницу сайта.
3. HTTP-клиент — компонент, который реализует взаимодействие с сервером системы.
4. Компонент обработки запросов — компонент, отвечающий за обработку запросов, которые пришли от веб-интерфейса системы;
5. Компонент работы с БД — компонент, отвечающий за взаимодействие с базой данных системы.
6. База данных — хранит информацию о пользователях и метаданные.

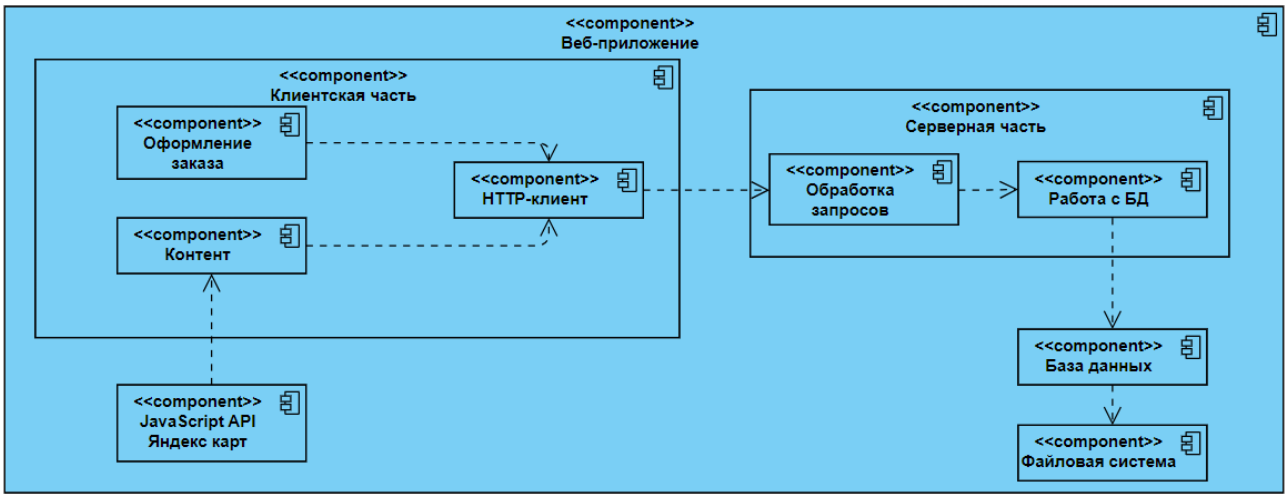


Рис. 6. Диаграмма компонентов веб-приложения

7. Файловый сервер — хранит фактические файлы, такие как изображения и большие текстовые документы.

8. JavaScript API Яндекс карт — отображает на странице сайта Яндекс карту с метками на ней.

5. Логическая модель базы данных

Логическая модель базы данных была спроектирована с помощью программы PowerDesigner и представлена представлена на рис. 7.

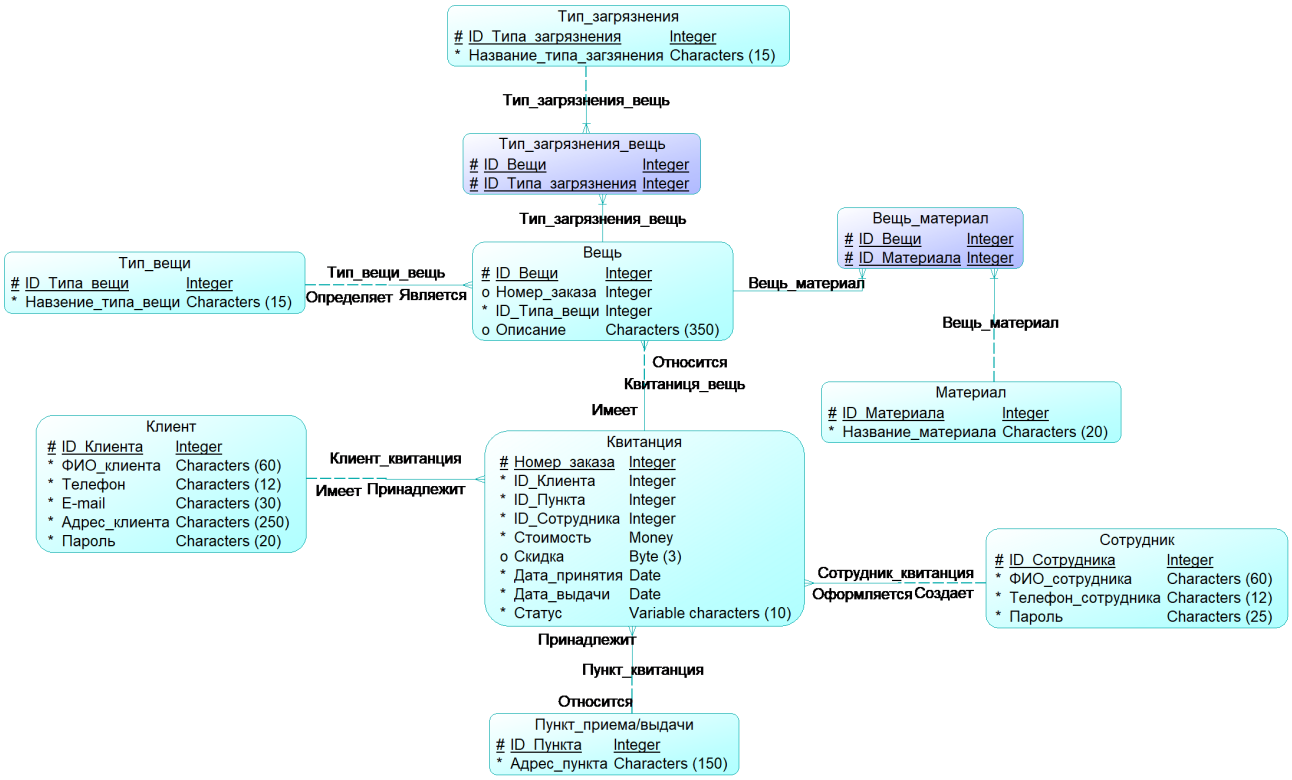


Рис. 7. Логическая модель БД

Сущность «Заказ» хранит информацию о заказе: номер_заказа, данные клиента, информацию о пункте выдачи, цену, скидку, даты приема и выдачи, а также статус заказа.

Сущность «Вещь» содержит информацию о вещи: id_типа_вещи, номер заказа и описание вещи.

Сущность «Клиент» содержит информацию о клиенте химчистки: ФИО клиента, его телефон, адрес электронной почти и адрес.

Сущность «Пункт приема/выдачи» хранит информацию о пункте приема и его адресе.

Сущность «Сотрудник» содержит информацию о сотрудниках химчистки: ФИО сотрудника, его телефон.

Сущность «Тип_вещи» хранит информацию о типе вещи и названии типа.

Сущность «Материал» хранит информацию о материале и его названии.

Сущность «Материал_вещь» хранит информацию о материале вещи.

Сущность «Тип_загрязнения» хранит информацию о загрязнении и его названии.

Сущность «Типа_загрязнения_вещь» хранит информацию о конкретном типе загрязнения на определенной вещи.

Замечание: все атрибуты, имеющие имя «ID», являются суррогатными ключами.

Заключение

В результате работы была реализована клиентская часть веб-приложения химчистки, реализующее следующую функциональность:

- добавление товаров в клиентскую квитанцию;
- возможность отслеживать статус заказа;
- возможность редактировать уже добавленный продукт.

Также были выполнены следующие задачи:

- анализ существующих решений;
- разработка требований к веб-приложению;
- разработка дизайна веб-приложения, проектирование макетов страниц;
- проектирование архитектуры веб-приложения;
- проектирование базы данных;
- реализация клиентской части веб-приложения;

В дальнейшем планируется реализовать серверную часть

Литература

1. Химчистка София. – URL: https://sofia-dryclean.ru/. (дата обращения 12.01.2024)

2. Химчистка Стиралкин. – URL: https://stiralkin36.ru/. (дата обращения 19.01.2024)

3. Химчистка Wash of Fame. – URL: https://washoffame.ru/. (дата обращения 19.01.2024)

4 *Адам Фримен, Эрик Робсон*. «HTML, CSS и JavaScript Web-разработка. Библия пользователя», 3-е изд. – Вильямс, 2020. – 635 с.

5. Адаптивная карусель для сайта. – URL: https://asuikit.com/v3/slider

6. *Васильев А. П.* JavaScript в примерах и задачах. 3-е изд. – СПб. : Эксмо, 2019. – 720 с.

6. *Дэвид Флэнаган*. «JavaScript. Подробное руководство», 6-е изд. – O'Reilly, 2017. – 1080 с.

7. Общие архитектуры веб-приложений. – URL: https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/architecture/modern-web-

8. Общий справочник веб-приложений. – URL: https://html5book.ru/

УДК 004.42

ОСНОВНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ UNITY DOTS НА ПРИКЛАДНОМ ПРИМЕРЕ

А. Е. Холодова, Е. В. Трофименко

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается технологический стек Unity DOTS, который Unity предлагает, как решение для создания амбициозных и производительных приложений. Также сделан краткий обзор на составляющие этого стека, его преимущества и недостатки и сравнительный анализ привычного подхода программирования приложений в Unity с помощью компонентов и MonoBehaviour скриптов. Приведен мини-пример, сделанный с использованием двух технологий для их сравнения.
Ключевые слова: Unity, Unity DOTS, Job System, ECS, шейдеры.

Введение

Впервые Unity рассказали о Unity DOTS в октябре 2018. DOTS расшифровывается как Data Oriented Technology Stack — технологический стек, ориентированный на данные. Было показано техническое демо Megacity, запущенное на телефоне, с частотой обновления кадров равной 60 кадров в секунду.

Обновлённая версия вышла в мае 2022 года и уже в сентябре была представлена новая версия — экспериментальная 1.0. В которой была улучшена производительность и повышено удобство разработки. Летом 2023 года Unity назвали DOTS ECS официально готовым к использованию в разработках. [1]

В данной статье будут рассмотрены основные правила работы с DOTS и его главные принципы на основе мини-примера игры.

1. Unity DOTS

Unity DOTS — Это комбинация, состоящая из трех основных инструментов: Jobs, Burst и ECS.

ECS — Entity Component System. Это иная парадигма программирования, основанная на том, как работают процессоры и их память. Код, написанный в этой парадигме просто сделать мультипоточным. К нему можно также добавить векторизацию (SIMD). Данные обрабатываются целыми чанками (блоками) — это эффективно задействует процессорный кэш, так как в цикле следующие элементы чанка уже загружены в кэш. А значит, процессор задействуется полноценно и эффективнее.

Jobs — это система мультипоточности, которая была использована Unity и до DOTS. Её адаптировали под C# и создали систему потокобезопасности, позволив упростить процесс создания мультипоточности

Burst — это компилятор высокопроизводительного и оптимизированного кода для C#. Он имеет множество ограничений, но в итоге получается производительность, которая в некоторых случаях превосходит производительность игр в C++.

2. Пример работы с Unity DOTS

2.1. Подготовка к работе

Для обзора основных возможностей Unity DOTS, было реализован мини-приложение с использованием стандартного шаблона Unity 3D проекта и применением Universal Render Pipeline

(URP). Для работы с ECS нужно установить пакеты com.unity.entities и com.unity.entities.graphics с помощью Package Manager. Пакет Entities реализует паттерн Entity, Component, System, а пакет Entities Graphics использует Scriptable Render Pipeline (SRP), чтобы отрисовывать на уроне entity. Также в коде будут использоваться unmanaged коллекции из Collections и библиотека Mathematics, оптимизированные специально для Burst.

Для IDE Unity советует использовать Visual Studio 2022+ или Rider 2021.3.3. [2, 3]

На уровне мини приложения будет создано заданное количество кубов-префабов[1]. Часть кубов меняет свой цвет на каждый тик, другая — нет. Процент неизменных кубов задается заранее.

2.2. Создание саб-сцены и спавнера сущностей

Работу с ECS следует начинать с создания саб-сцены на уровне. В этой саб-сцене хранятся и отрисовываются сущности и соответствующие им префабы или меши. Для создания саб-сцены необходимо открыть нужный уровень и в иерархии сцены уровня нажать правой кнопкой мыши. Далее в меню нужно выбрать New Sub Scene –> Empty Scene. После сохранения новой саб-сцены она появится на уровне и ее можно использовать [4].

Для создания сущностей кубов-префабов сделаем отдельный префаб объект с компонентом Spawner.

Компоненты в Unity DOTS ECS могут быть managed и unmanaged:

1. Интерфейс IComponentData помечает структуры как unmanaged компоненты. Это предпочтительный вариант из двух, так как они доступны для jobs и в Burst-откомпилированном коде. В этих структурах могут быть преобразуемые типы, простые типы, коллекции из Collections.

2. Интерфейс IComponentData помечает классы как managed компоненты. Эти компоненты используются реже. Они могут содержать поля любых типов. Но эти компоненты не могут быть использованы в jobs, не оптимизируются Burst компилятором, нуждаются в garbage collection и должны иметь дефолтный конструктор для сериализации. Это все сказывается на производительности и удобстве работы с данными компонентами. Поэтому Unity советует сокращать количество managed компонент в проектах.

Компонент Spawner будет unmanaged компонентом, и следовательно, структурой с интерфейсом IComponentData. У него будут поля Entity для префаба с мешем куба-префаба, float3 для хранения позиции для создания следующего префаба, int количества кубов и float — вероятность, что куб не будет менять своего цвета.

Далее необходимо создать authoring и baker скрипт. Они имеют определенную структуру и служат для запекания значений из Unity компонентов в ECS компоненты. Создание класса SpawnerAuthoring, являющегося наследником MonoBehaviour, позволяет задать значение для числа кубов-сущностей и вероятности неизменяемости их цвета. Эти значения затем запекает в Entity класс SpawnerBaker в методе Bake. В этом методе создается Entity, к которой добавляются все компоненты из SpawnerAuthoring и их значения. Далее можно использовать и обрабатывать эти значения компонент сущностей в системах.

Были созданы все нужные сущности в коде. Теперь в саб-сцене создается пустой GameObject с названием Spawner. К нему добавляем компонент SpawnerAuthoring и в инспекторе устанавливаем значения числа префабов, шанса неизменяемости, префаб куба и начальную позицию для создания первого куба.

С пакетом Entities было добавлено окно Entities Hierarchy. В нем можно включить несколько режимов просмотра entity: authoring, runtime и смешанный. Два последних режима пока-

[1]Префаб — это шаблон для объекта в игровом движке Unity, аналогичен классу в ООП.

зывают сгенерированные из всех authoring GameObject бейкерами сущности. Пример вывода этого режима показан на рис. 1.

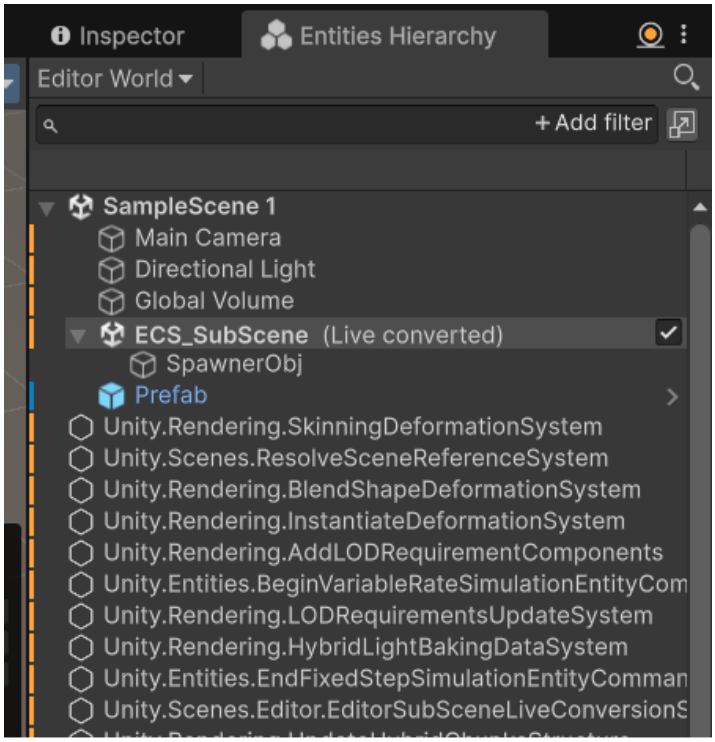


Рис. 1. Окно Entities Hierarchy

В этом окне показываются и сущности, и все GameObject. Если выбрать определенную сущность (все сущности отмечены шестиугольником), то можно просмотреть все компоненты данной сущности и их значения, установленные бейкером или системой, в окне Inspector.

Для свойств кубов-сущностей были заведены unmanaged компонента ColorComp, хранящая значения цвета меша куба, и компонент-флаг IsVisible, определяющий видно ли изменение цвета у куба-сущности.

В Unity DOTS (Data-Oriented Technology Stack) архетипы, чанки и точки синка играют ключевую роль в эффективности работы с данными сущностей. Каждый архетип представляет собой объединенную группу компонентов. Архетипы позволяют эффективно управлять группами сущностей с одинаковыми компонентами. Архетип объекта определяет, где в ECS хранятся компоненты этого объекта. ECS распределяет память в виде «чанков» или блоков, каждый из которых представлен объектом ArchetypeChunk. Блок всегда содержит объекты одного архетипа. Когда блок памяти заполняется, ECS выделяет новый блок памяти для любых новых сущностей, созданных с тем же архетипом. Блоки помогают использовать процессор и его память на максимум, они могут быть закэшированы в памяти. Если добавить или удалить компонент в уже существующем архетипе, ECS перемещает компоненты для этого объекта в другой архетип и другой блок и этот момент называется точкой синка. Таких точек пытаются избегать и минимизировать их количество, так как они требуют времени на обработку и могут быть выполнены только в главном потоке. [5]

1.3. Создание систем для обработки компонентов сущностей

Далее для обработки компонент сущностей необходимо создать системы. Именно с их помощью можно будет создавать кубы и соответствующие им сущности, менять цвет этих кубов.

Нужно реализовать систему создания на сцене кубов — OptimizedSpawnerSystem. Она реализует интерфейс ISystem. Важной для этой системы будет функция OnUpdate(ref SystemState state). В ней создается EntityCommandBuffer и определяется, и планируется параллельный запуск работы ProcessSpawnerJob. Работу и функцию OnUpdate можно ускорить, добавив к ним атрибут [BurstCompile].

EntityCommandBuffer позволяет управлять командами по созданию, обновлению и удалению сущностей. С его помощью можно планировать команды и выполнять их позднее, когда основные системы уже завершили свой расчет. Создать экземпляр этого класса можно, вызвав метод CreateCommandBuffer из синглтона BeginSimulationEntityCommandBufferSystem. Это система в Unity, которая управляет жизненным циклом буферов команд.

Работа ProcessSpawnerJob имеет один метод Execute. Здесь реализована вся логика, которую нужно распределить по потокам. В параметрах этого метода можно указывать компоненты, у которых понадобится изменять или читать значения. Работа обрабатывает сущности целыми чанками и таким образом оптимизирует процесс доступа к компонентам и их обработку. Для создания и размещения на сцене сущностей кубов была реализована следующая логика:

1. Если количество сущностей к созданию меньше или равно 0, то ничего не будет создано. Работа будет закончена.

2. Если есть сущности для создания, т. е. их количество > 0, то они будут созданы на карте. Работа продолжает свое выполнение.

3. В очередь EntityCommandBuffer записывается действие Instantiate по созданию в мире сущности с префабом, который был указан в SpawnerAuthoring и запечен в компонент Spawner с помощью бейкера SpawnerBaker.

4. Далее в очередь добавляется распоряжение об изменении уже существующего компонента LocalTransform с помощью метода SetComponent. После этого изменения префаб сущности будет перемещен в указанную точку.

5. Далее в EntityCommandBuffer добавляются новые компоненты с помощью AddComponent: ColorComp и DebugChunkColorProperty(об этом компоненте будет рассказано подробнее ниже), компонент флаг IsVisible.

6. Уменьшается количество сущностей к созданию и размещению и обновляется позиция для размещения следующей сущности.

Стоит отметить, что начальные значения для цвета меша сущности задаются случайным образом, как и вероятность, что этот меш будет менять цвет. Эти значения генерируются с помощью методов из класса UnityEngine.Random. Эти методы (в данном случае конкретно метод Range) нельзя вызывать в параллельном коде, а значит нельзя и вызывать внутри кода работы. Поэтому на моменте инициализации работы ей передаются все параметры, которые не получится получить внутри метода работы Execute, который будет впоследствии оптимизирован и распараллелен.

Система смены цвета реализована в классе ChangeColorsSystem, наследующем класс SystemBase. В его методе OnUpdate запланирован запрос всех сущностей, у которых есть компоненты DebugChunkColorProperty, ColorComp и IsVisible, и их обработка. Это реализовано с помощью метода Entities.ForEach, который позволяет итерировать по всем сущностям с компонентами, переданными как параметры этой функции. В данном примере происходит следующая обработка данных компонентов:

1. В значения компонента DebugChunkColorProperty записываются текущие значения компонента ColorComp

2. Обновляются значения компоненты ColorComp. Они получают плюс 5 к своим текущим значениям. Если значение становится больше 255, то оно обнуляется

Для рендера объектов на сцене Unity DOTS просит выбирать пайплайны, которые совместимы с созданием экземпляров DOTS. Для стандартных Universal Render Pipeline (URP) и

High Definition Render Pipeline (HDRP) это условие соблюдено. Поэтому для смены цвета меша кубов необходимо создать свой шейдер, тоже совместимый с DOTS, и назначить его шейдером для куба, который подключается в материале меша куба. Для создания необходимо в меню Create выбрать пункт ShaderGraph (если его нет, то нужно подключить в Package Manager пакет ShaderGraph). Далее в меню нужно выбрать подходящую версию шейдера в зависимости от выбранного графического пайплана. В данном примере это URP -> Lit Shader Graph. В этом шейдере нужно завести собственный параметр-вектор с произвольным именем и подключить его к полю Base Color ноды Fragment. [6]

После этого нужно реализовать компонент DebugChunkColorProperty. Это обычный компонент, у которого есть одно поле — вектор. Это поле связывается с параметром из шейдера с помощью атрибута класса [MaterialProperty("имя атрибута")]. Таким образом можно работать еще и со значениями для BaseColor, BumpScale, Cutoff, EmissionColor, Metallic, OcclusionStrength, Smoothness, SpecColor. [7]

Теперь любое изменение в компоненте DebugChunkColorProperty будет передаваться параметру из шейдера и применяться на мешах кубов.

3. Сравнение с обычным подходом к разработке в Unity

Также в рамках работы был реализован тот же самый мини-приложение, но с использованием стандартного подхода с компонентами и скриптами MonoBehaviour. Для этого был создан отдельный уровень без саб-сцены для Unity ECS, скрипт MonoBehaviour для смены цвета и создания и размещения кубов. Вся логика в этих скриптах аналогична той, которая реализована в системах мини-проекта выше. Результат работы этой реализации мини-проекта представлен на рис. 2.

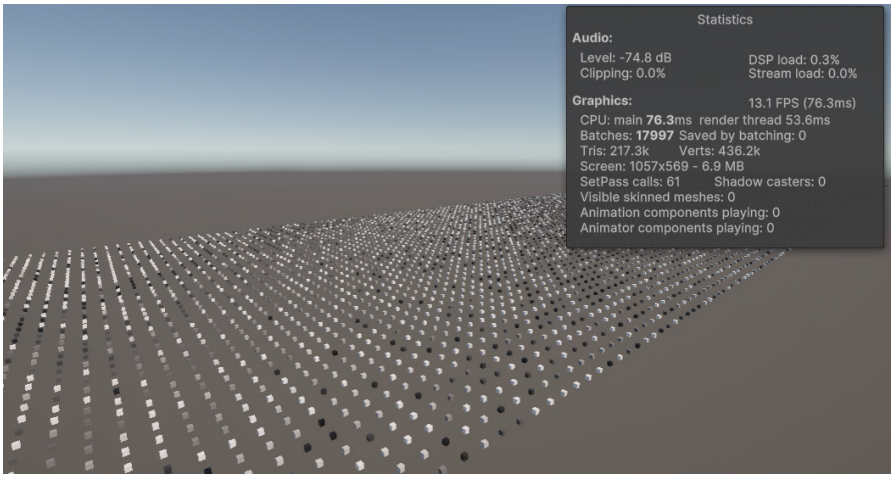


Рис. 2. Результат работы мини-примера Unity MonoBehaviour

Результат работы мини-проекта с использованием Unity DOTS приведен на рис.3. При количестве кубов на сцене равном 10_000 и шансе, что куб не будет менять своего цвета, равном 20 % обработка рендер и основного потока занимают меньше 7 миллисекунд. Количество кадров в секунду мини-примера колеблется от 120 до 150. Реализация этого же мини-примера на MonoBehaviour скриптах с такими же параметрами генерации имеет производительность в 10 раз меньше — только 11–15 кадров в секунду.

В табл. 1 показана производительность двух реализаций мини-примера.

По этим результатам видно, что подход Unity DOTS не только не отстает, но и в разы превосходит производительность подхода Unity MonoBehaviour.

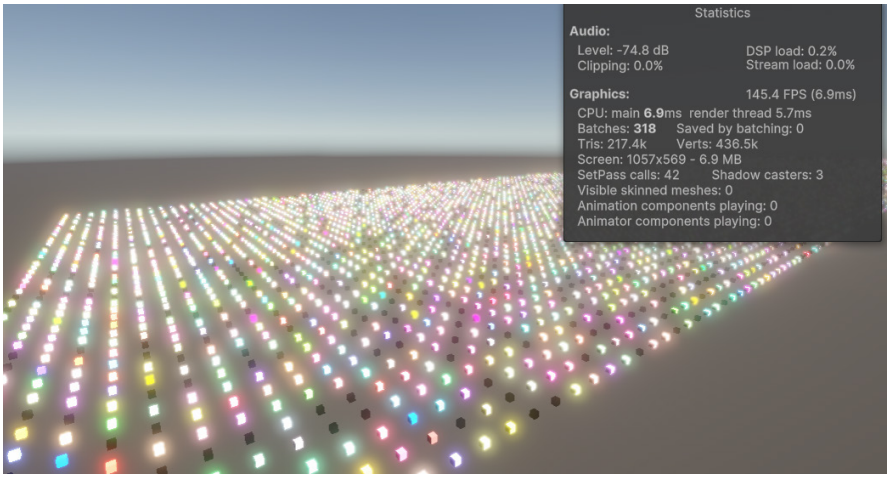


Рис. 3. Результат работы мини-примера Unity DOTS

Таблица 1

Результаты сравнения работы двух подходов

	Unity DOTS	Unity MonoBehaviour
Время в main потоке	6.9 ms	76.3 ms
Время в render потоке	5.7 ms	53.6 ms
Батчи	318	17997
Количество кадров в секунду	145.4	13.1

3.1. Когда стоит использовать Unity DOTS

Наибольшую пользу от этого стека получат проекты, в которых:

1. Есть большое количество объектов: DOTS особенно полезен, когда нужно обрабатывать огромное количество объектов одновременно, например, в играх «песочницах», стратегиях в реальном времени или симуляторах, где количество взаимодействующих объектов может достигать десятков тысяч или даже миллионов.

2. Нужны интенсивные вычисления: если игра требует интенсивных вычислений и может воспользоваться преимуществами параллельной обработки, DOTS предоставляет средства для легкой реализации многопоточности.

3. Требуется высокая производительность

3.2. Преимущества и недостатки Unity DOTS

К преимуществам DOTS можно отнести:

1. Производительность: DOTS разрабатывался с акцентом на оптимизацию работы CPU и GPU. Он позволяет обрабатывать большие объемы данных и объектов без значительного ухудшения производительности.

2. Многопоточность: DOTS обеспечивает простой и удобный способ работы с многопоточностью, позволяя распределять задачи по доступным ядрам процессора.

3. Масштабируемость: можно легко масштабировать приложения и игры, добавляя или удаляя объекты, не переживая о снижении производительности.

Главными минусами являются:

1. Кривая обучения: понимание основных принципов работы с DOTS может потребовать времени и усилий.

2. Мало обучающих материалов и краткая и не детальная документация.

Заключение

В статье были рассмотрены основные составляющие технологического стека Unity DOTS, который предлагает Unity для разработки оптимизированных и быстрых игр. Было показано, что Unity DOTS сложный в освоении стек, но он помогает улучшить производительность в разы. Это решение, которое гордо может противостоять тому, что предлагают остальные игровые движки, и может использоваться для работы с требовательными приложениями на слабых устройствах.

Литература

1. Как Unity двигает индустрию разработки в правильное направление // DTF: [сайт]. – URL: https://dtf.ru/gamedev/2195245-kak-unity-dvigaet-industriyu-razrabotki-v-pravilnoe-napravlenie (дата обращения: 10.10.2024).

2. Entities project setup // Unity3d: [сайт]. – URL: https://docs.unity3d.com/Packages/com.unity.entities@1.1/manual/getting-started-installation.html (дата обращения: 17.10.2024).

3. Further DOTS and ECS packages // Unity3d: [сайт]. – URL: https://docs.unity3d.com/Pahttps://docs.unity3d.com/Packages/com.unity.entities@1.1/manual/ecs-packages.htmlckages/com.unity.entities@1.1/manual/getting-started-installation.html (дата обращения: 17.10.2024).

4. Create the subscene for the spawner example // Unity3d: [сайт]. – URL: https://docs.unity3d.com/Packages/com.unity.entities@1.1/manual/ecs-workflow-scene.html (дата обращения: 02.11.2024).

5. ECS concepts // Unity3d: [сайт]. – URL: https://docs.unity3d.com/Packages/com.unity.entities@0.50/manual/ecs_core.html#memory-chunks (дата обращения: 05.11.2024).

6. About Shader Graph // Unity3d: [сайт]. – URL: https://docs.unity3d.com/Packages/com.unity.shadergraph@17.0/manual/index.html (дата обращения: 10.11.2024).

7. Material overrides using C# // Unity3d: [сайт]. – URL: https://docs.unity3d.com/Packages/com.unity.entities.graphics@1.0/manual/material-overrides-code.html (дата обращения: 10.11.2024).

УДК 004-8

ОБЗОР И СРАВНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

И. Ю. Шабунин, Н. А. Каплиева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье представлен сравнительный обзор трех основных моделей рекомендательных систем: контентно-ориентированных, основанных на коллаборативной фильтрации и гибридных. Рассмотрены их принципы работы, достоинства и недостатки, а также возможные применения в различных областях. Особое внимание уделено проблемам «холодного старта», «информационного пузыря» и зависимости от данных. Полученные результаты могут быть использованы для выбора подхода при проектировании рекомендательных систем, а также для их адаптации к конкретным задачам и данным.
Ключевые слова: рекомендательные системы, пользователи, объекты, рейтинг, персонализация, content-based подход, коллаборативная фильтрация, гибридная модель.

Введение

Рекомендательные системы являются неотъемлемой частью современной информационной среды.

Они помогают пользователям обнаруживать интересующий их контент — будь то товары, фильмы, музыка или статьи — анализируя их предыдущие действия и предпочтения.

Основная задача таких систем заключается в предсказании потенциальных интересов пользователей и своевременном предоставлении им релевантных рекомендаций. Это позволяет улучшить их опыт взаимодействия с платформой и повысить вовлеченность.

В условиях стремительного увеличения объема доступной информации рекомендательные системы приобретают особую значимость, упрощая процесс фильтрации данных и предлагая пользователям наиболее подходящие варианты.

1. Формализация задачи рекомендательных систем

Введем ряд обозначений.

Пусть есть множество пользователей U и множество объектов I. Для каждого пользователя $u \in U$ есть множество объектов $I_u \subset I$, с которыми он взаимодействовал и которым поставил рейтинги $R_u = (r_{ui})_{i \in I_u}$.

Рейтинг (фидбек) — это некоторая характеристика взаимодействия пользователя с объектом. В качестве примера фидбека можно привести факт добавления товара в корзину или оценку, поставленную пользователем фильму.

Таким образом, задачу рекомендательных систем можно переформулировать в следующем виде: для каждого пользователя $u \in U$ необходимо оценить значение r_{ui} для $i \in I \setminus I_u$ и выбрать несколько товаров с наибольшим оценочным рейтингом $\hat{r}_{ui}$. Иными словами, надо научиться среди непоказанных пользователю товаров находить те, которые заинтересовали бы его больше всего.

2. Различные модели рекомендательных систем

Существует множество подходов к построению рекомендательных систем, которые различаются по сложности, точности и области применения. Выбор подхода зависит от особенностей

данных, задач бизнеса и пользовательских предпочтений. В данной статье рассматриваются три ключевых подхода к построению рекомендательных систем: ***content-based*** (*контентно-ориентированный*), ***collaborative filtering*** (*коллаборативная фильтрация*) и ***hybrid*** (*гибридная модель*). В статье приводится обзор их основных характеристик, преимуществ и недостатков, а также проводится их сравнительный анализ.

3. Content-based рекомендации

Контентно-ориентированные рекомендательные системы основываются на анализе характеристик объектов и их сопоставлении с предпочтениями пользователя. Content-based рекомендации предполагают, что пользователи будут заинтересованы в элементах, схожих с теми, которые они уже оценили положительно. Основная идея заключается в том, что, если пользователю понравился определенный объект, система предложит ему похожие объекты, основываясь на их характеристиках. Например, если пользователь часто смотрит фильмы определенного жанра или с определенными актерами, система будет рекомендовать ему похожие фильмы.

Пусть каждый объект i описывается набором характеристик, которые могут быть представлены в виде векторного пространства $e_i \in R_n$. Эти векторы, называемые эмбеддингами, представляют объекты в числовом виде. Профиль пользователя строится на основе объектов, которым пользователь уже выставил оценку.

Рейтинг $\hat{r}_{ui}$ для объекта i, рекомендованного пользователю u, рассчитывается по следующей формуле:

$$\hat{r}_{ui} = \max_{j \in I_u, r_{uj} > \alpha} \rho(e_i, e_j) r_{uj},$$

где (e_i, e_j) — косинусное расстояние или скалярное произведение между эмбеддингами e_i и e_j, определяющее степень схожести объектов i и j;

I_u — множество объектов, которым пользователь u выставил оценки;

r_{uj} — рейтинг объекта j, установленный пользователем u;

α — гиперпараметр, определяющий пороговое значение оценки r_{uj}.

Таким образом, система выбирает объекты i, которые наиболее похожи на ранее оцененные объекты j с учетом их значений рейтинга r_{uj}.

Content-based рекомендательные системы обладают рядом преимуществ, которые делают их популярным выбором для персонализированных рекомендаций.

Во-первых, такие системы обеспечивают высокий уровень персонализации, так как их рекомендации строго соответствуют интересам конкретного пользователя, основываясь исключительно на его взаимодействиях с объектами. Контентно-ориентированные подходы не зависят от данных других пользователей, что делает их независимыми и автономными.

Во-вторых, эти алгоритмы относительно просты в реализации и интуитивно понятны, что снижает сложность их внедрения и обслуживания.

Однако content-based системы имеют и свои ограничения.

Одним из наиболее значимых недостатков является ограниченность разнообразия рекомендаций. Система предлагает пользователю только те объекты, которые схожи с уже оцененными, что может привести к однообразию рекомендаций и созданию так называемого «информационного пузыря».

Также существует проблема новых объектов: если пользователь еще не взаимодействовал с системой или оценил недостаточное количество объектов, она не сможет сформировать профиль предпочтений, что затрудняет выдачу качественных рекомендаций.

Кроме того, для эффективной работы таких систем требуется подробное описание объектов. Это означает, что необходимо собрать и обработать большое количество данных о харак-

теристиках товаров или контента, что иногда может быть трудозатратно и требовать значительных ресурсов.

4. Коллаборативная фильтрация

Модель коллаборативной фильтрации основывается на анализе пользовательских предпочтений и поведения. Существует два основных типа коллаборативной фильтрации:

1. User-based.

Рекомендации делаются на основе схожести между пользователями. Например, если пользователь A и пользователь B имеют схожие оценки для ряда фильмов, то фильмы, которые понравились пользователю A, могут быть рекомендованы пользователю B. Этот метод предполагает, что пользователи с похожими вкусами будут оценивать элементы аналогичным образом.

Введем меру похожести двух пользователей $s(u,v)$, которая тем больше, чем выше сходство между u и v. Для пользователя u рассмотрим множество похожих на него пользователей $N(u) = \{v \in U \setminus \{u\} \mid s(u,v) > \alpha\}$, где α — настраиваемый гиперпараметр.

Допустим, необходимо теперь оценить рейтинг r_{ui}, который пользователь u поставил бы объекту i. Сделаем это, опираясь на рейтинги, которые ставили похожие на u пользователи. Например, можно взять взвешенное среднее:

$$\hat{r}_{ui} = \frac{\sum_{v \in N(u)} s(u,v) r_{vi}}{\sum_{v \in N(u)} | s(u,v) |}.$$

Модуль добавляется для того, чтобы корректно обработать непохожих пользователей, то есть с пары с отрицательной похожестью, которая может возникнуть, если при построении $N(u)$ взять достаточно маленькое α.

Можно пойти дальше и усовершенствовать метод оценивания. Для разных пользователей оценка «нормально» (и соответственно, оценки «хорошо» и «плохо») могут соответствовать разным значениям рейтинга. Для устранения этой проблемы, можно брать не сырой рейтинг пользователя r_{vi}, а его отклонение от среднего всех оценок пользователя: $r_{vi} - \overline{r}_v$. Таким образом, учитывается только разброс вокруг среднего и итоговая оценка будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{r}_{ui} = \overline{r}_u + \frac{\sum_{v \in N(u)} s(u,v)(r_{vi} - \overline{r}_v)}{\sum_{v \in N(u)} | s(u,v) |}.$$

Для оценки схожести пользователей могут применяться также мера Жакара, скалярное произведение общих методов, корреляция Пирсона и др.

2. Item-based.

Рекомендации делаются на основе схожести между элементами. Например, если фильм X и фильм Y часто оцениваются одинаково, то пользователю, которому понравился фильм X, может быть рекомендован фильм Y. Этот метод предполагает, что элементы, которые часто оцениваются одинаково, имеют схожие характеристики.

Введем меру похожести объектов $s(i,j)$. Если необходимо оценить рейтинг, который пользователь u поставил бы еще не виденному им объекту i, то можно рассмотреть множество $N(i)$ близких к i объектов и оценить $\hat{r}_{ui}$ аналогично user-based подходу:

$$\hat{r}_{ui} = \frac{\sum_{j \in N(i)} s(i,j) r_{uj}}{\sum_{j \in N(i)} | s(i,j) |}.$$

Рекомендательные системы, работающие на основе коллаборативной фильтрации, используют исключительно матрицу оценок R_{ui}, предполагая, что такой подход способен выявить важные взаимосвязи между пользователями и товарами.

Однако отсутствие дополнительной информации о новых пользователях или объектах создает препятствия для точных рекомендаций, так как истории взаимодействий попросту нет или она недостаточно обширна.

Данные системы склонны ограничиваться только известными интересами пользователя, что может привести к формированию «информационного пузыря», где пользователь получает исключительно однотипные рекомендации, не способствующие открытию новых предпочтений.

5. Гибридная модель

Гибридные рекомендательные системы объединяют различные подходы к генерации рекомендаций, чтобы преодолеть недостатки отдельных методов и улучшить качество рекомендаций. Наиболее распространенным вариантом является комбинация контентно-ориентированного подхода и методов коллаборативной фильтрации. Основная идея гибридных систем заключается в том, чтобы объединить преимущества обеих моделей и компенсировать их недостатки.

Основные стратегии гибридизации:

1. Комбинирование предсказания (*Weighted Hybrid*).

В этом подходе рекомендации из разных систем комбинируются на основе весов. Например, если контентно-ориентированная модель и модель коллаборативной фильтрации дают разные оценки для объекта, итоговая оценка может быть вычислена как взвешенная сумма их предсказаний:

$$\hat{r}_{ui} = \alpha \cdot \hat{r}_{ui}^{CB} + (1-\alpha) \cdot \hat{r}_{ui}^{CF}.$$

Здесь $\hat{r}_{ui}^{CB}$ и $\hat{r}_{ui}^{CF}$ — оценки от контентно-ориентированной и коллаборативной моделей соответственно, а α — гиперпараметр, задающий баланс между подходами.

Предположим, есть система рекомендаций фильмов. Гибридная модель может учитывать как характеристики фильмов (жанр, актеры, режиссеры), так и взаимодействие пользователей (оценки, история просмотров):

1) контентно-ориентированная часть анализирует, какие жанры предпочитает пользователь;

2) коллаборативная часть определяет, какие фильмы понравились пользователям со схожими предпочтениями;

3) гибридная модель объединяет результаты, комбинируя их с учетом весов или ранжируя объекты.

2. Каскадный подход (*Cascading Hybrid).*

В этом методе результаты одной системы используются как входные данные для другой. Например, сначала контентно-ориентированная модель выбирает список релевантных объектов, а затем коллаборативная фильтрация ранжирует их. Этот подход позволяет сузить область поиска и улучшить персонализацию.

3. Альтернативное использование (*Switching Hybrid*).

Система выбирает метод на основе характеристик данных или ситуации. Например, для новых пользователей, у которых нет истории взаимодействия (проблема «холодного старта»), используется контентно-ориентированный подход, а для пользователей с достаточным количеством данных — коллаборативная фильтрация.

4. Смешивание характеристик (*Feature Combination*).

Этот подход объединяет характеристики из разных методов в единый входной вектор для модели машинного обучения. Например, признаки, полученные из контентного анализа, комбинируются с данными о взаимодействиях пользователей, чтобы обучить одну универсальную модель.

5. Моделирование на метауровне (*Meta-level Hybrid*).

Результаты одной модели используются для обучения другой. Например, профили пользователей, построенные контентно-ориентированным методом, могут служить дополнительными признаками для коллаборативной фильтрации.

Гибридные модели сочетают преимущества контентно-ориентированных и коллаборативных методов, нивелируя их недостатки. Например, они уменьшают проблему «холодного старта» для новых объектов и пользователей, которая характерна для коллаборативной фильтрации, за счет использования информации о характеристиках объектов.

Объединение нескольких методов позволяет повысить точность рекомендаций, так как разные подходы могут дополнять друг друга. Например, если контентно-ориентированная часть модели не может предложить подходящий объект, коллаборативная часть все равно может сформировать рекомендацию.

Гибридные системы предоставляют более широкий спектр рекомендаций, уменьшая эффект «информационного пузыря», так как используют данные не только о похожих объектах, но и о предпочтениях других пользователей.

Гибридные модели легко адаптируются под конкретные задачи или данные. Можно изменить веса отдельных компонентов или интегрировать дополнительные методы, такие как контекстная фильтрация или временные параметры, для более точного формирования рекомендаций.

Однако интеграция различных методов требует дополнительных ресурсов на разработку, настройку и тестирование. Гибридные модели сложнее в реализации, чем использование одного подхода, так как необходимо учитывать множество параметров, таких как веса методов и способы их комбинирования.

Поскольку гибридные модели объединяют несколько подходов, они требуют больше вычислительных ресурсов для обработки данных, генерации эмбеддингов, поиска схожести и формирования рекомендаций. Это может усложнить их внедрение в системах с большими объемами данных.

Для успешного функционирования гибридных моделей требуется наличие детальной информации как о характеристиках объектов (для контентно-ориентированных рекомендаций), так и о взаимодействиях пользователей с объектами (для коллаборативной фильтрации). Если данные ограничены или некачественны, эффективность модели может снизиться.

Использование нескольких методов может привести к дублированию рекомендаций или предоставлению слишком большого количества рекомендаций, что усложняет восприятие для конечного пользователя. Необходима продуманная стратегия отбора и ранжирования результатов.

6. Сравнение представленных видов

Результаты сравнительного обзора трех основных подходов к построению рекомендательных систем приведены в табл. 1.

Заключение

Рекомендательные системы играют ключевую роль в современном цифровом мире, помогая пользователям эффективно находить релевантный контент среди огромного объема данных. В статье рассмотрены три подхода к построению рекомендательных систем: контентно-ориентированный, коллаборативная фильтрация и гибридный. Каждый из них имеет свои сильные и слабые стороны, а их выбор зависит от особенностей задач и данных.

Контентно-ориентированные системы обеспечивают высокий уровень персонализации, однако ограничиваются разнообразием рекомендаций. Коллаборативная фильтрация успеш-

Таблица 1

	Content-based	Коллаборативная фильтрация	Гибридная модель
Основной принцип	Анализ характеристик объектов и их сопоставление с предпочтениями пользователя.	Анализ схожести пользователей или объектов на основе матрицы оценок.	Комбинация подходов Content-Based и Collaborative Filtering.
Достоинства	– высокая персонализация; – не зависит от данных других пользователей; – простота реализации.	– улавливает латентные связи между пользователями и объектами; – эффективен при большом объеме данных.	– объединяет преимущества обеих моделей; – уменьшает проблемы «холодного старта»; – повышает разнообразие.
Недостатки	– ограниченность разнообразия рекомендаций; – проблема «холодного старта»; – требует описания объектов.	– не применима для новых пользователей и объектов; – склонна к информационным пузырям.	– более сложная реализация; – требует значительных вычислительных ресурсов.
Пример применения	Рекомендации фильмов на основе их жанра, актеров, режиссеров.	Рекомендации товаров на основе схожести вкусов пользователей.	Рекомендации фильмов с учетом жанров и предпочтений схожих пользователей.
Проблема «холодного старта»	Часто возникает, так как нет данных о пользователе.	Невозможно рекомендовать объекты, если нет данных о пользователях или новых элементах.	Меньше выражена за счет использования преимуществ обеих подходов.
Зависимость от данных	Требует данных о характеристиках объектов.	Зависит только от данных о взаимодействиях пользователей.	Использует оба типа данных.

но улавливает латентные связи между пользователями и объектами, но сталкивается с проблемой «холодного старта». Гибридные системы объединяют преимущества обеих моделей, улучшая качество рекомендаций и нивелируя их недостатки, но требуют значительных вычислительных ресурсов и более сложной реализации.

Эффективное использование рекомендательных систем требует баланса между персонализацией, вычислительными затратами и доступностью данных.

Впоследствии результаты данного сравнительного обзора будут использованы при реализации рекомендательной системы фильмов. Это позволит учесть преимущества и недостатки различных подходов и выбрать наиболее подходящую модель.

Литература

1. *Фальк К.* Рекомендательные системы на практике / Ким Фальк; пер. с англ. Д. М. Павлова. – Москва : ДМК Пресс, 2020. – 448 с.

2. *Aggarwal C.* Recommender Systems: The Textbook / Charu C. Aggarwal. – Springer, 2016. – 519 с.

3. *Schrage M.* Recommender Engines / Michael Schrage. – Cambridge : The MIT Press, 2020. – 296 с.

4. Введение в рекомендательные системы // Учебник по машинному обучению от Яндекса: [сайт]. – URL: https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/intro-recsys (дата обращения: 05.11.2024).

5. Кино по щелчку: как работают рекомендательные алгоритмы в стриминге // РБК Тренды: [сайт]. – URL: https://trends.rbc.ru/trends/industry/cmrm/62baadf79a79477d0aafa5ae (дата обращения: 05.11.2024).

6. Лекция К. В. Воронцова «Машинное обучение. Рекомендательные системы»: видео. – URL: https://www.youtube.com/watch?v=J-QueLndVI8&t=121s (дата обращения: 07.11.2024).

7. RecSys Cookbook: строим рекомендательную систему на Python: видео / компания Evrone. – URL: https://www.youtube.com/watch?v=cxJ0KxzH_n0&t=5s (дата обращения: 07.11.2024).

УДК 004.65:004.43(075.8)

УНИФИКАЦИЯ ДОСТУПА К ДАННЫМ. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ОБЪЕДИНЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ БАЗ ДАННЫХ

И. М. Шаров, Р. С. Толмасов

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В данной статье рассматриваются современные подходы к унификации доступа к разнородным базам данных. Приводится сравнительный анализ методов интеграции данных, включая их особенности, преимущества и ограничения. Предложены новые способы объединения разнородных баз данных.
Ключевые слова: разнородные базы данных, онтология данных, методы объединения данных.

Системы управления базами данных остаются одной из самых динамично развивающихся ИТ-отраслей [1]. СУБД играют важную роль в современных информационных системах, обеспечивая эффективное хранение, доступ и обработку данных. В условиях быстрого развития информационных технологий и роста объемов информации, выбор подходящей СУБД становится одним из ключевых аспектов для организаций [2]. При условии, что каждая СУБД предназначена для решения конкретных проблем, с которыми она справляется лучше других аналогов, появляется повод для создания вычислительных системы, которые состоят из различных типов аппаратного и/или программного обеспечения, объединенных для совместного выполнения задач. Гетерогенные системы обычно возникают в тех случаях, когда узлы, уже эксплуатирующие свои собственные системы с базами данных, со временем интегрируются в распределенную систему. В приведенном случае, конечный потребитель нуждается не столько в самих данных, сколько в факте объединения или агрегировании их [3].

Для воплощения взаимодействия разных подсистем требуются большие усилия. Усложняют задачу различия в архитектурных подходах к построению систем и их зависимость от используемых технологий. БД имеют разные модели хранения информации и, соответственно, разный язык запросов. Затраты на реализацию возможностей информационного обмена между подсистемами в этом случае велики и быстро начнут преобладать над затратами по реализации функциональности самих подсистем [3]. В связи с этим возникает проблема интеграции данных из различных систем [4]. Интеграция данных — это стратегический процесс, который объединяет данные из нескольких источников, чтобы предоставить организациям единое представление для более глубокого анализа, принятия обоснованных решений и целостного понимания своих бизнес-операций. На сегодняшний день можно выделить два типа методов интеграции данных: физический и логический. Основными методами интеграции данных для каждого из видов являются ETL (Extract, Transform, Load) для физической интеграции данных и виртуализация данных для логической интеграции. Выбор критериев для сравнения методов интеграции данных (ETL и виртуализации) основан на их значимости для ключевых характеристик систем, таких как производительность, актуальность данных, гибкость. Эти аспекты широко рассматриваются в современных исследованиях [4] и имеют критическое значение для оценки интеграционных подходов в условиях больших данных и высоких требований к оперативной аналитике, а также стабильной работы информационных систем. Активные разработки в этой области подчеркивают важность анализа данных как стратегического ресурса для бизнеса и технологий.

По приведенным результатам (табл. 1) можно сделать вывод, что каждый из представленных методов подходит исключительно при соблюдении ряда условии в конкретном случае для каждой организации.

Таблица 1

Анализ методов интеграции данных

Название метода / Критерий	ETL	Виртуализация данных
Доступ к данным	Предварительные запросы и обработка	Доступ в реальном времени
Производительность	Зависит от стабильности сети	Зависит от стабильности сети
Актуальность данных	Зависит от расписания загрузки	Всегда актуальные
Сложность реализации	Высокая сложность настройки и поддержки	Сложности с производительностью
Гибкость в запросах	Ограничена структурой хранилища	Высокая за счет динамической обработки

На сегодняшний день на практике тяжело встретить универсальные и закрепившиеся на рынке ПО решения, которые бы могли позволить пользователям воплотить идею объединения двух видов интеграции данных и решить недостатки часто использующихся методов, переняв положительные качества. Одним из решений в контексте данной проблемы может выступать программное обеспечение на подобие универсального шлюза (далее адаптер), который имеет свои правила приема информации и ее выдачи.

Идея адаптера отталкивается от того, что нет необходимости придумывать новые способы хранения данных, можно наладить работу с существующими. В основе такой системы, как и в методе виртуализации данных, лежит множественное подключение и параллельная работа с несколькими источниками, что даст возможность не иметь строгих ограничений на подключение разных типов баз данных. При подключении адаптер должен считывать методанные по структурам хранения с возможностью редактирования для преобразования в цельную карту маршрутов. Данный подход имеет сходство с ETL методом, однако в случае адаптера, пользователю нет необходимости знать, какое подключение использовать до СУБД и какую структуру оно имеет. Все вычисления проводятся на аппаратном уровне и по окончанию могут требовать лишь незначительного вмешательства для настройки от администратора системы. Для взаимодействия с адаптером необходимо разработать универсальный язык запросов, который позволит обращаться и связывать по нужным атрибутам данные из разных источников, которые в свою очередь уже имеют внутренние связи между хранимыми объектами. При этом язык не должен синтаксически сильно отличаться от уже существующих решений, чтобы подключение нового ПО не вызвало материальные потери из-за навязанных ситуацией компетенции сотрудников существующих организаций.

Адаптер позволяет минимизировать затраты на реорганизацию существующих систем хранения данных, эффективно используя уже доступные ресурсы. Его внедрение обеспечивает интеграцию различных источников данных без необходимости глубокого вмешательства в их текущую архитектуру. Такая модель работы открывает новые горизонты для систем с высокой степенью разнородности данных, значительно упрощая их подключение и синхронизацию.

Представленная идея может иметь перспективы в использовании за счет ситуации, связанной с импортозамещением в РФ, а также повлечь за собой новые идеи для разработки на основе карты маршрутов. Такой инструмент может стать основой для построения корпоративных информационных систем нового поколения, адаптированных под высокую нагрузку и сложные запросы.

Литература

1. Проблемы современных СУБД: Нужен ли морю данных океан железа // TADVISER: [сайт]. — URL: https://www.tadviser.ru/index.php/Статья:Проблемы_современных_СУБД:_Нужен_ли_морю_данных_океан_железа (дата обращения: 20.11.2024).

2. *Худайбердиев С. А.* Анализ самых актуальных серверных систем управления базами данных / С. А. Худайбердиев // International journal of theoretical adn practical research. – 2023. – № 5. – С. 36–46.

3. *Волушкова В. Л.* Интеграция разнородных данных в корпоративных информационных системах / В. Л. Волушкова // Программные системы и вычислительные методы. – 2019. – № 1. – С. 81–89.

4. *Шибанов С. В., Яровая М. В., Шашков Б. Д., Кочегаров И. И., Трусов В. А., Гришко А. К.* Обзор современных методов интеграции данных в информационных системах // НиКа. – 2010. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obzor-sovremennyh-metodov-integratsii-dannyh-v-informatsionnyh-sistemah (дата обращения: 20.11.2024)

УДК 004.62

СЕРВИС-ОРИЕНТИРОВАННАЯ АРХИТЕКТУРА (SOA). ПРИНЦИПЫ И ПРИМЕНЕНИЕ

С. А. Шебуняева

Воронежский государственный университет

Аннотация. Сервис-ориентированная архитектура (SOA) является основой для построения гибких, масштабируемых и независимых от технологий информационных систем. Данная статья рассматривает ключевые аспекты SOA, её эволюцию, основные паттерны и их применение в современном программировании. Представлены достоинства и недостатки подхода, а также особенности его реализации в различных технологических контекстах.

Ключевые слова: SOA, микросервисы, веб-сервисы, CORBA, ESB, очереди сообщений, распределённые системы, архитектурные паттерны.

Введение

Сервис-ориентированная архитектура (SOA) сформировалась как ответ на потребность бизнеса и технологий в интеграции разнородных систем. С момента своего появления концепция SOA претерпела значительные изменения, а её применение стало возможным в самых разных отраслях. Основной принцип SOA заключается в разделении систем на независимые сервисы, которые могут взаимодействовать между собой через стандартизированные интерфейсы. Это обеспечивает гибкость разработки, независимость от технологий и возможность масштабирования систем.

1. Основные принципы SOA

Сервис-ориентированная архитектура — модульный подход к разработке программного обеспечение, набор архитектурных принципов, независящих от технологий и продуктов.

SOA строится на ряде ключевых принципов:

1. Сочетаемость приложений: пользовательские приложения легко интегрируются друг с другом благодаря унифицированным интерфейсам.

2. Многократное использование бизнес-сервисов: сервисы проектируются для повторного использования в различных приложениях, что сокращает время и затраты на разработку.

3. Независимость от технологий: сервисы могут быть реализованы на любом языке программирования и развернуты на любой платформе.

4. Автономность сервисов: каждый сервис развивается, масштабируется и развёртывается независимо от других. Это позволяет обновлять и тестировать отдельные компоненты без влияния на всю систему.

2. Эволюция архитектуры

Эволюция SOA началась с таких технологий, как CORBA и DCOM, которые были разработаны в 1980–1990-х годах для взаимодействия приложений на разных платформах. Эти решения оказались недостаточно гибкими и сложными в реализации.

Веб-сервисы стали следующим этапом развития, обеспечив простоту и стандартизацию. Использование HTTP и XML/JSON форматов данных значительно упростило процесс интеграции.

Современные микросервисы, как одна из реализаций SOA, фокусируются на высокой автономности сервисов, обеспечивая гибкость, масштабируемость и отказоустойчивость.

3. Паттерны SOA

3.1. Общая архитектура брокера объектных запросов (CORBA)

CORBA (Common Object Request Broker Architecture) была разработана как независимая от платформы технология для взаимодействия объектов в распределённых системах. Стандарт CORBA обеспечивает вызовы удалённых процедур, не зависящие от платформы, транзакции, безопасность, независимость от особенностей передачи данных.

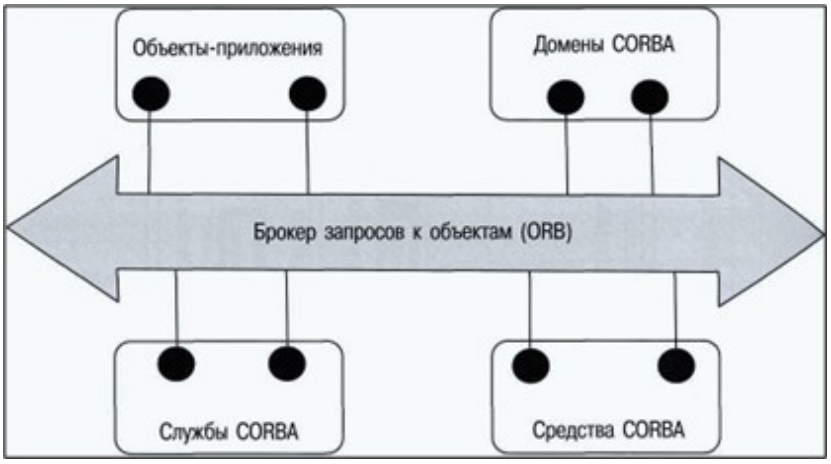


Рис. 1. Архитектура системы CORBA

Достоинства:

• обеспечивает высокую степень независимости от языков программирования и операционных систем;

• позволяет создавать сложные распределённые системы с минимальными изменениями в коде;

• поддерживает трансляцию данных между разными форматами.

Недостатки:

• высокая сложность спецификации затрудняет внедрение и поддержку;

• слабая производительность, особенно при большом объёме данных;

• ограниченная масштабируемость в сравнении с современными подходами.

3.2. Веб-сервисы

Веб-сервисы стали следующей ступенью эволюции SOA. Они базируются на использовании протоколов HTTP и стандартизированных форматов данных, таких как XML и JSON. SOAP (Simple Object Access Protocol) и REST (Representational State Transfer) являются основными подходами.

Достоинства:

• простота реализации благодаря поддержке протокола HTTP;

• универсальность: REST широко применяется для интеграции веб-приложений и мобильных устройств;

• широкая поддержка инструментов и библиотек для реализации.

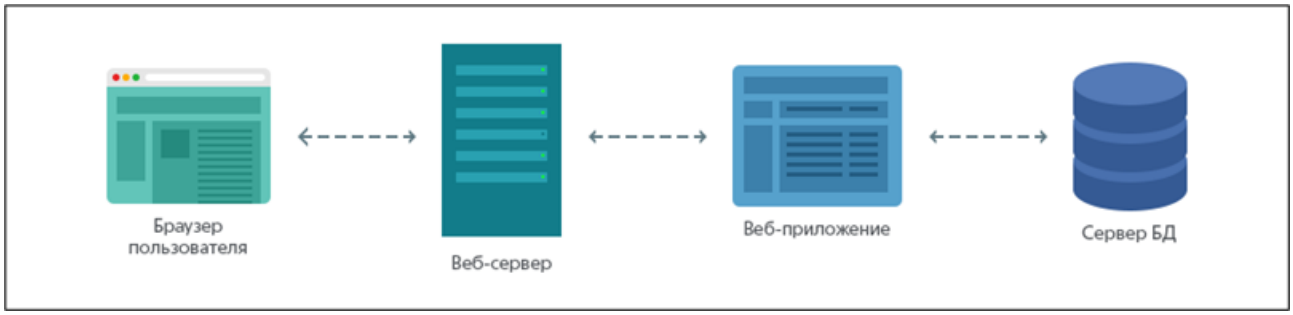


Рис. 2. Архитектура веб-сервиса

Недостатки:

• SOAP-ориентированные сервисы могут быть излишне сложными из-за жёстких требований к структуре сообщений;

• REST-сервисы недостаточно стандартизированы, что может вызывать трудности в интероперабельности (способности к взаимодействию).

3.3. Очереди сообщений

Очереди сообщений, такие как RabbitMQ, Apache Kafka и ActiveMQ, позволяют реализовать асинхронное взаимодействие между сервисами, что особенно полезно для высоконагруженных систем. Очередь сообщений улучшает масштабируемость и усиливает изолированность приложений, однако все эти приложения должны использовать один формат данных при обмене сообщениями. Такой паттерн использует в качестве компонента инфраструктуры программный брокер сообщений для реализации связей между приложениями (таких как запрос/ответ, публикация/подписка и др.).

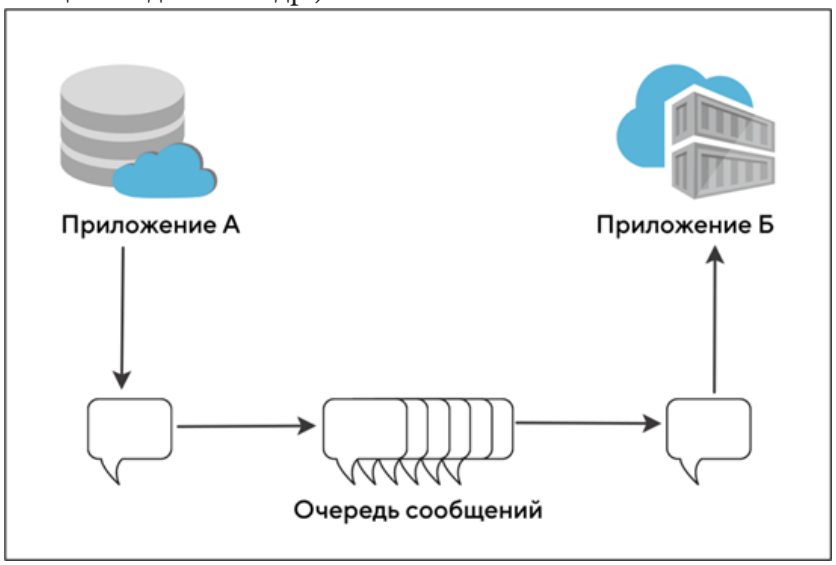


Рис. 3. Архитектура очереди сообщений

Достоинства:

• высокая масштабируемость благодаря возможности горизонтального расширения;

• повышение надёжности за счёт обработки сообщений в фоновом режиме;

• уменьшение времени отклика приложений.

Недостатки:

• сложность настройки и мониторинга;

• дополнительные затраты на инфраструктуру для хранения и маршрутизации сообщений.

3.4. Сервисная шина предприятия (ESB)

ESB (Enterprise Service Bus) — это центральный узел, который управляет маршрутизацией, преобразованием и безопасностью данных в системе. Шина выступает в качестве посредника, доставляющего сообщения. Такое ПО обеспечивает преобразование запросов, сообщений и параметров систем в нужный формат, соответствующий протоколу взаимодействующих систем, а также делает возможным интеграцию, сценарную маршрутизацию, транзакционный контроль, безопасность обмена данными, и равномерное распределение нагрузки на сервисы за счет концентрации событий и данных через единую точку.

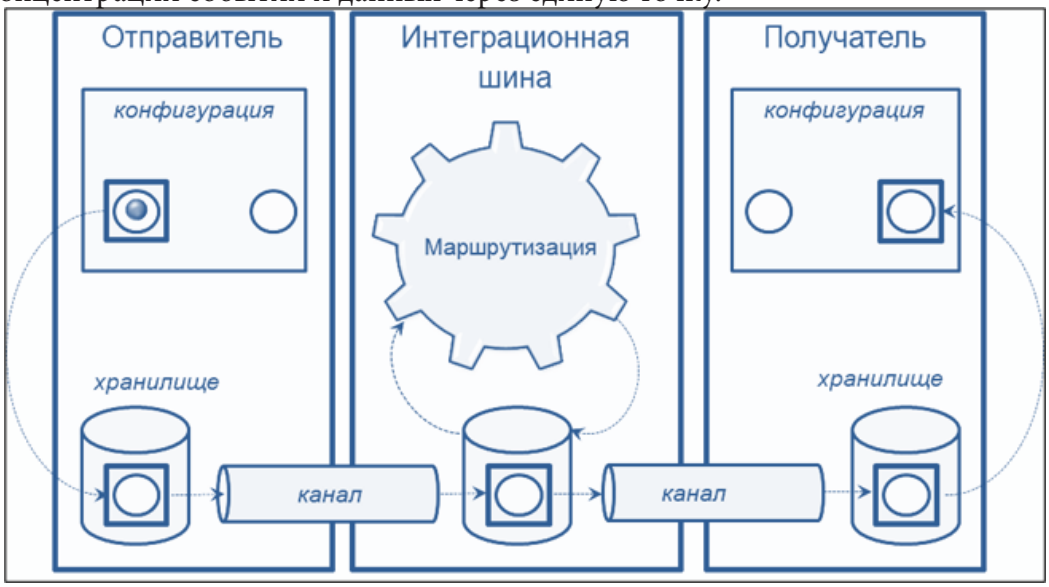


Рис. 4. Архитектура интеграционной шины

Достоинства:

- упрощение интеграции между различными сервисами;
- централизованное управление потоками данных и бизнес-логикой;
- возможность добавления новых сервисов без изменения существующих.

Недостатки:

- снижение производительности из-за узкого места — центральной шины;
- высокие затраты на внедрение и сопровождение;
- усложнение системы при добавлении новых компонентов.

3.5. Микросервисы

Микросервисы представляют собой современную реализацию SOA, где каждая бизнес-функция реализована как независимый сервис, взаимодействующий через API.

Достоинства:

- высокая степень гибкости: каждый микросервис может использовать свою базу данных и стек технологий;
- отказоустойчивость системы: сбой одного сервиса не влияет на работу других;
- ускорение разработки благодаря возможности параллельной работы команд.

Недостатки:

- увеличение сложности управления системой из-за большого числа сервисов;
- требуются дополнительные усилия для обеспечения безопасности и мониторинга;
- затраты на организацию DevOps-инфраструктуры для автоматического развертывания.

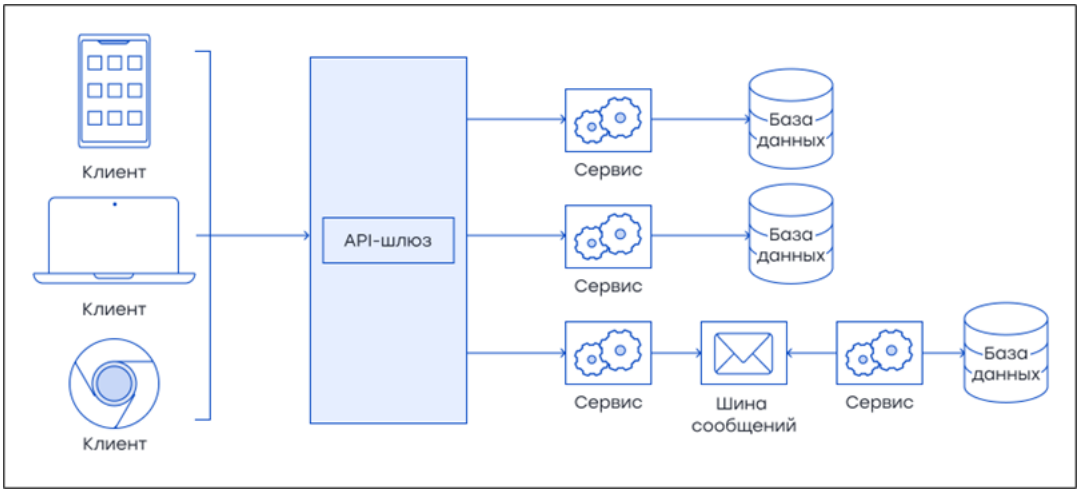


Рис. 5. Архитектура микросервисов

Заключение

Сервис-ориентированная архитектура остаётся актуальной благодаря своей универсальности и способности адаптироваться к современным требованиям бизнеса. Основные её принципы — гибкость, независимость и масштабируемость — позволяют строить системы, устойчивые к изменениям и росту нагрузки.

Однако для успешного внедрения SOA требуется тщательное проектирование, выбор подходящих паттернов и инструментов. Своевременное решение вопросов интеграции, производительности и безопасности обеспечит эффективное использование SOA в различных технологических контекстах.

Литература

1. *Спинеллис Д.* Идеальная архитектура / Д. Спинеллис, Г. Гусиос, пер. с англ Е. Матвеева. – Санкт-Петербург : Символ-Плюс, 2010. — 528 с.

2. *Биберштейн Н.* Компас в мире сервис-ориентированной архитектуры (SOA): ценность для бизнеса, планирование и план развития / Н. Биберштейн, С. Боуз, К. Джонс, М. Фиаммант, Р. Ша. – КУДИЦ, 2007. – 256 с.

3. *Бородаенко Ю. В.* Оценка качества интеграционных решений и методика их сравнитель ного анализа // Доклады БГУИР, 2019. – С. 120–125.

4. *Fielding R.* Architectural Styles and the Design of Network-based Software Architectures / R. Fielding. – University of California, Irvine., 2000.

5. *Gregor Hohpe* Enterprise Integration Patterns : Designing, Building and Deploying Messaging Solutions / Gregor Hohpe. – Pearson Education Inc., 2019. – 683 p.

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕЦ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ НИТЯМИ ОДНОСТОРОННЕГО ДЕЙСТВИЯ

В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

Аннотация. В работе рассматривается задача устойчивости кольца, подкрепленного нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. Решение проблемы сводится к нахождению точек бифуркации решения некоторой задачи вариационного исчисления при наличии ограничений в виде неравенств. В отличие от классического случая отыскание точек бифуркации гладких функций наличие нежестких ограничений приводит к задаче идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах. Последняя сводится к исследованию решения некоторой невыпуклой задачи математического программирования.
Ключевые слова: устойчивость, критическая нагрузка, кольцо, вариационная задача, нерастяжимые нити, арка, точки бифуркации.

Введение

Расчет на устойчивость становится все более важным в механико-математических исследованиях, так как разрушение конструкций часто связано с общей потерей устойчивости. Актуальной является задача об устойчивости упругих систем, подкрепленных тонкими нитями одностороннего действия, которые не выдерживают сжимающих усилий [1]. Использование такого подкрепления зачастую связано с необходимостью снижения веса конструкций, что является актуальным в машиностроении.

1. Постановка задачи

Пусть криволинейный стержень представляет собой кольцо радиуса R. Главные оси инерции поперечного сечения направлены по осям x, y, причем x направлена к центру кольца, y перпендикулярно его плоскости, ось z по касательной к кольцу. Обозначим перемещения точек кольца вдоль осей x, z, y через u, w, v соответственно. Декартовы координаты деформированного кольца описываются уравнениями

$$\begin{cases} \xi = (R-u)\cos\varphi - w\sin\varphi, \\ \eta = (R-u)\sin\varphi + w\cos\varphi, \varphi \in [0, 2\pi], \\ \zeta = v. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, что в результате деформации главные оси инерции перешли в x^*, y^* и z в касательный вектор z^*. Направления (x, y, z) переходят в векторы (x^*, y^*, z^*) путем поворота на малые углы (α, β, γ), которые связаны с перемещениями формулами

$$\alpha = -\frac{1}{R}v', \ \beta = \frac{1}{R}\left(\frac{du}{d\varphi} + w\right), \ w' = u.$$

Последнее равенство — это условие несжимаемости стержня. Деформация кольца характеризуется величинами [2]:

$$\begin{cases} \delta p = \dfrac{1}{R}\left(\alpha' + \gamma\right) = -\dfrac{1}{R^2}v'' + \dfrac{1}{R}\gamma, \\ \delta q = \dfrac{1}{R^2}\beta' = \dfrac{1}{R^2}(u'' + u), \\ \delta r = \dfrac{1}{R}\left(\gamma' + \dfrac{1}{R}v'\right). \end{cases} \tag{2}$$

Упругая энергия кольца в квадратичном приближении определяется функционалом

$$U = \int_0^{2\pi} \left(\frac{B}{2R^3}(u'' + u)^2 + \frac{A}{2R^2}(\gamma - \frac{1}{R}v'')^2 + \frac{C}{2R^2}(\gamma' + \frac{1}{R}v')^2 \right) d\varphi.$$

Здесь A, B — жесткости на изгиб, C — жесткость на кручение. В случае эллиптического сечения с полуосями a и b жесткости определяются формулами

$$A = E\frac{\pi}{4}a^3 b, B = E\frac{\pi}{4}ab^3, C = E\frac{\pi a^3 b^3}{(1+\nu)(a^2+b^2)},$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Предположим, что кольцо нагружено давлением P, направленным все время к неподвижному центру кольца. Тогда работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(u'^2 - 2u^2 + v'^2 - v^2 \right) d\varphi.$$

В положении равновесия полная энергия $J = U - PW$ принимает минимальное (стационарное) значение. Нетрудно увидеть, что поиск критической нагрузки сводится к решению задачи изопериметрического типа

$$\begin{cases} U \to \min\limits_{u,v,\gamma}, \\ W = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Подставляя в (3) ряды Фурье, получаем набор значений давления P, при которых возможна нетривиальная форма равновесия.

В случае плоской деформации минимальная критическая сила равна $P_{kp_1} = \dfrac{4,5B}{R^3}$, при пространственной деформации $P_{kp_2} = \dfrac{12A}{(4 + A/C)R^3}$. Пусть $a = b = 1$. Можно считать, что $E = 1$, $R = 1$. Тогда из формул для плоской деформации следует, что $P_{kp_1} = 3.534$, $P_{kp_2} = 2.022$. А при значениях параметров $a = 0.5$, $b = 1$ находим $P_{kp_1} = 1.767$, $P_{kp_2} = 0.268$. Ясно, что при малых значениях а наименьшему значению критической силы соответствует величина давления при пространственной форме потери устойчивости.

Предположим, что кольцо подкреплено тросами, один конец которых закреплен к некоторой точке на кольце, а другой — к точке с координатами

$$\xi = 0, \eta = 0, \zeta = \pm c_0.$$

Тросы не выдерживают сжимающих усилий, поэтому расстояние между точками прикрепления не может увеличиваться. Обозначим M — число тросов. Расстояние между точками прикрепления j-го троса с учетом (1) определяется формулой

$$f(u, w, v) = \sqrt{\xi_j^{\,2} + \eta_j^{\,2} + (v \pm c_0)^2} = \sqrt{R^2 - 2Ru_j + u_j^{\,2} + w_j^{\,2} + v_j^{\,2} \pm 2v_j c_0 + c_0^{\,2}}.$$

Раскладывая в ряд Тейлора изменение расстояния с точностью до членов второго порядка малости, получим:

$$f(u,w,v)-f(0,0,0)=-\frac{Ru\pm c_0 v}{\sqrt{R^2+{c_0}^2}}.$$

Таким образом, нахождение критического давления при наличии подкрепляющих тросов сводится к задаче изопериметрического типа (3) с учетом неравенства

$$-Ru_j\pm c_0 v\le 0. \tag{4}$$

2. Алгоритм решения

Задача (3)–(4) решается методом последовательных приближений [3, 4]. Для того, чтобы исключить перемещение кольца как жесткого целого потребуем выполнение равенств

$$\int_0^{2\pi} u(\varphi)\sin\varphi d\varphi=0,\ \int_0^{2\pi} w(\varphi)\cos\varphi d\varphi=0,\ \int_0^{2\pi} v(\varphi)d\varphi=0,\ \int_0^{2\pi} w(\varphi)d\varphi=0. \tag{5}$$

Аппроксимируем функции u,w,v,γ интерполяционными кубическими сплайнами [5], принимая коэффициенты сплайнов равными

$$z_i=u_i=u(\varphi_i),\ z_{i+n}=w_i=w(\varphi_i),\ z_{i+2n}=v_i=v(\varphi_i),\ z_{i+3n}=\gamma_i=\gamma(\varphi_i),\ i\in 1:n, z\in R^m, m=4n.$$

После подстановки сплайнов $S(z,\varphi)$ в (3)–(4) получаем две квадратичные формы

$$f(z)=\frac{1}{2}(Qz,z),\ g(z)=\frac{1}{2}(Gz,z)$$

и некоторый конус в R^{4n}, определяемый неравенствами (3) и уравнениями (5). Условие несжимаемости $w'=u$ учитывается методом штрафных функций путем добавления к функционалу U слагаемого вида $c\int_0^{2\pi}(u-w')^2 d\varphi$, где c — достаточно большое число, подбирается экспериментально. Таким образом, вместо задачи (3)–(5) приходим к задаче нелинейного программирования

$$\begin{cases} f(z)\to\min\limits_{z\in\Gamma}, \\ g(z)=1. \end{cases} \tag{6}$$

В ограничения (4) введем параметры k_0 и k_1:

$$-Rk_0u\pm c_0k_1v\le 0. \tag{7}$$

С помощью этих параметров можно учитывать ограничения на перемещения u,w: если $k_0=0$, то считаем, что на нормальное перемещение нет никаких ограничений. Заметим, что если $c_0=0$, то имеем ограничения только на нормальное перемещение. Для численного решения задачи (6)–(7) применялся также метод последовательных приближений: пусть $z_0\in\Gamma$, $g(z_0)=1$ некоторое начальное приближение. Пусть уже получена точка $z_k\in\Gamma$, $g(z_k)=1$. В точке z_{k+1} введем в рассмотрение множество $M(z_k)=\{z\in\Gamma\,|\,Q(z-z_k)=0\}$. И решим задачу

$$f(z)\to\min_{z\in M(z_k)} \tag{8}$$

Пусть $\tilde z_{k+1}$ — решение задачи (8). Полагаем $z_{k+1}=\frac{z_{k+1}}{\sqrt{g(\tilde z_{k+1})}}$. Очевидно, что $g(z_{k+1})=1$. Можно показать, что любая предельная точка последовательности $\{z_k\}$ является стационарной для задачи (6), то есть удовлетворяет необходимым условиям экстремума. Заметим, что вспомогательная задача (8) является задачей выпуклого квадратичного программирования и может быть решена за конечное число арифметических вычислений.

3. Результаты численных экспериментов

Не ограничивая общности, можно положить $R=1,\ E=1$. Таким образом, варьируемыми параметрами являются полуоси эллиптического сечения стержня a и b. Обозначим $P_1=\dfrac{4.5B}{R^3}$, $P_2=\dfrac{12A}{(4+A/C)R^3}$. В вычислениях полагали $n=144,\ m=576,$ то есть $z\in R^{576}$.

Число нитей (тросиков), которые определяют ограничения — неравенства, в расчетах равно 36. Ниже приведена табл. 1 основных результатов.

Таблица 1

a	b	k_0	k_1	c_0	$f(z)$	$\max u_i$	$\max v_i$
1	1	1	1	0.05	3.008	0.026	0.461
1	1	1	1	0.1	5.262	0.046	0.462
1	1	0	1	0.05	3.677	0.564	$2.6*10^{-4}$
1	1	1	0	0.1	2.251	$2.8*10^{-6}$	0.460
3	1	1	1	0.05	104.22	0.156	$1.4*10^{-4}$
0.75	1	1	1	0.05	1.825	0.023	0.462
0.75	1	0	1	0.1	4.011	0.047	0.467

В табл. 1:
$a,\ b$ — полуоси эллипса;
k_0, k_1, c_0 — параметры из (7);
$f(z)$ — оптимальное решение (6);
$\max u_i,\ \max v_i$ — максимальные значения соответствующих перемещений.

Без учета ограничений на перемещения происходит либо плоская потеря устойчивости кольца $(v\equiv 0)$, либо пространственная $(u\equiv 0, w\equiv 0)$. Значения критических сил в задаче без ограничений-неравенств при некоторых значения полуосей эллипса приведены ниже:

$P_{kp_1}=3.534,\ P_{kp_2}=2.022$ при $a=b=1$;

$P_{kp_1}=2.651,\ P_{kp_2}=0.882$ при $a=0.75, b=1$;

$P_{kp_1}=10.091,\ P_{kp_2}=35.092$ при $a=3, b=1$.

Сравнивая значения критической нагрузки с $f(z)$, приведенным в табл. 1, видим, что подкрепление кольца тросиками может значительно увеличить критическую нагрузку, например, в 6 раз при $a=0.5,\ b=1\ P_{kp}=1.761,\ \min\{P_1,P_2\}=0.268$.

Заключение

Численные эксперименты показали, что наличие ограничений на перемещения точек кольца может в несколько раз увеличить значение критического давления. Интересной особенностью данной задачи является то, что при ее рассмотрении приходится исследовать на бифуркацию решение задачи нелинейного квадратичного программирования при наличии ограничений в виде неравенств.

Литература

1. *Андрюкова В. Ю., Тарасов В. Н.* Nonsmooth problem of Stability for Elastic Rings // Abstracts of the international conference «Constructive nonsmooth analysis and related topics». 2017. – Part I. – Saint Petersburg, – P. 213–218.

2. *Николаи Е. Л.* Труды по механике. – Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 584 с.

3. *Тарасов В. Н.* Об устойчивости подкрепленных арок / В. Н. Тарасов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 202–214.

4. *Андрюкова В. Ю.* Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения / В. Ю. Андрюкова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 412–422.

5. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – Москва : Наука, 1980. – 352 с.

УДК 539.374

О ВАРИАНТАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

М. А. Артемов, А. А. Верлин, Р. Г. Меджидов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются разные варианты математического моделирования тонкого вращающегося диска постоянной толщины в рамках приближения плоского напряженного состояния. Считается, что материал диска однородный, изотропный, проявляет упругие и пластические свойства. Принимается гипотеза о естественном состоянии. Рассматриваются кусочно-линейные и гладкие функции пластичности. Упругие свойства материала определяются линейным законом Гука. Пластические деформации и напряжения связаны ассоциированным законом пластического деформирования. При рассмотрении гладких функций пластичности выбирается условие пластичности Поля. Показано, что чем точнее кривая пластичности Поля аппроксимирует шестиугольник Треска, тем больше значения градиента вектора перемещений в малой окрестности центра диска. Приводятся графики распределения напряжений, деформаций, перемещений, а также годограф вектора напряжений для разных вариантов выбираемых определяющих уравнений. Дается сравнение полученных результатов с результатами других авторов рассматриваемой задачи.
Ключевые слова: вращающиеся диски, плоское напряженное состояние, условие пластичности Поля, условие Мизеса, условие Треска, ассоциированный закон пластического деформирования, эквивалентная деформация, эквивалентное напряжение, годограф вектора напряжений, кусочно-линейные функции пластичности, гладкие функции пластичности, малые деформации, идеальное упругопластическое тело, упрочнение, математическое моделирование.

Введение

Задача об упругом и упругопластическом состоянии тонкого вращающегося диска рассматривалась многими авторами. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что вращающиеся диски являются важными элементами многих конструкций и машин. Результаты математического моделирования вращающихся дисков содержатся в ряде монографий и учебниках, а также в многочисленных научных статьях, например, [1–6]. Большая часть научных работ, относящихся к рассматриваемой задаче, связана с рассмотрением условия пластичности Мизеса и условием пластичности Треска. Условие пластичности Треска, а также другие условия пластичности с кусочно-линейными функциями пластичности позволяют получить аналитические решения для искомых величин. Выбор гладких функций пластичности приводит к необходимости численного решения. Так, для условия пластичности Мизеса и некоторых других условий пластичности с гладкими функциями пластичности, используется прием параметрического представления кривой пластичности [1, 4, 7–10]. В работе [11] в рамках деформационной теории для нелинейных условий пластичности методом малого параметра было получено приближенное распределение напряжений и деформаций в быстро вращающемся диске из изотропного упругопластического упрочняющегося материала. В работе [12] рассматривался вопрос о появлении пластических областей во вращающемся диске для кусочно-линейных и гладких функций пластичности. В [13] показано, что для критерия текучести Шмидта — Ишлинского все деформации в центре диска достигают конечных значений. В [14–16] рассматривались диски переменной толщины. В [17] рассматривался диск с экспоненциальным изменением толщины из несжимаемого материла для случая конечных деформаций. В ряде работ рассматриваются задачи о вращающемся диске, когда учитываются не только упругие и пластические свойства материала. Так, например, в работе [18] моделируется деформирование

диска, вращающегося с изменяющейся скоростью, с учетом изменения упругопластических деформаций и деформаций ползучести. В [19] был предложен общий алгоритм решения задачи о быстро вращающемся диске для любой гладкой функции пластичности.

Особенностью плоского напряженного состояния, в отличии от плоского деформированного состояния [20], для идеального пластического тела является то, что для плоского деформированного состояния, при реализации сингулярных режимов, в пространстве главных напряжений вектор напряжений может перемещаться по ребру поверхности пластичности, а для плоского напряженного состояния этого нет.

Задачи о плоском напряженном и плоском деформированном состояниях относят к общей плоской задаче [21]. Отмечается, что задача плоского напряженного состояния не может рассматриваться как частный случай трехмерной задачи. Для общей плоской задачи, когда функция текучести $F(\sigma_1, \sigma_2)$ используется в качестве пластического потенциала принимается, что $\partial F / \partial \sigma_1 + \partial F / \partial \sigma_2 = 0.$ В [22] отмечается, что соотношения общей плоской задачи можно рассматривать, как частный случай пространственной задачи, однако, некоторые предположения общей плоской задачи являются противоречивыми.

При рассмотрении плоского напряженного состояния оперируем осредненными по толщине диска величинами [23]. Для формул Коши средняя осевая деформация $\varepsilon_z = \frac{1}{h}\int\limits_{z=-h/2}^{z=h/2} \frac{\partial w}{\partial z} dz$, $\frac{1}{h}\int\limits_{z=-h/2}^{z=h/2} w dz = 0.$

1. Постановка задачи

В рамках теории малых деформаций, в приближении плоского напряженного состояния рассматривается задача о тонком диске постоянной толщины, вращающемся с угловой скоростью ω. Внешний контур диска $\rho = b$ свободен от усилий $\sigma_\rho |_{\rho=b} = 0$. Выбирается модель однородного изотропного идеального упругопластического тела.

2. Выбор характерных масштабов

Все соотношения записываются в безразмерном виде. В качестве масштаба для напряжений выбирается предел пластичности на одноосное растяжение k. В качестве масштаба для напряжений выбирается радиус диска. Для рассматриваемой задачи уравнение баланса импульса в дифференциальной форме в безразмерном виде содержит безразмерный комплекс $m = \gamma b^2 \omega^2 / (kg)$, где γ — объемный вес, g — ускорение свободного падения.

3. Математическая модель упругого состояния

Выбирается цилиндрическая система координат $\rho\theta z$, ось z которой проходит через центр диска $\rho = 0$, а плоскость $z = 0$ является средней плоскостью

Уравнение движения

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho. \tag{1}$$

Соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho &= \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \\ E\varepsilon_\theta &= \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \\ E\varepsilon_z &= -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta). \end{aligned} \tag{2}$$

Условие совместности деформаций

$$\rho\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho}+\varepsilon_\theta-\varepsilon_\rho=0. \tag{3}$$

Соотношения Коши, определяющие деформации через перемещения

$$\varepsilon_\rho=\frac{du}{d\rho},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{\rho}. \tag{4}$$

Формулы компонент тензора напряжений и перемещений в упругой области диска

$$\begin{aligned}\sigma_\rho&=A-\frac{B}{\rho^2}-\frac{3+\nu}{8}m\rho^2,\\ \sigma_\theta&=A+\frac{B}{\rho^2}-\frac{1+3\nu}{8}m\rho^2,\\ Eu&=(1-\nu)A\rho+\frac{1+\nu}{\rho}B-\frac{1-\nu^2}{8}m\rho^3.\end{aligned} \tag{5}$$

Для диска, находящегося в упругом состоянии

$$\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\rho^2\right),\\ \sigma_\theta&=\frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\rho^2\right),\\ Eu&=(1-\nu)\left(\frac{3+\nu}{8}b^2-\frac{1-\nu^2}{8}\rho^2\right)m\rho.\end{aligned}$$

4. Математическая модель пластического состояния

В случае плоского напряженного состояния функция пластичности

$$F(\sigma_\rho,\sigma_\theta,\sigma_z)\big|_{\sigma_z=0}=f(\sigma_\rho,\sigma_\theta).$$

Поверхность пластичности (6) при $n\to\infty$ с высокой степенью точности аппроксимирует призму Треска.

Пропорции, следующие из ассоциированного закона пластического деформирования [19]

$$\frac{\varepsilon_\rho^p}{(\partial F/\partial\sigma_\rho)\big|_{\sigma_z=0}}=\frac{\varepsilon_\theta^p}{(\partial F/\sigma_\theta)\big|_{\sigma_z=0}}=\frac{\varepsilon_z^p}{(\partial F/\partial\sigma_z)\big|_{\sigma_z=0}}.$$

Полные деформации включают упругую и пластическую составляющие

$$\varepsilon_\rho=\varepsilon_\rho^e+\varepsilon_\rho^p,\quad \varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta^e+\varepsilon_\theta^p,\quad \varepsilon_z=\varepsilon_z^e+\varepsilon_z^p.$$

Упругие деформации связаны с напряжениями согласно линейному закону Гука (2). Полные деформации удовлетворяют условию совместности деформаций (3) и связаны с перемещениями соотношениями Коши (4). Напряжения должны удовлетворять уравнению движения (1).

5. Напряженно-деформированное состояние диска. Условие Треска

В работе [24] в рамках теории малых деформаций рассматривалась задача о вращающемся диске для режима $\sigma_\theta=k$ условия Треска. В области $0\le\rho\le c$ реализуется пластическое состояние диска, в области $c\le\rho\le b$ — упругое. Решалась переопределенная задача, включающая шесть условий на разных границах:

1) $u|_{\rho=0}=0$, 2) $\sigma_\rho|_{\rho=b}=0$, 3) $[\sigma_\rho]|_{\rho=c}=0$, 4) $[\sigma_\theta]|_{\rho=c}=0$, 5) $[u]|_{\rho=c}=0$, 6) $\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c}=0$.

Первое условие приводит к тому, что в пластической области

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho = k-\frac{1}{3}m\rho^2, \quad \sigma_\theta = k\\
&Eu = (1-\nu)k\rho-\frac{1}{9}m\rho^3,\\
&E\varepsilon_\theta^p = -\frac{1+3\nu}{9}m\rho^2,\\
&\varepsilon_\rho^p = 0, \quad \varepsilon_z^p = -\varepsilon_\theta^p.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из решения (6) видно, что на упругопластической границе условие $\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c}=0$ не выполняется, то есть условие равенства нулю перемещений в центре диска противоречит условию равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе.

Условия непрерывности напряжений на упругопластической границе позволяют определить величины A, B в формулах (5). Из условия на границе $\rho=b$ определяется радиус упругопластической границы. При этом условие непрерывности перемещений на границе $\rho=c$ не выполняется.

Если учесть условие симметрии $\sigma_\rho|_{\rho=0}=\sigma_\theta|_{\rho=0}$ и отбросить условие $u|_{\rho=0}=0$, то, учитывая непрерывность напряжений на границе $\rho=c$, в упругой области

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho = k+\frac{1+3\nu}{12}\left(c^2-\frac{c^4}{2\rho^2}-\frac{3\mu}{2}\rho^2\right)m,\\
&\sigma_\theta = k+\frac{1+3\nu}{12}\left(c^2+\frac{c^4}{2\rho^2}-\frac{3}{2}\rho^2\right)m,\\
&Eu = \frac{1+3\nu}{12}\left(\frac{1+\nu}{2}\frac{c^2}{\rho}+(1-\nu)\rho\right)mc^2-\frac{1-\nu^2}{8}m\rho^3+(1-\nu)k\rho.
\end{aligned}$$

в пластической области, учитывая $\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c}=0$,

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho = k-\frac{1}{3}m\rho^2, \quad \sigma_\theta = k,\\
&Eu = (1-\nu)k\rho+\left((1+3\nu)\ ^3-\rho^3\right)\frac{m}{9},\\
&E\varepsilon_\theta^p = \frac{1+3\nu}{9}\frac{\tilde{n}^3-\rho^3}{\rho}m,\\
&\varepsilon_\rho^p = \varepsilon_\theta^p, \quad \varepsilon_z^p = -2\varepsilon_\theta^p.
\end{aligned} \tag{7}$$

Радиус упругопластической границы

$$c=\sqrt{b^2-2b\sqrt{\frac{2}{1+3\nu}\left(\frac{3k}{m}-b^2\right)}}.$$

В данном случае выполняется условие $[u]|_{\rho=c}=0$.

Формулы в (7) показывают, что при $\rho\to 0$ осевая пластическая деформация $\varepsilon_z^p\to-\infty$, то есть происходит сильное утонение диска и в центе диска происходит нарушение сплошности $Eu|_{\rho=0}=\frac{1+3\nu}{9}mc^3$, что вполне понятно.

6. Напряженно-деформированное состояние диска. Эффект упрочнения

При решении задачи о вращающемся диске в работе [25] было предложено рассматривать условие пластичности максимального касательного напряжений с учетом изотропного упрочнения

$$f = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2k\left(1 + \eta\varepsilon_{eq}\right).$$

Эквивалентное напряжение $\sigma_{eq} = f = k(1 + \eta\varepsilon_{eq})$. Эквивалентная пластическая деформация определяется из представления элементарной работы напряжений на пластических деформациях в виде произведения $\delta A = \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p$. В следствии чего вводится дополнительное определяющее уравнение

$$\sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p.$$

При решении задачи о диске эффект упрочнения приводит к тому, что в пластической области диска $0 \le \rho \le c$ одновременно появляются две подобласти, в одной из которых $0 \le \rho \le c_1$ будет выполняться режим, для которого $\sigma_\rho = \sigma_\theta$, а в другой $c_1 \le \rho \le c$ будет выполняться режим $\sigma_\theta = \sigma_{eq}$. Учет упрочнения позволяет избежать разрыва значений искомых величин. В работе [25] показано, что уменьшение значения параметра η приводит к росту значений пластических деформаций в центре диска.

7. Напряженно-деформированное состояние диска. Условие Поля

В качестве некоторого обобщения условия пластичности Мизеса в [26] предложено условие пластичности вида

$$\left(\frac{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^{2n} + (\sigma_\theta - \sigma_z)^{2n} + (\sigma_z - \sigma_\rho)^{2n}}{2}\right)^{1/2n} = k, \quad n \in N. \tag{8}$$

При $n \to \infty$ поверхность пластичности (8) переходит в поверхность пластичности Треска. При $n = 1$ поверхность пластичности (8) переходит в поверхность пластичности Мизеса.

В пластической области $0 \le \rho \le c$ задача статически определимая и $\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0} = k$. На упругопластической границе дружны выполняться условия непрерывности

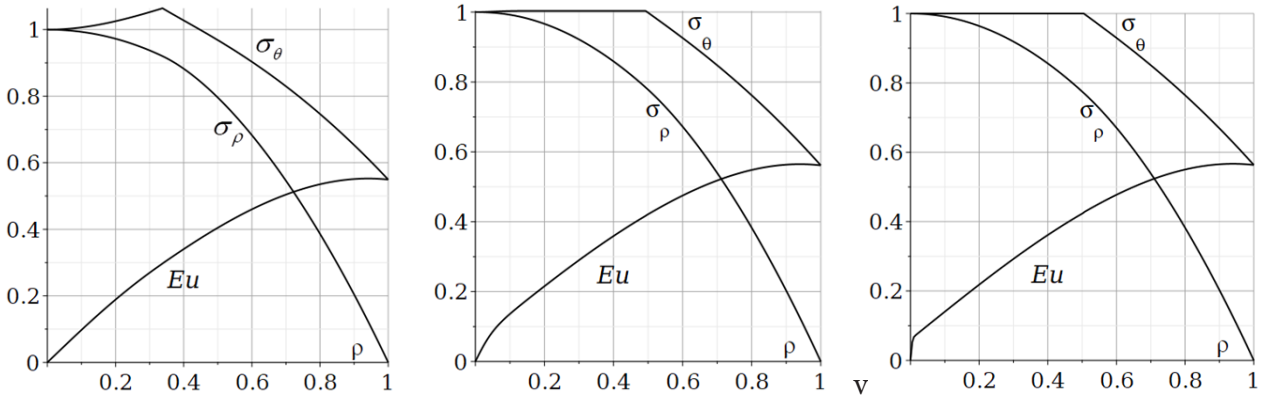
$$[\sigma_\rho]|_{\rho=c} = 0, \quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c} = 0, \quad [u]|_{\rho=c} = 0.$$

Если до начала процесса нагружения необратимые деформации были равны нулю, то

$$\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c} = 0, \quad \varepsilon_\theta^p|_{\rho=c} = 0, \quad \varepsilon_z^p|_{\rho=c} = 0.$$

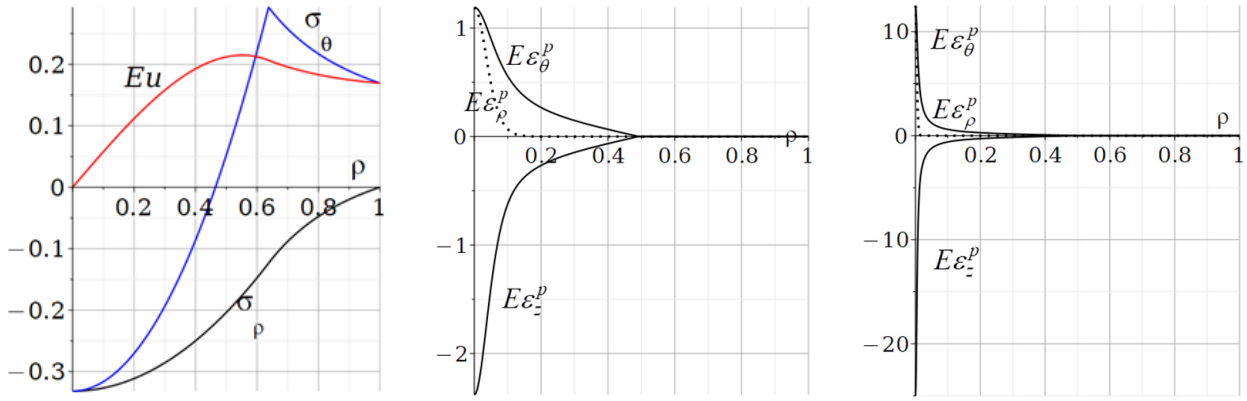
На внешнем контуре $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$.

На рис.1 показаны графики компонентов тензора напряжений, вектора перемещений и тензора пластических деформаций (рис. 2) для разных значений параметра n, когда $m = 2.7, \nu = 0.2$.



a) *b)* *c)*

Рис. 1. Графики компонент тензора напряжений и вектора перемещений
a) $n = 1$, *b)* $n = 100$, *c* $n = 10^4$



a) *b)* *c)*

Рис. 2. Графики компонент тензора пластических деформаций a) $n=1$, *b)* $n=100$, *c)* $n=10^4$

Заключение

Результаты, полученные в данной работе, показывают, что при выборе условия пластичности Поля все искомые величины остаются непрерывными. При увеличении значения параметра n в центре диска происходит увеличение значений деформаций, что приводит к утонению диска. При $n=1$ (условие пластичности Поля переходит в условие пластичности Мизеса) пластические деформации в центре того же порядка, что и упругие деформации. При $n>10^2$ и более пластически деформации, а следовательно, полные деформации, в окрестности центра диска нельзя считать малыми, что нарушает положения и следствия используемой теории малых деформаций. В случае плоского напряженного состояния идеально пластических тел для кусочно-линейных пластических потенциалов при реализации сингулярных режимов происходит разрыв радиальной пластической деформации.

Литература

1. *Надаи А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества / А. Надаи. – Москва : Объединенное научно-техническое издательство, 1936. – 280 с.

2. Демьянушко И. В. Расчет на прочность вращающихся дисков / И. В. Демьянушко, И. А. Биргер. – Москва : Машиностроение, 1978. – 247 с.

3. *Левин А. В.* Рабочие лопатки и диски паровых турбин / А. В. Левин. – Москва : Госэнергоиздат, 1963. – 624 с.

4. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.

5. *Calladine C. R.* Engineering Plasticity / C. R. Calladine – Oxford, England : Pergamon Press, 1969. – 337 p.

6. *Chakrabarty J.* Theory of Plasticity / J. Chakrabarty – Oxford, England : Elsevier Butterworth – Heinemann, – 2006. – 882 p.

7. *Alexandrov S.* Elastic/Plastic Discs Under Plane Stress Conditions / S. Alexandrov. – New York : Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, – 2015. – 113 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-14580-8.

8. *Aleksandrova N.* Application of Mises yield criterion to rotating solid disk problem / N. Aleksandrova. – International Journal of Engineering Science. – 2012. – V. 51. – P. 333–337. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2011.10.006.

9. *Lomakin E.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs / E. Lomakin, S. Alexandrov, Y. R. Jeng. // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 86, Iss. 1–2. – P. 235–244. – DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9.

10. *Лямина Е. А.* Дизайн равнопрочного вращающегося диска / Е. А. Лямина, О. В. Новожилова // Инновационные транспортные системы и технологии. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 122–134.

11. *Артемов М. А.* Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска / М. А. Артемов, А. П. Якубенко. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 30–38.

12. О появлении пластических областей во вращающемся диске / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Р. Г. Меджидов [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – № 1 (59). – С. 21–39.

13. Mathematical modeling of rotating disk states / E. V. Semka, M. A. Artemov, Y. N. Babkina [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122.

14. *Paul SK.* Stress Analysis of Functionally Graded Disk with Exponentially Varying Thickness Using Iterative Method / SK Paul, M. Sahni. // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. – 2021.16. – P. 232–244. – DOI: 10.37394/232011.2021.16.26.

15. *Sharma D.* Investigation of Thermo-Elastic Characteristics in Functionally Graded Rotating Disk Using Finite Element Method / D. Sharma, R. Kaur, H. Sharma. // Nonlinear Engineering. – 2021.10. – P. 312–322. – DOI: 10.1515/nleng-2021-0025

16. *Madan R.* Limit Elastic Analysis of Functionally Graded Rotating Disks Under Thermo-Mechanical Loading / R. Madan, S. Bhowmick. // International Journal of Applied Mechanics. – 2021.13. Article 2150033. – DOI: 10.1142/S1758825121500332

17. *Sahni M.* Elastic-plastic deformation of a thin rotating solid disk of exponentially varying density / M. Sahni, S. Sharma. // Research on Engineering Structures and Materials. – 2017. – Vol. 3, Iss. 2. – P. 123–133. – DOI: 10.17515/resm2016.41me0401.

18. *Бегун А. С.* Необратимое деформирование вращающегося диска в условиях пластичности и ползучести / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк. // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2021. – Т. 163, кн. 2. – С. 167–180. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.167-180.

19. On stress/strain state in a rotating disk / N. N. Aleksandrova, M. A. Artemov, E. S. Baranovskii [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1203. – P. 8. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012001.

20. *Prokudin A. N.* Schmidt-Ishlinskii Yield Criterion and a Rotating Cylinder with a Rigid Inclusion / A.N. Prokudin. // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2021. – Vol. 7, Iss. 2. – P. 858–869. – DOI: 10.22055/JACM.2020. 35648.2704.

21. *Фрейденталь А.* Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. Москва : Физматгиз, 1962. – 432 с.

22. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Москва : Наука, 1966. – 233 с.

23. *Новацкий В.* Теория упругости. / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

24. *Gamer U.* Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk / U. Gamer. // Journal of Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 50, Issue 2. – P. 676–678. – DOI: 10.1115/1.3167110.

25. *Gamer U.* Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk / Gamer U. // Ingenieur-Archiv. – 1984. – V. 54. – Issue 5. – P. 345–354. – DOI: 10.1007/BF00532817.

26. *Поль Б.* Критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Б. Поль // Разрушение: Математические основы теории разрушения. – 1975. – Москва : Мир. – Т. 2 : сб. науч. трудов. – С. 336–520.

УДК 539.5, 531.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

А. А. Афанасьев, А. В. Сухорукова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Проведено исследование влияния диаграммы деформирования материала на напряженно-деформированное состояние вращающихся дисков. Рассматривается три варианта материала: без упрочнения, линейно изотропно упрочняющийся материал. Решение получено в пакете автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical.
Ключевые слова: слова: ANSYS Mechanical, упрочнение, коэффициентом упрочнения, деформации, пластичность.

Решение в ANSYS Mechanical более сложных упругопластических задач сопряжено с вопросами корректного описания свойств материала и задания граничных условий. Выбор модели упрочнения значительно влияет на получаемые результаты.

В турбомашиностроении для оценки оборотов потери несущей способности диска широко используются формулы, основанные на условии пластичности Треска. Как показывается в данной главе, существующие формулы дают заниженную оценку. Проведены исследования напряженно-деформированного состояния сплошного и кольцевого дисков для условия пластичности Мизеса.

При увеличении угловой скорости вращения диска, при достижении некоторых оборотов в центре возникает пластическое состояние. С возрастанием оборотов упругопластическая зона заполняет некоторый круг радиуса ρ_s. Круговое кольцо вне этого круга остается в линейно упругом состоянии.

Пусть в диске реализуется плоское напряженное состояние. Решение будем осуществлять в цилиндрической системе координат r,θ,Z, ось Z которой совпадает с осью вращения диска. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу R_0 диска, а величины, имеющие размерность напряжения, к пределу текучести k_0.

Уравнение равновесия имеет вид:

$$\rho\frac{d\sigma_\rho}{d}+\sigma_\rho-\sigma_\theta+m\rho^2=0,$$

где нагрузка от действия центробежных сил (ρ_0 — плотность материала диска) выражается как

$$m=\rho_0\frac{\omega^2R_0^2}{k_0}.$$

Кинематические соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации:

$$\varepsilon_p=\varepsilon_p^e+\varepsilon_p^p,$$

$$\varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta^e+\varepsilon_\theta^p.$$

Уравнение равновесия дополняется соотношениями Дюамеля — Неймана

$$E\varepsilon_p^e=\sigma_p-\nu\sigma_\theta+E\alpha T,$$

$$E\varepsilon_\theta^e=\sigma_\theta-\nu\sigma_p+E\alpha T.$$

и условием совместности деформаций

$$\rho\frac{d\varepsilon_0}{d\rho}+\varepsilon_\theta-\varepsilon_\rho=0$$

Дополним систему уравнений соотношениями Коши:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho},\ \ \varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}.$$

Запишем уравнение теплопроводности для определения распределения температуры.

$$\frac{dT}{dt} - a^2 \Delta T = 0,$$

где a^2 — коэффициент температуропроводности:

$$a^2 = \sqrt{\frac{k}{\rho_c}}.$$

Пусть на наружном контуре диска и в центре диска заданы температуры T_a и T_b соответственно

$$T(1) = T_a,\ \ T(0) = T_b.$$

Пусть выполняется условие пластичности Мизеса, с учетом того, что предел текучести является функцией интенсивности пластической деформации.

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = f(\varepsilon_i^p, T), \quad \text{где}$$

$$\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_p^p - \varepsilon_p^p \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_\theta^{p2}}\ .$$

Дополним систему уравнений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_p^p = 2d\lambda(\sigma_p - \sigma_\theta),$$

$$d\varepsilon_\theta^p = 2d\lambda(\sigma_\theta - \sigma_p).$$

Математическая модель состоит из замкнутой системы уравнений. Дополним полученную систему уравнений граничными условиями и условиями неразрывности вектора напряжений и перемещений на упругопластической границе.

Пусть внешний контур свободен от усилий, тогда

$$\sigma_p(1) = 0.$$

Перемещение точки, находящейся на оси вращения, отсутствует

$$u(0) = 0.$$

Окружные и радиальные напряжения в центре диска равны

$$\sigma_p(0) = \sigma_\theta(0).$$

На упругопластической границе

$$\left[\sigma_p\right]_{ps} = 0,$$

$$\left[\sigma_\theta\right]_{ps} = 0,$$

$$\left[u\right]_{ps} = 0.$$

Рассмотрим решение в пакете автоматизированного конструирования ANSYS Mechanical.

Дискретизацию расчетной области при решении упругопластических задач следует проводить элементами, размер которых значительно меньше, чем у элементов, используемых в упругой задаче. Получаемое решение слабо зависит от сетки при условии, что в радиальном направлении расположить не менее 100 элементов. Сетка, на которой проводился расчет, содержит 98561 узел и 32644 элемента.

Проведем исследование для диска, выполненного из стали: $E = 2*10^{11}\ Па,\ \ \nu = 0.3$. Примем коэффициент теплопроводности $c = 60\ Вт/м*К$. Выберем параметр, отвечающий за нагрузку от действия центробежных сил $m = 3{,}141$.

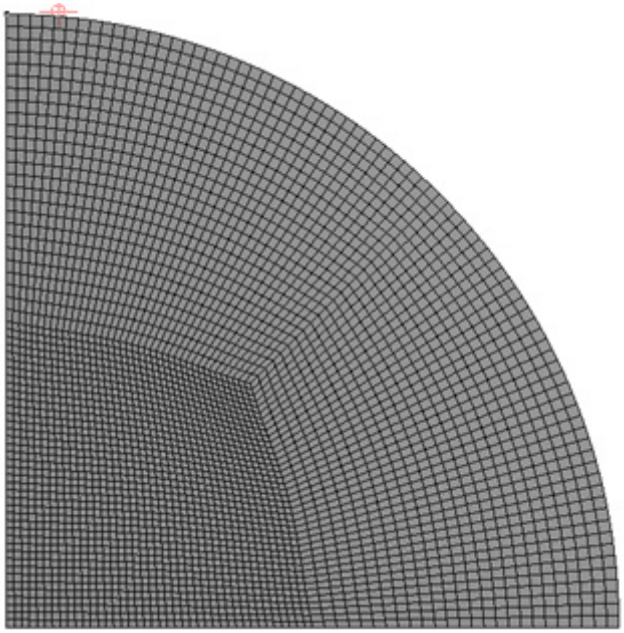


Рис. 1. Сетка

При решении задачи методом конечных элементов рассмотрим два варианта условия пластичности

• упрочнение отсутствует, то есть когда функция $f(\varepsilon_i^p, T) = a_i T + a_2$ и условие пластичности приобретает вид

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = a_1 T + a_2,$$

где a_1, a_2 — некоторые константы материала

• упрочнение происходит изотропно по линейному закону с постоянным коэффициентом упрочнения

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = a_1 T + a_2 + c\varepsilon_i^p;$$

В результате численного решения получены зависимости компонент напряжений, деформаций и перемещений от безразмерной радиальной координаты.

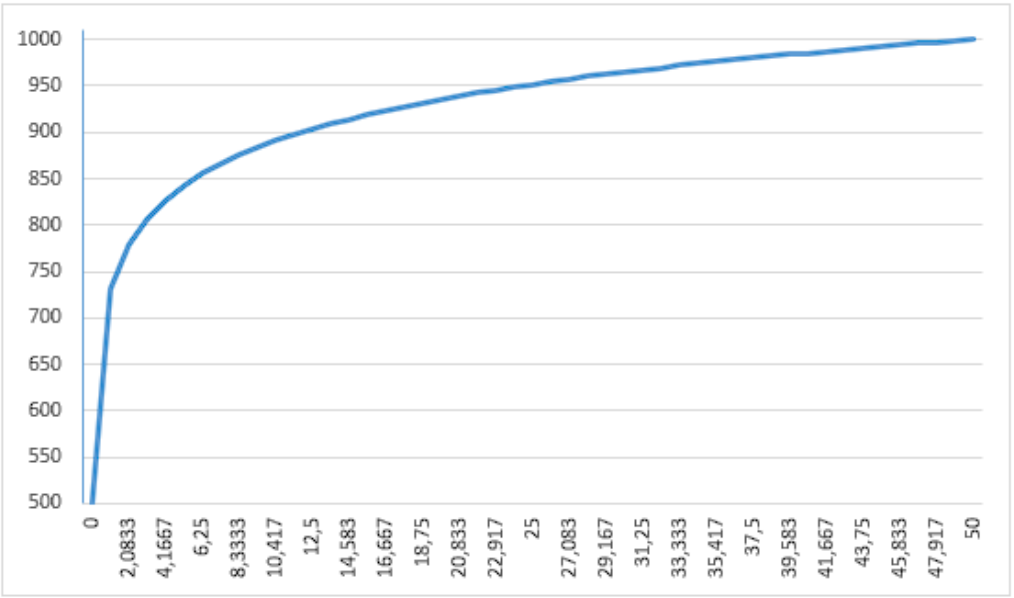


Рис. 2. Распределение температуры по радиусу

Рассмотрим случай, когда упрочнение отсутствует. В результате численного решения получены зависимости компонент напряжений от безразмерной радиальной координаты. Данные зависимости показаны на рис. 3–8

$$\sigma_e = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}.$$

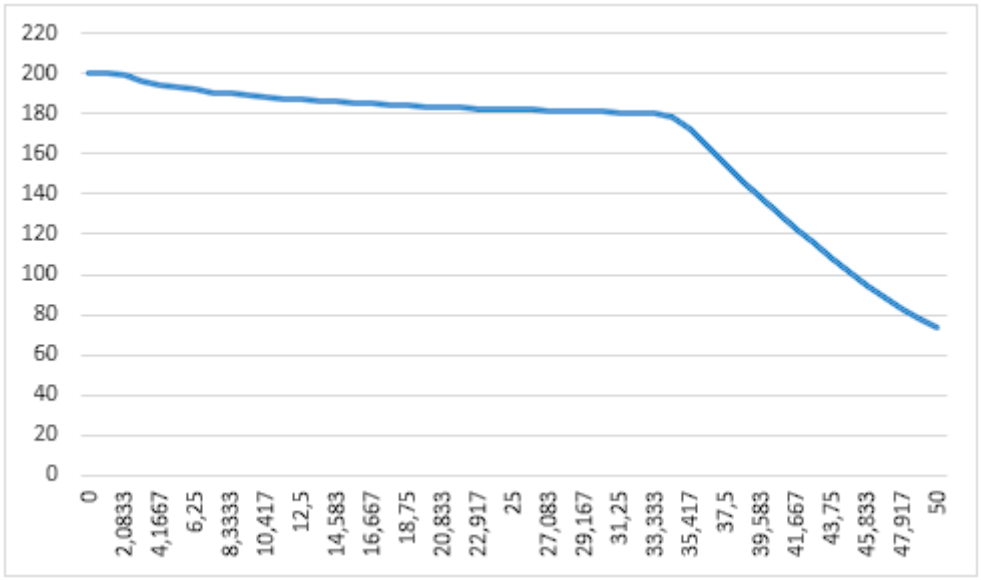


Рис. 3. Эквивалентные напряжения при отсутствии упрочнения

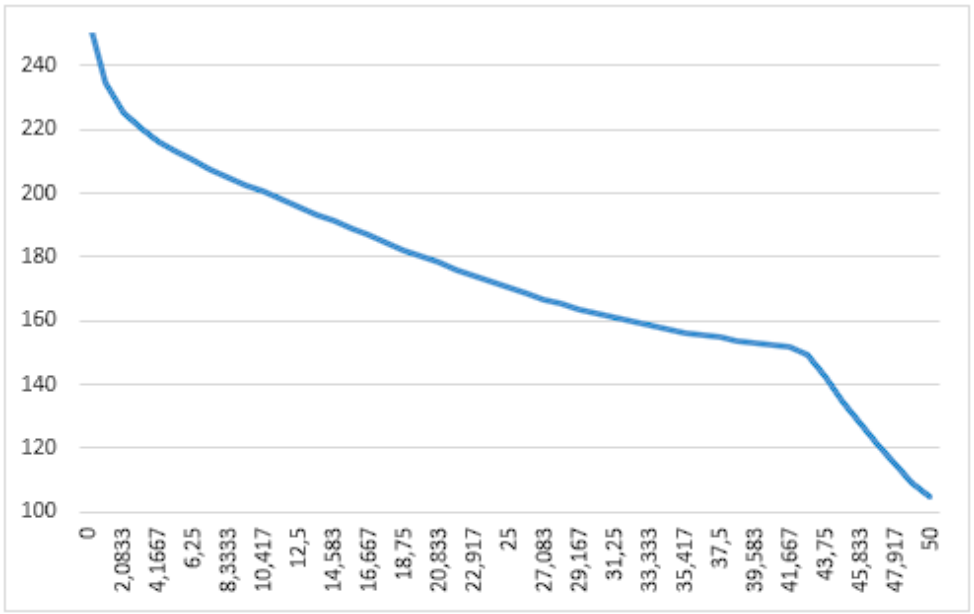


Рис. 4. Эквивалентные напряжения с учётом упрочнения

Максимум окружных напряжений достигается на упругопластической границе. Радиальные напряжения σ_ρ монотонно убывают. Зависимость интенсивности напряжений от радиуса, представленная на рис. 4, полностью согласуется с заданным условием пластичности. При данном значении параметра нагружения m получен радиус упругопластической границы $\rho_s = 34$ *мм*.

Рассмотрим случай линейно изотропно упрочняющегося материала. Нагружение центробежными силами произведем аналогично случаю без упрочнения. В результате численного

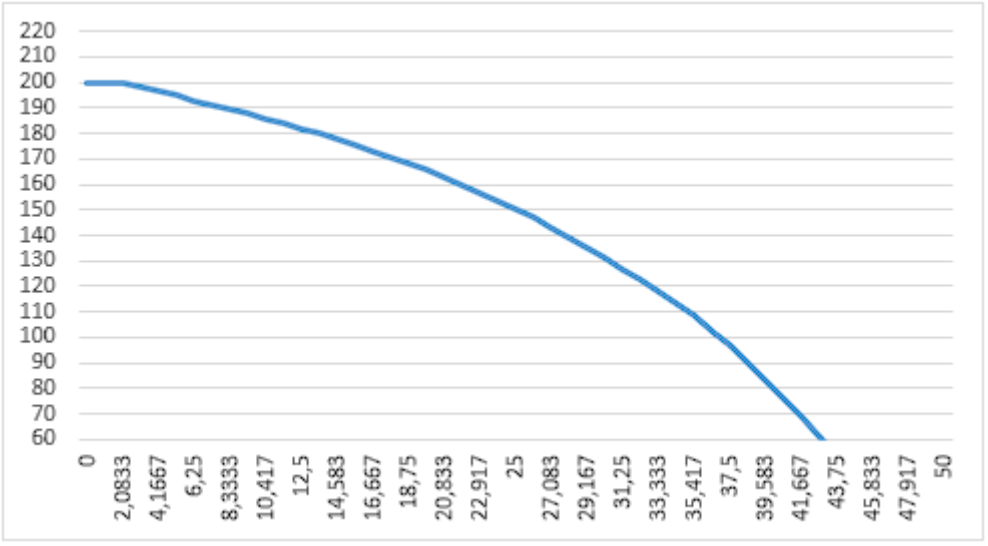


Рис. 5. Радиальные напряжения при отсутствии упрочнения

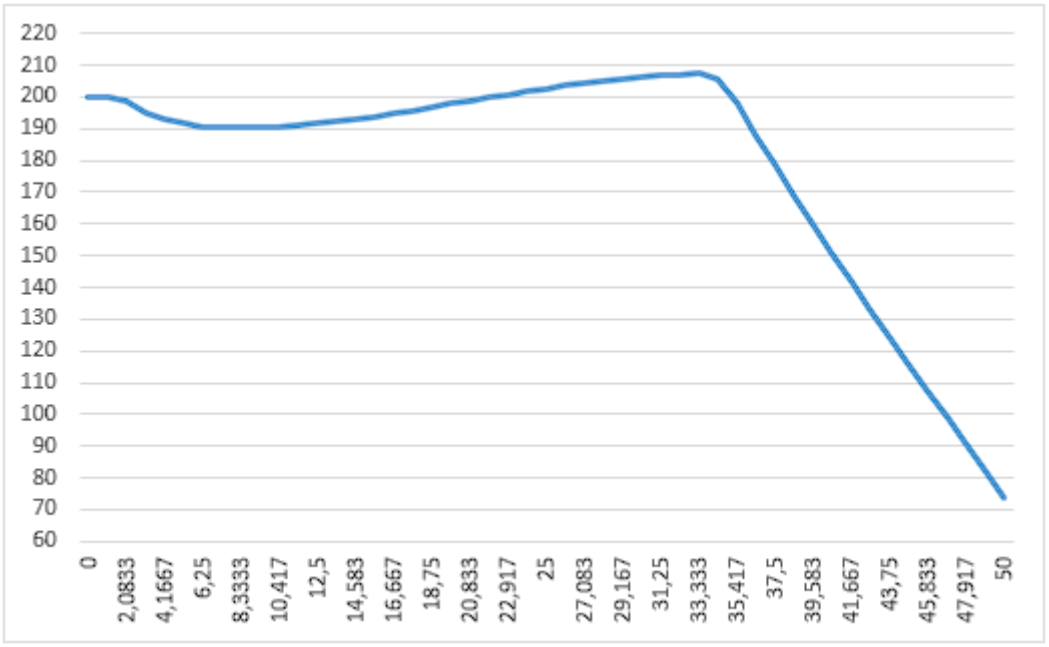


Рис. 6. Окружные напряжения при отсутствии упрочнения

решения получены зависимости компонент напряжений, деформаций и перемещений от безразмерной радиальной координаты.

Радиальные и окружные напряжения монотонно убывают. В центре диска $\sigma_\rho(0) = \sigma_\theta(0) > 1$, что связано с эффектом упрочнения материала. Если устремить коэффициент упрочнения к нулю, то, как и в случае задачи без упрочнения, будет выполняться $\sigma_\rho(0) = \sigma_\theta(0) = 1$. Интенсивность напряжений максимальна в центре диска и на 2,66 % выше, чем в случае с коэффициентом упрочнения равным нулю.

Качественно зависимости, полученные для компонент напряжений в случае без упрочнения и линейно изотропно упрочняющегося тела, совпадают. Интенсивность напряжений в случае линейно изотропно упрочняющегося тела в пластической зоне выше.

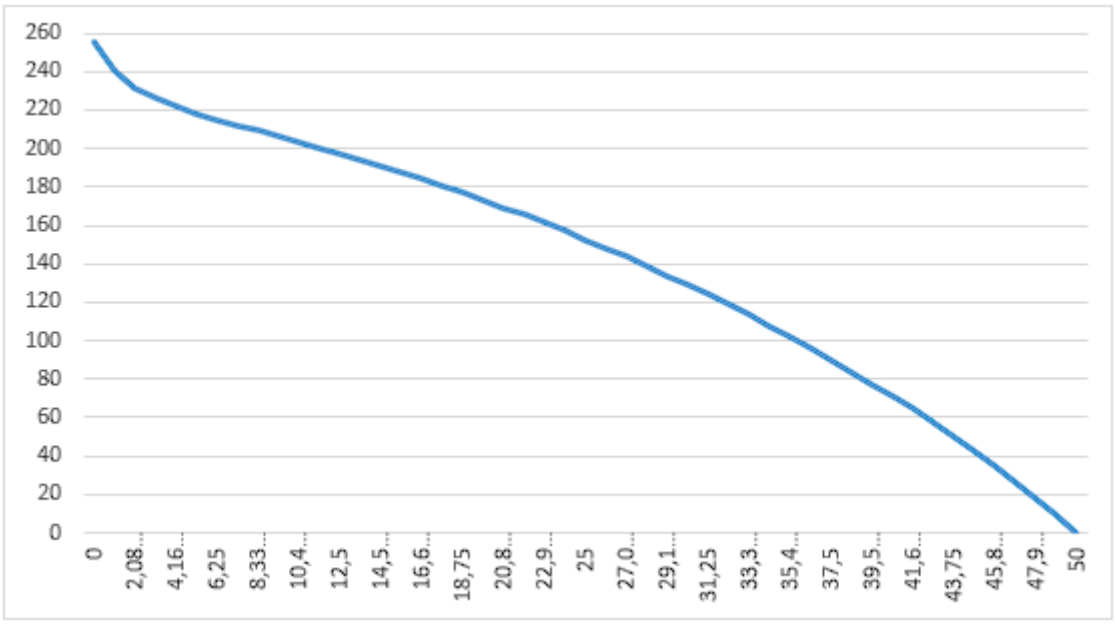


Рис. 7. Радиальные напряжения с учётом упрочнения

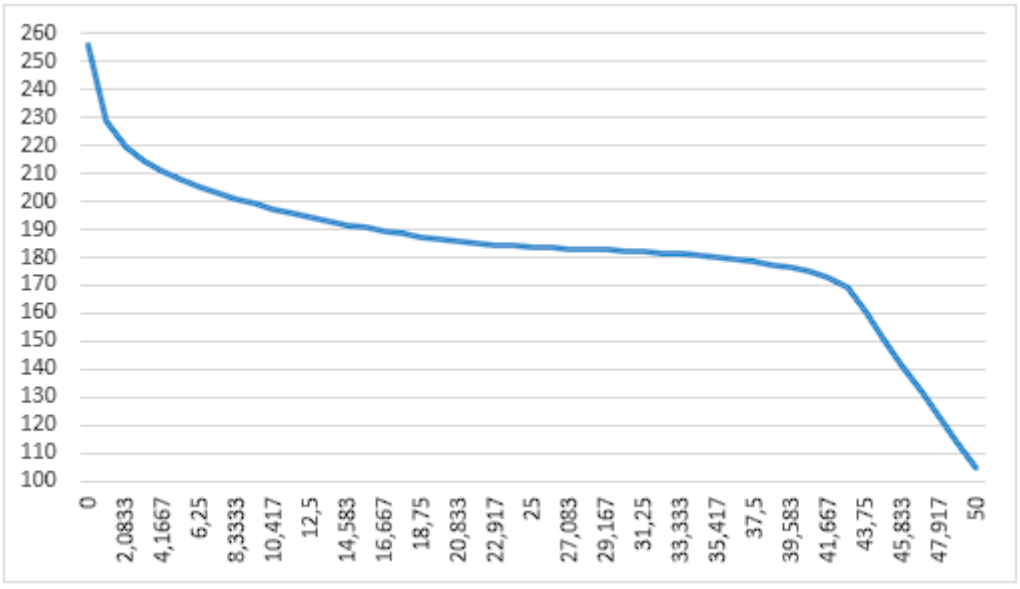


Рис. 8. Окружные напряжения с учётом упрочнения

Литература

1. *Биргер И. А.* Расчет на прочность деталей машин : справочник / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1993 – 640 с.

2. *Демьянушко И. В.* Расчет на прочность вращающихся дисков / И. В. Демьянушко, И. А. Биргер. – М. : Машиностроение, 1978 – 247 с.

УДК 539.375

НОРМАЛЬНЫЙ ОТРЫВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ КОМПОЗИТА

В. Э. Богачева

Тульский государственный университет

Аннотация. Исследуется упругопластическое деформирование композитной пластины, состоящей из двух консолей, связанных адгезионным слоем в состоянии плоской деформации. Используя концепцию «слоя взаимодействия», получена общая вариационная постановка, от которой с учетом теории Миндлина — Рейсснера и критерия Треска — Сен-Венана осуществлен переход к постановке в дифференциальном виде. Получено общее аналитическое решение. Удовлетворив граничным условия и условиям сопряжения, построены графики поля перемещений и напряжений в адгезионном слое для различных адгезивов при значении внешней нагрузки, соответствующей инициализации трещины в эксперименте.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, слой взаимодействия, линейный параметр, нормальный отрыв, упругопластическое деформирование, критерий Треска — Сен-Венана.

Введение

При экспериментальных исследованиях трещиностойкости адгезионных слоев в качестве образца обычно используют двухконсольную балку. А трещиноподобный дефект в адгезиве моделируют не только в виде математического разреза с жестким сцеплением сопрягаемых тел, но и в виде слоя с характерной толщиной [1–5].

В данной работе рассматривается образец, экспериментально изученный в статье [6] с различными материалами адгезионного слоя. С учетом того, что у композита тонкий адгезионный слой, в работе [7] подробно описано получение упругого аналитического решения. В статье [8] найдены пределы упругости для образца с различными материалами слоя. Показано, что для адгезива Araldite AV138 можно ограничиться упругой постановкой задачи, а для Araldite 2015 и Sikaforce 7752 необходимо перейти к упругопластической постановке. В статье [9] методом конечных элементов было определено, что в случае плоской деформации возможно образование нескольких зон упругопластического деформирования с разными знаками гидростатического давления, но основной вклад в значение прочностных характеристик вносит напряженно-деформируемое состояние зоны пластичности на торце адгезионного слоя. С учетом всех полученных ранее результатов, в данной работе найдено упругопластическое решение задачи.

1. Постановка задачи

Рассматривается образец длиной $\ell + a$, где $a = 0.055$ м; $\ell = 0.2$ м; $b = 0.025$ м; b — толщина образца (рис. 1). Консоли 1 и 2 имеют одинаковые толщины $h = 0.0127$ м, модуль упругости $E = 2.04 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$. По длине ℓ тела связаны адгезионным слоем 3, толщина которого $\delta_0 = 10^{-3}$ м. Механические и прочностные характеристики для адгезивов приведены в табл. 1 [6].

Правый торец композита закреплен от перемещений, на левых торцах консолей действует антисимметричная распределенная нагрузка интенсивностью P. На остальную поверхность образца не действует внешняя нагрузка. Композит рассматриваем в состоянии плоской деформации. Поведение консолей установлено в рамках линейной теории упругости, а материал слоя является идеально упругопластическим.

Таблица 1

Механические и прочностные характеристики адгезионных слоев

	E_3, Па	ν_3	τ_0, МПа	P_{cr}, Н
Araldite 2015	$1.85\cdot10^9$	0.33	14.6	1500
Sikaforce 7752	$0.49\cdot10^9$	0.3	5.2	3100

где E_3, ν_3 — модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя 3; τ_0 — предел текучести; P_{cr} — экспериментальное значение внешней нагрузки при инициализации трещины в адгезиве толщиной $\delta_0 = 10^{-3}$ м [6].

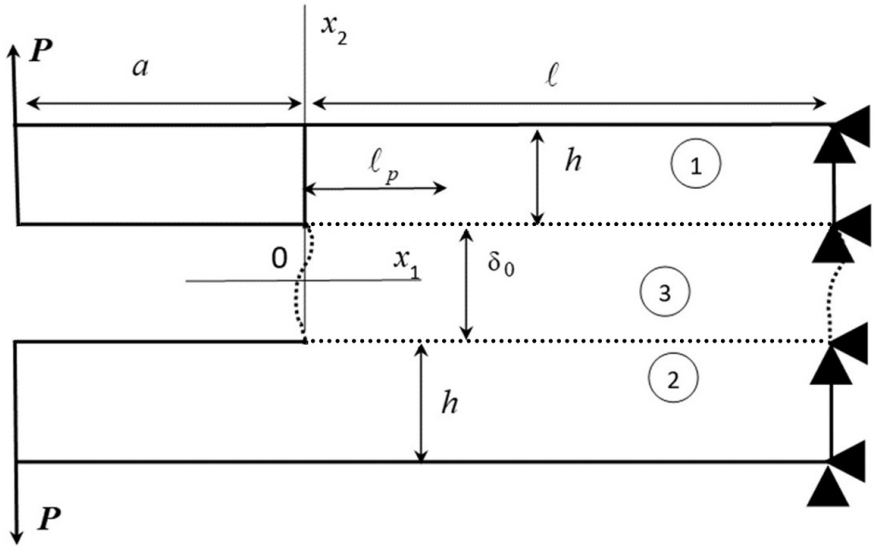


Рис. 1. Схема нагружения образца

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия», развитую в работе [5]. Для рассматриваемого образца поле перемещений границ слоя 3 имеет вид: $u_1^+ = u_1^-$, $u_2^+ = -u_2^-$, где u_n^+, u_n^- — соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя, $n = 1,2$ здесь и далее, а касательное напряжение $\overline{\sigma}_{12} = 0$. Поэтому запишем уравнение равновесия в вариационной форме для консоли 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \overline{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \int_{\ell} \overline{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \boldsymbol{P} \cdot \delta \boldsymbol{u} dl, \tag{1}$$

где $\cdot\cdot$ — двойное скалярное умножение; $\cdot$ — скалярное умножение; S_1 – площадь поперечного сечения тела 1; L_1 — граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры напряжений и деформаций; $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — тензоры средних напряжений и деформаций слоя с компонентами: $\overline{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int\limits_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11} dx_2$, $\overline{\sigma}_{12} = \overline{\sigma}_{21} = \frac{1}{\delta_0} \int\limits_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21} dx_2$, $\overline{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int\limits_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22} dx_2$, $\overline{\varepsilon}_{11} = \frac{du_1^+}{dx_1}$, $\overline{\varepsilon}_{22} = 2u_2^+ / \delta_0$, $\overline{\varepsilon}_{12} = \overline{\varepsilon}_{21} = 0$.

Для области упругого деформирования определяющие соотношения запишем в виде закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\delta_{ij}\right), \quad \overline{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1+\nu_3}\left(\overline{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1-2\nu_3}\overline{\varepsilon}\delta_{ij}\right), \tag{2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}_{11} + \overline{\varepsilon}_{22} + \overline{\varepsilon}_{33}$ — объемная деформация; δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1,2,3$.

В области необратимого деформирования адгезионного слоя предполагаем выполнение критерия Треска — Сен-Венана [10] при условии полной пластичности. При нагружении нор-

мальным отрывом выполняется равенство двух главных напряжений $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{33}$. Следовательно, условие текучести запишем в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11} = 2\tau_0. \tag{3}$$

Поле перемещений в теле 1 определяем согласно теории Миндлина [11]:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2),\ u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \tag{4}$$

Учитывая теорию пластин Миндлина — Рейсснера [12], из (2) получим определяющие соотношения для консоли 1:

$$\sigma_{11} = D\left(u_1^{+\prime} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2)\right),\ \sigma_{12} = L\left(u_2^{+\prime} - \varphi\right), \tag{5}$$

где $L = k\dfrac{E}{2(1+\nu)}$; $k = \dfrac{5}{6}$; $D = \dfrac{E}{(1-\nu^2)}$;

и слоя взаимодействия при обратимом деформировании:

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 u_1^{+\prime} + D_2 u_2^+,\ \bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 u_1^{+\prime}, \tag{6}$$

где $D_1 = \dfrac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$; $D_2 = \dfrac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$; $C_1 = \dfrac{2D_1}{\delta_0}$; $C_2 = \dfrac{\delta_0 D_2}{2}$.

На участке с упругопластическим деформированием слоя 3 предполагаем линейную связь между объемной деформацией слоя и гидростатическим давлением:

$$\bar{\sigma}_{11} = Ku_1^{+\prime} + \frac{2K}{\delta_0}u_2^+ - \frac{2}{3}\tau_0,\ \bar{\sigma}_{22} = Ku_1^{+\prime} + \frac{2K}{\delta_0}u_2^+ + \frac{4}{3}\tau_0. \tag{7}$$

где K — модуль объемной деформации; $K = \dfrac{E_3}{3(1-2\nu_3)}$.

От вариационного уравнения (1) приходим к системам дифференциальных уравнений второго порядка для тела 1:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0;\ \dfrac{dQ_{11}}{dx_1} = 0;\ \dfrac{dQ_{12}}{dx_1} = 0;\ x_1 \in [-a; 0), \\ \dfrac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0;\ \dfrac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0\dfrac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0;\ \dfrac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22};\ x_1 \in (0; \ell], \end{cases} \tag{8}$$

где $Q_{11}(x_1) = Dh\left(u_1^{+\prime} - \dfrac{h}{2}\varphi'\right)$, $Q_{12}(x_1) = Lh\left(u_2^{+\prime} - \varphi\right)$, $M_{11} = Dh^2\left(\dfrac{1}{2}u_1^{+\prime} - \dfrac{h}{3}\varphi'\right)$ — обобщенные силы и обобщенный момент.

Система (8) замкнута граничными условиями:

$$u_n^+\big|_{x_1=\ell} = 0,\ \varphi\big|_{x_1=\ell} = 0,\ M_{11}\big|_{x_1=-a} = 0,\ Q_{11}\big|_{x_1=-a} = 0,\ Q_{12}\big|_{x_1=-a} = -P/b, \tag{9}$$

и условиями сопряжения:

$$\begin{gathered} u_n^+\big|_{x_1=-0} = u_n^+\big|_{x_1=+0},\ \varphi\big|_{x_1=-0} = \varphi\big|_{x_1=+0},\ M_{11}\big|_{x_1=-0} = M_{11}\big|_{x_1=+0}, \\ Q_{12}\big|_{x_1=-0} = Q_{12}\big|_{x_1=+0},\ Q_{11}\big|_{x_1=-0} = \left(Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\big|_{x_1=+0}, \\ u_n^+\big|_{x_1=\ell_p-0} = u_n^+\big|_{x_1=\ell_p+0},\ \varphi\big|_{x_1=\ell_p-0} = \varphi\big|_{x_1=\ell_p+0},\ M_{11}\big|_{x_1=\ell_p-0} = M_{11}\big|_{x_1=\ell_p+0}, \\ Q_{12}\big|_{x_1=\ell_p-0} = Q_{12}\big|_{x_1=\ell_p+0},\ Q_{11}\big|_{x_1=\ell_p-0} = \left(Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\big|_{x_1=\ell_p+0}. \end{gathered} \tag{10}$$

Для исследования напряженно-деформированного состояния слоя ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений участка $(0; \ell]$, используя следующие условия:

$$u_n^+\big|_{x_1=\ell}=0,\ \varphi\big|_{x_1=\ell}=0,\ M_{11}\big|_{x_1=+0}=-Pa/b,\ \left(Q_{11}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\big|_{x_1=+0}=0,\ Q_{12}\big|_{x_1=+0}=-P/b. \quad (11)$$

Решение поставленной задачи определяет три неизвестные функции $u_1^+,\ u_2^+,\ \varphi$.

2. Решение задачи

Для образца с принятыми ранее механическими и геометрическими характеристиками на участке $(0;\ell_p]$ получено следующее общее решение системы (8):

$$\begin{aligned} u_1^+ &= \tilde{C}_2 e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}-R_9\cos(R_2x_1)+\\ +R_{10}\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}+\tilde{C}_3 e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_{10}\cos(R_2x_1)+\\ +R_9\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}-\\ &-\tilde{C}_4 e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}R_9\cos(R_2x_1)+\\ +R_{10}\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}+\tilde{C}_5 e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}-R_{10}\cos(R_2x_1)+\\ +R_9\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}+\\ &+\frac{1}{Dh}\tilde{C}_1x_1+\frac{2\tau_0\delta_0}{3Dh}x_1+\tilde{C}_6, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_2^+ &= \tilde{C}_2 e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_1\cos(R_2x_1)-\\ -R_2\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}-\tilde{C}_3 e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_2\cos(R_2x_1)+\\ +R_1\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}-\\ &-\tilde{C}_4 e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}R_1\cos(R_2x_1)+\\ +R_2\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}+\tilde{C}_5 e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}-R_2\cos(R_2x_1)+\\ +R_1\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}-\\ &-\frac{\delta_0}{2Dh}\tilde{C}_1-\frac{2\tau_0\delta_0S}{3Dh}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \tilde{C}_2 e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_3\cos(R_2x_1)+\\ -R_4\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}-\tilde{C}_3 e^{R_1x_1}\begin{bmatrix}R_4\cos(R_2x_1)+\\ +R_3\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}+\\ &+\tilde{C}_4 e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}R_3\cos(R_2x_1)+\\ +R_4\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}+\tilde{C}_5 e^{-R_1x_1}\begin{bmatrix}R_4\cos(R_2x_1)+\\ -R_3\sin(R_2x_1)\end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Delta=4D^2h^4(1-\delta_0T);\ T=12L(2LS+Dh)/(D^2h^2);\ S=Dh/K+0.5\delta_0;\ R_1=\sqrt{0.5\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha\right)};$
$R_2=\sqrt{0.5\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right)};\alpha=(Dh-6L\delta_0)/(Lh\delta_0(Dh/K+2\delta_0));\beta=D\sqrt{\delta_0T-1}/(L\delta_0(Dh/K+2\delta_0));$
$R_3=2LS(R_1^2-R_2^2-2D/(LS\delta_0))/V;\quad R_4=4LSR_1R_2/V;\quad V=2LS+Dh;$
$R_5=Dh^2(R_2R_4-R_1R_3)/(2SK)+R_1/S;\ \ R_6=-Dh^2(R_1R_4+R_2R_3)/(2SK)+R_2/S;\ \ R_7=R_1/(R_1^2+R_2^2);$
$R_8=R_2/(R_1^2+R_2^2);\ \ R_9=R_5R_7+R_6R_8;\ \ R_{10}=R_6R_7-R_5R_8.$

Согласно работе (7) запишем общее решение на участке $(\ell_p;\ell]$:

$$\begin{aligned} u_1^+ &= \tilde{C}_8 e^{F_1x_1}\begin{bmatrix}-F_9\cos(F_2x_1)+\\ +F_{10}\sin(F_2x_1)\end{bmatrix}+\tilde{C}_9 e^{F_1x_1}\begin{bmatrix}F_{10}\cos(F_2x_1)+\\ +F_9\sin(F_2x_1)\end{bmatrix}-\\ &-\tilde{C}_{10} e^{-F_1x_1}\begin{bmatrix}F_9\cos(F_2x_1)+\\ +F_{10}\sin(F_2x_1)\end{bmatrix}+\tilde{C}_{11} e^{-F_1x_1}\begin{bmatrix}-F_{10}\cos(F_2x_1)+\\ +F_9\sin(F_2x_1)\end{bmatrix}+\\ &+\left[\frac{\delta_0D_2C_2}{2S_2\left(C_1S_2-0.5\delta_0D_2C_2\right)}+\frac{1}{S_2}\right]\tilde{C}_7x_1+\tilde{C}_{12}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$u_2^+ = \tilde{C}_8 e^{F_1 x_1}\begin{bmatrix} F_1\cos(F_2x_1)- \\ -F_2\sin(F_2x_1)\end{bmatrix} - \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1}\begin{bmatrix} F_2\cos(F_2x_1)+ \\ +F_1\sin(F_2x_1)\end{bmatrix} -$$
$$-\tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1}\begin{bmatrix} F_1\cos(F_2x_1)+ \\ +F_2\sin(F_2x_1)\end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1}\begin{bmatrix} -F_2\cos(F_2x_1)+ \\ +F_1\sin(F_2x_1)\end{bmatrix} - \qquad (16)$$
$$-\frac{C_2}{C_1S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2}\tilde{C}_7,$$

$$\varphi = -\tilde{C}_8 e^{F_1 x_1}\begin{bmatrix} F_3\cos(F_2x_1)+ \\ +F_4\sin(F_2x_1)\end{bmatrix} + \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1}\begin{bmatrix} -F_4\cos(F_2x_1)+ \\ +F_3\sin(F_2x_1)\end{bmatrix} +$$
$$+\tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1}\begin{bmatrix} -F_3\cos(F_2x_1)+ \\ +F_4\sin(F_2x_1)\end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1}\begin{bmatrix} F_4\cos(F_2x_1)+ \\ +F_3\sin(F_2x_1)\end{bmatrix}, \qquad (17)$$

где $d = (m_2 + m_1m_3 + m_4)^2 - 4m_2m_4$; $m_1 = 1 + \frac{DhC_2}{2LS_2}$; $m_2 = \frac{1}{Lh}\left(C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2}\right)$;
$m_3 = -\frac{3(\delta_0 D_2 Dh + 4LS_2)}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $m_4 = \frac{12LS_2}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $S_2 = Dh + 0.5\delta_0 D_1$. $F_1 = \sqrt{0.5\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} + \xi\right)}$;
$F_2 = \sqrt{0.5\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} - \xi\right)}$; $\xi = 0.5(m_2 + m_1m_3 + m_4)$; $\zeta = 0.5\sqrt{-d}$; $F_3 = (m_2 - F_1^2 + F_2^2)/m_1$;
$F_4 = (2F_1F_2)/m_1$; $F_5 = 0.5(Dh^2(F_1F_3 + F_2F_4) + \delta_0 D_2 F_1)/S_2$; $F_6 = 0.5(Dh^2(F_2F_3 - F_1F_4) + \delta_0 D_2 F_2)/S_2$;
$F_7 = F_1/(F_1^2 + F_2^2)$; $F_8 = F_2/(F_1^2 + F_2^2)$; $F_9 = F_5F_7 + F_6F_8$; $F_{10} = F_6F_7 - F_5F_8$.

На рис. 2 построены графики горизонтальных перемещений верхней границы адгезионного слоя u_1^+ (12), (15). Кривая 1 соответствует адгезиву Araldite 2015, кривая 2 — Sikaforce 7752, пунктирной линией выделены участки с пластикой. Аналогично на рис. 3 построены графики вертикальных перемещений u_2^+ (13), (16), на рис. 4 — графики угла поворота φ (14), (17), на рис. 5 — распределение напряжений (6)–(7) $\bar{\sigma}_{11}$ в адгезионном слое, на рис. 6 — $\bar{\sigma}_{22}$.

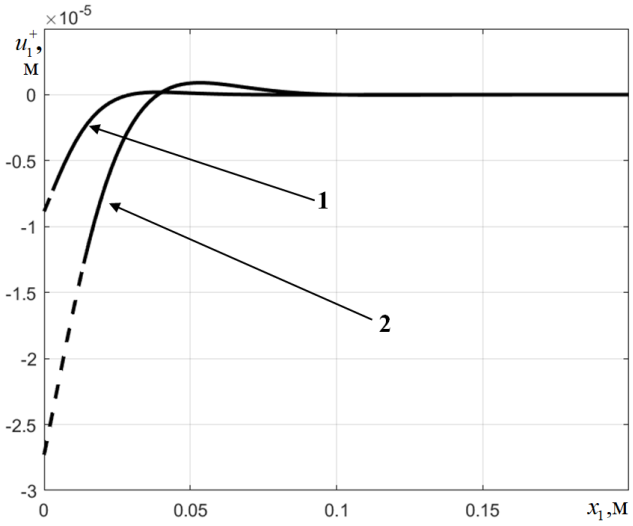


Рис. 2. Перемещения u_1^+

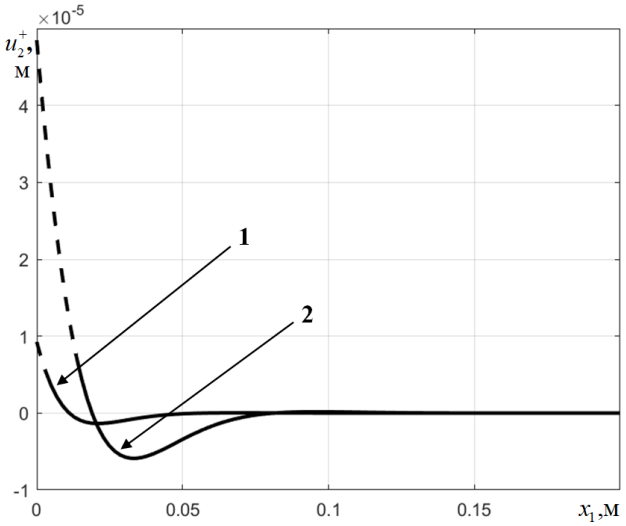


Рис. 3. Перемещения u_2^+

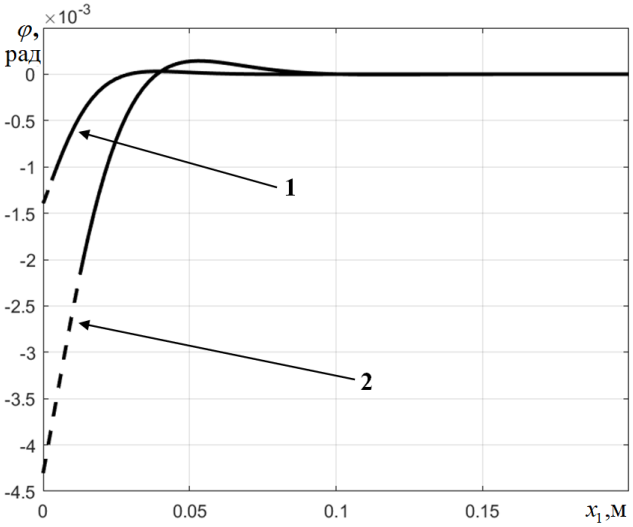


Рис. 4. Углы поворота φ

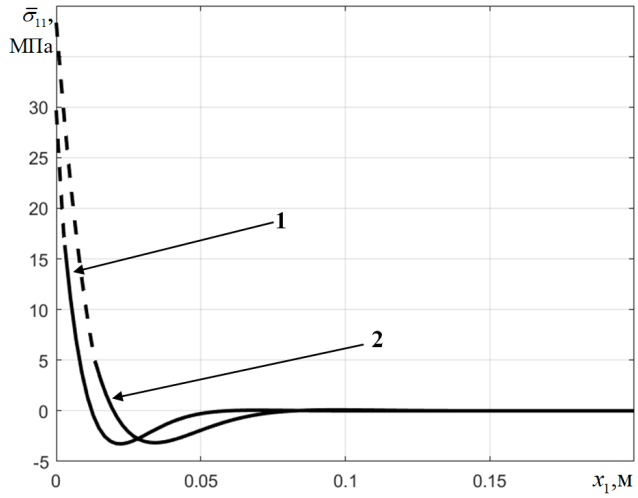


Рис. 5. Напряжения $\bar{\sigma}_{11}$

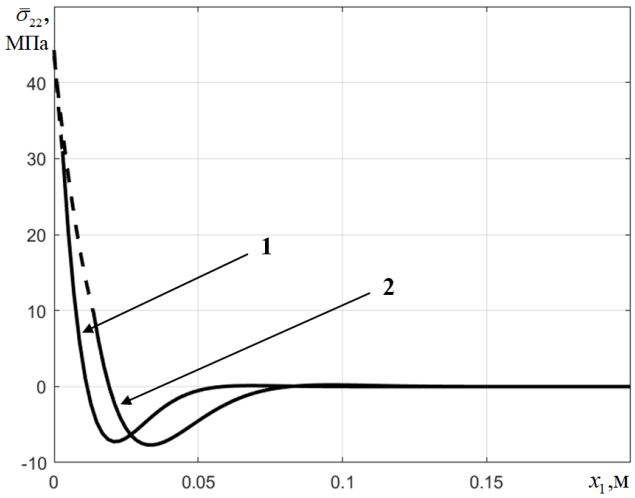


Рис. 6. Напряжения $\bar{\sigma}_{22}$

Из рис. 2–6 видно, что механические свойства адгезива и значение внешней нагрузки существенно влияют на значение перемещений и напряженное состояние в адгезионном слое. У умерено пластичного адгезива Araldite 2015 длина пластического участка составляет $\ell_p = 0.00294321$ м, а у пластичного полиуретана Sikaforce 7752 — $\ell_p = 0.01357304$ м, что в 4.6 раза больше, чем у Araldite 2015. Это обусловлено тем, что сила, обеспечивающая переход адгезионного слоя в состояние пластического деформирования, для Araldite 2015 равна $P = 911$ Н, для Sikaforce 7752 — $P = 534$ Н согласно статье [8].

Заключение

Из вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, сопряженных слоем взаимодействия получена упругопластическая постановка задачи в дифференциальном виде. Показано общее аналитическое решение. Построены графики перемещений и напряжений в слое для адгезивов с различными механическими свойствами при внешней нагрузке, соответствующей ее экспериментальному значению при инициализации трещины в адгезиве.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. *Prandtl L.* A thought model for the fracture of brittle solids / L. Prandtl, W. G. Knauss // International Journal of Fracture. – 2011. – Vol. 171, № 2. – P. 105–109.

2. *Ентов В. М.* К модели хрупкого разрушения Прандтля / В. М. Ентов, Р. Л. Салганик // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 87–99.

3. *Салганик Р. Л.* Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте / Р. Л. Салганик, А. А. Мищенко, А. А. Федотов // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2015. – № 2. – С. 24–33.

4. *Макклинток Ф.* Пластические аспекты разрушения / Ф. Макклинток // Разрушение. – Москва : Мир, 1975. – Т. 3. – С. 67–262.

5. *Глаголев В. В.* Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 22–34.

6. *Lopes R. M.* Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R.D.S.G. Campilho, F.J.G. da Silva, T.M.S. Faneco // Journal of Adhesion and Adhesives. – 2016. – Vol. 67. – P. 103–111.

7. *Богачева В. Э.* Исследование деформирования тонкого адгезионного слоя композита при воздействии нормальным отрывом / В. Э. Богачева // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – № 7. – С. 38–45.

8. *Богачева В. Э.* Исследование предела упругости тонкого адгезионного слоя композита при его нагружении нормальным отрывом / В. Э. Богачева // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 3 (57). – С. 67–74.

9. *Глаголев В. В.* Влияние пластических свойств тонкого адгезионного слоя на распределение зон пластичности и значения J-интеграла в состоянии плоской деформации / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 1. – С. 115–131.

10. *Ишлинский А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. – 704 с.

11. *Mindlin R. D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates / R. D. Mindlin // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38.

12. Reissner E. On Bending of Elastic Plates / E. Reissner // Quarterly of Applied Mathematics. – 1947. – Vol. 5(1). – P. 55–68.

УДК 539.3

НАХОЖДЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ СЖАТОГО ИЗОТРОПНОГО ШАРА

О. В. Боницкая, А. Д. Бомбина

Тульский государственный университет

Аннотация. Проведено исследование процесса сжатия шара из изотропного материала нормальной нагрузкой, решен вопрос о количестве и ориентации датчиков для определения деформационного состояния.
Ключевые слова: сжатие шара, удлинение материального волокна, тензор деформации.

Для анализа структуры и свойств различных материалов проводят различного рода эксперименты. Чаще всего это эксперименты на растяжение — сжатие кубического образца для определения анизотропных [1, 2], изотропных и кубических материалов [3]. Также рассматривалось кручение цилиндра для определения ромбического, моноклинного и триклинного материала [4]. Некоторые виды материалов для определения требуют программы экспериментов сочетающих и растяжение — сжатие, и кручение [5].

Рассмотрим задачу сжатия шара нормальной нагрузкой. Определим возможно ли с помощью тензодатчиков, расположенных на поверхности шара найти его деформационное состояние. Предполагаем деформации малыми. Описывая процесс изменения длины волокна, будем решать вопрос о необходимом количестве датчиков и ориентации их на шаре.

Рассмотрим движение элементарного материального волокна, определяемого вектором $d\overline{x}$, соединяющим бесконечно близкие материальные точки. Квадрат длины элементарного материального вектор-волокна в начальный момент времени и в текущий определяются выражениями [6]:

$$d\mathrm{X}^{\,2} = d\overline{\mathrm{X}} \cdot \tilde{g} \cdot d\overline{\mathrm{X}}, \qquad dx^{\,2} = d\overline{x} \cdot \tilde{G} \cdot d\overline{x}, \tag{1}$$

где $\tilde{g}$ и $\tilde{G}$ метрические тензоры в начальный и текущий момент времени.

Тензор деформаций Коши — Грина определяется как полу разность метрического тензора в текущий и начальный моменты:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\tilde{G} - \tilde{g}\right). \tag{2}$$

Напишем поле перемещения материальной точки в виде:

$$\overline{u} = u_1(x_1, x_2, x_3)\overline{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\overline{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3)\overline{e}_3. \tag{3}$$

Компоненты тензора малых деформаций через поле перемещений запишем в виде [6]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right), \tag{4}$$

где $\nabla_i u = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_k \Gamma_{ik}^{j}$.

Выражения для символов Кристофеля:

$$\Gamma_{ik}^{j} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right), \tag{5}$$

где $g^{kl} = (g_{ij})^{-1}$.

Рассмотрим подвижный ортонормированный базис $\overline{e}_r$, $\overline{e}_\varphi$, $\overline{e}_\theta$ (рис.1). Вектор $\overline{e}_r$ направлен по радиусу, $\overline{e}_\varphi$, $\overline{e}_\theta$ — единичные вектора на сфере радиуса r, касательные к линиям $\varphi = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$ соответственно.

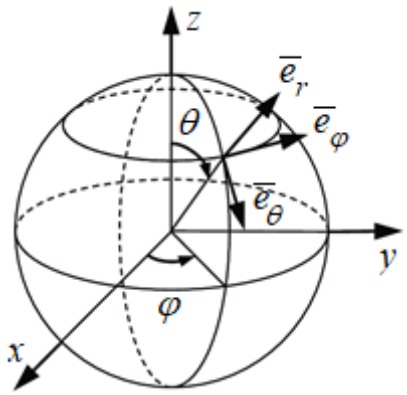


Рис. 1. Подвижный базис в сферической системе

Координаты материальной точки в сферической системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}. \tag{6}$$

Дифференциалы координат в сферической системе будут представлены в виде:

$$\begin{aligned} dx &= \cos\varphi\sin\theta\, dr - r\sin\varphi\sin\theta\, d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\, d\theta \\ dy &= \sin\varphi\sin\theta\, dr + r\cos\varphi\sin\theta\, d\varphi + r\sin\varphi\cos\theta\, d\theta \\ dz &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\ \ d\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Найдем квадрат длины дуги (1) в сферической системе координат:

$$d\mathrm{X}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2. \tag{8}$$

Компоненты евклидовой метрики и обратной ей в сферической системе координат будут записаны следующим образом:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Представим символы Кристофеля (5) в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} &\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \tilde{A}^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}, \ \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \\ &\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \end{aligned} \tag{10}$$

остальные символы равны нулю.

Пусть поле перемещения (3) представлены одной компонентой

$$\overline{u} = u_r(r,\theta)\overline{e}_r. \tag{11}$$

Компоненты деформации (4) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \\ &\varepsilon_{r\varphi} = 0, \qquad \varepsilon_{rr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right), \quad \varepsilon_{\varphi\theta} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Относительное удлинение волокна в направлении единичного вектора $\overline{e}_r$ определяется выражением:

$$\varepsilon_l = \overline{e}_l \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \overline{e}_l. \tag{13}$$

В направлении $\overline{e}_\varphi = (0,1,0)$ удлинение волокна (13) можно найти в виде:

$$\varepsilon_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{u_r}{r}. \tag{14}$$

В направлении $\overline{e}_\theta = (0,0,1),$ получим:

$$\varepsilon_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{u_r}{r}. \tag{15}$$

Произвольное направление на поверхности сферы, описывается $\overline{e}_l = (0, \cos\alpha, \sin\alpha),$ где α это угол между направлением $\overline{e}_l$ и вектором $\overline{e}_\varphi$ в плоскости $\varphi,\ \theta$ подвижного базиса. Тогда деформация волокна в данном направлении будет записана:

$$\varepsilon_l = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{u_r}{r}. \tag{16}$$

Если направление $\overline{e}_l = (0, \cos\alpha, \sin\alpha),$ а $\overline{e}_l = (0, \cos\beta, \sin\beta)$ в плоскости $\varphi,\ \theta$ подвижного базиса, то угол между волокнами будет равен:

$$\cos\left(\overline{e}_l, \overline{e}_m\right) = \frac{\overline{e}_l \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \overline{e}_m}{\sqrt{\overline{e}_l \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \overline{e}_l}\sqrt{\overline{e}_m \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \overline{e}_{lm}}} = \cos\left(\alpha - \beta\right). \tag{17}$$

Таким образом, относительные удлинения вектор-волокна на поверхности сферы в любом направлении будут равны $\frac{u_r}{r}$, что не дает нам выяснить деформационное состояние сферы при нагружении через экспериментальные данные.

Расположим тензодатчик в направлении $\overline{e}_r = (1,0,0)$ по радиусу шара, изменение волокна будет найдено в виде:

$$\varepsilon_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \tag{18}$$

Выберем вектор $\overline{e}_\gamma = (\cos\gamma, 0, \sin\gamma)$ плоскости $r,\ \theta$ под углом γ к обратному направлению вектора $\overline{e}_r$, найдём изменение волокна:

$$\varepsilon_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ 0 \\ \sin\gamma \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\gamma + \frac{u_r}{r}\sin^2\gamma - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\sin 2\gamma. \tag{19}$$

Таким образом, из уравнения (19) выведем зависимость:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = \frac{\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\cos^2\gamma + \dfrac{u_r}{r}\sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma}. \tag{20}$$

Подставляя выражения (14) и (18) в уравнение (20), получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = \frac{\varepsilon_r\cos^2\gamma + \varepsilon_\varphi\sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma}. \tag{21}$$

Тензор деформации (12) через экспериментальные данные для изменения волокон (14), (18), (21) перепишем в виде:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & \dfrac{\varepsilon_r\cos^2\gamma + \varepsilon_\varphi\sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma} \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ \dfrac{\varepsilon_r\cos^2\gamma + \varepsilon_\varphi\sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma} & 0 & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Рассмотрим вектор $\overline{e}_\psi = (\cos\psi, \sin\psi, 0)$ плоскости r, φ под углом ψ к обратному направлению вектора $\overline{e}_r$, изменение волокна запишем следующим образом:

$$\varepsilon_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & 0 & \dfrac{u_r}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{u_r}{r}\sin^2\psi + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\sin 2\psi. \tag{23}$$

Из уравнения (23) выведем зависимость:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = 2\frac{\dfrac{u_r}{r}\sin^2\psi - \varepsilon_\psi}{\sin 2\psi}. \tag{24}$$

Подставляя выражения (14) и (18) в уравнение (24), получим:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = 2\frac{\varepsilon_\varphi\sin^2\psi - \varepsilon_\psi}{\sin 2\psi}. \tag{25}$$

Найдем зависимость между удлинениями волок изотропного материала в разных направлениях, приравнивая выражения (21) и (25) в виде:

$$\frac{\varepsilon_r \cos^2\gamma + \varepsilon_\varphi \sin^2\gamma - \varepsilon_\gamma}{\sin 2\gamma} = 2\frac{\varepsilon_\varphi \sin^2\psi - \varepsilon_\psi}{\sin 2\psi}. \quad (26)$$

На сновании (26) можно оценивать правильность проведения эксперимента и применения модели среды.

В результате проведенной работы можно сделать вывод, что закон перемещения материальных точек в виде $\overline{u} = u_r(r,\theta)\overline{e}_r$ не может быть найден по измерениям, проведенным с помощью тензодатчиков на поверхности шара. Для определения деформационного состояния шара из изотропного материала при полярной нагрузке в точке нужно произвести три измерения, расположив тензодатчики: первый — на поверхности шара, второй — в направлении радиуса шара, третий — под углом в плоскости r, θ или в плоскости r, φ.

Литература

1. *Христич Д. В.* Численная симуляция экспериментов по определению типа начальной анизотропии упругого материала / Д. В. Христич, Д. А. Сухоруков, М. Ю. Соколова // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2021. – Т. 163, № 2. – С. 214–225. – DOI 10.26907/2541-7746.2021.2.214-225. – EDN VNACMR.

2. *Христич Д. В.* Критерий экспериментальной идентификации изотропного и кубического материалов // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. – 2012. – № 3. – С. 110–118.

3. *Христич Д. В., Каюмов Р. А., Мухамедова И. З.* Программа экспериментов по определению главных осей анизотропии материала // Изв. Казан. гос. архит.-строит. ун-та. – 2012. – № 3. – С. 216–224.

4. *Христич Д. В.* Критерий экспериментальной идентификации ромбического, моноклинного и триклинного материалов // Изв. Тул. гос. ун-та. Естеств. науки. – 2013. –№ 3. – С. 166–178.

5. *Христич Д. В.* Критерий экспериментальной идентификации гексагонального, тригонального и тетрагонального материалов // Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А. Н. Туполева. – 2013. – № 2. – С. 67–72.

6. *Маркин А. А., Соколова М. Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.

УДК 539.3

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА УТОЧНЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕВОМ СЖАТИИ ЦИЛИНДРА С ЗАКРЕПЛЁННЫМИ ТОРЦАМИ

О. С. Голобоков[1], А. Л. Попов[1,2]

[1]Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
[2]Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Аннотация. Рассмотрена задача о сжатии упругого цилиндра жесткими пластинами в осевом направлении. Предполагается, что торцы цилиндра не перемещаются относительно сжимающих пластин. Первое приближение решения получено с помощью разделения переменных, позволяющего точно удовлетворить граничным условиям по торцам и усредненно, либо в одном поперечном сечении — условиям на боковой поверхности цилиндра. Для уточнения решения используется итерационная процедура, состоящая в последовательном снятии невязок в напряжениях на боковой поверхности цилиндра, затем — в радиальном перемещении торцов, и, наконец, — в осевом перемещении. Выполнено сопоставление исходного и уточнённых аналитических решений с численным решением, полученным методом конечных элементов для различных коэффициентов Пуассона материала цилиндра.
Ключевые слова: упругий цилиндр, осевое сжатие, приближенное решение, уточнение, решение МКЭ, сравнение.

Введение

Упругие блоки широко используются в качестве виброизолирующих прокладок в различных механизмах и опорах строительных конструкций. В процессе эксплуатации они находятся, в основном, в условиях одноосного сжатия.

Изучение поведения упругих слоев, в частности, цилиндрической формы при осевом сжатии ранее было сконцентрировано на относительно несжимаемых материалах, к примеру, — резины, для которых предполагалось допущение о параболической форме выгиба боковой поверхности вдоль осевой координаты [1–3]. В работе [4] приводится приближённое решение задачи об осевом сжатии упругого цилиндра с закреплёнными торцами без введения гипотезы о параболичности боковой поверхности для материала с произвольным коэффициентом Пуассона. При этом условия отсутствия напряжений на свободной боковой поверхности цилиндра считаются выполненными в интегральном смысле. В предлагаемой работе подобное решение и решение, полученное при удовлетворении граничным условиям отсутствия напряжений на боковой поверхности в одном центральном поперечном сечении цилиндра, используются в качестве первого приближения итерационной процедуры, состоящей из нескольких шагов: снятии невязок в напряжениях на боковой поверхности цилиндра, затем — в радиальном перемещении торцов, и, наконец, — в осевом перемещении.

Постановка задачи

Рассматривается упругий цилиндр радиусом a и высотой h под воздействием одностороннего осевого сжатия на величину w_0. Цилиндр моделируется как линейно упругосжимаемый материал с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Предполагается что торцы упругого цилиндра жестко закреплены на сжимающих пластинах. Нижняя пластина неподвижна, тогда как верхняя задает вертикальное смещение w_0. На рис. 1 показана расчетная схема сжатия цилиндра с зафиксированными торцами. Изогнутые штриховые линии показывают профиль деформации по бокам цилиндра при сжатии.

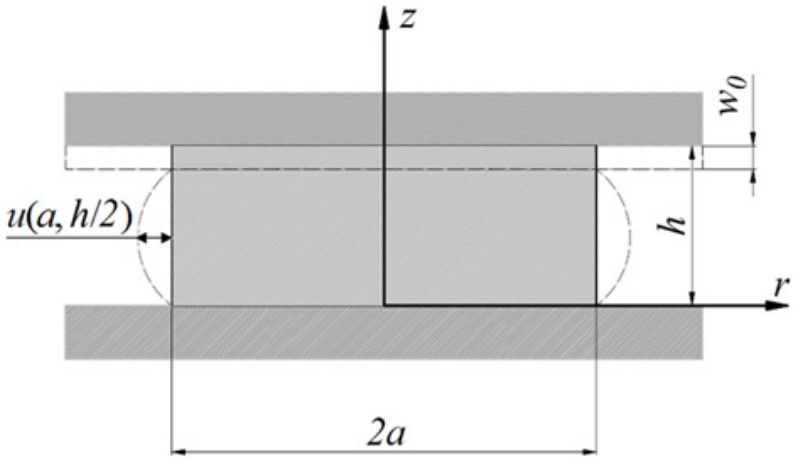


Рис 1. Расчетная схема сжатия цилиндра с зафиксированными торцами

Для решения задачи об осевом сжатии цилиндра может быть использована система уравнений Навье — Коши в осесимметричном случае в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned}&(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r}+\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}=0\\&(1-\nu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\frac{1-2\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)=0\end{aligned} \tag{1}$$

где u_r, u_z — перемещения в осевом и радиальном направлениях, ν — коэффициент Пуассона.

Граничные условия в данной постановке — при осевом сжатии цилиндра и условии непроскальзывания торцов относительно пластин, будут следующими:

$$\begin{aligned}&z=0: \quad u_r=u_z=0,\\&z=h: \quad u_r=0, \quad u_z=-w_1,\\&r=a: \quad \sigma_r=\tau=0,\end{aligned} \tag{2}$$

где σ_r, τ — соответственно, радиальное и тангенциальное напряжения.

На первом шаге итерационной процедуры методом разделения переменных, подобно тому, как это сделано в [4], ищется выражение для радиального смещения:

$$u_r(r,z)=F(r)G(z), \tag{3}$$

которое, после подстановки в систему (1) и интегрирования с учётом граничных условий (2) на торцах цилиндра позволяет определить также и осевое смещение с точностью до одной постоянной c_1:

$$u_r(r,z)=c_1 I_1\left(\frac{\alpha r}{h}\right)G_+(z), \qquad u_z(r,z)=c_1 I_0\left(\frac{\alpha r}{h}\right)G_-(z)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-w_0\frac{z}{h} \tag{4}$$

$$G_\pm(z)=\left(1-\frac{z}{h}\right)\sin\frac{\alpha z}{h}\pm\frac{z}{h}\sin\left[\alpha\left(1-\frac{z}{h}\right)\right]$$

(параметр α в этих выражениях определяется через коэффициент Пуассона как положительный корень уравнения [4]):

$$\alpha=(3-4\nu)\sin(\alpha). \tag{5}$$

Подстановка выражения (4) в соответствии с законом Гука в формулу для радиального напряжения и взятие её на боковой поверхности цилиндра (при $r=a$) позволяет определить постоянную c_1 как из интегрального условия: $\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_r(a,z)dz=0$, так и из условие равенства

нулю радиального напряжения при конкретном значении координаты z на контуре одного из поперечных сечений боковой поверхности цилиндра, например, в середине высоты: $\sigma_r(a, h/2) = 0$. В результате, из интегрального условия получим:

$$c_1 = \frac{\nu(3-4\nu)w_0}{4(1-2\nu)Q_1}, \quad Q_1 = \frac{1}{2}\left[I_0(\omega) + (1-2\nu)I_2(\omega)\right], \quad \omega = \frac{\alpha a}{h}, \tag{6}$$

а из условия на контуре $r = a$ при $z = h/2$:

$$c_{11} = \frac{w_0(\alpha - 3\sin\alpha)\sin(\alpha/2)}{(\alpha - \sin\alpha)\left[(\alpha\cos\alpha - 3\sin\alpha)I_0(\omega) + \frac{h}{a}(1-\cos\alpha)I_1(\omega)\right]}. \tag{7}$$

Заметим, что, вследствие антисимметричного распределения сдвигового напряжения относительно центрального кругового сечения цилиндра, равенство $\frac{1}{h}\int_0^h \tau(a,z)dz = 0,$ а также $\tau(a, h/2) = 0$ выполняются при любом значении постоянной c_1.

Полученные решения при обращении в ноль интегралов от радиального и тангенциального напряжений по высоте боковой поверхности цилиндра и обращении в ноль напряжений на контуре центрального кругового сечения цилиндра не гарантируют обращение их в ноль в любой точке этой поверхности. Образующиеся при этом невязки в напряжениях снимаются на втором шаге итерационной процедуры путём приложения к боковой поверхности цилиндра таких же напряжений, но с противоположными знаками. Следуя [5], представим распределения напряжений по боковой поверхности цилиндра, полученные на первом шаге итерационной процедуры, в форме разложений в тригонометрические ряды Фурье:

$$\begin{gathered}\sigma_r(a,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos\frac{2\pi n y}{h}, \quad \tau(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin\frac{2\pi n y}{h}, \quad y = z - \frac{h}{2} \\ p_n = \frac{2}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r(a,y)\cos\frac{2\pi n y}{h}dy, \quad q_n = \frac{2}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \tau(a,y)\sin\frac{2\pi n y}{h}dy\end{gathered} \tag{8}$$

Выражение для функции радиального смещения боковой поверхности цилиндра при такой нагрузке имеет вид:

$$\begin{gathered}u_{II}(a,z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos\frac{2\pi n y}{h}, \quad u_n = \frac{a}{2G_0}\frac{(p_n - \delta_n q_n)(1-m) - m\beta_n q_n \gamma_n}{1 + m\left(\beta_n^2\gamma_n - 1\right)}, \\ \delta_n = \frac{I_0(\beta_n)}{I_1(\beta_n)}, \quad \gamma_n = \frac{1}{2}\left(\delta_n^2 - 1\right), \quad \beta_n = 2\pi n\frac{a}{h}, \quad G_0 = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad m = \frac{1}{\nu}.\end{gathered} \tag{9}$$

Выражение для функции добавочного осевого перемещения w_{II} при компенсирующем давлении на боковую поверхность цилиндра имеет вид, похожий на (9), но представляется рядом по $\sin\frac{2\pi n y}{h}$. При этом на торцах цилиндра $w_{II} = 0,$ т. е. это решение не создаёт дополнительных перемещений торцов цилиндра в осевом направлении. В то же время выравнивающий эффект в напряжениях на боковой поверхности сопровождается возникновением добавочных радиальных перемещений, которые, как следует из (9), не обращаются в нуль на торцах цилиндра.

Устранение полученной невязки в радиальных перемещениях осуществляется на третьем шаге процедуры путём растяжения цилиндра равномерно распределёнными по торцам нормальными напряжениями, считая торцы свободными от закреплений. В соответствии с эффектом Пуассона, осевое растяжение незакреплённого по торцам цилиндра сопровождается равномерным сжатием его боковой поверхности. Решение такой задачи приведено во многих книгах по теории упругости. Есть оно также и в [5]. В математическом плане оно относится к

элементарным решениям. При таком растяжении отлично от нуля только осевое напряжение $\sigma_{zIII} = \sigma_0$. Выражения для деформаций в этом случае (индекс III опускаем):

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \varepsilon_r = -\nu \frac{\sigma_0}{E}, \quad \gamma_{rz} = 0,$$

а, полученные по ним, перемещения:

$$w_{III} = \frac{\sigma_0}{E}\left(z - \frac{h}{2}\right), \quad u_{III} = -\nu \frac{\sigma_0}{E} r \,. \tag{10}$$

Величину растягивающего напряжения σ_0 подберём такой, чтобы сокращение радиального размера цилиндра было равно радиальному перемещению контура торцов цилиндра с противоположным знаком: $u_{III}(a) = -u_{II}(a,0) = -u_{II}(a,h)$. При этом образуется невязка в осевых перемещениях цилиндра, которая для торца $z = h$ будет равна:

$$w_{III}(h) = \frac{h}{2\nu a} u_{II}\left(a,h\right). \tag{11}$$

В итоге, на четвёртом шаге итерационной процедуры приходим к исходной задаче об осевом сжатии цилиндра, но не на величину w_0, а на $w_{IV} = w_0 - w_{III}(h)$.

Конкретную реализацию шагов процедуры проиллюстрируем для вытянутого цилиндра с параметрами: $a = 20$ *мм*, $h = 100$ *мм*, $w_0 = 10$ *мкм*. Модуль упругости принимался равным 800 *МПа*, коэффициент Пуассона задавался в интервале $(0,01 \div 0,5)$. Для этих параметров строилось также численное решение задачи с использованием программного комплекса ANSYS в подпрограмме workbench mechanical.

На рис. 2 приведены графики изменения значения перемещения $\mathbf{u}_{\max} = u_r(a, h/2)$ в мкм в зависимости от коэффициента Пуассона. Сплошными линиями показаны значения перемещения, полученные по результатам расчётов МКЭ, штрихпунктирными — при интегральном определении постоянной c_1, ромбиками — при определении постоянной из равенства нулю радиального напряжения в центральном сечении боковой поверхности цилиндра. Слева приведены значения, рассчитанные по формулам (4)–(7), справа — уточнённые значения для случая точечного определения постоянной c_1.

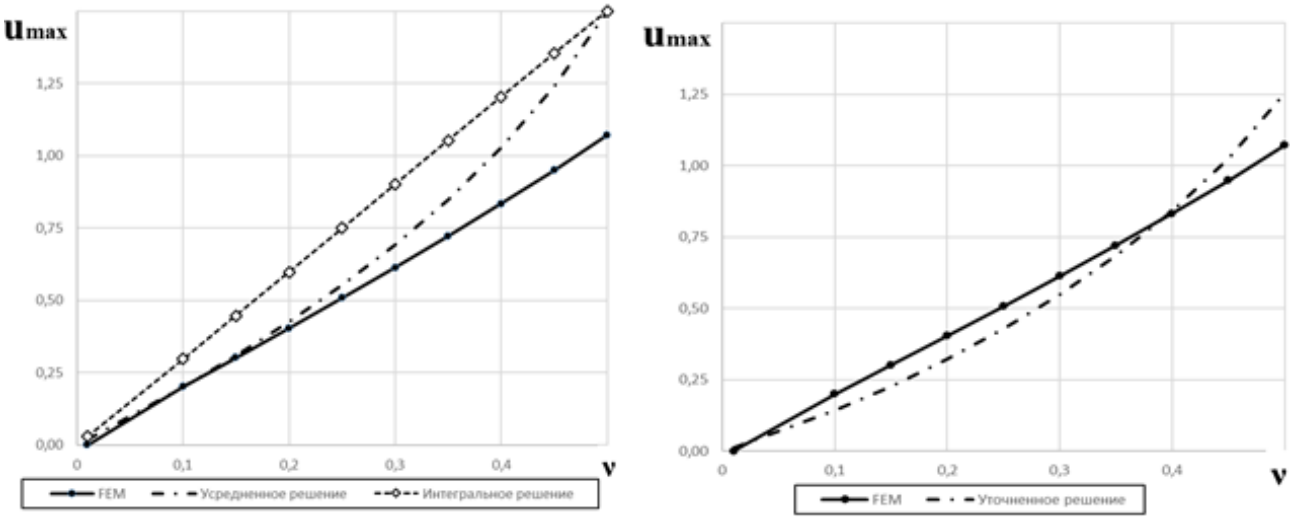


Рис. 2. Зависимость максимального радиального перемещения боковой поверхности цилиндра от коэффициента Пуассона: слева — расчёт по формулам (4)–(7), справа — уточнённые значения для случая точечного определения постоянной c_1

Из приведенных графиков видно, что для вытянутого цилиндра уже первое приближение аналитического решения для максимального радиального перемещения его боковой поверхности, полученное для точечного условия, имеет меньшее отклонение от численного решения,

чем при выполнении интегрального условия отсутствия радиального напряжения на боковой поверхности цилиндра. Однако с ростом коэффициента Пуассона это отклонение нарастает, достигая тех же значений, что и при интегральном условии, для материалов, близких к несжимаемым. Проведённое уточнение сглаживает эти отклонения для высоких значений коэффициента Пуассона. Следует отметить, что внимание, уделяемое уточнённому определению радиального перемещения поверхности цилиндра в центральном сечении, вызвано возможностью использования этого значения для решения обратной задачи нахождения коэффициента Пуассона по измерению максимального перемещения боковой поверхности цилиндра при его осевом сжатии.

Благодарности

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации 124012500437-9).

Литература

1. *Al-Chalabi M., Huang C.* Stress distribution within circular cylindres in compression // Int. J. Rock Mech, Mining Sci. Geomech, Abstr. – 1974. – P. 45–56.

2. *Gent A., Lindley P.* The compression of bonded rubber blocks. Proc. Inst.Mech. Eng. – 1959. – 173. – P. 111–122.

3. *Gent A. N., Meinecke E. A.* Compression, bending, and shear of bonded rubberblocks. Polym. Eng. Sci. 1970. – 10. – P. 48–53.

4. *Qiao S., Lu N.* Analytical solutions for bonded elastically compressible layers // Int. J. Solids Struct. – 2015. – Vol. 58. – P. 353–365. – doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.11.018.

5. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – М. : ГИТТЛ, 1955. – 491 с.

УДК 534.11

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКИХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ БАЛОЧНОГО МАЯТНИКА

Е. А. Дегилевич[1,2], А. С. Смирнов[2,3]

[1]ООО «Газпромнефть – Промышленные Инновации»
[2]Институт проблем машиноведения Российской академии наук
[3]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация. В работе рассматриваются конечномерные физические модели балочного маятника, состоящие из одного, двух и трех стержней. Для каждой модели проводится аналитическое решение с определением собственных частот колебаний системы. Полученные формулы для обезразмеренных частот иллюстрируются в виде графиков зависимости этих частот от параметра, характеризующего соотношение между упругими и гравитационными свойствами балочного маятника. Также приводятся графики зависимости аналогичных частот распределенной модели для сопоставления с рассматриваемыми конечномерными моделями. Полученные результаты имеют теоретическую ценность и представляют интерес для конкретных прикладных задач, связанных с моделированием цепных систем.
Ключевые слова: балочный маятник, цепной маятник, колебания, собственные частоты, распределенная модель, конечномерная модель, стержневая модель.

Введение

Исследованию цепных систем и балочных конструкций, обладающих бесконечным числом степеней свободы, посвящено внушительное количество научных работ [1–5]. Это во многом связано с тем, что в повседневной жизни достаточно часто можно встретить объекты, которые удается с некоторыми допущениями описать уравнениями из известных моделей цепей или балок. Так, колебания подвесных веревочных мостов, проводов линий электропередач (ЛЭП), цепных оград описываются уравнениями колебаний цепной линии [1, 2]. Если же рассматривать подвешенный за один конец канат, шнур, цепочку или трос, то можно обратиться к уравнениям колебаний цепного маятника (ЦМ) [6]. Однако классические цепные модели наделяются идеальной гибкостью и нерастяжимостью, вследствие чего имеется несомненный практический интерес в усовершенствовании таких моделей, поскольку в реальности тросы, канаты и провода имеют некоторую жесткость на изгиб и на растяжение. Такое уточнение модели поможет учесть упругие свойства, которые могут вносить существенные изменения в динамику изучаемого объекта.

Как известно, зачастую усложнение модели приводит к невозможности построения для нее точного аналитического решения, которое существует для классических моделей с распределенными параметрами, что в свою очередь влечет за собой необходимость использования численных процедур или подталкивает к применению самых разнообразных конечномерных моделей. Исходя из этого, настоящая работа посвящена динамическому анализу нерастяжимого балочного маятника (БМ), который отличается от модели ЦМ учетом изгибной жесткости [7]. В качестве конечномерных физических моделей рассматриваются стержневые модели, которые себя отлично зарекомендовали при описании цепных систем [6]. Эти модели обладают достаточной простотой, однако при этом они не только дают весьма хорошие приближения к исходным распределенным моделям в плане точности результатов, но и позволяют реализовывать масштабные сложные цепные конструкции в программных пакетах для моделирования многотельной кинематики и динамики.

1. Распределенная модель

Рассмотрим сначала исходную модель БМ с распределенными параметрами (рис. 1). Уравнение колебаний БМ в рамках этой модели имеет вид [8]:

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(L - x\right) \frac{\partial v}{\partial x} \right], \tag{1}$$

где x — продольная координата, t — время, v — поперечное перемещение сечения балки, L — длина балки, F — площадь сечения балки, J — момент инерции сечения балки, ρ — плотность материала балки, E — модуль Юнга материала балки, g — ускорение свободного падения. Если разыскивать решение уравнения (1) в виде $v(x,t) = V(x)\sin(kt + \alpha)$, то после подстановки этого решения в (1) данное уравнение можно преобразовать к виду:

$$EJ \frac{d^4 V}{dx^4} - \rho F g \frac{d}{dx}\left[\left(L - x\right) \frac{dV}{dx} \right] - k^2 \rho F V = 0. \tag{2}$$

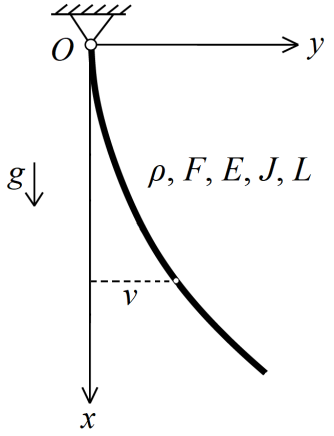


Рис. 1. Распределенная модель БМ

Введем безразмерные величины: продольную координату ξ; параметр δ, определяющий соотношение упругих и гравитационных свойств БМ; а также частоту p:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{EJ}{\rho F g L^3}, \quad k = p\sqrt{\frac{g}{L}} = p\sqrt{\frac{EJ}{\rho F g L^4 \delta}}. \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) для амплитудной функции $V(x)$ примет вид:

$$\delta V^{IV} - (1 - \xi)V'' + V' - p^2 V = 0, \tag{4}$$

где штрихом обозначается производная по безразмерной координате ξ. Рассматривая оба предельных значения параметра δ, можно видеть, что при малых δ уравнение (4) переходит в уравнение, отвечающее классическому ЦМ [6], а при больших δ — в уравнение классической балки Бернулли — Эйлера [3] без учета силы тяжести, как этого и следовало ожидать:

$$\delta \to 0: \quad \left[\left(1 - \xi\right)V'\right]' + k^2 \frac{L}{g} V = 0; \quad \delta \to \infty: \quad V^{IV} - k^2 \frac{\rho F L^4}{EJ} V = 0. \tag{5}$$

В общем случае уравнение (4) не допускает построения точного аналитического решения, и для его анализа следует прибегнуть к численным процедурам.

2. Конечномерные модели

Рассмотрим конечномерные модели БМ, основанные на использовании стержневых схем. Физическая конечномерная модель представляет собой n одинаковых стержней длиной

$l = L/n$ и массой $m = \rho FL/n = \rho Fl$ каждый, соединенных шарнирно друг с другом. Для учета изгибной жесткости в местах шарнирного соединения стержней помещаются упругие торсионы с крутильной жесткостью 2γ. Поэтому при последовательном соединении торсионов в месте стыковки соседних стержней будет располагаться торсион с результирующей жесткостью γ, а в месте расположения неподвижного шарнира останется торсион жесткостью 2γ, однако ясно, что он не будет играть какой-либо роли, поэтому на расчетных схемах его можно не приводить. Крутильная жесткость γ должна быть равна жесткости на поворот одного участка балки длиной l в рамках рассмотренной ранее модели с распределенными параметрами, а значит, $\gamma = EJ/l$ [9]. В качестве обобщенных координат удобно принять углы отклонения стержней φ_i от вертикальной оси. На рис. 2 показаны конечномерные модели БМ с одним ($n = 1$, рис. 2, а), двумя ($n = 2$, рис. 2, б) и тремя ($n = 3$, рис. 2, в) стержнями.

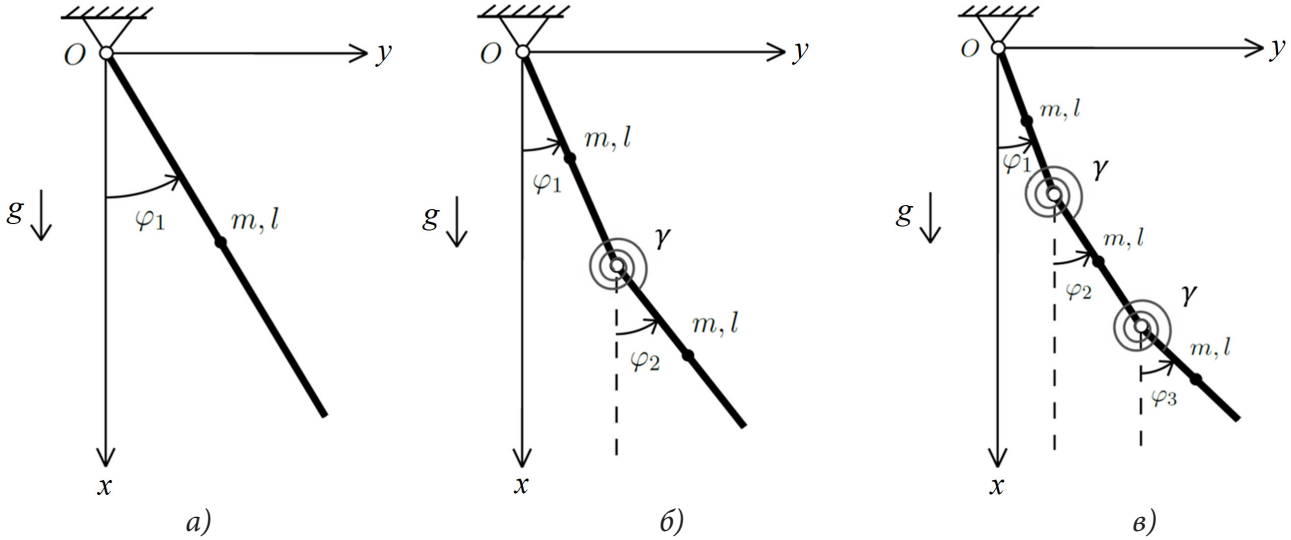


Рис. 2. Конечномерные модели БМ с: а) одним, б) двумя, в) тремя стержнями

Для того чтобы иметь возможность сравнивать частоты конечномерных моделей с частотами исходной распределенной модели, следует связать жесткость γ с введенным ранее параметром δ. На основе формулы (3) для δ и выражения $\gamma = EJ/l$ получаем следующую связь между этими параметрами:

$$\gamma = n^3 \delta mgl. \tag{6}$$

2.1. Одностержневая модель

Рассмотрим сначала модель, состоящую из одного стержня длиной $l = L$ (рис. 2, а). Поскольку торсионов в данной схеме нет, то эта модель БМ оказывается идентичной одностержневой модели ЦМ. Ясно, что кинетическая и потенциальная энергии этой системы в квадратичной аппроксимации будут иметь вид [6]:

$$T = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}_1^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}\frac{mgl}{2}\varphi_1^2. \tag{7}$$

Отсюда следует, что инерционный и квазиупругий коэффициенты определяются формулами

$$a = \frac{1}{3}ml^2, \quad c = \frac{1}{2}mgl, \tag{8}$$

а частота малых колебаний в рамках рассматриваемой модели с одной степенью свободы и отвечающая ей безразмерная частота будут постоянными величинами, не зависящими от δ:

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{g}{L}}, \quad p_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}. \tag{9}$$

2.2. Двухстержневая модель

Рассмотрим теперь модель, состоящую из двух стержней длиной $l = L/2$ (рис. 2, б). Тогда кинетическая энергия при удержании лишь квадратичных слагаемых будет [6]:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{4}{3}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2]^{\mathrm{T}}$ — столбец обобщенных координат. Что же касается потенциальной энергии, то она в квадратичной аппроксимации имеет следующий вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\left(\frac{3}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_2^2\right) + \frac{1}{2}\gamma\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2\right), \tag{11}$$

где отброшена несущественная аддитивная постоянная. Выражение (11) можно преобразовать с помощью формулы (6), положив для двухстержневой модели $n = 2$:

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\left[\left(\frac{3}{2} + 8\delta\right)\varphi_1^2 + \left(\frac{1}{2} + 8\delta\right)\varphi_2^2 - 16\delta\varphi_1\varphi_2\right] = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}. \tag{12}$$

На основе формул (10) и (12) получаем выражения для матрицы инерционных коэффициентов $\mathbf{A}$ и матрицы квазиупругих коэффициентов $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} = ml^2\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = mgl\begin{bmatrix} \frac{3}{2} + 8\delta & -8\delta \\ -8\delta & \frac{1}{2} + 8\delta \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Подставляя выражения (13) в частотное уравнение $\det\left(\mathbf{C} - k^2\mathbf{A}\right) = 0$ и переходя к безразмерной частоте p согласно последней формуле (3), а также принимая во внимание, что $l = L/2$, получим следующее биквадратное уравнение:

$$7p^4 - \left(1536\delta + 84\right)p^2 + 2304\delta + 108 = 0. \tag{14}$$

Решая данное уравнение, находим безразмерные частоты колебаний для рассматриваемой модели с двумя степенями свободы как функции параметра δ:

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{7}\left(768\delta + 42 \pm 12\sqrt{4096\delta^2 + 336\delta + 7}\right)}. \tag{15}$$

2.3. Трехстержневая модель

Наконец, рассмотрим конечномерную модель, состоящую из трех стержней длиной $l = L/3$ (рис. 2, в). Кинетическая энергия с учетом лишь квадратичных слагаемых есть [6]

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{7}{3}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{4}{3}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}_3^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3\right) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^{\mathrm{T}}$ — столбец обобщенных координат. Потенциальную энергию трехстержневой модели БМ в квадратичной аппроксимации можно записать в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\left(\frac{5}{2}\varphi_1^2 + \frac{3}{2}\varphi_2^2 + \frac{1}{2}\varphi_3^2\right) + \frac{1}{2}\gamma\left(\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_3\right), \tag{17}$$

где, как и прежде, отброшена аддитивная постоянная, не играющая роли. С помощью формулы (6), положив теперь в ней $n = 3$, преобразуем выражение (17) к виду:

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl\left[\left(\frac{5}{2}+27\delta\right)\varphi_1^2+\left(\frac{3}{2}+54\delta\right)\varphi_2^2+\left(\frac{1}{2}+27\delta\right)\varphi_3^2-54\delta\varphi_1\varphi_2-54\delta\varphi_2\varphi_3\right]=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}. \quad (18)$$

Тогда матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов согласно (16) и (18) будут:

$$\mathbf{A}=ml^2\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=mgl\begin{bmatrix}\frac{5}{2}+27\delta & -27\delta & 0\\ -27\delta & \frac{3}{2}+54\delta & -27\delta\\ 0 & -27\delta & \frac{1}{2}+27\delta\end{bmatrix}. \quad (19)$$

Подставляя выражения (19) в частотное уравнение $\det(\mathbf{C}-k^2\mathbf{A})=0$ и вновь переходя к безразмерной частоте p, а также учитывая, что теперь $l=L/3$, получим следующее бикубическое уравнение:

$$26p^6-(60264\delta+1107)p^4+(12754584\delta^2+839808\delta+9072)p^2- \\ -191318768\delta^2-1102248\delta-10935=0. \quad (20)$$

Это уравнение оказывается слишком громоздким для построения его аналитического решения, поэтому гораздо проще прибегнуть здесь к численному поиску корней.

3. Сравнение результатов

Для сопоставления результатов исследования исходной распределенной модели колебаний БМ и трех конечномерных физических моделей построим графики зависимости безразмерных частот от параметра δ, которые приведены на рис. 3.

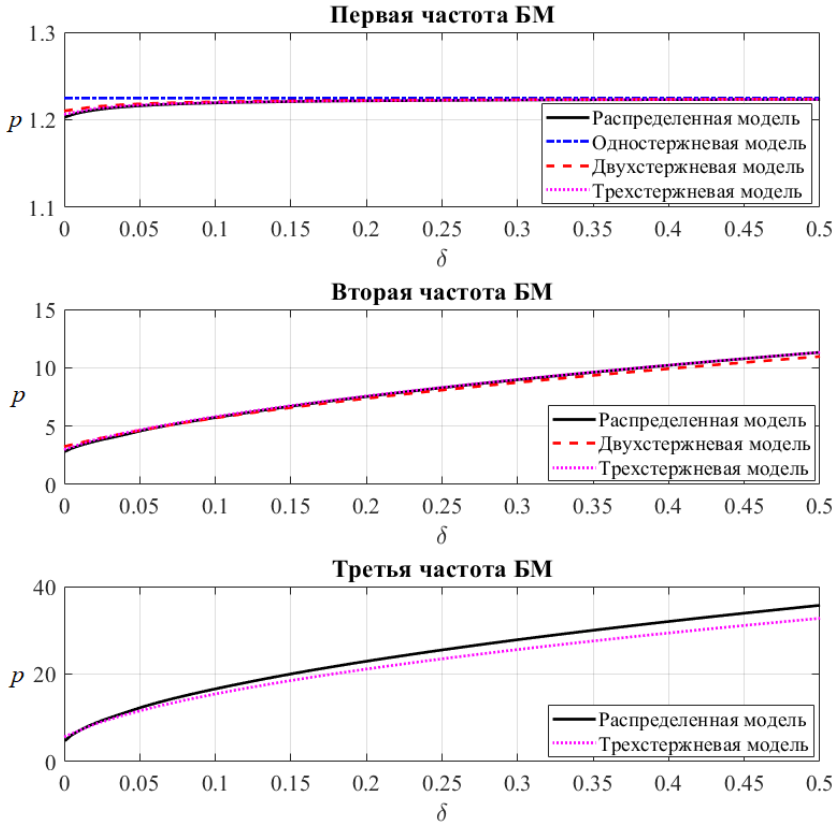


Рис. 3. Графики зависимости безразмерных частот колебаний p_1, p_2 и p_3 от параметра δ для различных моделей

Ясно, что при малых значениях параметра δ первые три безразмерные частоты БМ стремятся к частотам классического ЦМ, которые равны 1.202, 2.760 и 4.327 [6]. Для двухстержневой схемы первая и вторая частоты при $\delta \to 0$ равны 1.210 и 3.246, т. е. они больше точных значений на 0.67 % и 17.6 % соответственно, а для трехстержневой схемы при $\delta \to 0$ безразмерные частоты колебаний будут равны 1.206, 3.000 и 5.668, т. е. они оказываются большими, чем точные величины, на 0.3 %, 8.7 % и 31 % соответственно.

В предельном случае $\delta \to \infty$, когда преобладают упругие характеристики, частоты БМ стремятся уже к частотам классической балки без учета силы тяжести. Как известно, для модели колебаний балки с распределенными параметрами, имеющей один шарнирно закрепленный, а другой свободный конец, первые три безразмерные частоты будут равны 0, 15.418 и 49.965 [3]. Из последней формулы (3) следует, что для получения безразмерных частот в стандартных терминах колебаний балок частоты БМ p необходимо поделить на $\sqrt{\delta}$ и совершить предельный переход при $\delta \to \infty$ [7]. Так, выполняя данную процедуру для двухстержневой модели на основе формул (15), можно получить значения, равные 0 и 14.813. Первая нулевая частота, очевидно, полностью совпадает с результатом из распределенной модели, тогда как вторая частота оказывается меньшей точного значения на 3.9 %. Рассматривая аналогичный предельный переход для трехстержневой модели при применении численных процедур к уравнению (20), можно получить следующие значения: 0, 15.349 и 45.632. Видно, что вторая частота здесь меньше точного значения уже всего на 0.45 %, а третья — на 8.7 %.

Отметим, что полученные процентные отклонения результатов, полученных в рамках конечномерных физических моделей, от аналогичных результатов из распределенной модели оказываются несколько более ощутимыми по сравнению с конечномерными математическими моделями, рассмотренными в работе [7], хотя они являются вполне приемлемыми.

Заключение

В настоящей работе были рассмотрены малые колебания исходной распределенной и трех физических конечномерных моделей БМ. Для модели с распределенными параметрами было приведено уравнение динамики, с помощью которого численными методами были получены частоты колебаний, совпадающие с частотами колебаний ЦМ в предельном случае $\delta \to 0$ (т. е. при отсутствии жесткости на изгиб) и частотами колебаний балки Бернулли — Эйлера при $\delta \to \infty$ (т. е. при отсутствии силы тяжести). Конечномерные модели использовали стержневые схемы с одним, двумя и тремя стержнями, соединенными шарнирами и упругими торсионами. Для каждой конечномерной модели были найдены частотные уравнения, а отвечающие им частоты, приведенные в удобной графической форме, дали хорошее приближение к низшим частотам распределенной модели, несмотря на относительно малое количество стержней. Полученные результаты могут оказаться полезными для дальнейших исследований, посвященных цепным системам, а также они представляют практический интерес для прикладных задач, требующих упрощенного моделирования объектов с распределенными параметрами, применения моделей с сосредоточенными параметрами и расчетов с желаемой точностью.

Литература

1. *Меркин Д. Р.* Введение в механику гибкой нити / Д. Р. Меркин. – Москва : Наука, 1980. – 240 с.

2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика / А. И. Лурье. – Москва : Физматгиз, 1961. – 824 с.

3. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний : учебник для вузов / В. Л. Бидерман. – Москва, Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 414 с.

4. *Бабаков И. М.* Теория колебаний : учеб. пособие / И. М. Бабаков. – 4-е изд., испр. Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.

5. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – Москва : Наука, 1967. – 444 с.

6. *Смирнов А. С.* Колебания цепных систем : учеб. пособие / А. С. Смирнов, Е. А. Дегилевич. – Санкт-Петербург : Политех-пресс, 2021. – 246 с.

7. *Дегилевич Е. А.* Динамический анализ балочного маятника / Е. А. Дегилевич, А. С. Смирнов // X Поляховские чтения : материалы международной научной конференции по механике. Санкт-Петербург, 23–27 сентября 2024 года. – Санкт-Петербург : ООО «Издательство ВВМ», 2024. – С. 86–90.

8. *Динник А. Н.* Устойчивость упругих систем / А. Н. Динник. – Москва : ОНТИ НКТА СССР, 1935. – 186 с.

9. *Исполов Ю. Г.* Вычислительные методы в теории колебаний : учеб. пособие / Ю. Г. Исполов. – Санкт-Петербург : изд-во Политехнического ун-та, 2008. – 124 с.

УДК 539.375

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ В СМЕШАННЫХ РЫХЛЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

А. В. Дробышева, А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается динамическое деформирование сферической полости в невесомом полупространстве. Полупространство моделируется многокомпонентной упруговязкопластической средой. Дана постановка задачи для многокомпонентной среды. В рамках осесимметричного состояния получены напряжения и перемещения в упругой и пластической областях, уравнение для определения упругопластической границы и соотношение для определения комбинации нагрузок, при которых возникает пластическое деформирование полости при заданных физико-механических и геометрических параметрах.
Ключевые слова: упруговязкопластичность, многокомпонентная среда, осесимметричное состояние, динамическое деформирование, деформирование полупространства, сферическая полость, модель Спорыхина, напряжения, деформации, упругопластическая граница.

Введение

Известно [1–3], что подземные полости сферической формы широко используются в хозяйственной деятельности, в частности, для хранения различного сырья (газ, нефть и т. д.). Поэтому расчет их поведения при воздействии динамических нагрузок имеет большое значение при проектировании и прогнозировании чрезвычайных ситуаций. Имеющиеся в литературе решения [4] аналогичной задачи получены для упруговязкопластического (EVP) тела Спорыхина (S_p) [3], что характерно для скальных горных пород [5].

В настоящей работе в отличии от работы [4] горный массив в области пластического деформирования моделируется EVP многокомпонентным телом S_p^α [6–8], что, как представляется, характерно для смешанных рыхлых горных пород [5].

1. Постановка задачи динамического деформирования сферической полости в невесомом упруговязкопластическом полупространстве

Ниже в квазистатической постановке рассматривается деформирование сферической полости радиуса a в невесомом полупространстве. По контуру полости равномерно распределена нагрузка P, например, давление газа на породный контур при взрыве, а на бесконечности действует нагрузка q, выражения для которых имеют вид

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad q = q_0 = gh, \quad t_* \le t \le t_0,$$

где g — средний объемный вес вышележащих пород, h — глубина заложения полости, $\hat{a}$ — известная константа.

Согласно [6], приведем соотношения, которые полностью определяют свойства обобщенной модели S_p^α.

Тело остается упругим

$$S_{ij}S^{ij} < k_1^2, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_\alpha, \tag{1.1}$$

где S_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений. При этом для последовательно соединенных моделей S_p^α

$$S_{ij}^{e\alpha} = 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^{e\alpha}\ , \quad \varepsilon_{kk}^{e\alpha} = 0\ , \quad \forall\, \alpha = 1,2,\ldots,L, \tag{1.2}$$

где μ_α — параметры Ламе.

Если $S_{ij}S^{ij} \geq k_1^2$, то полная деформация слагается из упругой и пластической

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 + \ldots + \varepsilon_{ij}^L = \varepsilon_{ij}^{e1} + \varepsilon_{ij}^{p1} + \varepsilon_{ij}^{e2} + \varepsilon_{ij}^{p2} + \ldots + \varepsilon_{ij}^{eL} + \varepsilon_{ij}^{pL}, \tag{1.3}$$

здесь $\varepsilon_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^2, \ldots, \varepsilon_{ij}^L$ — деформации, соответственно, первой, второй и так далее моделей S_p^α.

Пластическая составляющая объемной деформации моделей удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{kk}^{p\alpha} = 0\ , \quad \alpha = 1,2,\ldots,L\ . \tag{1.4}$$

Следовательно, компоненты девиатора тензора деформации тождественно равны компонентам тензора деформации $\varepsilon_{ij}^{p\alpha}$.

Напряжения, приложенные к моделям, одинаковы, тогда

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = \ldots = S_{ij}^L = S_{ij}\ , \quad \left(\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \ldots = \sigma_{ij}^L = \sigma_{ij}\right). \tag{1.5}$$

Тензоры скоростей пластической деформации $e_{ij}^{p\alpha}$ связаны с тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона течения

$$e_{ij}^{p\alpha} = \psi_\alpha \left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha}\right), \quad \forall\, \alpha = 1,2,\ldots,L, \tag{1.6}$$

если выполняются условия пластичности

$$\left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha}\right)\left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha}\right) = k_\alpha, \quad \forall\, \alpha = 1,2,\ldots,L, \tag{1.7}$$

где η_α — коэффициент вязкости, c_α — коэффициент упрочнения, k_α — предел текучести, ψ_α — положительный скалярный множитель.

Полные деформации удовлетворяют формулам Коши

$$2\varepsilon_{ij} = w_{i,j} + w_{j,i}. \tag{1.8}$$

Уравнениям равновесия удовлетворяют только действительные напряжения

$$\sigma_{ij,j} = 0. \tag{1.9}$$

Таким образом, уравнения (1.1)–(1.8) с уравнениями равновесия (1.9) представляют собой систему уравнений, описывающих деформированное поведение EVP среды произвольного порядка.

2. Осесимметричное состояние многокомпонентного EVP массива со сферической полостью в сферической системе координат

Напряженно-деформированное состояние массива в осесимметричном случае $(\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi)$ определяется согласно (1.9) уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

законом Гука (1.2), соотношениями Коши (1.7).

И для упругой области будем иметь

$$w^e = \frac{C_1}{r^2}\ , \quad \sigma_r^e = -4\mu\frac{C_1}{r^3} + C_2\ , \quad \sigma_\theta^e = 2\mu\frac{C_1}{r^3} + C_2.$$

Из условия отсутствия объемного расширения в пластической зоне (1.4) получаем

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{dw_2}{dr} + 2\frac{w_2}{r} = 0.$$

Откуда

$$w^p = \frac{B_1}{r^2}\ , \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_r}{2}. \tag{2.1}$$

Из ассоциированного закона пластического течения (1.6) имеем

$$e_r^{p\alpha} = \psi_\alpha \left(S_r - c_\alpha \varepsilon_r^{p\alpha} - \eta_\alpha e_r^{p\alpha} \right), \quad e_\theta^{p\alpha} = \psi_\alpha \left(S_\theta - c_\alpha \varepsilon_\theta^{p\alpha} - \eta_\alpha e_\theta^{p\alpha} \right),$$

$$e_\varphi^{p\alpha} = \psi_\alpha \left(S_\varphi - c_\alpha \varepsilon_\varphi^{p\alpha} - \eta_\alpha e_\varphi^{p\alpha} \right), \quad \forall \alpha = 1,2,\ldots,L.$$

Так как $\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\varphi^p$, то из этих равенств следует, что $S_\theta = S_\varphi$, $S_\theta = -S_r/2$.

Функция нагружения (1.7) принимает вид

$$\left(S_r - c_\alpha \varepsilon_r^{p\alpha} - \eta_\alpha e_r^{p\alpha} \right) = K_\alpha^2, \quad K_\alpha = \frac{k_\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \forall \alpha = 1,2,\ldots,L. \tag{2.2}$$

Согласно (1.2) и (1.3) будем иметь

$$\varepsilon_r = \sum_{\alpha=1}^{L} \varepsilon_r^{e\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{L} \varepsilon_r^{p\alpha} = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad S_r = \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{\mu_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{L} e_r^{e\alpha} = e_r^e,$$

$$2\mu_\alpha \varepsilon_r^{e\alpha} = S_r^\alpha, \ \forall \alpha = 1,2,\ldots,L, \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_r^{e\alpha} = \varepsilon_r - \varepsilon_r^{p\alpha}, \quad \varepsilon_r^{e\alpha} = \frac{S_r}{2\mu_\alpha}.$$

Откуда

$$S_r^\alpha = 2\mu_\alpha \left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^{p\alpha} \right), \ \forall \alpha = 1,2,\ldots,L.$$

Учитывая (2.1), (2.3) из соотношения (2.2) выводим

$$\frac{d\varepsilon_r^{p\alpha}}{dt} + \frac{\left(2\mu_\alpha + c_\alpha\right)}{\eta_\alpha} \varepsilon_r^{p\alpha} = -\left(K_\alpha + \frac{4\mu_\alpha B_1}{r^3} \right) \frac{1}{\eta_\alpha}, \quad \forall \alpha = 1,2,\ldots,L \tag{2.4}$$

где согласно [5] полагаем, что вязкость смеси горных пород при динамическом деформировании возрастает пропорционально времени процесса деформирования, то есть

$$\eta_\alpha = \eta_{0\alpha} t, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,L.$$

Решение уравнения (2.7) в этом случае имеет вид

$$\varepsilon_r^{p\alpha} = -\frac{1}{2\mu_\alpha + c_\alpha} \left[\left(K_\alpha + \frac{4\mu_\alpha B_1}{r^3} \right) + B_2 t^{-\alpha_0} \right], \quad \alpha_0 = \frac{2\mu_\alpha + c_\alpha}{\eta_{0\alpha}}, \quad \forall \alpha = 1,2,\ldots,L. \tag{2.5}$$

Из начального условия $\varepsilon_r^{p\alpha} = 0$ при $t = t_*$ определяем неизвестную интегрирования B_2

$$B_2 = -\left(K_\alpha + \frac{4\mu_\alpha B_1}{r^3} \right) t_*^{\alpha_0}.$$

Из соотношений (2.3) следует

$$S_r = \left(\sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{-1} \left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p \right),$$

где согласно (2.5) $\varepsilon_r^p = \sum_{\alpha=1}^{L} \varepsilon_r^{p\alpha}$.

Вычисляем

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = \frac{3}{2} S_r =$$

$$= \frac{3}{2}\mu_0 \left\{ -\frac{2}{r^3} + \sum_{\alpha=1}^{L} \left[\frac{1}{2\mu_\alpha + c_\alpha} \left(\frac{4\mu_\alpha}{r^3} \left(1 - t^{-\alpha_0} t_*^{\alpha_0} \right) \right) \right] \right\} B_1 + \frac{3}{2}\mu_0 \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{K_\alpha}{2\mu_\alpha + c_\alpha},$$

где введено обозначение $\mu_0 = \left(\sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{-1}$.

Из уравнения (2.1) находим

$$\sigma_r^p = \frac{\mu_0}{r^3}(1-I)B_1 + II\ln r + B_3,$$

$$\sigma_\theta^p = \frac{2\mu_0}{r^3}(1-I)B_1 + II(\ln r - 1) + B_3,$$

здесь обозначено $I = \sum_{\alpha=1}^{L}\left[\frac{2\mu_\alpha}{2\mu_\alpha + c_\alpha}\left(1 - t^{-\alpha_0}t_*^{\alpha_0}\right)\right]$, $II = \frac{3}{2}\mu_0\sum_{\alpha=1}^{L}\frac{K_\alpha}{2\mu_\alpha + c_\alpha}$.

Для определения неизвестных интегрирования C_1, C_2, B_1, B_3 и радиуса поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования γ имеем

– граничное условие

$$\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{a}t} a \quad \text{при } r = a,$$

– условие на бесконечности

$$\sigma_r^e = \sigma_\theta^e = q = -gh \quad \text{при } r \to \infty,$$

– условие сопряжения

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p, \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p, \quad w^e = w^p \quad \text{при } r = \gamma.$$

В предположении, что в момент начала пластического течения $t = t_*$ зарождение пластической области начинается от внутренней границы сферической полости, начальные условия задаются в виде $\gamma = a$ при $t = t_*$.

Из условия равенства перемещений $w^e = w^p$ на упругопластической границе, то есть при $r = \gamma$ будем иметь $C_1 = B_1$.

Условие на бесконечности $\sigma_r^e = \sigma_\theta^e = q = -gh$ при $r \to \infty$ дает $C_2 = q = -gh$.

Из равенства компонент напряжений $\sigma_r^e = \sigma_r^p$ на упругопластической границе $r = \gamma$ получим уравнение

$$-\frac{4\mu C_1}{\gamma^3} + q = \frac{\mu_0}{\gamma^3}(1-I)C_1 + II\ln\gamma + B_3. \tag{2.6}$$

Постоянную интегрирования B_3 определяем из граничного условия на контуре полости $\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{a}t}$ при $r = a$

$$\frac{\mu_0}{a^3}(1-I)C_1 + II\ln a + B_3 = -P_0 e^{\hat{a}t}.$$

Откуда будем иметь

$$B_3 = -P_0 e^{\hat{a}t} - II\ln a - \frac{\mu_0}{a^3}(1-I)C_1. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.6), получим уравнение для определения постоянной интегрирования C_1

$$-\frac{4\mu C_1}{\gamma^3} + q = \frac{\mu_0}{\gamma^3}(1-I)C_1 + II\ln\gamma - P_0 e^{\hat{a}t} - \frac{\mu_0}{a^3}(1-I)C_1 - II\ln a.$$

Откуда получим

$$C_1 = \frac{-q - P_0 e^{\hat{a}t} + II(\ln\gamma - \ln a)}{\left[-\frac{4\mu}{\gamma^3} + \mu_0(1-I)\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{\gamma^3}\right)\right]}.$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ в массиве горных пород следует из условия непрерывности компонент напряжений $\sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p$ на этой границе, то есть при $r = \gamma$, а именно

$$-\frac{2\mu C_1}{\gamma^3} + C_2 = \frac{2\mu_0}{\gamma^3}(1-I)C_1 + II(\ln\gamma - 1) + B_3.$$

Подставляя полученные выражения для C_1, C_2, B_3, получим уравнение

$$\left(-\frac{2}{\gamma^3}\left(\mu+\mu_0(1-I)\right)+\frac{\mu_0}{a^3}(1-I)\right)\frac{\left(-q-P_0e^{\hat{a}t}+II\left(\ln\gamma-\ln a\right)\right)}{\left[-\frac{4\mu}{\gamma^3}+\mu_0\left(1-I\right)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{\gamma^3}\right)\right]}- \tag{2.8}$$

$$-II\left(\ln\gamma+\ln a-1\right)+P_0e^{\hat{a}t}+q=0.$$

Если в (2.8) положить $\gamma=a$ и $t=t_*$, что соответствует началу пластического течения, то получим соотношение для определения комбинации нагрузок $P_*=P_0e^{\hat{a}t_*}$ и $q=-gh$, при которых возникает пластическое деформирование при заданных физико-механических и геометрических параметрах в рамках обобщенной EVP модели тела S_p^α.

$$\left(1-\frac{\left(2\mu+\mu_0(1-I)\right)}{4\mu}\right)\left(P_0e^{\hat{a}t_*}+q\right)-II\left(2\ln a-1\right)=0. \tag{2.9}$$

Если порядок модели S_p^α равен 1, то есть $L=1$, то из (2.9) следуют результаты работы [4].

Литература

1. *Спорыхин А. Н.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М. : Физматлит, 2004. – 232 с.

2. *Спорыхин А. Н.* Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. – 372 с.

3. *Спорыхин А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : ВГУ, 1997. – 360 с.

4. *Спорыхин А. Н.* Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью / А. Н. Спорыхин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 4 (42). – С. 21–24.

5. *Михайлюк А. В.* Горные породы при неравномерных динамических нагрузках / А. В. Михайлюк. – Киев : Наук. думка, 1980. – 154 с.

6. *Спорыхин А. Н.* Об одной модели упруговязкопластических смесей / А. Н. Спорыхин // Механика деформируемого твердого тела : сборник трудов 9 Всероссийской конференции в рамках Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. : электронный ресурс. Воронеж, 2016. – С. 199–201.

7. *Ивлев Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971 . – 231 с.

8. *Спорыхин А. Н.* Моделирование процессов деформирования и потери устойчивости упруговязкопластических смесей / А. Н. Спорыхин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – Москва, 2020. – С. 141–148.

УДК 539.3

ОДНООСНОЕ ЦИКЛИЧЕСКОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ РАЗНОМОДУЛЬНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

О. В. Дудко, А. А. Лаптева

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. В работе рассматривается процесс нестационарного деформирования разномодульного изотропно-упругого полупространства под действием граничного циклического одноосного растяжения-сжатия. Показано, что поле деформаций, в приграничной зоне принимающее форму «слой растяжения — слой сжатия — жесткий слой» на каждом такте цикла, на удалении от границы динамически перераспределяется. Пакет чередующихся сжатых и жестких слоев убегает вперед со скоростью быстрой характеристики, суммарная зона растяжения остается позади. Динамическое перераспределение деформаций происходит за счет многократных столкновений и отражений волн различных типов и скоростей.

Ключевые слова: разномодульная упругость, нестационарное деформирование, циклическое нагружение, одноосное растяжение и сжатие, сильный разрыв, столкновение волн.

Введение

Материалы с различным сопротивлением растяжению и сжатию распространены в природе и широко используются в современной промышленности и строительстве. Изучение динамического деформационного поведения подобных материалов является одним из активно развивающихся направлений механики сплошных сред. Физическая нелинейность модельных представлений разномодульных сред (например, [1–3]) существенна даже на уровне малых деформаций, что заставляет обращаться к специфическим схемам решения краевых задач, а также учитывать в этих решениях эффекты, которыми в линейной упругости обычно пренебрегают.

В настоящей работе рассматривается разномодульный материал с кусочно-постоянным модулем упругости, чувствительным к типу деформации. В рамках такой модели решается нестационарная начально-краевая задача о циклическом растяжении-сжатии на границе разномодульно-упругого полупространства. Циклический режим нагружения выбран из соображений его распространенности при эксплуатации разномодульных материалов. Для построения решения используется рекуррентный подход [4], учитывающий эффекты столкновений и отражений волн деформаций.

1. Модельные соотношения

Уравнения, описывающие одноосные движения точек разномодульной изотропно-упругой среды, при малости деформаций и отсутствии массовых сил имеют вид

$$\sigma(e)=\omega(e)\cdot e,\quad (c(e))^2u_{xx}=\ddot{u},\quad e=u_x,\quad v=\dot{u},$$
$$\omega(e)=\begin{cases}E_-, & e<0,\\ E_+, & e>0,\end{cases}\quad c(e)=\sqrt{\frac{\omega(e)}{\rho}}=\begin{cases}c_-, & e<0,\\ c_+, & e>0,\end{cases} \tag{1}$$

где σ, e — продольные напряжение и деформация; u, v — продольное перемещение и скорость перемещения точек среды; $\omega(e)$, $c(e)$ — упругий модуль и характеристическая скорость уравнения движения (кусочно-постоянные функции деформаций, разрывные в точке свободного состояния); ρ — плотность среды (при малых деформациях $\rho=\text{const}$); все функции зави-

сят от пространственной переменной x и времени t, $\Diamond_x = \partial\Diamond / \partial x$, $\dot{\Diamond} = \partial\Diamond / \partial t$. Дополнительно в (1) полагаем $E_{\pm} \neq 0$, $E_- > E_+$, $c_{\pm} \neq 0$, $c_- > c_+$, считая, что разномодульная среда связная и деформации сжатия распространяются быстрее деформаций растяжения.

Система (1) имеет обобщенное решение в форме непрерывной кусочно-гладкой функции $u(x,t)$, если при некоторых $x = x(t)$ происходят скачки производных u_x, $\dot{u}$ — сильные разрывы. Между фронтами сильных разрывов (волнами деформаций) выполняются дифференциальные законы сохранения (1), а перемещения и скачки первых производных перемещения на каждом фронте $x(t)$ связываются условиями Гюгонио [2]:

$$u^+ = u^-, \qquad \sigma(e^+) - \sigma(e^-) = \rho(\dot{x}(t))^2 (e^+ - e^-), \tag{2}$$

где (u^+, e^+) и (u^-, e^-) — состояния в малых окрестностях до и после $x(t)$ соответственно. Из (2) можно показать, что в разномодульной среде с переменной характеристической скоростью $c(e)$ возможны три типа сильных разрывов: ударная волна сжатия ($e^+ > 0$, $e^- < 0$ при $c_- > c_+$); полусигнотон ($e^+ = 0$, $e^- \neq 0$ или $e^+ \neq 0$, $e^- = 0$); простой разрыв ($e^+ > 0$, $e^- > 0$ или $e^+ < 0$, $e^- < 0$). Полусигнотоны и простые разрывы входят в семейство характеристик: быстрые фронты сжатия движутся со скоростью c_-, медленные фронты растяжения — со скоростью $c_+ < c_-$. Скорость ударной волны находится в интервале $(c_+; c_-)$. Отметим, что при $c_+ < c_-$ в разномодульной среде невозможна ударная волна растяжения, так как на подобном фронте сильного разрыва одновременно не выполняются условие эволюционности и требование неубывания энтропии [3]. В [5] показано, что в этом случае переход от предварительного сжатия к растяжению происходит с образованием жесткого слоя, ограниченного быстрой и медленной характеристиками. Условие эволюционности сильного разрыва [3] в форме

$$c(e^+) \leq |\dot{x}(t)| \leq c(e^-) \tag{3}$$

используем как дополнительное соотношение, обеспечивающее единственность обобщенного решения начально-краевой задачи для системы (1).

2. Возможные столкновения фронтов сильных разрывов

Пусть в обобщенном решении задачи при некотором t существуют два фронта сильных разрывов $x_L(t) = X_L + \dot{x}_L(t - \tau_L)$, $x_R(t) = X_R + \dot{x}_R(t - \tau_R)$, где $0 \leq x_L(t) < x_R(t)$, $X_L \geq 0$, $X_R > X_L$ и $\tau_L \leq t$, $\tau_R \leq t$ — известные начальные координаты и времена их возникновения. Если между $x_L(t)$ и $x_R(t)$ нет других волн, то при $\dot{x}_L > 0$ и $\dot{x}_R < 0$ происходит их встречное столкновение, при $0 < \dot{x}_R < \dot{x}_L$ или $\dot{x}_L < \dot{x}_R < 0$ — попутное. Согласно указанным соотношениям скоростей, встречно сталкиваться могут любые волны со встречными направлениями движения, а для попутных столкновений возможны только случаи «медленную волну растяжения догоняет быстрая волна сжатия (или ударная волна)», «ударную волну догоняет быстрый фронт сжатия». Результатом любого столкновения $x_L(t)$ и $x_R(t)$ являются как минимум два расходящихся фронта: прямая волна $x_r(t) = X + \dot{x}_r(t - \tau)$ и отраженная волна $x_l(t) = X + \dot{x}_l(t - \tau)$, где $0 \leq x_l(t) \leq x_r(t)$, $\dot{x}_r > 0$, $\dot{x}_l < 0$, $\tau = t\big|_{X = X_L(t) = X_R(t)}$ — время столкновения волн $x_L(t)$ и $x_R(t)$ (оно же — время появления $x_l(t)$ и $x_r(t)$) в точке X. Если фронт $x_l(t)$ или $x_r(t)$ не удовлетворяет условию (3), то он распадается на попутные полусигнотоны (быстрый и медленный) с жестким слоем между ними. В этом случае после столкновения возникают три волны.

3. Постановка и решение начально-краевой задачи

Положим, что разномодульное полупространство $x \geq 0$, не деформированное при $t < 0$, с момента времени $t = 0$ подвергается циклическому растяжению-сжатию на границе $x = 0$.

Начальные и граничные условия задачи ставим в перемещениях:

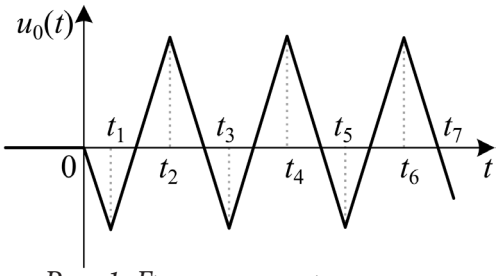


Рис. 1. Граничное перемещение

$$u(x,0)\big|_{x\geq 0} = \dot{u}(x,0)\big|_{x\geq 0} = 0, \quad u(0,t) = u_0(t), \tag{4}$$

где $u_0(t)$ — функция граничного перемещения в форме линейного сплайна (рис. 1) с заданными узлами (табл. 1). При $t = t_j$ направление движения граничных точек меняется на противоположное, образуя цикл растяжения-сжатия. Каждый такт начинается с растяжения.

Таблица 1

Узлы кусочно-линейной функции граничных перемещений

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$t_j * 10^3$, с	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$u_0(t_j) * 10^3$, м	0.0	–3.0	4.0	–3.0	4.0	–3.0	4.0	0.0

При таком режиме движения границы полупространства задача имеет обобщенное решение в форме непрерывной кусочно-линейной функции $u(x,t)$ с изломами на фронтах сильных разрывов и линейными локальными сегментами $u_i(x,t)$ между ними. Фронты сильных разрывов, которые являются подвижными границами зон локальных решений $u_i(x,t)$, возникают при смене направления граничной нагрузки и при столкновении уже существующих волн. Для вычисления связной последовательности $u_i(x,t)$ (i=1,2,3,…) используем рекуррентный подход [4], каждая итерация которого учитывает актуальную часть условий (4) и локальные решения, полученные на предыдущих итерациях. Сутью такого подхода является замена непрерывного интервала времени $t = [0;+\infty)$ дискретным множеством точек $[\tau_0, \tau_1, \tau_2 ...)$ и поэтапное вычисление $u_i(x,t)$ на локальных интервалах $t = [\tau_{i-1}, \tau_i)$. Каждая точка разбиения τ_i $(\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ...)$ соответствует или t_j из краевых условий (4) (табл. 1), или времени очередного столкновения. Все этапы решения контролируются проверкой условия (3) для возникающих фронтов сильных разрывов. При необходимости неэволюционные волны заменяются на пакет из двух попутных полусигнотов с жестким слоем между ними.

На характеристической плоскости $\{x - t\}$ (рис. 2) представлено решение описанной задачи, полученное при соотношении скоростей характеристик $c_- / c_+ \approx 1.1$. Разнотипные волны и зоны деформаций на рис. 2 обозначены разными цветами линий и фона, недеформированная область перед передним фронтом не закрашена. Отрезки с положительным наклоном соответствуют прямым волнам, с отрицательным — отраженным. Буквами A, B на рис. 2 обозначены выбранные моменты времени, для которых на рис. 3 построены графики мгновенного распределения деформаций $e(\tilde{x},t)$. Оси абсцисс на графиках $e(\tilde{x},t)$ нормированы по координате переднего фронта, оси ординат имеют степенной масштаб, координаты волновых фронтов отмечены цветными пунктирными линиями, жесткие слои — цветным фоном.

В полученном решении (рис. 2, рис. 3) можно видеть, что в малой окрестности x=0 деформации, возникающие в результате заданного движения границы, изменяются по циклическому сценарию «растяжение — сжатие — жесткий слой». На удалении от границы эти деформации динамически перераспределяются за счет многократных столкновений попутных и встречных волн. Чередующиеся сжатые и жесткие слои убегают вперед, оставляя области растяжения позади. Серия вычислительных экспериментов показала, что при циклическом растяжения и сжатия разномодульного полупространства поле деформаций приходит с течением времени к подобному распределению при любом отношении $c_- / c_+ > 1$.

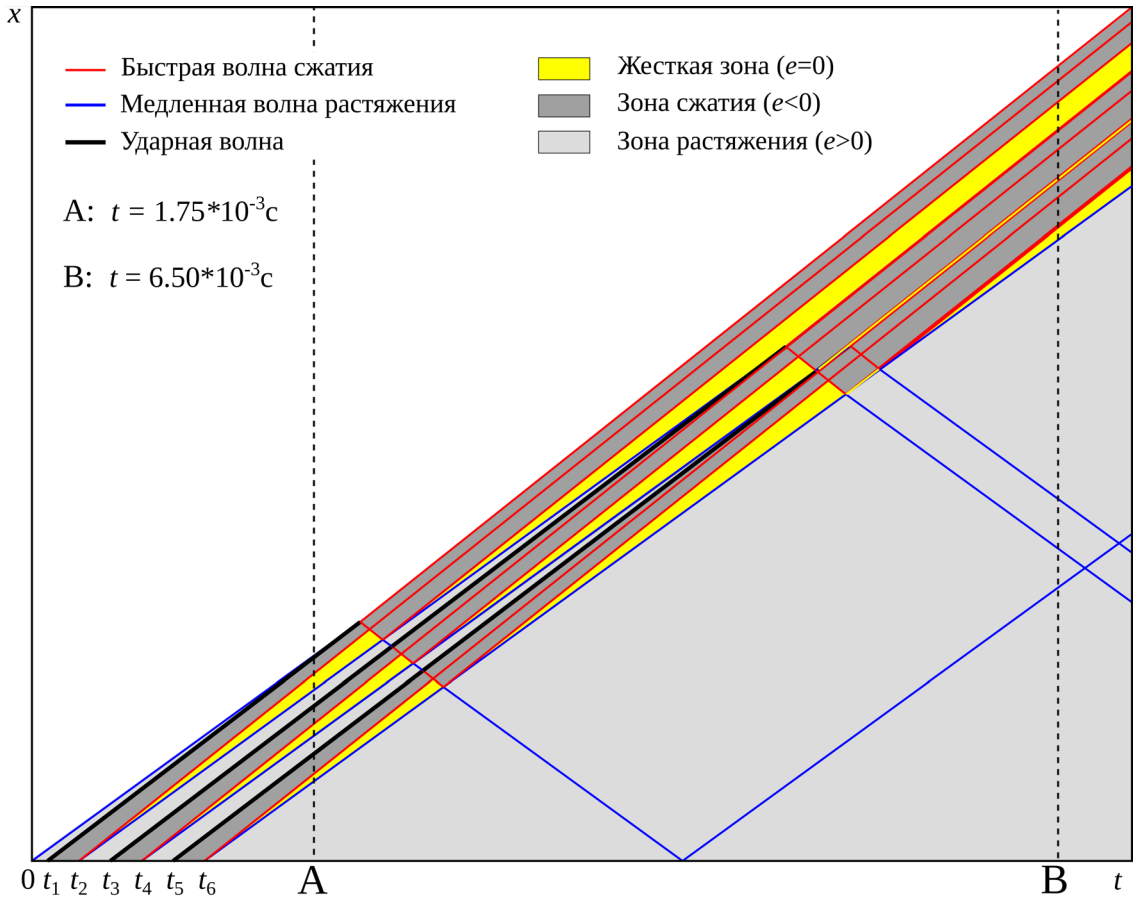


Рис. 2. Характеристическая плоскость обобщенного решения задачи

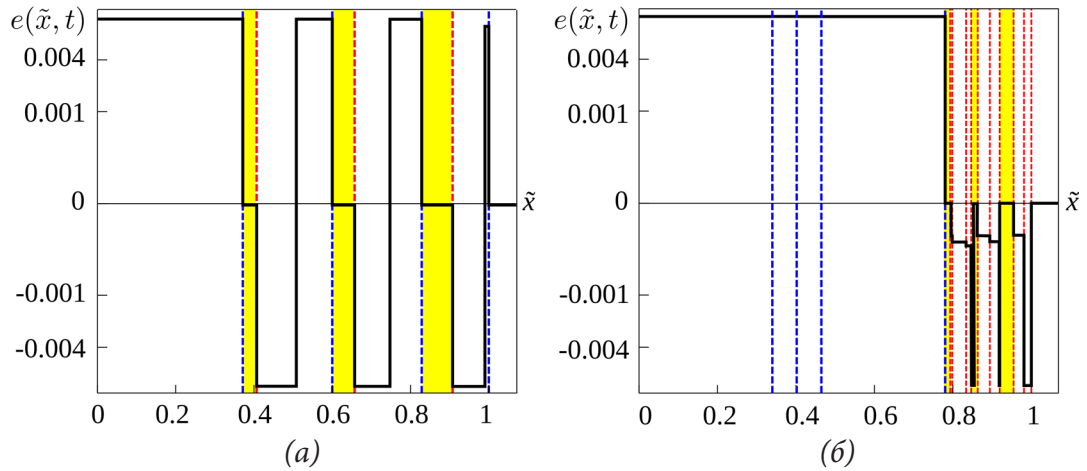


Рис. 3. Деформации при $t=1.75*10^{-3}$ *с (а),* $t=6.50*10^{-3}$ *с (б)*

Заключение

В работе получено решение начально-краевой задачи о циклическом одноосном растяжении-сжатии разномодульного упругого полупространства. Показано, что граничные возмущения растяжения и сжатия, возникающие при циклическом движении границы, вдали от нее перераспределяются и превращаются в область, состоящую из чередующихся подвижных сжатых и жестких слоев без зон растяжения. Подобную картину невозможно получить без учета взаимодействий волн. Таким образом, попутные и встречные столкновения разноскоростных

фронтов сильных разрывов являются ключевым фактором в формировании волновой картины в разномодульной среде.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАПУ ДВО РАН (тема № FWFW-2021-0005).

Литература

1. *Амбарцумян С. Л.* Разномодульная теория упругости. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 320 с.

2. *Maslov V. P.* General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli / V. P. Maslov, P. P. Mosolov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1985. – Vol. 49, № 3. – P. 322–336.

3. *Куликовский А. Г.* Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – Москва : Московский лицей, 1998. – 412 с.

4. *Дудко О. В.* Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, В. Е. Рагозина // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 4. – С. 37–47.

5. *Дудко О. В.* О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, К. Т. Семенов // Дальневосточный математический журнал. – 2005. – Т. 6, № 1–2. – С. 94–105.

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ВАРИАНТА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

В. Н. Зимин, Д. Р. Рахимов, И. Ю. Савельева

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация. В работе представлена математическая модель для описания нелинейного деформирования композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения. Она основана на термодинамическом подходе с внутренними параметрами состояния, для которых определены количество, природа и кинетические соотношения с тензорными временами релаксации. Получены определяющее соотношение и уравнение теплопроводности, необходимые для формирования связанной краевой задачи термопластичности. В частном случае определяющие соотношения приведены к соотношениям эндохронной теории термопластичности. Проведенные расчеты показали хорошее согласование с экспериментальными данными, что подтверждает эффективность предложенного подхода.
Ключевые слова: пластичность, термопластичность, эндохронная теория, термодинамика, внутренние параметры состояния, кинетические соотношения, композиционные материалы, неизотермическое нагружение, нелинейное деформирование, определяющие соотношения.

Введение

Термопластичность композитных материалов является одной из ключевых областей исследования в современной механике материалов. Композиционные материалы обладают уникальными свойствами, такими как высокая прочность, жесткость и устойчивость к коррозии, что делает их незаменимыми во многих отраслях. Однако сложная структура этих материалов требует специальных теоретических подходов для точного описания их механического поведения при неизотермическом нагружении за пределами упругости.

Существуют различные теории для моделирования нелинейного деформирования композитных материалов [1–7]. В данной работе предложен вариант математической модели пластичности, основанный на термодинамическом подходе с внутренними параметрами состояния [8–10], которые введены для описания микроструктуры материала, скрытой от внешнего наблюдателя, такой как микротрещины, микроразрушения, дислокации и др. В частном случае определяющие соотношения приведены к соотношениям эндохронной теории термопластичности [11, 12].

1. Термодинамика неравновесных процессов с внутренними параметрами состояния

Для построения модели пластичности при неизотермическом нагружении используем термодинамический подход с внутренними параметрами состояния, опираясь на результаты работ [5, 7–10, 12]. Запишем закон сохранения энергии в дифференциальной форме, а второй закон термодинамики представим в виде неравенства Клазиуса — Дюгема [8]:

$$\rho T\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+q_V+\delta_D,\quad \rho T\frac{\partial h}{\partial t}\geq-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{T}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i}+q_V, \tag{1}$$

где ρ — плотность; T — абсолютная температура; h — массовая плотность энтропии; $\frac{\partial}{\partial t}\equiv\left(\dot{}\right)\equiv\frac{d}{dt}$; t — время; q_i — компоненты вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$; x_i — про-

странственные координаты точки; q_V — объемная плотность мощности тепловых источников (стоков) теплоты; $\delta_D = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ji} - \rho\left(\dfrac{\partial A}{\partial t} + h\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)$ — диссипативная функция, $i, j = 1,2,3$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$; ε_{ij} — компоненты тензора малой деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$; A — массовая плотность свободной энергии Гельмгольца.

Предположим, что состояние рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой точки пространства может быть описано с помощью четырёх термодинамических функций: массовых плотностей свободной энергии A и энтропии h, тензора напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, а также вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$ [5]. Аргументами данных функций будем считать следующие реактивные переменные: тензор малой деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, абсолютную температуру T и тензорные внутренние параметры состояния с компонентами $\chi_{ij}^{(\alpha)} = \chi_{ij}^{(\alpha)}\left(\varepsilon_{kl}, T\right)$, где $\alpha = 1,...,N$, а N — количество внутренних параметров, $k, l = 1,2,3$. Тогда из системы (1), в соответствии с необходимыми и достаточными условиями реализуемости термомеханического процесса, получаем [8]

$$\sigma_{ji} = \rho\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad -\rho\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}}\dot{\chi}_{ij}^{(\alpha)} - \frac{1}{T}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \tag{2}$$

Пусть компоненты тензора деформации ε_{ij} и внутренних параметров состояния $\chi_{ij}^{(\alpha)}$ малы ($\left\|\varepsilon_{ij}\right\| << 1$ и $\left\|\chi_{ij}^{(\alpha)}\right\| << 1$). Тогда разложим объемную плотность свободной энергии $\rho A\left(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}\right)$ в ряд Тейлора по этим переменным, ограничившись квадратичными членами:

$$\begin{aligned}\rho A\left(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}\right) = \rho A\left(0, T, 0\right) + \rho\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{0,T,0}\varepsilon_{ij} + \rho\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}}\right)_{0,T,0}\chi_{ij}^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{0,T,0}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \\ + \rho\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \chi_{kl}^{(\alpha)}}\right)_{0,T,0}\varepsilon_{ij}\chi_{kl}^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\rho\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}\partial \chi_{kl}^{(\beta)}}\right)_{0,T,0}\chi_{ij}^{(\alpha)}\chi_{kl}^{(\beta)}.\end{aligned} \tag{3}$$

Для конкретизации данного соотношения определим количество внутренних параметров состояния, их природу и эволюционные уравнения.

1.1. Внутренние параметры состояния: их природа и эволюционные уравнения

В настоящей работе будем рассматривать два тензорных внутренних параметра состояния: $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$. Параметр $\chi_{ij}^{(S)}$ отвечает за возникновение необратимых деформаций при силовом нагружении, $\chi_{ij}^{(T)}$ — при температурном нагружении. Для описания эволюции этих параметров постулируем существование следующих кинетических уравнений:

$$\tau_{ijkl}^{(S)}\frac{\partial \chi_{kl}^{(S)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(S)} = \overline{\chi}_{ij}^{(S)}, \quad \tau_{ijkl}^{(T)}\frac{\partial \chi_{kl}^{(T)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(T)} = \overline{\chi}_{ij}^{(T)}, \tag{4}$$

Здесь $\tau_{ijkl}^{(S)} = \tau_{ijkl}^{(S)}(T)$, $\tau_{ijkl}^{(T)} = \tau_{ijkl}^{(T)}(T)$ — компоненты положительно определенных тензоров времен релаксации параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ соответственно; $\overline{\chi}_{ij}^{(S)}$, $\overline{\chi}_{ij}^{(T)}$ — установившиеся значения этих параметров; z — внутреннее время, дифференциал которого определяют выражением $dz = d\xi / f(\xi)$ [6], где $f(\xi) = 1 + \beta\xi$ — функция упрочнения, β — материальный параметр; $d\xi$ — приращение меры внутреннего времени, определяемое как [7]

$$d\xi = \sqrt{P_{ijkl}d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{kl} + m^2 dT^2}, \tag{5}$$

где $P_{ijkl} = P_{ijkl}(T)$ — компоненты симметричного положительно определенного тензора материальных параметров [5]; $m = m(T)$ — материальный параметр модели [7].

В настоящей работе ограничимся рассмотрением следующих видов тензоров:

$$\tau_{ijkl}^{(S)} = \begin{cases}\tau_{ijkl}^{(S)}, & i = k \wedge j = l;\\ 0, & i \neq k \vee j \neq l,\end{cases} \quad \tau_{ijkl}^{(T)} = \begin{cases}\tau_{ijkl}^{(T)}, & i = k \wedge j = l;\\ 0, & i \neq k \vee j \neq l.\end{cases} \tag{6}$$

В результате получим несвязанные системы дифференциальных уравнений (4), решение которых для внутренних параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ имеют вид:

$$\chi_{ij}^{(S)} = \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(S)}\left(z-z'\right)\right) a_{klmn}^{(S)} \overline{\chi}_{mn}^{(S)} dz' = \overline{\chi}_{ij}^{(S)} - \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(S)}\left(z-z'\right)\right) \frac{\partial \overline{\chi}_{kl}^{(S)}}{\partial z'} dz', \tag{7}$$

$$\chi_{ij}^{(T)} = \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(T)}\left(z-z'\right)\right) a_{klmn}^{(T)} \overline{\chi}_{mn}^{(T)} dz' = \overline{\chi}_{ij}^{(T)} - \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(T)}\left(z-z'\right)\right) \frac{\partial \overline{\chi}_{kl}^{(T)}}{\partial z'} dz', \tag{8}$$

где $a_{ijkl}^{(S)} = 1/\tau_{ijkl}^{(S)}$, $a_{ijkl}^{(T)} = 1/\tau_{ijkl}^{(T)}$ — компоненты тензоров материальных параметров; $m, n = 1, 2, 3$.

Установившиеся значения внутренних параметров определим следующим образом:

$$\overline{\chi}_{ij}^{(S)} = X_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \overline{\chi}_{ij}^{(T)} = \tilde{Y}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(T)}, \tag{9}$$

где $X_{ijkl}, \tilde{Y}_{ijkl}$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

1.2. Определяющее соотношение и уравнение теплопроводности математической модели с внутренними параметрами состояния

Определив количество, природу и эволюционные уравнения для внутренних параметров, а также исключив их взаимное влияние, соотношение (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \rho A\left(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}\right) = \rho B - D_{ij}^{*}\varepsilon_{ij} + F_{ij}^{*}\chi_{ij}^{(S)} - G_{ij}^{*}\chi_{ij}^{(T)} + \frac{1}{2}C_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - M_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}\chi_{kl}^{(S)} + \\ + N_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}\chi_{kl}^{(T)} + \frac{1}{2}H_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(S)}\chi_{kl}^{(S)} + \frac{1}{2}L_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(T)}\chi_{kl}^{(T)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$B = A\left(0, T, 0\right), \qquad D_{ij}^{*} = -\rho\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{0,T,0}, \qquad C_{ijkl}^{*} = \rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{0,T,0},$$

$$F_{ij}^{*} = \rho\left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(S)}}\right)_{0,T,0}, \quad M_{ijkl}^{*} = -\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \chi_{kl}^{(S)}}\right)_{0,T,0}, \quad H_{ijkl}^{*} = \rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(S)}\partial \chi_{kl}^{(S)}}\right)_{0,T,0},$$

$$G_{ij}^{*} = -\rho\left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(T)}}\right)_{0,T,0}, \quad N_{ijkl}^{*} = \rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \chi_{kl}^{(T)}}\right)_{0,T,0}, \quad L_{ijkl}^{*} = \rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(T)}\partial \chi_{kl}^{(T)}}\right)_{0,T,0}.$$

где $B = B(T)$ — массовая плотность свободной энергии при нулевых значениях деформации и внутренних параметров; $F_{ij}^{*} = F_{ij}^{*}(T)$, $G_{ij}^{*} = G_{ij}^{*}(T)$, $D_{ij}^{*} = D_{ij}^{*}(T)$ — компоненты симметричных тензоров 2-го ранга; $M_{ijkl}^{*} = M_{ijkl}^{*}(T)$, $N_{ijkl}^{*} = N_{ijkl}^{*}(T)$, $C_{ijkl}^{*} = C_{ijkl}^{*}(T)$, $H_{ijkl}^{*} = H_{ijkl}^{*}(T)$, $L_{ijkl}^{*} = L_{ijkl}^{*}(T)$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

Для получения определяющего соотношения подставим выражение (10) в первое уравнение (2) и учтем соотношение (9). После упрощения получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} = \sigma_{ji}^{0}\left(T\right) - \sigma_{ji}^{(S)}\left(T\right) + \left(C_{ijkl}^{*} - \tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}M_{mnkl}^{*}\right)\varepsilon_{kl} - \\ -\left(M_{ijkl}^{*} - \tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}H_{mnkl}^{*}\right)\chi_{kl}^{(S)} + N_{ijkl}^{*}\chi_{kl}^{(T)}, \quad p, q = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\tilde{X}_{ijpq} = X_{ijkl}\dfrac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{pq}}$; $\sigma_{ji}^{0}(T) = D_{ij}^{*}(T) = C_{ijkl}^{*}\varepsilon_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора начальных напряжений при стеснённом нагреве в случае отсутствия внутренних параметров; $\sigma_{ji}^{(S)}(T)$ — компоненты тензора начальных напряжений при стеснённом нагреве, вызванные влиянием установившегося значения внутреннего параметра состояния $\overline{\chi}_{ij}^{(S)}$ и равные:

$$\sigma_{ji}^{(S)}(T)=\frac{\partial\chi_{mn}^{(S)}}{\partial\varepsilon_{ij}}F_{mn}^{*}=\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}F_{mn}^{*},\tag{12}$$

где $F_{mn}^{*}=K_{mnkl}^{*}\varepsilon_{kl}^{(T)}$, $K_{mnkl}^{*}=K_{mnkl}^{*}(T)$ — компоненты симметричного тензора 4-го ранга. Здесь $\varepsilon_{kl}^{(T)}=\alpha_{kl}^{(T)}\theta$ — компоненты тензора температурной деформации, $\alpha_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора температурных коэффициентов линейного расширения, $\theta=T-T_0$ — изменение температуры, T_0 — температура естественного состояния.

Перепишем соотношение (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{ji}=\left(C_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}M_{mnkl}^{*}\right)\varepsilon_{kl}-\left(C_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}K_{mnkl}^{*}\right)\varepsilon_{kl}^{(T)}-\\-\left(M_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}H_{mnkl}^{*}\right)\chi_{kl}^{(S)}+N_{ijkl}^{*}\chi_{kl}^{(T)}.\end{aligned}\tag{13}$$

В частном случае, когда $K_{mnkl}^{*}=M_{mnkl}^{*}$, данное соотношение можно упростить:

$$\sigma_{ji}=C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^{(T)}\right)-M_{ijkl}\chi_{kl}^{(S)}+N_{ijkl}\chi_{kl}^{(T)},\tag{14}$$

где

$$C_{ijkl}=C_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}M_{mnkl}^{*},\quad M_{ijkl}=M_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}H_{mnkl}^{*},\quad N_{ijkl}=N_{ijkl}^{*}.\tag{15}$$

Здесь $C_{ijkl}=C_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных упругих жесткостей; $M_{ijkl}=M_{ijkl}(T)$, $N_{ijkl}=N_{ijkl}(T)$ — компоненты тензоров 4-го ранга.

Для вычисления массовой плотности энтропии подставим выражение (10) во второе уравнение (2) и учтем соотношение (12). После упрощения получим:

$$\begin{aligned}h=-\frac{dB}{dT}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{dC_{ijkl}^{*}}{dT}\varepsilon_{kl}-\frac{dC_{ijkl}^{*}}{dT}\varepsilon_{kl}^{(T)}-\frac{dM_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(S)}+\frac{dN_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(T)}\right)\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial G_{kl}^{*}}{\partial T}\chi_{kl}^{(T)}+\\+\frac{1}{\rho}G_{kl}^{*}a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T}+\frac{1}{\rho}\left(C_{ijpq}^{*}\varepsilon_{ij}-K_{ijpq}^{*}\chi_{ij}^{(S)}-\left(N_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}+L_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(T)}\right)a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T}+\\-\frac{1}{\rho}\frac{dK_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(S)}\varepsilon_{kl}^{(T)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\left(\frac{dH_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(S)}\chi_{kl}^{(S)}+\frac{dL_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(T)}\chi_{kl}^{(T)}\right),\end{aligned}\tag{16}$$

где $\frac{1}{\rho}G_{kl}^{*}a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\alpha_{pq}^{(T)}$ и $\frac{1}{\rho}\frac{dG_{kl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(T)}$ отвечают за изменение энтропии при стесненном нагреве, вызванное влиянием установившегося значения внутреннего параметра состояния $\chi_{kl}^{(T)}$ и его эволюции соответственно. Тогда компоненты тензора G_{kl}^{*} можно определить как $G_{kl}^{*}=R_{klij}\varepsilon_{ij}^{(T)}$, где $R_{mnij}^{*}=R_{mnij}^{*}(T)$ — компоненты симметричного тензора 4-го ранга.

Перепишем соотношение (16) в следующем виде:

$$\begin{aligned}h=-\frac{dB}{dT}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{dC_{ijkl}^{*}}{dT}\varepsilon_{kl}-\frac{dC_{ijkl}^{*}}{dT}\varepsilon_{kl}^{(T)}-\frac{dM_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(S)}+\frac{dN_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{kl}^{(T)}\right)\varepsilon_{ij}+\\+\frac{1}{\rho}\left(C_{ijpq}^{*}\varepsilon_{ij}-K_{ijpq}^{*}\chi_{ij}^{(S)}+R_{ijpq}^{*}\chi_{ij}^{(T)}-\left(N_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}-R_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}^{(T)}+L_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(T)}\right)a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T}-\\-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dK_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(S)}-\frac{dR_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(T)}\right)\varepsilon_{kl}^{(T)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\left(\frac{dH_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(S)}\chi_{kl}^{(S)}+\frac{dL_{ijkl}^{*}}{dT}\chi_{ij}^{(T)}\chi_{kl}^{(T)}\right).\end{aligned}\tag{17}$$

Тензоры $\hat{\mathbf{K}}^{*}$, $\hat{\mathbf{R}}^{*}$, $\hat{\mathbf{M}}^{*}$, $\hat{\mathbf{N}}^{*}$, $\hat{\mathbf{H}}^{*}$, $\hat{\mathbf{L}}^{*}$ необходимо определять с учетом ограничений, накладываемых диссипативным неравенством (2).

Для получения уравнения теплопроводности подставим выражение (17) в (1). После упрощения получим:

$$\rho c\dot{T} = TW_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D^* + \delta_D, \tag{18}$$

Здесь c — эффективная удельная массовая теплоемкость, определяемая как

$$c = c_\varepsilon - \frac{1}{\rho}T\left(\frac{1}{2}\frac{d^2C_{ijkl}^*}{dT^2}\varepsilon_{kl} - \frac{d^2C_{ijkl}^*}{dT^2}\varepsilon_{kl}^{(T)} - \frac{d^2M_{ijkl}^*}{dT^2}\chi_{kl}^{(S)} + \frac{d^2N_{ijkl}^*}{dT^2}\chi_{kl}^{(T)}\right)\varepsilon_{ij} +$$

$$+\frac{2}{\rho}T\left(\frac{dC_{ijpq}^*}{dT}\varepsilon_{ij} - \frac{dK_{ijpq}^*}{dT}\chi_{ij}^{(S)} + \frac{dR_{ijpq}^*}{dT}\chi_{ij}^{(T)}\right)\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} -$$

$$-\frac{1}{\rho}T\left(\frac{dN_{ijkl}^*}{dT}\varepsilon_{ij} - \frac{dR_{ijkl}^*}{dT}\varepsilon_{ij}^{(T)} - R_{ijkl}^*\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} + \frac{dL_{ijkl}^*}{dT}\chi_{ij}^{(T)}\right)a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} -$$

$$-\frac{1}{\rho}T\left(\frac{d^2K_{ijkl}^*}{dT^2}\chi_{ij}^{(S)} - \frac{d^2R_{ijkl}^*}{dT^2}\chi_{ij}^{(T)}\right)\varepsilon_{kl}^{(T)} - \frac{1}{2}\frac{1}{\rho}T\left(\frac{d^2H_{ijkl}^*}{dT^2}\chi_{ij}^{(S)}\chi_{kl}^{(S)} + \frac{d^2L_{ijkl}^*}{dT^2}\chi_{ij}^{(T)}\chi_{kl}^{(T)}\right),$$

где $c_\varepsilon = -T\dfrac{d^2B}{dT^2}$ — удельная массовая теплоемкость при постоянном объеме; W_{ij} — компоненты симметричного тензора второго ранга, равные

$$W_{ij} = \left(\frac{dC_{ijkl}^*}{dT}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}\right) - \left(C_{ijpq}^* - N_{ijkl}^*a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} - \frac{dM_{ijkl}^*}{dT}\chi_{kl}^{(S)} + \frac{dN_{ijkl}^*}{dT}\chi_{kl}^{(T)}\right);$$

δ_D^* — дополнительное термодинамическое слагаемое, описывающее процессы рассеяния энергии, вызванные влиянием внутренних параметров состояния, и определяемое как

$$\delta_D^* = T\left(\frac{dM_{ijkl}^*}{dT}\varepsilon_{kl} - \frac{dK_{ijkl}^*}{dT}\varepsilon_{kl}^{(T)} - K_{ijpq}^*\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} - \frac{dH_{ijkl}^*}{dT}\chi_{kl}^{(S)}\right)\dot{\chi}_{ij}^{(S)} -$$

$$-T\left(\frac{dN_{ijkl}^*}{dT}\varepsilon_{kl} - \frac{dR_{ijkl}^*}{dT}\varepsilon_{kl}^{(T)} - \left(R_{ijpq}^* - L_{ijkl}^*a_{klmn}^{(T)}\tilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} + \frac{dL_{ijkl}^*}{dT}\chi_{kl}^{(T)}\right)\dot{\chi}_{ij}^{(T)}.$$

Уравнения (13) и (18), вместе с уравнением равновесия и соотношениями Коши, а также с начальными и граничными условиями, формируют связанную краевую задачу термопластичности с внутренними параметрами состояния.

2. Вариант эндохронной теории пластичности при неизотермическом нагружении

Для получения определяющих соотношений эндохронной теории пластичности в условиях неизотермического нагружения примем следующие допущения [8]:

$$M_{ijkl} = N_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad X_{mnkl} = \tilde{Y}_{mnkl} = I_{mnkl}. \tag{19}$$

В этом случае соотношение (14), учитывая установившиеся значения внутренних параметров состояния (9), примет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\int_0^z \exp\left(-a_{klmn}^{(S)}\left(z-z'\right)\right)\frac{\partial\varepsilon_{mn}}{\partial z'}dz' - C_{ijkl}\int_0^z \exp\left(-a_{klmn}^{(T)}\left(z-z'\right)\right)\frac{\partial\varepsilon_{mn}^{(T)}}{\partial z'}dz' = \sigma_{ij}^{(S)} - \sigma_{ij}^{(T)}, \tag{20}$$

где компоненты вспомогательных тензоров напряжений $\sigma_{ij}^{(S)}$ и $\sigma_{ij}^{(T)}$ равны:

$$\sigma_{ij}^{(S)} = C_{ijkl}\int_0^z \exp\left(-a_{klmn}^{(S)}\left(z-z'\right)\right)\frac{\partial\varepsilon_{mn}}{\partial z'}dz', \quad \sigma_{ij}^{(T)} = C_{ijkl}\int_0^z \exp\left(-a_{klmn}^{(T)}\left(z-z'\right)\right)\frac{d\varepsilon_{mn}^{(T)}}{\partial z'}dz'. \tag{21}$$

Продифференцировав соотношения (21) по внутреннему времени, получим:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(d\varepsilon_{kl} - \left(a^{(S)}_{klmn}S_{mnpq}\sigma^{(S)}_{pq} - a^{(T)}_{klmn}S_{mnpq}\sigma^{(T)}_{pq}\right)dz\right) + \left(\frac{dC_{ijkl}}{dT}S_{klmn}\sigma_{mn} - C_{ijkl}\alpha^{(T)}_{kl}\right)dT, \qquad (22)$$

где $S_{ijkl} = S_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных коэффициентов податливости, определяемые из соотношения $S_{ijkl}C_{klmn} = I_{ijmn}$.

Обратное соотношение:

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}d\sigma_{kl} + \left(a^{(S)}_{ijkl}S_{klmn}\sigma^{(S)}_{mn} - a^{(T)}_{ijkl}S_{klmn}\sigma^{(T)}_{mn}\right)dz - S_{ijkl}\frac{dC_{klmn}}{dT}S_{mnpq}\sigma_{pq}dT + \alpha^{(T)}_{ij}dT. \qquad (23)$$

Здесь приращение внутреннего времени dz определяем из уравнения $dz = d\xi / f(\xi)$, в котором функция упрочнения $f(\xi)$ задана как $f(\xi) = 1 + \beta\xi$, где β — материальный параметр модели. Приращение меры внутреннего времени $d\xi$ определяем из уравнения (5).

3. Пример расчета для демонстрации полученных соотношений

Для демонстрации полученных соотношений (23) рассмотрим деформирование многослойного композитного материала AS4/PEEK при различных углах армирования и температурах, предположив, что задача термически несвязанная.

Ввиду недостатка экспериментальных данных [3] ограничимся анализом случая, когда от температуры зависят только C_{ijkl}, S_{ijkl} и P_{ijkl}, а компоненты $a^{(S)}_{ijkl} = a^{(T)}_{ijkl}$ и $m = 0$, что соответствует отсутствию необратимых деформаций при температурном нагружении. Компоненты тензора P_{ijkl} заданы как $P_{ijkl} = P^0_{ijkl}\Omega(T)$, где P^0_{ijkl} — значения при $T_0 = 24$ °C; $\Omega(T)$ — функция, зависящая от температуры.

Материальные параметры модели $a^{(S)}_{ijkl}$ и P^0_{ijkl} определены методом минимизации функции отклонений расчетных кривых от экспериментальных данных при T_0, с учетом их положительной определенности. Значения функции $\Omega(T)$ также установлено этим методом. Материальный параметр β принят равным нулю, поскольку кривые деформирования не имеют выраженного участка линейного упрочнения.

Расчет выполнен в два этапа: 1-й этап — предварительный нагрев, 2-й этап — растяжение при постоянной температуре. Полученные результаты приведены на рис. 1.

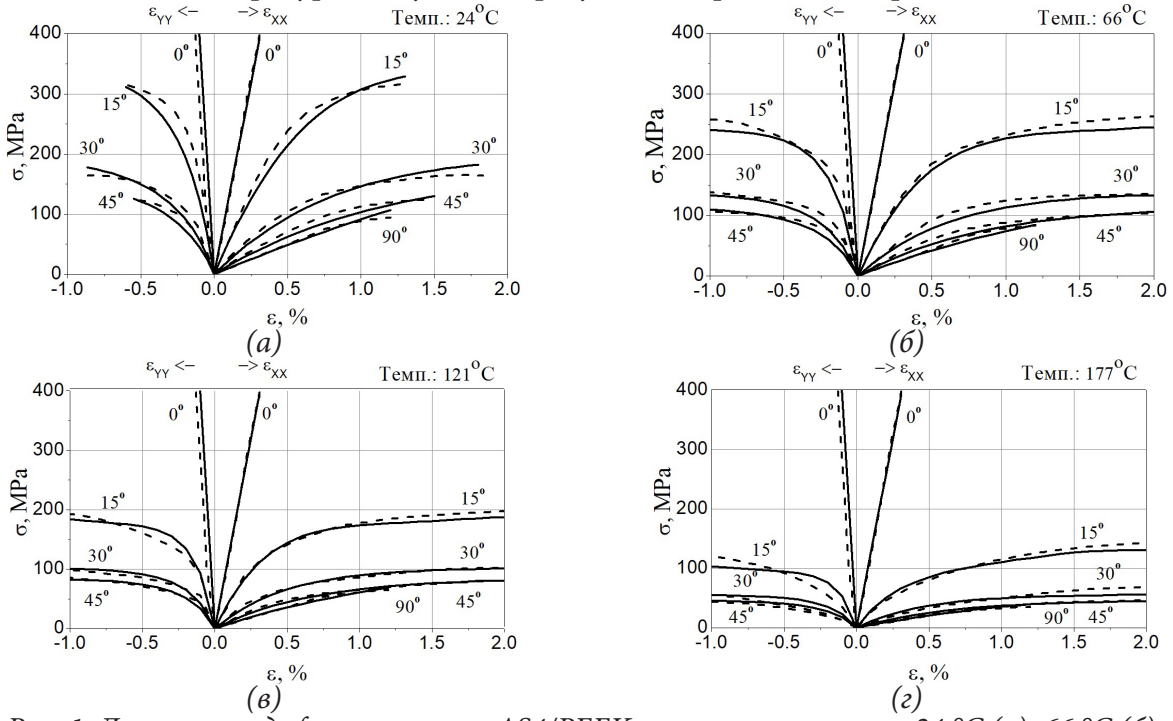


Рис. 1. Диаграммы деформирования AS4/PEEK при температурах: 24 °C (а), 66 °C (б), 121 °C (в), 177 °C (г). Сплошная линия — расчет, пунктирная линия — эксперимент [3]

Графики демонстрируют хорошее согласование расчетных значений по эндохронной теории термопластичности с экспериментальными данными.

Заключение

В работе предложен вариант математической модели пластичности для композиционных материалов при неизотермическом нагружении. Получены определяющие соотношения и уравнение теплопроводности для формирования связанной краевой задачи термопластичности. В частном случае модель приведена к соотношениям эндохронной теории термопластичности. Проведенные расчеты показали хорошее согласование с экспериментальными данными.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (код проекта FSFN-2024-004).

Литература

1. *Jones R. M.* Deformation theory of plasticity / R. M. Jones. – Blacksburg : Bull Ridge Publishing, 2009. – 622 p.

2. *Amijima S.* Linear and Nonlinear Stress-Strain Response of Laminated Composite Materials. Part II — Nonlinear Stress-Strain Response / S. Amijima, T. Adachi // The Science and Engineering Review of Doshisha University. – 1975. – Vol. 16, № 3-4. – P. 147–167.

3. *Sun C. T.* Characterization of elastic-plastic behavior of AS4/PEEK thermoplastic composite for temperature variation / C. T. Sun, K. J. Yoon // Journal of composite materials. – 1991. – Vol. 25. – P. 1297–1313.

4. *Головин Н. Н.* Математические модели деформирования углерод-углеродных композитов / Н. Н. Головин, Г. Н. Кувыркин // Механика твердого тела. – 2016. – Т. 51, № 5. – С. 596–605.

5. *Кувыркин Г. Н.* Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении / Г. Н. Кувыркин. – Москва : Изд-во МГТУ, 1993. – 142 с.

6. *Сарбаев Б. С.* Расчет диаграмм деформирования композиционных материалов с тканым наполнителем посредством эндохронной теории пластичности / Б. С. Сарбаев, А. Н. Барышев // Вест. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2017. – № 4. – С. 65–75.

7. *Сарбаев Б. С.* Определяющие соотношения для высокотемпературных композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности / Б. С. Сарбаев // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2019. – № 7. – С. 97–104.

8. *Зарубин В. С.* Математические модели термомеханики / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. – Москва : Физматлит, 2002. – 168 с.

9. *Maugin G.* Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts / G. Maugin, W. Muschik // J. Non-Equilib. Thermodyn. – 1994. – Vol. 19, № 3. – P. 217–249.

10. *Maugin G.* The Thermomechanics of Plasticity and Fracture / G. Maugin. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 350 p.

11. *Зимин В. Н.* Проектирование высокоэффективного металлокомпозитного баллона высокого давления сферической формы / В. Н. Зимин, Г. Н. Кувыркин, Д. Р. Рахимов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2022. – № 4(54). – С. 14–24.

12. *Кувыркин Г. Н.* Вычислительный алгоритм исследования определяющих соотношений эндохронной теории термопластичности для изотропных материалов / Г. Н. Кувыркин, Д. Р. Рахимов // Прикладная механика и техническая физика. – 2024. – № 3. – С. 116–122.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ В ТЕПЛОВОМ ПОТОКЕ

О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача о распределении температур в слое из материала со стохастическими теплофизическими свойствами. Анализируется вариант воздействия в виде гармонического теплового потока. Коэффициент теплопроводности принимается в виде случайной функции глубины. Решается задача об определении моментов случайного температурного поля в рамках корреляционной теории и задача оценки границ этого поля при учете моментов третьего порядка случайной функции теплопроводности для двухкомпонентного материала тела.

Ключевые слова: температура, уравнение теплопроводности, стохастическая неоднородность, статистические характеристики, функции Бесселя, макроскопические характеристики, двухкомпонентный композит.

Введение

В работе рассматривается задача о моделировании температурного поля в материале с теплофизическими свойствами, зависящими от координат. Рассмотрены два варианта построения модели со стохастическими свойствами на основе модификации решения задачи теплопроводности при использовании функций Бесселя [1].

В первом — для коэффициента теплопроводности задается явная форма случайной функции с заданным законом распределением случайного параметра. Во втором используется представление о макроскопических теплофизических характеристиках.

Математическая модель представлена краевой задачей для дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с переменными коэффициентами, содержащими случайный параметр.

1. Рассматривается тело в виде слоя толщиной h, которое находится под действием теплового потока

$$q(x,y) = q_0 \cdot \cos\alpha x \cdot \cos\beta y \qquad (1)$$

одинакового на каждой из плоскостей, ограничивающих этот слой. Здесь q_0, α, β — постоянные детерминированные величины.

Система координат выбирается так, что плоскость xOy расположена в верхней границе слоя. Ось z направлена вниз.

Материал тела обладает неоднородностью теплофизических свойств вероятностной природы. В частности, рассмотрен вариант слоистой структуры с коэффициентом теплопроводности в виде случайной функции $\lambda(z)$, что определяет случайный характер температурного поля $T(x,y,z)$ в теле.

Уравнение стационарной теплопроводности [2] принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(z)\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \lambda(z)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0. \qquad (2)$$

Задача состоит в оценке статистических характеристик решения (2).

2. С учетом (1) решение (2) удобно искать в виде

$$T(x,y,z) = f(z) \cdot \cos\alpha x \cdot \cos\beta y$$

и перейти к рассмотрению уравнения

$$\frac{d}{dz}\left(\lambda(z)\cdot\frac{df(z)}{dz}\right)-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\lambda(z)\cdot f(z)=0 \tag{4}$$

относительно случайной функции $f(z)$. Решение (4) зависит от вида случайной функции $\lambda(z)$. Рассмотрим вариант степенной зависимости

$$\lambda(z)=\lambda_0\left(1+\varepsilon\cdot z\right)^n. \tag{5}$$

В (5) λ_0 и ε случайные величины с заданным совместным законом распределения, n — некоторая неслучайная величина.

Для выбранного вида неоднородности теплофизических свойств материала можно привести (4) к уравнению Бесселя [3]. Для этого нужно ввести новые обозначения

$$\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad \xi=1+\varepsilon\cdot z,\quad \delta=\gamma/\varepsilon,\quad f(\xi)=\xi^{\frac{1-n}{2}}v(\xi). \tag{6}$$

С учетом (5), (6) из (4) следует [3] уравнение Бесселя

$$\frac{d^2v}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dv}{d\xi}-v\cdot(\delta^2+\frac{(n-1)^2}{4\xi^2})=0. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) выражается через специальные функции, так что для $f(\xi)$ из (4) следует

$$f(\xi)=\xi^{-\frac{(n-1)}{2}}\left(B_1\cdot I_{\frac{n-1}{2}}(\delta\cdot\xi)+B_2\cdot K_{\frac{n-1}{2}}(\delta\cdot\xi)\right). \tag{8}$$

$$I_v(x)=\exp(-v\pi i/2)\cdot J_v(ix),\quad J_v(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^v\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{2m}}{m!\Gamma(v+m+1)},$$

$$K_v(x)=\frac{1}{2}\pi i\cdot\exp(v\pi i/2)\cdot H_v^{(1)}(ix),\ H_v^{(1)}(x)=-J_v(x)+iY_v(x)$$

$$Y_v(x)=\frac{J_v(x)\cdot\cos\pi v-J_{-v}(x)}{\sin\pi v},\ J_{-u}(x)=(-1)^nJ_{-u}(x),$$

Здесь коэффициенты B_1, B_2 определяются видом граничных условий, $I_v(x)$ — модифицированная функция Бесселя, $K_v(x)$ — функция Макдональда. $H_v^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля первого рода, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Для граничных условий

$$T\big|_{z=0}=T_0,\quad q\big|_{z=0}=q_h \tag{9}$$

коэффициенты B_1, B_2 принимают вид

$$B_1=\frac{q_0}{\lambda_0\gamma ch(\gamma h)}-T_0th(\gamma h),\quad B_2=T_0. \tag{10}$$

В (10) $ch(x)$, $th(x)$ — гиперболический косинус и тангенс.

Выражения (8), (10) описывают характер распределения температуры по толщине слоя при граничных условиях (9). Так как эти зависимости содержат случайные параметры λ_0, ξ, то (8) является случайной функцией переменной ξ.

$$f(\xi,\lambda_0)=\xi^{-\frac{(n-1)}{2}}\left(\left(\frac{q_h}{\lambda_0\gamma ch(\gamma h)}-T_0th(\gamma h)\right)I_{\frac{n-1}{2}}(\delta\xi)+T_0K_{\frac{n-1}{2}}(\delta\xi)\right),\quad \mu=n-1 \tag{11}$$

Задача состоит в построении ее статистических характеристик

3. Рассмотрим вариант модели, когда случайным является только параметр $u=1/\lambda_0$, который подчиняется экспоненциальному закону распределения [5].

$$p(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x<0\\ k\exp(-kx), & x\ge 0\end{cases}.$$

Тогда математическое ожидание случайной функции принимает вид

$$\left\langle f\left(\xi\right)\right\rangle = \int_0^{\infty} \xi^{-\frac{(n-1)}{2}} \left(\left(\frac{uq_h}{\gamma ch\left(\gamma h\right)} - T_0 th\left(\gamma h\right) \right) I_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) + T_0 K_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) \right) k \exp(-ku) du$$

или после интегрирования

$$\left\langle f\left(\xi\right)\right\rangle = \xi^{-\frac{(n-1)}{2}} \left(\left(\frac{q_h}{k\gamma ch\left(\gamma h\right)} + T_0 th\left(\gamma h\right) \right) I_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) + T_0 K_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) \right). \tag{12}$$

Здесь угловые скобки обозначают операцию математического ожидания.

Для флуктуации функции $f(\xi)$ из (11), (12) следует

$$f\left(\xi\right) - \left\langle f\left(\xi\right)\right\rangle = \xi^{-\frac{(n-1)}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) \frac{u\left(u - \left\langle u\right\rangle\right) q_h}{\gamma ch\left(\gamma h\right)} \tag{13}$$

С учетом (13) получается явное выражение зависимости дисперсии рассматриваемой случайной функции от параметра глубины слоя ξ

$$D(\xi) = \xi^{1-n} \left(I_{\frac{n-1}{2}}\left(\delta\xi\right) \right)^2 \left(\frac{q_h}{\gamma ch\left(\gamma h\right)} \right)^2 \left(1/k\right)^2. \tag{14}$$

Соотношения (12), (14), описывают распределение статистических характеристик стохастической компоненты температурного поля по глубине слоя. Полученные зависимости содержат параметр закона распределения случайного коэффициента теплопроводности λ_0, параметры γ и q_h, характеризующие частоту и амплитуду внешнего воздействия, толщину слоя и температуру T_0 на границе.

Если $n = 1$, то коэффициент теплопроводности изменяется по линейному закону и функция $f(\xi)$ принимает вид

$$f\left(\xi\right) = B_1 \cdot I_0\left(\delta\xi\right) + B_2 \cdot K_0\left(\delta\xi\right),$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются с помощью (10).

4. Рассмотрим вариант модели, в котором коэффициент теплопроводности является статистически однородной случайной функцией координат, описывающей теплофизические характеристики материала из двухкомпонентного композита

Предположим, что функция $\lambda(z)$ обладает эргодическим свойством и воспользуемся представлением о макроскопических теплофизических характеристиках микронеоднородных сред.

Если материал является микроскопически неоднородным и состоит из двух компонентов, то для оценки верхней и нижней границ макроскопического коэффициента теплопроводности λ^* можно воспользоваться соотношениями [4]

$$\lambda_0(c,m,\alpha) = cm + (1-c) - \frac{1}{3}(m-1)^4 (1-c)^2 c^2 a^{-1}$$

$$a = 2(c + m(1-c))(m-1)^2 (1-c)c + (m-1)^3 (1-2c)(1-c)c - \alpha$$

$$\lambda_{00}(c,m,\alpha) = m\left(c + m(1-c) - \frac{4}{3}(m-1)^4 (1-c)^2 c^2 b^{-1} \right)^{-1} \tag{15}$$

$$b = 2(c + m(1-c))(m-1)^2 (1-c)c - 2(m-1)^3 (1-2c)(1-c)c + \alpha$$

$$\lambda_0 = \lambda_+ / \lambda_2, \ \ \lambda_{00} = \lambda_- / \lambda_2, \ \ m = \lambda_1 / \lambda_2.$$

Здесь λ_+ и λ_- — верхняя и нижняя границы λ^*, λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности компонентов с номерами 1 и 2, c — концентрация компоненты смеси с номером 1. Параметр α, связанный со свойствами внутренней геометрии, удовлетворяет условиям

$$\alpha \in \left[\alpha_1, \alpha_2\right], \ \ \alpha_1 = \frac{2}{3}(m-1)^3 (1-c)^2 c, \ \ \alpha_2 = -\frac{2}{3}(m-1)^3 (1-c)^2 c.$$

Соотношения (15) сформулированы с учетом моментов третьего порядка случайной функции $\lambda(z)$ и позволяют построить верхнюю и нижнюю оценки температурного поля в слое. Для построения оценки верхней границы функции $f(\xi)$ следует положить в (11) $\mu = 0$ и $\lambda_0 = \lambda_+$, а для оценки снизу — $\mu = 0$ и $\lambda_0 = \lambda_-$. В таком случае при граничных условиях (9) $f = f(\xi, \lambda_1, \lambda_2, c, \alpha, T_0, q_h)$ и с помощью (3) получается явная зависимость границ температурного поля от теплофизических характеристик компонентов бикомпозита и их концентраций.

Заключение

На основании первой стохастической модели теплопроводности для выбранного закона распределения случайного параметра, описывающего свойства материала, получена зависимость температурного поля от параметров этого закона.

Использование второй модели позволило получить зависимость температурного поля от теплофизических характеристик компонентов композита и их концентраций.

Литература

1. *Коренев Б. Г.* Задачи теории теплопроводности и термоупругости / Б. Г. Коренев. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 400 с.

2. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.

3. *Гаврилов В. С.* Функции Бесселя в задачах математической физики: учебно–методическое пособие / В. С. Гаврилов, Н. А. Денисова, А. В. Калинин. – Нижний Новгород : Издательство Нижегородского госуниверситета, 2014. – 40 с.

4. *Иванищева О. И.* Моделирование упругих свойств пористого материала с учетом структурной характеристики / О. И. Иванищева, Ю. Н Прибытков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции. – Воронеж, 2009. – 302 с.

5. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 479 с.

УДК 537

ОБ ОЦЕНКЕ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ БИКОМПОЗИТА

О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается микронеоднородная перфорированная полуплоскость со стохастической границей. Предлагается математическая модель оценки совместного влияния на дисперсию возмущенного слоя поля деформаций различных параметров этой модели. Рассмотрение проводится для случая двухкомпонентного упругого материала. Граница тела — статистически однородная случайная функция. Пластина имеет перфорацию круговыми отверстиями. Сформулирована зависимость дисперсии компоненты тензора деформации от характеристик неоднородности материала, статистических характеристик функции, описывающей границу и параметров перфорации.
Ключевые слова: поле деформаций, круговые отверстия, стохастическая граница, возмущения, двухкомпонентный материал.

Введение

Вариант задачи о возмущенном напряженном состоянии однородного упругого тела, граница которого описывается случайной функцией, представлен в [1]. Модель деформированного состояния тела, выполненного из зернистого бикомпозита и имеющего стохастическую, границу рассматривалась в [2]. Совместное влияние стохастической границы тела и пористости материала на характеристики возмущенного слоя поля деформаций исследовалось в [3, 4]. В данной работе предлагается способ построения оценки дисперсии компоненты тензора деформаций при учете характеристик границы, микронеоднородных свойств материала и нарушении сплошности наличием перфорации.

Очевидно, что вблизи стохастической границы тела наблюдается возмущение полей, которые затухают при удалении от нее. Оценкой глубины возмущенного слоя поля можно принять расстояние от границы, на котором дисперсия этого поля уменьшается на 90 % [1].

1. Рассмотрим материал пластины, деформированное состояние которой подлежит оценке, и рассчитаем приведенные упругие характеристики при наличии в ней бесконечного количества отверстий. Приведенные упругие характеристики определяются из условия равенства средних деформаций сплошной пластины и пластины с большим количеством отверстий. Для однородного упругого материала и круговой формы отверстий приведенные характеристики имеют вид

$$E^*(E,c)=E\frac{(1-c)^2}{1+c},\qquad \nu^*(\nu,c)=1-\frac{1-\nu(1-2c)}{(1-c)^2}. \tag{1}$$

Здесь E, ν — постоянные материала, c — концентрация круговых отверстий.

Рассмотрим вариант структуры материала пластины без отверстий, представленный упругим бикомпозитом зернистой структуры. Если укладка зерен не является регулярной, то упругие свойства материала удобно описывать случайными полями $E(x,y)$, $\nu(x,y)$.

Пусть структура материала соответствует статистически однородному и изотропному полю. Если напряженное состояние является однородным, то макроскопические параметры Ламэ λ, μ материала можно представить в виде функций, зависящих от моментов первого и второго порядков полей упругих характеристик

$$\mu = \langle\mu\rangle - \frac{2\cdot\langle 3\lambda+8\mu\rangle D_{22}}{15\langle\mu\rangle\langle\lambda+2\mu\rangle}$$

$$\lambda = \langle\lambda\rangle - \frac{1}{3\cdot\langle\lambda+2\mu\rangle}\left(3D_{11}+4D_{12}-\frac{4\cdot\left(\langle\lambda\rangle+\langle\mu\rangle\right)}{5\langle\lambda\rangle}\cdot D_{22}\right) \tag{2}$$

Здесь $\langle\lambda\rangle$, $\langle\mu\rangle$ — математические ожидания случайных полей, $D_{11}=\left\langle(\lambda^0)^2\right\rangle$, $D_{12}=\left\langle\lambda^0\mu^0\right\rangle$, $D_{22}=\left\langle(\mu^0)^2\right\rangle$ — одноточечные центральные моменты второго порядка.

Если воспользоваться эргодическим свойством рассматриваемых полей, то для двухкомпонентного композита можно получить следующие оценки этих моментов

$$\begin{aligned}
&\langle\lambda\rangle = \lambda_1\cdot(1-c_2)+\lambda_2\cdot c_2\\
&\langle\mu\rangle = \mu_1\cdot(1-c_2)+\mu_2\cdot c_2\\
&D_{11} = (\lambda_1-\langle\lambda\rangle)^2\cdot(1-c_2)+(\lambda_2-\langle\lambda\rangle)^2\cdot c_2\\
&D_{12} = (\lambda_1-\langle\lambda\rangle)\cdot(\mu_1-\langle\mu\rangle)\cdot(1-c_2)+(\lambda_2-\langle\lambda\rangle)\cdot(\mu_2-\langle\mu\rangle)\cdot c_2\\
&D_{22} = (\mu_1-\langle\mu\rangle)^2\cdot(1-c_2)+(\mu_2-\langle\mu\rangle)^2 c_2
\end{aligned} \tag{3}$$

В (3) c_2 — концентрация компоненты композита с характеристиками μ_2, λ_2.

С учетом (3) макроскопические характеристики (2) становятся функциями переменных μ_1, λ_1, μ_2, λ_2, c, c_2.

Учитывая (2), (3) и связь между модулями упругости и параметрами Ламэ

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},\quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \tag{4}$$

получаем явную зависимость приведенных модулей (1) от упругих свойств компонентов материала пластины, их концентрации и концентрации отверстий.

Для исследования зависимости технических характеристик рассматриваемой модели от ее параметров, воспользуемся следующей заменой

$$l_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2},\quad l_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2},\quad l_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_2},\quad \overline{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu_2},\quad \overline{\mu} = \frac{\mu}{\mu_2}\ .$$

Тогда из (2), (3) следует

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}(l_1,l_2,l_3,c_2) = {} & l_2\cdot(1-c_2)+l_3\cdot c_2-\frac{(1-c_2)c_2(l_2-l_3)\left(3(l_2-l_3)+4(l_1-1)\right)}{3\cdot\left((1-c_2)(l_2+2l_1)+c_2(l_3+2)\right)}-\\
&-\frac{4}{15}\frac{\left((1-c_2)(l_2+l_1)+c_2(l_3+1)\right)(l_1-1)^2(1-c_2)c_2}{\left(l_2(1-c_2)+l_3\cdot c_2\right)\left((1-c_2)(3l_2+2l_1)+c_2(3l_3+2)\right)}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\overline{\mu}(l_1,l_2,l_3,c_2) = l_1\cdot(1-c_2)+c_2-\frac{2(1-c_2)c_2(l_1-1)^2\left((1-c_2)(3l_2+8l_1)+c_2(3l_3+8)\right)}{15\left(l_1\cdot(1-c_2)+c_2\right)\left((1-c_2)(l_2+2l_1)+c_2(l_3+2)\right)}. \tag{6}$$

С учетом (4)–(6) из (1) следует явная зависимость приведенных упругих характеристик от параметров неоднородности материала, представленная дробно-рациональными функциями

$$E^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c) = \frac{\overline{\mu}(l_1,l_2,l_3,c_2)\left(3\overline{\lambda}(l_1,l_2,l_3,c_2)+2\overline{\mu}(l_1,l_2,l_3,c_2)\right)}{\overline{\lambda}(l_1,l_2,l_3,c_2)+\overline{\mu}(l_1,l_2,l_3,c_2)}\frac{(1-c)^2}{1+c} \tag{7}$$

$$\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c) = 1-\frac{2\left(\overline{\lambda}(l_1,l_2,l_3,c_2)+\overline{\mu}(l_1,l_2,l_3,c_2)\right)-\overline{\lambda}(l_1,l_2,l_3,c_2)(1-2c)}{(1-c)^2\,2\left(\overline{\lambda}(l_1,l_2,l_3,c_2)+\overline{\mu}(l_1,l_2,l_3,c_2)\right)}. \tag{8}$$

Приведенные параметры Ламэ примут вид

$$\lambda^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)=\frac{E^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)\cdot\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)}{\left(1+\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)\right)\cdot\left(1-2\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)\right)} \tag{9}$$

$$\mu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)=\frac{E^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)}{2\left(1+\nu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)\right)}.$$

Как видно, управлять упругими характеристиками E^* и ν^* можно с помощью пяти параметров. При этом следует учитывать следующие ограничения

$$l_1\in(1-\gamma,1+\gamma),\qquad \frac{l_2}{l_3}\in(1-\delta,1+\delta),\qquad \delta,\gamma\in(0,1),$$

при которых справедливы (2) и естественные требования $c\in(0,1),\ c_2\in(0,1)$. Пример характера зависимости приведенных упругих модулей рассмотренного материала от концентрации отверстий представлен на рис. 1.

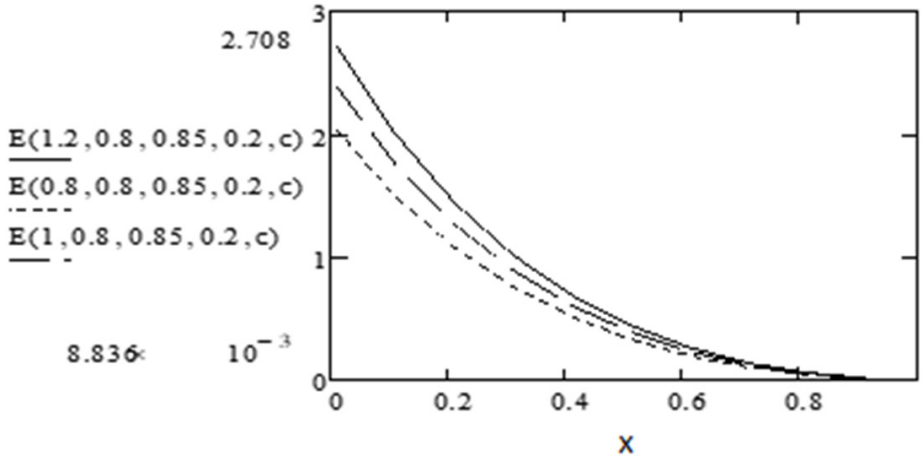


Рис. 1. Зависимость приведенного модуля Юнга модели от концентрации круговых отверстий при следующих значениях параметров $l_1\in\{0.8,1.0,1.2\},\ l_2=0.8,\ l_3=0.85,\ c_2=0.2$

Как и следовало ожидать, увеличение количества отверстий приводит к убыванию приведенной упругой характеристики. Причем скорость этого изменения растет вместе с ростом l_1 при малых концентрациях второй компоненты матрицы материала

2. Рассмотрим упругую полуплоскость из такого двухкомпонентного композита с хаотически расположенными в нем круговыми отверстиями. Полуплоскость растягивается усилиями σ вдоль оси y, относительно которой флуктуирует граница и при $x\to\infty$ выполняются условия

$$\sigma_y=\sigma=\text{const},\qquad \sigma_x=0,\qquad \tau_{xy}=0.$$

Граница полуплоскости описывается статистически однородной случайной функцией $x=H(y)$ и свободна от нагрузок.

Случайный характер профиля границы приводит к тому, что поля тензора напряжений и деформаций становятся случайными у границы. При удалении от границы возмущения этих полей угасают. Для оценки глубины возмущенного слоя представляет интерес изменение дисперсии напряжений и деформаций, убывающих вдоль оси x. В данном случае задача состоит в оценке дисперсии компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{xx},\ \varepsilon_{yy}$.

Примем, что математическое ожидание этой случайной функции равно нулю, то есть

$$M\{H(y)\}=0$$

и воспользуемся выражениями для дисперсии деформаций, полученными в [3] в предположении статистической однородности и изотропии напряженно-деформированного состояния

$$D_{\varepsilon_x} = 2\sigma^2\mu_2^2\int_0^{+\infty}\omega^2\exp(-2|\omega|x)\left(\frac{|\omega|x}{2\mu^*}-\frac{\lambda^*}{\mu^*\left(3\lambda^*+2\mu^*\right)}\right)^2 S(\omega)d\omega \tag{10}$$

$$D_{\varepsilon_y} = 4\sigma^2\mu_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\exp(-2|\omega|x)\left(\frac{|\omega|x}{2\mu*}-2\frac{\lambda^*+\mu*}{\mu*\left(3\lambda^*+2\mu*\right)}\right)^2 S(\omega)d\omega. \tag{11}$$

Здесь $\lambda^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)$, $\mu^*(l_1,l_2,l_3,c_2,c)$ являются приведенными упругими характеристиками (5)–(9), $S(\omega)$ — спектральная плотность случайной функции $H(y)$.

Для расчета дисперсии компонент тензора деформаций (10), (11) остается задать вид спектральной плотности $S(\omega)$.

3. Если спектральная плотность имеет дробно-рациональный вид, то интегрирование в (10), (11) можно провести с помощью вычетов.

Примером такой спектральной плотности может быть

$$S(\omega) = \frac{D_H\alpha}{\pi\left(\alpha^2+\omega^2\right)}, \tag{12}$$

где D_H — дисперсия случайной функции $H(y)$, $\alpha > 0$ — параметр закона распределения.

Если профилограмма границы описывается корреляционной функцией, которая содержит периодическую компоненту

$$K_H(\tau) = D_H\exp(-\alpha|\tau|)\cos(\beta\tau),$$

то для нее спектральная плотность тоже имеет дробно-рациональный вид

$$S(\omega) = \frac{D_H\alpha\left(\omega^2+b^2\right)}{\pi\left(\omega^4+2a\omega^2+b^4\right)}, \quad a=\alpha^2-\beta^2, b=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}. \tag{13}$$

Для границы со спектральной плотностью (12) дисперсии компонентов поля деформаций могут быть представлены в следующем виде

$$\begin{gathered}\bar{D}\varepsilon_x = D_H\cdot\alpha\cdot\sigma^2\cdot\exp(-2x\alpha)\cdot\left(\frac{\alpha x}{2\mu^*}-\frac{\lambda^*}{\mu^*\left(3\lambda^*+2\mu^*\right)}\right)^2 \\ \bar{D}\varepsilon_y = D_H\cdot\alpha\cdot\sigma^2\cdot\exp(-2x\alpha)\cdot\left(\frac{\alpha x}{2\mu^*}-2\frac{\lambda^*+\mu^*}{\mu^*\left(3\lambda^*+2\mu^*\right)}\right)^2 \\ \bar{D}\varepsilon_x = D_{\varepsilon_x}/\mu_2^2, \quad \bar{D}\varepsilon_y = D_{\varepsilon_y}/\mu_2^2,\end{gathered} \tag{14}$$

С учетом (5), (6), (9) выражения (14) описывают характер изменения рассматриваемой статистической характеристики возмущенного слоя поля деформаций от глубины этого слоя для различных значений параметров l_1, l_2, l_3, c_2, c, α, σ, D_H.

Как и следовало ожидать, рассмотренные зависимости, представленные на рис. 2, являются убывающими функциями переменной x. При этом увеличение параметра геометрии границы приводит к снижению дисперсии и этот эффект возрастает с глубиной приграничного слоя.

Заключение

Сформулирована зависимость дисперсии компонент тензора деформаций перфорированной пластины с матрицей из зернистого упругого бикомпозита от глубины приграничного слоя. При этом учитываются геометрические и упругие характеристики структуры тела, а также параметры распределения стохастической границы и приложенной нагрузки. Явный вид указанных зависимостей формируется с учетом (9) при использовании (14).

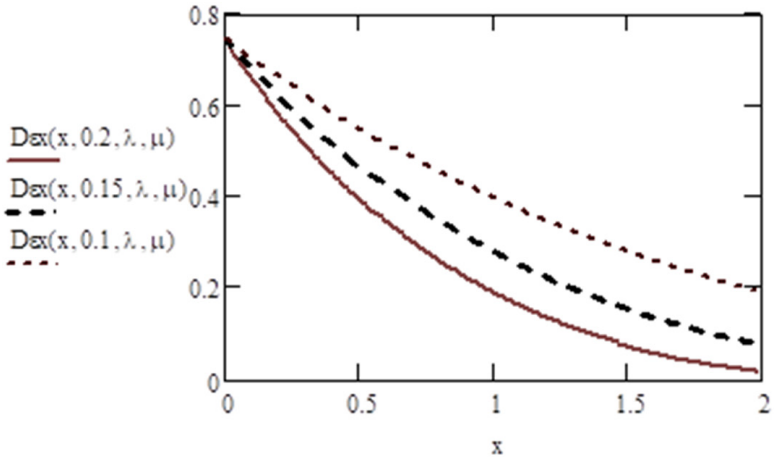


Рис. 2. Распределение дисперсии компоненты ε_x по глубине возмущенного слоя при различных значениях параметра геометрии границы α

Литература

1. *Хусу А. П.* Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход / А. П. Хусу, Ю. Р. Витенберг, В.А. Пальмов. – М. : Наука, 1975. – 343 с.

2. *Иванищева О. И.* Математическое моделирование деформации композита со стохастической границей / О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий: материалы Международной научно-практической конференции, 2–11 июня 2018 года, Сочи. – 2018. – С. 21–24.

3. *Иванищева О. И.* Деформированное состояние пористого полупространства с нерегулярной границей / О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : А43 сб. тр. Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2018 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2018. – 1673 с.

4. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х томах, т. 1. Механика материалов/ А. Н. Гузь, Л. П. Хорошун, Г. А. Ванин и др. – Киев : Наук. Думка, 1982. – 368 с.

УДК 539.37+539.214

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ НЕОБРАТИМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ МАТЕРИАЛА В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ ВОЗРАСТАЮЩЕМ И УБЫВАЮЩЕМ МЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, Е. О. Попова

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. В работе представлено численное решение неизотермической задачи о необратимом деформировании слоя материала, расположенного в круглой недеформируемой трубе. Слой материала имеет конечную длину и находится в условиях жесткого сцепления со стенками трубы. Материал, обладающий упругими, вязкими и пластическими свойствами, деформируется в результате приложения к нему переменного перепада давления, сначала возрастающего со временем, затем постоянного и наконец убывающего до нуля. Необратимые деформации, накапливающиеся в материале, могут быть деформациями ползучести или пластическими деформациями. В рамках модели больших деформаций рассмотрены следующие процессы: ползучесть материала при возрастании нагрузки, пластическое течение при возрастающей и постоянной нагрузке, торможение течения при убывающем нагружении и разгрузка.
Ключевые слова: упругость, вязкоупругость, ползучесть, вязкопластическое течение, пластическое течение, большие деформации, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термодеформирование, модель больших деформаций.

Введение

В процессе обработки материалов с приложением значительных механических нагрузок возникают необратимые деформации. Эти деформации могут быть деформациями ползучести или пластическими деформациями и могут достигать значительных размеров тем самым вызывая увеличение температуры в обрабатываемых материалах. Поэтому подобные задачи являются нелинейными и должны рассматриваться в рамках моделей, учитывающих конечные деформации и перемещения. В данной работе будем использовать модель больших упругопластических деформаций [1], в которой обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса). Имеется обобщение данной модели на неизотермический случай и на случай учета вязкости при пластическом течении в [2]. Проблема согласования законов ползучести и пластического течения рассмотрена в [3].

1. Постановка задачи

Рассмотрим слой материала, имеющий длину l и находящийся в круглой жесткой трубе радиуса R. Слой материала жестко сцеплен со стенками трубы. Несжимаемый материал обладает упругими, реологическими и пластическими свойствами. Для упрощения модельных соотношений задачи будем использовать цилиндрическую систему координат r, φ, z. Материал деформируется при механическом воздействии на него в форме перепада давления, заданного следующим образом:

$$\sigma_{zz}\left(0, u\left(0,t\right), t\right) = -p\left(t\right) = -\alpha t, \qquad \sigma_{zz}\left(0, l + u\left(0,t\right), t\right) = 0. \tag{1}$$

В граничных условиях (1) σ_{zz} — компонента тензора напряжений, $u = u_z(r,t)$ — отличная от нуля компонента вектора перемещений, α — задаваемая постоянная, t — время.

Условие жесткого сцепления материала со стенками трубы означает отсутствие перемещений при $r = R$.

В начале процесса нагружения, пока перепад давления еще небольшой, в материале накапливаются необратимые деформации ползучести. Для их описания применяется степенной закон ползучести Нортона [4]

$$V\left(\sigma_{ij}\right)=B\Sigma^{n}\left(\sigma_{1},\sigma_{2},\sigma_{3}\right),\quad \Sigma=\max\left|\sigma_{i}-\sigma_{j}\right|,\quad \varepsilon_{ij}^{v}=\frac{\partial V\left(\Sigma\right)}{\partial\sigma_{ij}}. \tag{2}$$

В зависимостях (2) $V(\sigma_{ij})$ — термодинамический потенциал; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij}^{v} — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; σ_{i} — главные значения тензора напряжений; B, n — параметры ползучести материала. Параметры ползучести материала в законе ползучести (2) принимаются зависимыми от температуры и имеют вид [5]:

$$B=\frac{c_{1}}{\sigma_{0}^{n-1}}\exp\left(-\frac{Q}{R_{u}T_{0}\left(1+\theta\right)}\right),\quad n=b_{1}+\frac{b_{2}}{T_{0}\left(1+\theta\right)},\quad \theta=\left(T-T_{0}\right)T_{0}^{-1}. \tag{3}$$

В формулах (3) c_1, σ_0, b_1 и b_2 — постоянные материала, Q — энергия активации, R_u — универсальная газовая постоянная, T, T_0 — текущая температура и температура тела в свободном состоянии.

При дальнейшем росте нагружающих усилий в некоторый момент времени t_1 на границе $r=R$ напряженное состояние выйдет на поверхность пластичности и в материале начнется пластическое течение. Будем использовать обобщенное условие пластического течения Треска — Сен-Венана [6]

$$F\left(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^{p}\right)=k,\quad F\left(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^{p}\right)=\frac{1}{2}\max\left|\sigma_{i}-\sigma_{j}\right|-\eta\max\left|\varepsilon_{k}^{p}\right|, \tag{4}$$

В условии (4) ε_{ij}^{p}, ε_{k}^{p} — компоненты тензора скоростей пластических деформаций и его главные значения соответственно; k — предел текучести; η — коэффициент вязкости.

Также как и параметры ползучести предел текучести и коэффициент вязкости принимаются зависимыми от температуры. Считаем, что для них выполняются соотношения [7]:

$$k=k_{0}\left(1-\frac{\theta}{\theta_{m}}\right)^{2},\quad \eta=\eta_{0}\,\mathrm{Exp}\left(-\upsilon T_{0}\theta\right),\quad \theta_{m}=(T_{m}-T_{0})T_{0}^{-1}. \tag{5}$$

В (5) T_m — температура плавления материала, k_0, η_0 — предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре, υ — экспоненциальная скорость.

Источником повышения температуры в материале являются необратимые деформации. Для температуры примем следующие условия

$$\theta\left(r,0\right)=0,\quad \left.\frac{\partial\theta\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\quad \left.\frac{\partial\theta\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R}=0.$$

Данная задача сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных, для решения которой используется конечно-разностный метод.

Получено решение данной краевой задачи при возрастающем перепаде давления. Затем с некоторого момента времени t_2 перепад давления полагается постоянным $p(t)=\alpha t_2$. В этом случае также найдены все параметры напряженно-деформированного состояния. С момента времени t_3 перепад давления убывает по закону: $p(t)=\alpha t_2-\alpha_1(t-t_3)$. При убывающей нагрузке рассмотрено торможение вязкопластического течения и разгрузка среды после остановки течения. После полного снятия нагрузки вычислены все параметры вплоть до полного остывания материала.

Заключение

В данной работе рассмотрена постановка и получено решение неизотермической краевой задачи теории больших деформаций о необратимом деформировании материала в круглой

трубе под действием переменного перепада давления. Повышение температуры материала происходит только вследствие необратимого деформирования, то есть отсутствуют другие источники теплопроизводства в виде трения о границу или притока тепла извне. Так как задача решается в квазистатическом приближении, то нагрев материала при таких условиях оказывается незначительным.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FWFW-2021-0005, FWFW-2022-0002).

Литература

1. *Буренин А. А.* Большие необратимые деформации и упругое последействие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток : Дальнаука, 2013. – 312 с.

2. *Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В.* О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 87–93.

3. *Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.* Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // ДАН. – 2016. – Т. 470, № 3. – С. 275–278.

4. *Norton F. H.* The Creep of Steel at High Temperatures / F. H. Norton. – New York : McGraw Hill Book Company, 1929. – 110 p.

5. *Alain I.* The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence / I. Alain // Journal of Materials Science. – 1998. – V. 33. – P. 3201–3206.

6. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

7. *Pla F.* Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio / F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2009. – V. 238, I. 5. – P. 572–580.

УДК 624.21:533.6; 699.83

ОСОБЕННОСТИ УЧЕТА ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ РАСЧЁТЕ СТАЛЬНЫХ БАЛОК ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ МОСТОВ

В. А. Козлов, А. В. Козлова

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Одной из основных задач промышленно-гражданского и транспортного строительства является подбор компактного, экономичного и надёжного сечения конструктивных элементов. Одним из способов обеспечить выполнение этой задачи является использование имеющегося ресурса несущей способности посредством допущения развития ограниченных пластических деформаций в сечениях стальных элементов. В работе анализируются различные подходы к решению вопроса и приводится ряд факторов, которые необходимо учитывать при проектировании сечений для нового строительства с учётом работы стальных конструкций при ограниченном развитии пластических деформаций.

Ключевые слова: металлические мостовые балки, пластические деформации, методики расчёта, стальные конструкции.

Введение

Задача подбора компактного надежного сечения как в промышленном и гражданском, так и транспортном строительстве не теряет актуальности. Одним из способов решения этой задачи является учет резервов несущей способности, связанных с ограниченным развитием пластических деформаций в элементе.

В отечественной практике расчета стальных мостовых конструкций ограниченное развитие пластических деформаций подразумевается и заложено в виде эмпирических коэффициентов, повышающих значения предельно допустимых усилий в элементах. Однако в явном виде значения ограничений не представлены, что затрудняет работу инженера, пользующегося современными численными методами расчета, предоставляющими широкие возможности решения смешанных задач теории упругости и пластичности. По этой причине видится необходимым предоставить инженеру методику, в которой будут даны рекомендации по учету возможности развития пластических деформаций с конкретными ограничениями для каждого класса задач (расчетов по первой и по второй группе предельных состояний, а также возможности учета запредельной работы сечений).

Данная статья посвящена анализу накопленного опыта учета упруго-пластической работы стали и разработке методики для расчета мостовых конструкций, которая бы, с одной стороны, отвечала требованиям действующих нормативных документов, с другой – не была излишне консервативной и позволила добиться желаемого экономического эффекта.

1. Зарубежный и отечественный подходы к учету ограниченных пластических деформаций стальных конструкций

На рис. 1 представлена диаграмма растяжения стали 15ХСНД — одной из наиболее широко применимых в современном мостовом строительстве. Вертикальными линиями обозначены заложенные в разных действующих отечественных и зарубежных нормативных документах ограничения пластических деформаций от расчетных нагрузок. По диаграмме можно оценить ресурс несущей способности, лежащий за пределом упругости, и увидеть, какой большой ресурс деформационной способности до разрушения имеет сталь. В то же время следу-

ет помнить, что реальные конструкции неизбежно имеют начальные несовершенства формы (геометрические) и материала (физические), что приводит к снижению фактической несущей способности относительно теоретической и требует ограничения пластических деформаций допустимыми пределами. Кроме того, конструкции пролетных строений должны обеспечивать плавность проезда, что невозможно при больших пластических деформациях.

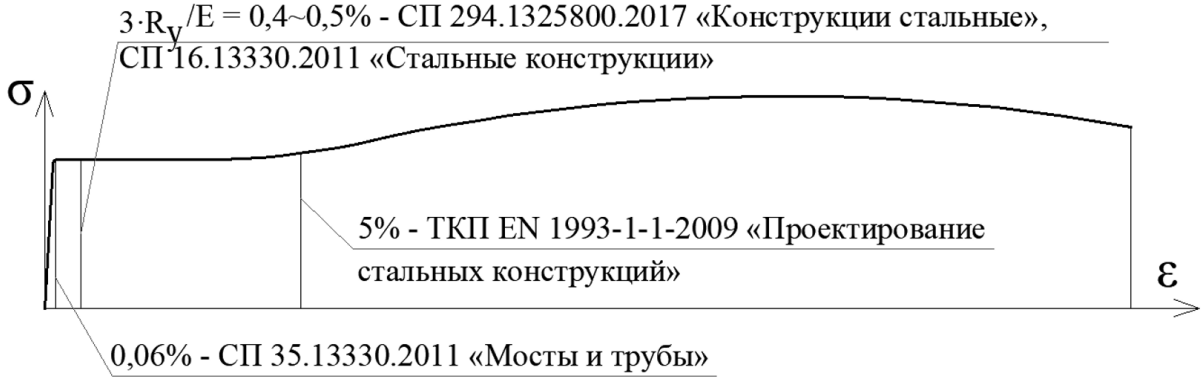


Рис. 1. Диаграмма растяжения стали 15ХСНД

Также по рис. 1 видно, что на сегодняшний день СП 35.13330, регламентирующий проектирование мостов, предлагает крайне консервативный подход, в котором пластические деформации от расчетных нагрузок ограничены величиной 0,06 %, а также не предусмотрено увеличение пластических деформаций для расчетов на особые воздействия.

В то же время, общестроительные нормативные документы по проектированию стальных конструкций СП 16.13330 и СП 294.1325800, а также американские AASHTO LRFD Bridge design specification и европейские EN 1993-1-1, EN 1993-1-2 нормы предполагают принципиально другой подход к ограничению пластических деформаций, в котором сечения делятся на классы в зависимости от способности развивать ограниченные пластические деформации и образовывать пластический шарнир до потери устойчивости (см. табл. 1) и предлагаются рекомендации по конструированию и расчету для каждого класса в отдельности.

Отечественная школа проектирования стальных конструкций не допускает развития пластического шарнира. В соответствии с СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции» учет пластических деформаций для сечений 2 и 3 классов осуществляется введением коэффициента $c_x > 1$:

$$\frac{M}{c_x \beta W_{xn,min} R_y \gamma_c} \le 1, \qquad (1)$$

Но расчет по формуле (1) никогда не даст полную пластику в сечении, т. к. $c_x W_{xn,min} < W_{x,pl}$, где $W_{x,pl}$ — пластический момент сопротивления. Таким образом 3-й класс в отечественной нормативной базе существует только теоретически.

Зарубежные нормативы (на основе проанализированных норм США и Европы) предлагают сразу проектировать сечение с определенной геометрией (соотношением ширины и толщины свесов поясов и стенок), что позволит обеспечить определенный класс по развитию пластических деформаций (см. табл. 2).

Такой подход имеет ряд преимуществ, но из стали в мостовых сооружениях выполняются как правило пролетные строения. Стальные балки пролетных строений двутаврового или коробчатого сечения работают на изгиб и будут наиболее экономичными, если основная масса металла в сечении будет сосредоточена в поясах для получения наибольшего момента сопротивления сечения при наименьшей материалоемкости, т.е. использование компактных балок, способных образовывать пластический шарнир, нецелесообразно.

Таблица 1

Классификация сечений по развитию пластических деформаций

СП16.13330.2011 «Стальные конструкции»	**AASHTO**	**EN**
Класс 1 НДС, при котором напряжения по всей площади сечения не превышают расчетного сопротивления стали $\|\sigma\| \le R_y$ (упругое состояние сечения);	**Некомпактное сечение (Noncompact Section)** Сечение, которое может образовать в крайних фибрах пластическую деформацию, но развитие пластического шарнира невозможно вследствие потери местной устойчивости элементов.	**Класс 4** Потеря местной устойчивости наступает до достижения предела текучести в одной или более зонах поперечного сечения
Класс 2 НДС, при котором в одной части сечения $\|\sigma\| < R_y$, а в другой $\|\sigma\| = R_y$ (упруго-пластическое состояние сечения)		**Класс 3** Напряжение в крайних сжатых волокнах стального элемента при упругом распределении напряжений может достигнуть предела текучести, но потеря местной устойчивости препятствует развитию пластических деформаций
		Класс 2 Могут развиваться пластические деформации, но в сечении ограничена вращательная способность вследствие потери местной устойчивости
Класс 3 НДС, при котором по всей площади сечения $\|\sigma\| = R_y$ (пластическое состояние сечения, условный пластический шарнир)	**Компактное сечение (Compact Section)** Сечение, которое может образовать пластический шарнир без местной потери устойчивости элементов.	**Класс 1** Может образоваться пластический шарнир с вращательной способностью, требуемой для пластического расчета и достигаемой без снижения несущей способности

С нормативной точки зрения, применительно к классификации Приложения В СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции», мостовые конструкции входили бы в первую группу стальных конструкций, характеризующуюся тяжелыми условиями работы, в частности наличием подвижной нагрузки и циклических усилий. Для таких конструкций СП 16.13330 «Стальные конструкции» ограничивает развитие пластических деформаций вплоть до полного их отсутствия.

2. Факторы, влияющие на величину допустимых пластических деформаций

2.1. *Форма сечения* влияет на допущение развития пластических деформаций. В большинстве случаев для мостов со сплошными балками стальные элементы — это симметричные относительно одной оси сечения типа двутавра с широким верхним поясом, представляющим собой участки ортотропной плиты проезжей части (коробчатое сечение при расчете на изгиб может быть приведено к соответствующему двутавровому). Сама по себе степень несимметричности сечения влияет на характер распределения напряжений. Для сечений, симметричных относительно двух осей, возможно допущение развития пластических деформаций в

Таблица 2

Сравнение требований к сечениям, способным развивать пластические деформации

№	Требования к элементам сечений	Формула		
		AASHTO	Класс	EN
1	Требования к свесам поясов b_f и t_f — ширина и толщина свеса	$\frac{b_f}{t_f} > 11{,}1 \cdot \sqrt{235 / R_y}$	1	$\frac{b_f}{t_f} \le 9 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
			2	$\frac{b_f}{t_f} \le 10 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
		$\frac{b_f}{t_f} \le 11{,}1 \cdot \sqrt{235 / R_y}$	3	$\frac{b_f}{t_f} \le 14 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
2	Требования к стенкам балок b_w и t_w — ширина и толщина стенки	$\frac{b_w}{t_w} > 102 \cdot \sqrt{235 / R_y}$	1	$\frac{b_w}{t_w} \le 72 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
			2	$\frac{b_w}{t_w} \le 83 \cdot \sqrt{235 / R_y}$
		$\frac{b_w}{t_w} \le 102 \cdot \sqrt{235 / R_y}$	3	$\frac{b_w}{t_w} \le 124 \cdot \sqrt{235 / R_y}$

меньшем объеме, чем для моносимметричных сечений, т. к. в менее развитом поясе рано наступает текучесть. Для прочностных расчетов по нормативной методике, это учтено введением коэффициента формы æ$_1$, повышающим несущую способность. Проверить, допускается ли развитие пластических деформаций в сечении, можно по табл. 3.

Таблица 3

Параметры сечений, допускающие учет развития ограниченных пластических деформаций

$\frac{A_{f,min}}{A_w}$	0 (тавр)	$\le 0{,}1$	$> 0{,}1$ $\le 0{,}5$	$> 0{,}5$ $\le 1{,}0$	$> 1{,}0$ $\le 4{,}0$	$> 4{,}0$ $\le 5{,}0$
$\frac{A_{f,min} + A_w}{A}$	Без ограничений	$\le 0{,}9$	$\le 0{,}8$	$\le 0{,}7$	$\le 0{,}6$	$\le 0{,}5$

Примечания: 1) A_w — площадь стенки, $A_{f,min}$ — площадь наименьшего из поясов (полок), A — площадь сечения. Все значения брутто.

2) Для коробчатых сечений площадь A_w принимают равной сумме площадей стенок.

В случае с моносимметричными двутаврами с одним развитым по ширине поясом за упругой работой следует односторонняя текучесть, которая, если раньше не происходит потеря устойчивости, сменяется двусторонней текучестью. При нарастании пластических деформаций нейтральная ось сечения смещается, а потому меняются жесткостные характеристики.

Также из-за значительного развития верхнего пояса по ширине, большую роль играет неравномерность распределения напряжений в полках — эффект сдвигового запаздывания (shear lag effect), без учета которого невозможно правильно определить жесткость сечения. Параметры редуцированного сечения будут зависеть от величины допустимых пластических деформаций.

2.2. Большое значение для определения границ допустимого развития пластики в сечении играет *фактор нагрузки*. При расчетах по второй группе предельных состояний с применением коэффициента надежности по нагрузке $\gamma_f = 1$ не следует допускать выход за пределы упругой работы сечения.

В то же время при расчетах по первой группе предельных состояний на постоянные и временные (транспортные, пешеходные, климатические) нагрузки коэффициенты надежности учитывают риски, связанные с возможными отступлениями реальной конструкции от теоретической модели, поэтому можно ограничить пластические деформации величиной, не влияющей на эксплуатационные качества конструкции.

Если же расчет ведется на пропуск сверхнормативной нагрузки, на работу в чрезвычайных ситуациях или выполняется проверка живучести конструкции, то границы пластических деформаций могут быть расширены и приведены в соответствие с СП294.1325800 $\varepsilon_{pl} = 3 \cdot R_y / E = 0,004 \sim 0,005$.

2.3. Еще одним *фактором*, который важно учитывать при проектировании и расчете, является резерв деформационной способности до разрушения *материала* — стали конкретной марки. При применении высокопрочных сталей с соотношением расчетных сопротивлений по временному сопротивлению и пределу текучести $Ru / Ry \le 1,30$ ($Ry > 600$ МПа) из-за малой величины площадки текучести следует ограничиваться упругой работой сечения.

2.4. Упомянутые выше начальные несовершенства разного происхождения также влияют на способность сечения развивать пластические деформации. Для разработки обобщенной методики учета несовершенств требуется анализ текущей ситуации в отрасли. Однако вследствие отсутствия реальной статистики можно задаться допущениями, которые приводятся в соответствующих ГОСТ на материалы, прокат и изделия.

Есть и другие факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние, а значит и на резерв несущей способности за пределом упругости. Например, большую роль играют остаточные напряжения от сварки, т.к. мостовые балки, как правило, представляют собой не прокатный профиль, а сварное составное сечение с листами толщиной по 20–30 мм.

3. Пример расчета стальной двутавровой балки

Для анализа разных методик и сравнения мостовых и общестроительных норм в части проектирования стальных конструкций были выполнены расчеты нескольких стальных балок двутаврового сечения с разным соотношением толщины и длины свеса полки. Рассмотрим в качестве примера расчет двутавровой моносимметричной балки класса прочности С325 полной длиной 6 м, изгибаемой сосредоточенной нагрузкой в середине пролета, с верхним поясом размерами 450×8, нижним — 300×14, и стенкой 300×14 мм. В соответствии с классификацией табл. 1–2 сечение теряет устойчивость до наступления текучести в крайней фибре сечения. Результаты расчета представлены в табл. 4.

Таблица 4

Пример расчета двутавровой балки по действующим нормативам

	ГОСТ Р 59623		**СП16.13330**	
Учет ограниченных пластических деформаций	нет	да	нет	да
Предельно допустимая сосредоточенная сила из условия прочности, $P_{пр}$, т	25,91	27,46	25,91	34,05
Предельно допустимая сосредоточенная сила из условия общей устойчивости, $P_{уст}$, т	19,5		26,68	
Проверка местной устойчивости стенки	обеспечена		обеспечена	
Проверка местной устойчивости полки	не обеспечена		не обеспечена	

Примечание: для получения значений табл. 4 сравнивалась только методика расчета, свойства стали 09Г2С приняты в обоих случаях в соответствии с рекомендациями ГОСТ Р 52963-2021; конечноэлементные расчеты проводились в ПК ЛИРА-САПР.

Расчеты по нормативной методике и МКЭ по пластинчатой модели показывают близкие результаты при расчете напряжений и, соответственно, критической разрушающей силы при проверке прочности. Расчет общей устойчивости по нормативным методикам дает значения критической силы на 10–30 % меньшие, чем расчет МКЭ ($P_{кр} = 29{,}4$ т). Причина заключается в отсутствии учета начальных несовершенств при расчете МКЭ, т. к. в реальной практике небольшое смещение нагрузки относительно оси стенки балки существенно снижает устойчивость (как местную у сжатого пояса, так и общую). Решением этой проблемы может являться выдача рекомендаций по заданию эксцентриситета приложения нагрузок на изгибаемые элементы, по аналогии с методикой, предложенной в СП 294.1325800 для сжатых стержней. Данные несовершенства имеют случайный характер и подчиняются статическим закономерностям, поэтому их следует принимать на основании опытных данных.

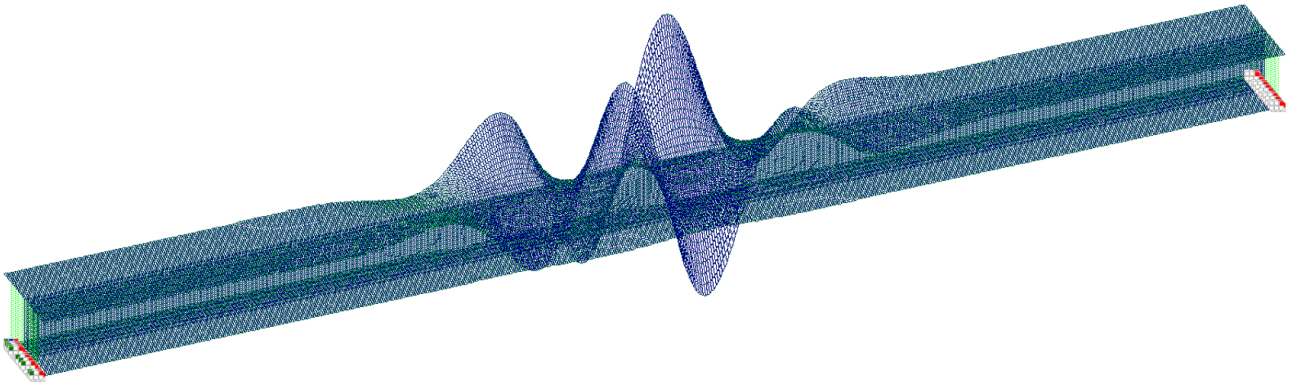


Рис. 2. Схема потери местной устойчивости сжатого пояса изгибаемой двутавровой балки

Выводы

Проведенный анализ показал, что при расчетах мостовых конструкций:

– значительные пластические деформации ($> 0.06\ \%$ при расчетных нагрузках) не допускаются в связи с циклическим характером нагружения и требованием обеспечить плавность проезда;

– при допущении упруго-пластической работы сечения необходимо обеспечить как возможность к повороту сечения без потери устойчивости (геометрические требования), так и достаточную площадку текучести материала ($R_u / R_y > 1{,}30$);

– расчеты численными методами (например, методом конечных элементов — наиболее используемым в инженерной практике на сегодняшний день) необходимо учитывать не только нелинейность работы материала, но и начальные несовершенства формы и приложения нагрузки; при составлении расчетных моделей важную роль играет правильное назначение жесткостных характеристик редуцированных сечений, т. к. при переходе к упругопластической работе жесткость меняется;

– дополнительно требуется рассмотреть тепловые и структурные деформации, полученные в результате сварки, т.к. они оказывают значительное влияние на напряженно-деформированное состояние.

Литература

1. *Потапкин А. А.* Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций. – М. : Транспорт, 1984.

2. *Корнеев М. М.* Стальные мосты. Теоретическое и практическое пособие по проектированию мостов. – Киев : Академпрес, 2010.

3. *Белый Г. И., Гарипов А. И.* Запредельные НДС в поперечных сечениях элементов стальных конструкций // Вестник гражданских инженеров. – 2022. – № 4. – С. 16–30.

4. *Белый Г. И., Гарипов А. И.* Запредельная несущая способность стержневых элементов стальных конструкций после потери общей устойчивости // Вестник гражданских инженеров. – 2022. – № 5. – С. 5–19.

5. *Liang Chen, Siwei Liu.* Geometric and material nonlinear analysis of steel members with nonsymmetric sections // Journal of Constructional Steel Research. – 2022. – № 2.

6. *Ronald D Ziemian, Hannah Blum*. Analysis of non-symmetric cross-sections relative to the provisions of AISC 360-10 // Conference: Proceedings of the Annual Stability Conference Structural Stability Research. – 2020.

7. *Graziano Fiorillo, Michel Ghosn*. Failure Analysis of Continuous Highway Steel I-Multigirder Bridges under the Combined Effect of Fatigue and Overloading Events. – J Bridge Eng. – 2025. – № 1.

8. *Al-Emrani M, Aygul M.* Fatigue design of steel and composite bridges. – Göteborg, Sweden: Chalmers University of Technology. – 2014. – № 10. – P. 166.

УДК 624.044

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО МЕТОДУ «ТЯЖИ И РАСПОРКИ»

В. А. Козлов, С. Ю. Струков

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе приведены основные положения и этапы развития инженерного метода расчета по модели «Тяжи и распорки», полученные на основании изучения отечественного и зарубежного опыта проектирования. Предложен алгоритм построения расчетной модели данного метода с описанием каждого из его этапов. Отдельно рассматриваются основные положения и допущения, на которых основывается конструирование элементов расчетной модели метода. В выводах изложены факторы, позволяющие адаптировать данный метод расчета к требованиям отечественных норм проектирования, с учетом проведения дополнительных экспериментальных исследований масштабных моделей.

Ключевые слова: метод расчета, тяжи и распорки, узловые элементы, расчетная модель, области напряжений, статическая неоднородность, железобетонные элементы.

Введение

Специализированный инженерный метод расчета «тяжи и распорки» («Struts-and-ties» model) берет свое начало от известной модели «ферменной аналогии», предложенной практически одновременно в начале XX века Мёршем и Риттером для расчета прочности наклонных сечений [1–2]. Данный метод расчета носит название метода Риттера — Мёрша или метода «стержневой модели» или метода «ферменной аналогии». Расчетная схема, принятая в данном методе, представляет собой статически определимую ферму, верхний пояс которой воспринимает равнодействующую сжимающих напряжений (в сжатой зоне бетона), а нижний пояс воспринимает равнодействующую растягивающих напряжений, возникающих в продольной арматуре. При этом пояса фермы объединены сжатыми бетонными подкосами, выделенными по длине зоны среза соседними диагональными трещинами, а также растянутыми подкосами, которые моделируют поперечное армирование. Представление железобетонного элемента с трещинами в виде фермы с параллельными поясами основано на характерном распределении сжатых и растянутых полей напряжений, возникающих вследствие воздействия внешней нагрузки. Модель ферменной аналогии в соответствии с гипотезой плоских сечений позволяет определить сопротивление поперечной силе, полагая равномерное распределение сжимающих и растягивающих напряжений по всему конструктивному элементу. При таком подходе в рамках «ферменной аналоги» не рассматриваются части железобетонного элемента, в которых возникает неравномерное распределение напряжений вследствие геометрической или статической неоднородности. Также общепринятая модель «ферменной аналогии» не учитывает появление пластических деформаций при работе элемента с трещинами. Все эти факторы накладывают определенные ограничения на использование метода «ферменной аналогии».

Появление и последующие развитие в 30-е годы XX века теории пластичности позволило трансформировать «стержневую модель» в модель метода «Тяжи и распорки». Основные положения усовершенствованной модели применимы в первую очередь для расчета на действие поперечных сил областей железобетонного элемента с неравномерным распределением напряжений. При этом метод «тяжи и распорки» не противоречит классической модели «ферменной аналогии» и может быть применим для расчета на срез всего конструктивного элемента.

Модель метода «Тяжи и распорки» реализована во многих зарубежных нормативных документах, однако в отечественных нормах проектирования она не представлена, вследствие чего

развитие методики расчета по данной модели будет актуально для инженеров, занимающихся проектированием железобетонных конструкций промышленно-гражданского и мостового строительства.

1. Основные положения метода «Тяжи и распорки»

Расчетная модель метода «тяжи и распорки» основывается на действительной физической модели работы железобетонного элемента под внешней нагрузкой. В соответствии с данной расчетной моделью рассматриваемый элемент представляется в виде совокупности растягивающих полей напряжений, возникающих в бетоне и арматуре («тяжей») и сжимающих полей, возникающих в бетоне («распорок»), а также соединительных узлов.

Основными элементами расчетной модели являются:

1. распорки (struts) — равнодействующие сжимающих напряжений;
2. тяжи (ties) — равнодействующие растягивающих напряжений;
3. соединительные узловые элементы (nodes), являющиеся пересечением тяжей и распорок. В данных элементах происходит перераспределение напряжений.

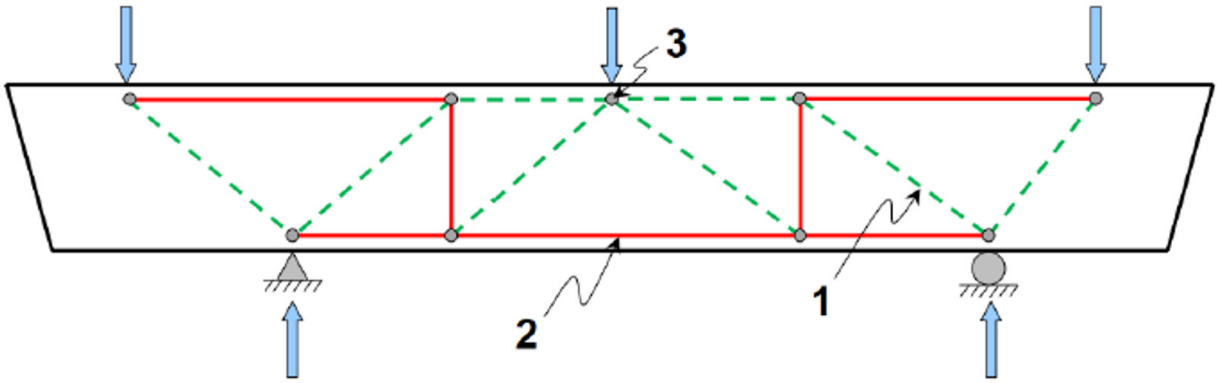


Рис. 1. Основные элементы модели метода «Тяжи и распорки»

Основные положения модели «Тяжи и распорки» базируются на следующих допущениях:

– геометрические параметры модели определяются исходя из действительной системы полей напряжений в упругой стадии работы конструктивного элемента;

– усилия в растянутых и сжатых элементах модели определяются на основании статической схемы расчета элемента

– расчет растянутых и сжатых элементов на прочность выполняется в соответствии с положениями теории пластичности.

Железобетонные элементы при расчете по методу «тяжи и распорки» разделяются на B-области (B от Бернулли), в которых напряжения распределены равномерно и используется гипотеза плоских сечений, и D-области (D от discontinuity), для которых характерно нелинейное распределение напряжений. D-области располагаются вблизи мест приложения сосредоточенных нагрузок, а также вблизи опор. Пример разделения элемента на B и D-области приведен на рис. 2.

В общем случае считается, что в элементе преобладает нелинейное распределение напряжений, если участок среза (расстояние от точки опирания до точки приложения нагрузок для простых балок) не более 2–2,5 характерных толщин элемента. Также стоит отметить, что нелинейное распределение напряжений характерно для элементов с геометрической и статической неоднородностью. Под геометрической неоднородностью понимаются отверстия в конструкции, углы, а также перепады размеров (рис. 3). Статической неоднородностью являются точки приложения внешних нагрузок и зоны опирания и т. п. Также часто встречаются элементы одновременно со статической и геометрической неоднородностями (рис. 4).

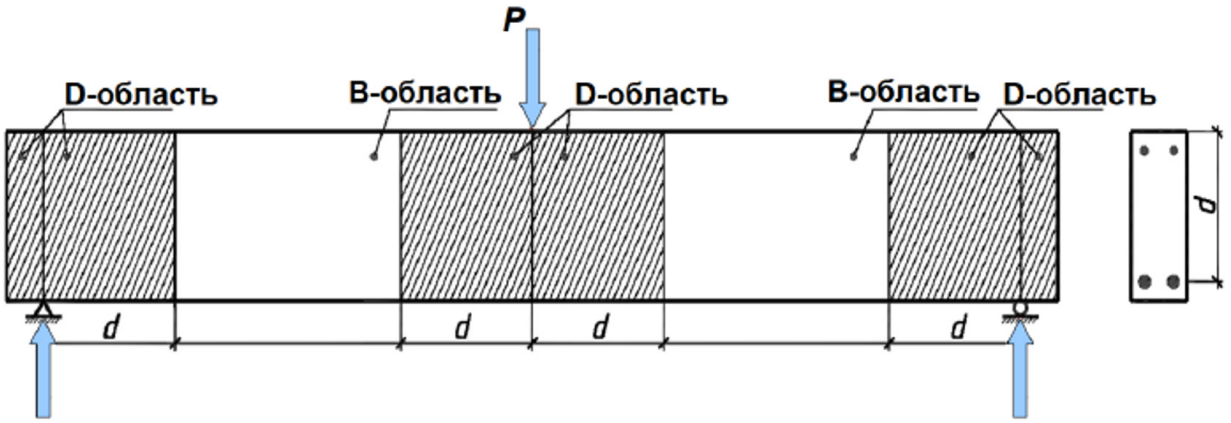


Рис. 2. Пример разделения железобетонной изгибаемой балки на B и D-области

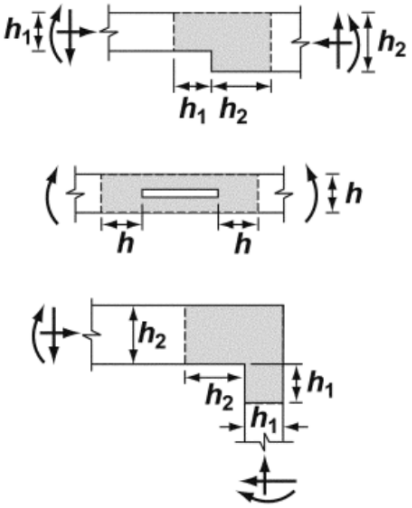


Рис. 3. Примеры геометрических неоднородностей, согласно принципу Сен-Венана

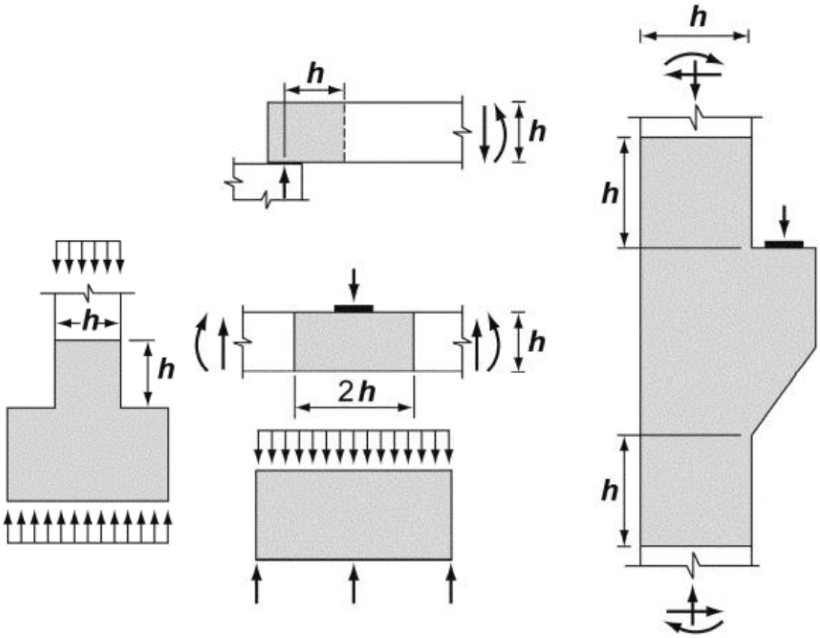


Рис. 4. Примеры совмещения статических и геометрических неоднородностей, в соответствие с принципом Сен-Венана

Стоит отметить, что в некоторых случаях вся железобетонная конструкция может представлять собой D-область. Такая ситуация характерна для коротких балок и других небольших конструктивных элементов (подферменников, опорных плит и т. д.).

2. Алгоритм расчета по методу «Тяжи и распорки»

Порядок расчета железобетонных (в т. ч. и предварительно напряженных) элементов в D-областях на основании требований зарубежных нормативных документов наглядно может быть представлен в виде блок-схемы, представленной на рис. 5.

Стоит отметить, что определение геометрических параметров модели (этап 3) выполняется на основе предварительного расчета предельной поперечной силы, при которой образуются трещины в эксплуатационный период, после чего назначается положение тяжей и распорок в первом приближении. Конструирование тяжей и распорок, а также узловых элементов выполняется на основе проверки прочности в предельной стадии работы соответствующего элемента, после чего при необходимости производится корректировка первоначальной расчетной модели.

Рис. 5. Блок-схема выполнения расчета по методу «Тяжи и распорки»

Анализируя действующие зарубежные нормативные документы, можно сделать вывод о том, что общая концепция модели метода «Тяжи и распорки» в целом соответствует алгоритму в представленной выше блок-схеме. Однако на отдельных этапах существуют значительные расхождения, которые говорят об отсутствии единого подхода к процессу расчета.

2.1. Разработка модели «Тяжи и распорки»

Определение геометрических параметров расчетной модели является самым важным этапом расчета, от которого зависит достоверность и длительность его проведения. На рис. 6 представлена модель метода «Тяжи и распорки» для однопролетной шарнирно опертой балки, загруженной сосредоточенной силой в середине пролета.

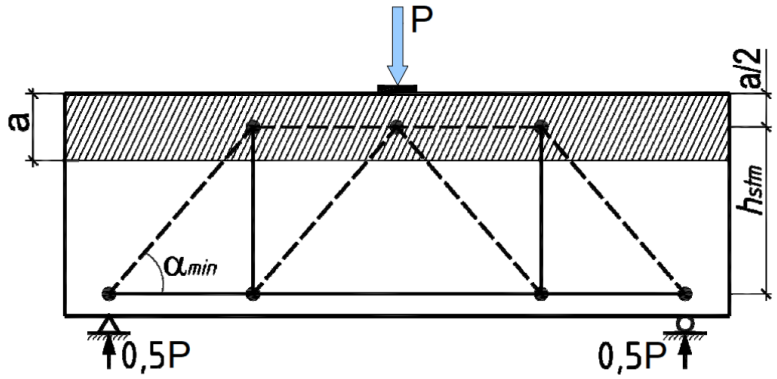


Рис. 6. Пример построения расчетной модели метода «Тяжи и распорки»

Построение расчетной модели обычно осуществляется следующими способами, выбор которого зависит от варианта загружения и сложности модели:

1. С использованием принципа «траектории эффекта нагрузки», который учитывает места расположения сосредоточенных сил и опорных реакций;
2. На основании характерной схемы образования трещин;

3. С помощью расчета в любом программно-вычислительном комплексе на основе метода конечных элементов, который позволяет наглядно показать систему сжатых и растянутых полей в условиях конкретного нагружения модели.

Вне зависимости от выбранного способа построения расчетной модели должны соблюдаться следующие требования:

1. Распорки представляют собой равнодействующие полей сжимающих напряжений, а тяжи — равнодействующие растягивающих напряжений;

2. Тяжи расположены в центре тяжести растянутой арматуры;

3. Минимально допустимый угол между наклонными распорками и тяжами должен составлять 25°. Данное требование имеется только в нормативных документах США и введено для недопущения значительных напряжений в арматуры и сдерживания развития диагональных трещин;

4. Количество и длина вертикальных тяжей должно быть минимальным;

5. Расположение и направление тяжей и распорок должны быть ориентированы в соответствии с линейной теорией упругости;

6. Призматическая распорка должна быть расположена в середине высоты сжатой зоны;

7. Созданная расчетная модель должна находиться в равновесии.

Необходимо также отметить тот факт, что для конкретной схемы нагружения и геометрических характеристик элемента может быть получено несколько разных расчетных моделей. Для уточнения расположения тяжей и распорок в расчетной модели рекомендуется применять любой программно-вычислительный комплекс на основе метода конечных элементов.

2.2. Конструирование и расчет тяжей и распорок

При конструировании и расчете сопротивления растянутых тяжей в расчетной модели метода необходимо руководствоваться требованиями, которые изложены в американских нормативных документах [5]. В большинстве случаев расположение тяжей совпадает с центром тяжести растянутой арматуры, именно поэтому конструирование и расчет сопротивления тяжей является наименее спорным вопросом в модели «Тяжи и распорки». На рис. 7, 8 представлены пример расположения растянутых тяжей в расчетной модели.

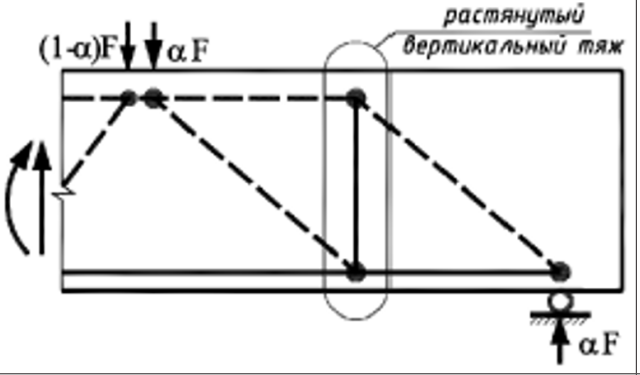


Рис. 7. Пример расположения вертикального тяжа в расчетной модели

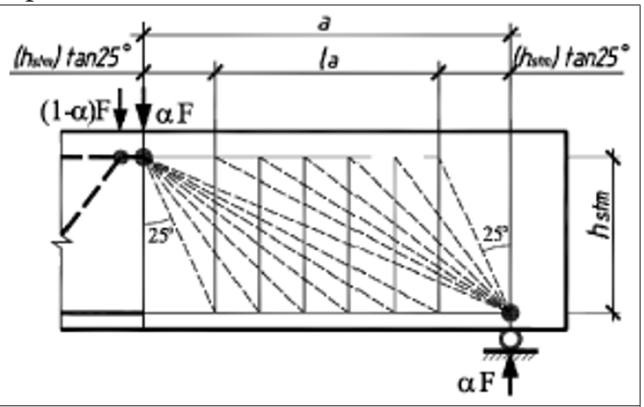


Рис. 8. Расположение стержней поперечной арматуры в элементе

Согласно требованиям ACI сопротивление осевому растяжению для тяжей определяется из следующего выражения:

$$F_{nt} = f_y \cdot A_{ts} + A_{tp} \cdot (f_{se} + \Delta f_p). \quad (1)$$

Похожая по физическому смыслу формула приведена в швейцарских нормативных документах:

$$F_{td} = f_{yd} \cdot A_s + A_p \cdot (f_{pd} - \sigma_{p0}). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2) первое слагаемое — это произведение площади поперечного сечения ненапрягаемой арматуры на пределе текучести, а второе слагаемое — аналогичное произведение для напрягаемой арматуры с учетом потерь и различных корректировок, принятых в соответствующих нормах проектирования.

В общем случае предельное усилие в сжатой распорке определяется из выражения:

$$F_{u,str} = f_{\max,strut} \cdot A_{c,strut}, \quad (3)$$

где $f_{\max,strut}$ — предельное напряжение сжатой бетонной распорки, определяемое по-разному в зависимости от требований соответствующего нормативного документа, $A_{c,strut}$ — площадь поперечного сечения бетона распорки.

2.3. Конструирование и проверка прочности узловых элементов

В узловых элементах модели, являющимися точками пересечения тяжей и распорок, происходит перераспределение напряжений между элементами модели, в результате которого вся система находится в равновесии. В связи с тем, что данное перераспределение происходит в достаточно ограниченной области, в пределах узловых элементов возникают значительные напряжения.

В зависимости от типов структурных элементов, которые сходятся в узлах модели (сжатые распорки (C — compression), растянутые тяжи (T — tension)), согласно требованиям зарубежных норм выделяют четыре вида узловых элементов (рис. 9):

1. узел CCC, который образован только сжатыми распорками;

2. узел CCT, в котором сходятся сжатые распорки и растянутый тяж, ориентированный в одном направлении;

3. узел CTT, в котором сходятся сжатая распорка и растянутые тяжи, ориентированные в двух направлениях;

4. узел TTT, который образован только растянутыми тяжами. В связи с тем, что данный узел практически не встречается, требований к его расчету в нормативных документах не представлено.

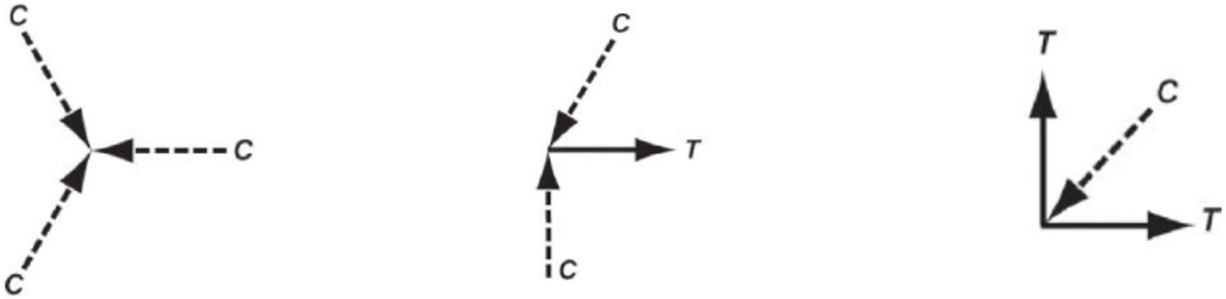


Рис. 9. Типы узлов модели метода

Конструирование всех типов узлов модели «Тяжи и распорки» должно выполняться в соответствии с требованиями следующих правил:

1. Каждый узловой элемент ограничен тремя поверхностями, по которым действуют напряжения;

2. Усилия, которые возникают на каждой поверхности, должны быть направлены перпендикулярно рассматриваемой поверхности по линии, проходящей через центр ее тяжести;

3. В узле должно сходиться не более трех структурных элементов;

4. При конструировании узла типа CCC допускается рассматривать отдельно правая и левая части (для упрощения расчета)

5. Несущая способность узловых элементов должна быть достаточной, чтобы воспринимать возникающие в них напряжения без разрушения бетона.

Предельное усилие, воспринимаемое поверхностью узла, определяется из соотношения:

$$F_{u,node} = f_{\max,node} \cdot A_{c,node}, \quad (4)$$

где $f_{\max,node}$ — предельное сжимающее напряжение, возникающее на поверхности узла, $A_{c,node}$ — площадь поперечного сечения бетона узловой поверхности.

Стоит отметить тот факт, что подходы к определению величины предельных напряжений в разных зарубежных нормативных документах существенно отличаются.

2.4. Назначение армирования для обеспечения требований трещиностойкости

Конструирование армирования для ограничения ширины раскрытия трещин при воздействии эксплуатационных нагрузок регламентируется только нормативными документами США. Минимальный процент армирования для стержней, расположенных в вертикальном и горизонтальном направлении, определяется из соотношения:

$$p_{sv} = \frac{A_v}{b_w \cdot s_v} \geq 0.003; \;\; p_{sh} = \frac{A_h}{b_w \cdot s_h} \geq 0.003; \quad (5)$$

где A_v, A_h — площадь поперечного сечения ограничивающей арматуры в вертикальном и горизонтальном направлении;

s_v, s_h — шаг ограничивающей арматуры в вертикальном и горизонтальном направлении, при этом $s_v, s_h \leq d/4$ или 12 дюймов;

b_w — ширина поперечного сечения конструктивного элемента.

2.5. Обеспечение требований анкеровки продольной арматуры

Выполнение данного требования проверяется в завершении алгоритма расчета железобетонных элементов по методу «Тяжи и распорки». Стоит отметить, что перераспределение напряжений в узловых элементах и реализация модели метода в целом возможно лишь при выполнения данных требований. Помимо этого, проверка прочности структурных элементов модели выполняется с учетом обеспеченности длины анкеровки продольной арматуры. Именно поэтому данных этап является одним из ключевых.

Согласно американским требованиями AASHTO, критическое сечение для определения длины анкеровки продольной арматуры в узловом элементе определяется в соответствии с рис. 10. Практические идентичные рекомендации изложены в ACI (рис. 11). В швейцарских нормативных документах существует единственное указание о том, что длина анкеровки должна соответствовать длине узла.

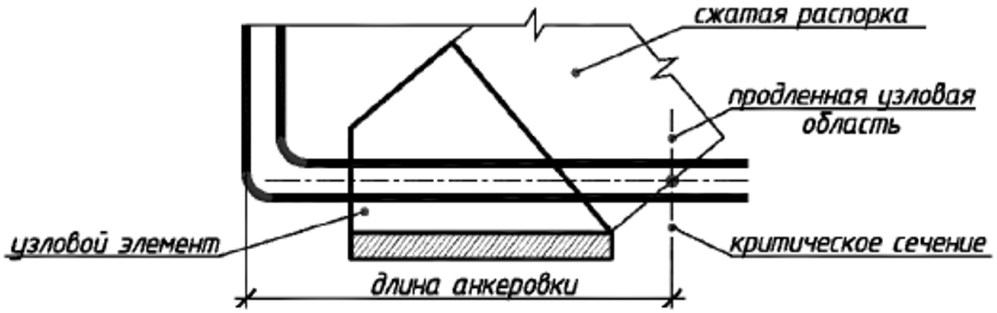


Рис. 10. Определение длины анкеровки арматуры согласно AASHTO

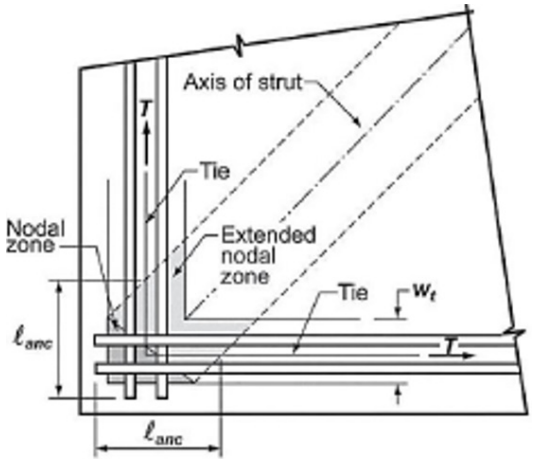


Рис. 11. Определение длины анкеровки арматуры согласно AASHTO

Заключение

На основании проведения анализа зарубежных нормативных документов, а также результатов численных расчетов и экспериментальных исследований по модели «Тяжи и распорки» можно сделать следующие выводы:

1. Модель «Тяжи и распорки» получила широкое распространение в зарубежной практике проектирования для расчета новых и существующих железобетонных (в т.ч. и преднапряженных) элементов по первой группе предельных состояний.

2. Рассматриваемая модель, несмотря на кажущуюся длительность итерационных процедур по ее созданию, в доступной форме позволяет представить сложную работу железобетонных элементов под внешней нагрузкой в виде системы центрально сжатых и центрально растянутых элементов.

3. Расчет с применением модели «Тяжи и распорки» позволяет определить сопротивление тех областей железобетонных элементов, где сосредоточенное действие внешней нагрузки оказывает существенное влияние на прочность элемента в целом. При этом концепция модели не противоречит требованиям классической модели ферменной аналогии и может быть принята для расчета всего элемента.

4. Практический опыт применения рассматриваемого метода свидетельствует о рациональной концепции модели и позволяет адаптировать его к требованиям отечественных норм проектирования. При этом возникает необходимость проведения экспериментальных исследований моделей железобетонных конструкций сложной формы (балок малых пролетов, балок-стенок, подферменников, ростверков, ригелей и т. д.), получивших широкое распространение в строительной отрасли нашей страны в настоящее время.

Литература

1. *Ritter W.* Die Bauweise Hennebique / W. Ritter // Schweizerische Bauzeitung. – 1899. – V. 33, № 7. – P. 59–61.

2. *Mörsch E.* Concrete-Steel Construction / E. Mörsch // McGraw-Hill (English translation by E. P. Goodrich). – New York, 1909.

3. ACI (American Concrete Institute) Committee 318. 2011. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318 – 11) and Commentary. – Farmington Hills, MI: ACI.

4. ACI (American Concrete Institute) Committee 318. 2014. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318 – 14) and Commentary (ACI 318R-14). – Farmington Hills, MI: ACI.

5. ACI (American Concrete Institute) Committee 318. 2019. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318 – 19) and Commentary (ACI 318R-19). – Farmington Hills, MI: ACI.

6. AASHTO LRFD Bridge Design Specifications. – 6th Edition. – Washington, 2012.

7. AASHTO LRFD Bridge Design Specifications. – 8th Edition. – Washington, September 2017.

8. fib Model Code 2010, Vol.1. – Federal Institute of Technology Lausanne – EPFL, Lausanne, March 2010.

9. Design of Concrete Structures. Part 1-1: General rules, rules for buildings, bridges and civil engineering structures: prEN 1992-1-1:2018 (Eurocode 2). – Brussel: European Committee for Standardization, April 2018. – 293 p.

10. Design of Concrete Structures. General Rules and Rules for Buildings: EN 1992-1: 2001 (Eurocode 2)/ Brussel: European Committee for Standardization, Introduced October 2001 – 230 p.

11. *Санникова О. Г.* Основные положения модели «Распорки и тяжи» для определения сопротивления срезу железобетонных элементов // Вестник Полоцкого государственного технического университета. – 2018. – № 16. – С. 19–29.

УДК 539.3

МЕТОДИКА ПРОВЕРКИ ДОСТОВЕРНОСТИ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ, УЧИТЫВАЮЩЕГО ДИЛАТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

В. В. Козлов[1], А. А. Маркин[1], А. В. Филатова[2]

[1]Тульский государственный университет
[2]ООО «Фидесис»

Аннотация. Рассмотрен класс определяющих соотношений нелинейно-упругих изотропных материалов, построенных в рамках частного постулата изотропии Ильюшина. Связи между напряжениями и деформациями представлены зависимостью тензора напряжений от тензора деформаций Генки. Рассмотрено определяющее соотношение, содержащее пять материальных констант, учитывающее дилатационные эффекты. Предложен подход проверки его достоверности на основе сравнения экспериментальной зависимости окружных удлинений внешней поверхности толстостенной трубы от внутреннего давления (задача Ламе) с соответствующей теоретической зависимостью. Приведенная методика может быть распространена на различные определяющие соотношения нелинейно-упругих материалов.
Ключевые слова: нелинейно-упругие материалы, частный постулат изотропии, проверка достоверности определяющих соотношений, задача Ламе.

Введение

Разработка и проверка достоверности определяющих соотношений нелинейно-упругих материалов является актуальной задачей вследствие не единственности её решения [1, 2], в отличие от линейной теории упругости, а также ввиду значительного числа различных эффектов, демонстрируемых нелинейно-упругими телами в процессе их эксплуатации [3, 4].

В работе рассмотрен класс определяющих соотношений нелинейной теории упругости, построенных в рамках частного постулата изотропии Ильюшина. Удельная свободная энергия представляется функцией естественных инвариантов «левого» тензора Генки [6–8]. Первые два естественных инварианта «левого» тензора Генки сохраняют для конечных деформаций наглядный смысл, что позволяет учитывать различные механические эффекты [9, 10]. Это свойство отличает подобные определяющие соотношения от форм связей между напряжениями и деформациями, построенных представлением свободной энергии функцией алгебраических инвариантов тензора деформаций Коши — Грина [11].

В качестве примера рассмотрено пятиконстантное соотношение, приведенное в статье [12]. В данной работе предложена методика проверки достоверности этого соотношения на основе решения задачи Ламе для трубы и сравнения полученных результатов с соответствующими экспериментальными зависимостями.

1. Определяющее соотношение

Определяющие соотношения нелинейной теории упругости строятся из основного термомеханического тождества [13]

$$d\psi + \eta dT - d'A^{(e)} \equiv 0, \tag{1}$$

где ψ — удельная свободная энергия, η — удельная энтропия, T — температура, $d'A^{(e)}$ — элементарная работа внешних сил.

Известно [13], что элементарная работа внешних сил определяется несколькими способами с помощью энергетически-сопряженных пар мер напряжений и деформаций. Выберем в качестве составляющей меры деформаций такой пары «левый» тензор деформаций Генки $\underset{\sim}{\Gamma}$ [13], выражаемый из полярного разложения аффинора деформации [14] $\underset{\sim}{\Phi}$

$$\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{R}, \tag{2}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma} = \ln \underset{\sim}{U}, \tag{3}$$

где $\underset{\sim}{U}$ — симметричная левая мера искажения, $\underset{\sim}{R}$ — ортогональный тензор поворота.

Тогда элементарная работа внешних сил определяется формулой

$$d'A^{(e)} = \underset{\sim}{\sigma}_R \cdot\cdot d^t\underset{\sim}{\Gamma}. \tag{4}$$

Здесь $\underset{\sim}{\sigma}_R$ — повернутый обобщенный тензор напряжений Коши, связанный с тензором истинных напряжений Коши $\underset{\sim}{S}$ соотношением [13]

$$\underset{\sim}{S} = \sqrt{\frac{g}{G}}\, \underset{\sim}{R}^{-1} \cdot \underset{\sim}{\sigma}_R \cdot \underset{\sim}{R}, \tag{5}$$

где g, G — третьи алгебраические инварианты метрического тензора и меры Коши — Грина $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{\Phi} \cdot \underset{\sim}{\Phi}^T$ соответственно.

Рассмотрим в рамках частного постулата изотропии зависимость свободной энергии от первых двух естественных инвариантов θ_Γ, e_Γ «левого» тензора Генки (3) и температуры T:

$$\psi = \psi\left(\theta_\Gamma, e_\Gamma, T\right), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_\Gamma &= \underset{\sim}{\Gamma} \cdot\cdot \underset{\sim}{E}, \\ e_\Gamma^2 &= \left(\underset{\sim}{\Gamma} - \frac{\theta_\Gamma}{3}\underset{\sim}{E}\right) \cdot\cdot \left(\underset{\sim}{\Gamma} - \frac{\theta_\Gamma}{3}\underset{\sim}{E}\right) = \tilde{\Gamma} \cdot\cdot \tilde{\Gamma}. \end{aligned} \tag{7}$$

Свободная энергия в виде (6) позволяет выделить ряд механических эффектов, так как θ, e_Γ описывают изменение объема и формы соответственно.

Используя (4), (6) в законе (1), из [11] следует определяющее соотношение для изотермических процессов

$$\underset{\sim}{\sigma}_R = \tilde{\sigma}_R + \sigma_0 \underset{\sim}{E} = \frac{\tilde{\Gamma}}{e_\Gamma}\frac{\partial \psi}{\partial e_\Gamma} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta_\Gamma}\underset{\sim}{E}. \tag{8}$$

В [12] предложено обобщение закона Гука вида (8), учитывающего дилатационные эффекты:

$$\underset{\sim}{\sigma}_R = \tilde{\sigma}_R + \sigma_0 \underset{\sim}{E} = \left(2G + Ae_\Gamma + 2B\theta_\Gamma\right)\tilde{\Gamma} + \left(K\theta_\Gamma + C\theta_\Gamma^2 + Be_\Gamma^2\right)\underset{\sim}{E}. \tag{9}$$

Здесь константы G, K — модуль сдвига, модуль объемного сжатия соответственно, A, B, C — константы упругости третьего порядка. Возникает вопрос каким образом конкретизировать величины этих констант для исследуемого материала и насколько достоверно описывает данное соотношение поведение материала при произвольном деформировании.

2. Постановка задачи Ламе

Допустим, что материальные константы определены и установлен их физический смысл. Убедимся в достоверности описания поведения материала соотношением (9), рассмотрев задачу Ламе для полого цилиндра в нелинейной постановке — рис. 1. Пусть в цилиндрической системе координат (ось Oz совпадает с соответствующей осью, координаты точек в недеформированном состоянии (ρ, θ, z_0), в деформированном (r, φ, z)) задан цилиндр $R1 \le \rho \le R2$, $-h/2 \le z_0 \le h/2$. На поверхность $\rho = R1$ действует внутреннее давление p, внешняя поверхность свободна от нагрузок. Предполагается плоско-деформированное состояние.

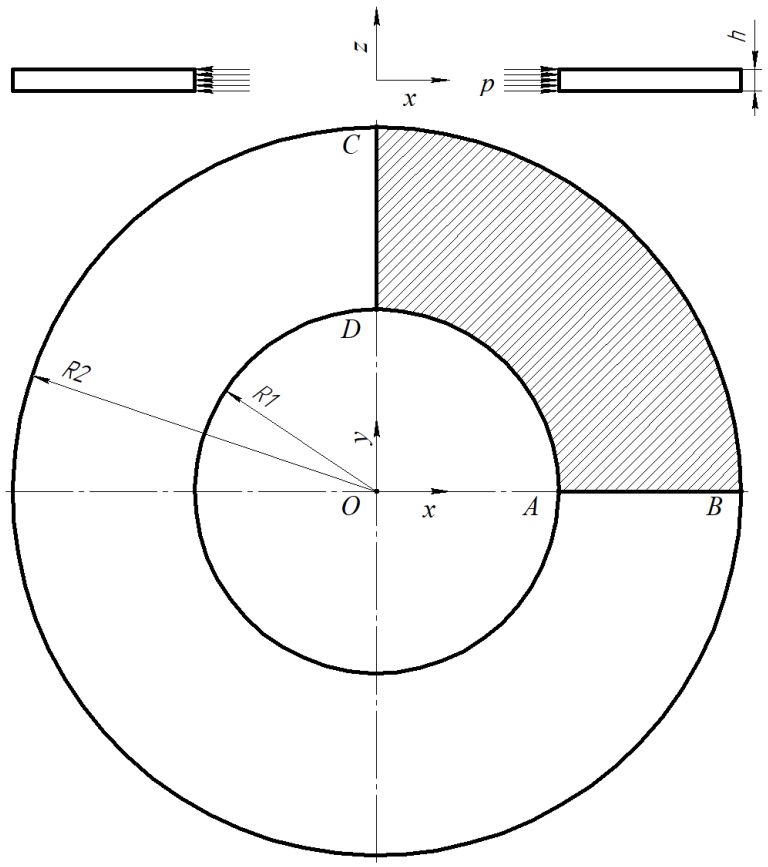


Рис. 1. Схема модели

Запишем связь между координатами в начальном и деформированном состояниях

$$r = r(\rho), \varphi = \theta, z = z_0. \tag{10}$$

Выражение (10) позволяет представить радиус-вектор положения точки в деформированном состоянии

$$\vec{x} = r(\rho)\vec{e}_\rho + z_0\vec{e}_{z_0}, \tag{11}$$

где $\vec{e}_\rho, \vec{e}_{z_0}$ — соответствующие базисные векторы цилиндрической системы координат.

С учётом определения в цилиндрической системе координат оператора Гамильтона $\overset{\circ}{\vec{\nabla}} = \vec{e}_\rho \dfrac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\theta \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_{z_0}\dfrac{\partial}{\partial z_0}$ определим аффинор деформаций используя (11):

$$\underset{\sim}{\Phi} = \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{x} = r'\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \frac{r}{\rho}\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta}\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta} + \vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0} = \lambda_\rho(\rho)\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \lambda_\theta(\rho)\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta + \vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}. \tag{12}$$

Из определения полярного разложения (2) следует, что аффинор деформации (12) совпадает с левой мерой искажения $\underset{\sim}{U}$, в то время как тензор поворота $\underset{\sim}{R}$ является единичным. $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_{z_0}$ образуют ортонормированную тройку векторов, поэтому

$$\underset{\sim}{\Gamma} = \ln\underset{\sim}{U} = \ln\lambda_\rho(\rho)\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \ln\lambda_\theta(\rho)\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta. \tag{13}$$

Используя определение (7) и конкретизированный вид (13), найдем

$$\theta_\Gamma(\rho) = \underset{\sim}{\Gamma}\cdot\cdot\underset{\sim}{E} = \ln\lambda_\rho\lambda_\theta, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= \ln\sqrt[3]{\frac{\lambda_\rho^2(\rho)}{\lambda_\theta(\rho)}}\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \ln\sqrt[3]{\frac{\lambda_\theta^2(\rho)}{\lambda_\rho(\rho)}}\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta - \ln\sqrt[3]{\lambda_\rho(\rho)\lambda_\theta(\rho)}\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0} = \\ &= \tilde{\Gamma}_{\rho\rho}(\rho)\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho + \tilde{\Gamma}_{\theta\theta}(\rho)\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta + \tilde{\Gamma}_{z_0z_0}(\rho)\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0},\end{aligned} \tag{15}$$

$$e_{\Gamma}^2(\rho)=\ln^2\sqrt[3]{\frac{\lambda_\rho^2(\rho)}{\lambda_\theta(\rho)}}+\ln^2\sqrt[3]{\frac{\lambda_\theta^2(\rho)}{\lambda_\rho(\rho)}}+\ln^2\sqrt[3]{\lambda_\rho(\rho)\lambda_\theta(\rho)}. \tag{16}$$

Используя (14)–(16), запишем тензор $\underset{\sim}{\sigma}_R$ (9):

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\sigma}_R=&\left[2G+A_1e_{\Gamma}(\rho)+2B_0\theta_{\Gamma}(\rho)\right]\left(\tilde{\Gamma}_{\rho\rho}(\rho)\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho+\tilde{\Gamma}_{\theta\theta}(\rho)\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta+\tilde{\Gamma}_{z_0z_0}(\rho)\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}\right)+\\&+\left[K\theta_{\Gamma}(\rho)+C_1\theta_{\Gamma}^2(\rho)+B_0e_{\Gamma}^2(\rho)\right]\left(\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho+\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta+\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}\right)=\\&=\sigma_{R_{\rho\rho}}(\rho)\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho+\sigma_{R_{\theta\theta}}(\rho)\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta+\sigma_{R_{z_0z_0}}(\rho)\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}.\end{aligned} \tag{17}$$

Тензор истинных напряжений Коши находим с помощью (5):

$$\underset{\sim}{S}=\frac{1}{\lambda_\rho\lambda_\theta}\underset{\sim}{\sigma}_R=s_{\rho\rho}\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho+s_{\theta\theta}\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta+s_{z_0z_0}\vec{e}_{z_0}\vec{e}_{z_0}. \tag{18}$$

Распределение напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия [15]

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{S}=\vec{0}. \tag{19}$$

Учитывая следующую из (14)–(18) зависимость компонент тензора истинных напряжений Коши только от радиальной координаты, (19) сводится к единственному уравнению в координатной форме, которое не удовлетворяется тождественно:

$$\frac{1}{r'}\frac{ds_{\rho\rho}}{d\rho}+\frac{s_{\rho\rho}-s_{\theta\theta}}{r}=0. \tag{20}$$

Уравнение (20) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции перемещения $r(\rho)$. Вместе с граничными условиями

$$s_{\rho\rho}\Big|_{\rho=R1}=-p,\ s_{\rho\rho}\Big|_{\rho=R2}=0$$

и уравнениями (17), (18) получаем постановку задачи для определения закона движения (10).

3. Проверка достоверности определяющего соотношения.

Представленная постановка задачи Ламе сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно функции радиальных перемещений. Пусть в рамках некоторой методики найдены значения констант определяющего соотношения (9) для выбранного материала *Material*. Тогда, решив представленную задачу Ламе с материальными константами, соответствующими *Material*, получаем теоретическую оценку напряженно-деформированного состояния в трубе, в том числе зависимость удлинения окружных материальных волокон, достигаемого на внешней поверхности трубы, от приложенного давления p на внутренней поверхности трубы — $\lambda_\theta^{theory}\Big|_{\rho=R2}(p)$. Согласно определению (12), данную зависимость можно наблюдать в соответствующем эксперименте — $\lambda_\theta^{e}\Big|_{\rho=R2}(p)$. Сформируем функцию относительной погрешности

$$f(p)=\left|\frac{\lambda_\theta^{e}\Big|_{\rho=R2}(p)-\lambda_\theta^{theory}\Big|_{\rho=R2}(p)}{\lambda_\theta^{e}\Big|_{\rho=R2}(p)}\right|,\ p>0.$$

Если значения данной функции не превышают инженерной погрешности, определяющее соотношение корректно описывает поведение материала.

Заключение

Сформулирована постановка задачи Ламе для нелинейно-упругого материала в рамках частного постулата изотропии, учитывающая дилатационные эффекты. Предложена методи-

ка проверки достоверности рассматриваемого определяющего соотношения с помощью решения данной задачи и сравнения с экспериментальными данными.

Благодарности

Исследование выполнено в Тульском государственном университете при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 512 с.

2. *Трелоар Л.* Физика упругости каучука / Л. Трелоар. – Москва : Иноиздат, 1953. – 346 с.

3. *Матченко Н. М.* Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – Тула : Издательство ТулГУ, 2000. – 149 с.

4. *Солодовников В. Н.* Определяющие уравнения изотропного гиперупругого тела / В. Н. Солодовников // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т. 41, № 3. – С. 178–183.

5. *Muravlev A. V.* On a representation of an elastic potential in A. A. Il'yushin's generalized strain space / A. V. Muravlev // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 1. – P. 77–79.

6. *Kakavas P. A.* A new development of the strain energy function for hyperelastic materials using a logarithmic strain approach / P. A. Kakavas // Journal of Applied Polymer Science. – 2000. – Vol. 77, № 3. – P. 660 – 672.

7. *Montella G.* The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations / G. Montella, S. Govindjee, P. Neff // Journal of Engineering Materials and Technology, Transaction of the ASME. – 2015.

8. *Latorre M.* On the interpretation of the logarithmic strain tensor in an arbitrary system of representation / M. Latorre, F. J. Montans // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Vol. 51. – P. 1507–1515.

9. *Толоконников Л. А.* Вариант соотношений разномодульной теории упругости / Л. А. Толоконников // Прочность и пластичность. – Москва: Наука. – 1971. – С. 102–104.

10. *Маркин А. А.* Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова // Прикладная математика и ме-ханика. – 2007. – Т. 71, Вып. 4. – С. 587–594.

11. *Козлов В. В.* Анализ определяющих соотношений изотропных нелинейно-упругих сжимаемых материалов / В. В. Козлов, А. А. Маркин // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2014. – Вып. 1, Ч.1. – С. 133–143.

12. *Толоконников Л. А.* Определяющие соотношения при конечных деформациях / Л. А. Толоконников, А. А. Маркин // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Межвузов. сб. трудов. – Калинин: Калинин. политех. ин-т: Издательство КГУ. – 1986. – С. 49–57.

13. *Маркин А. А.* Нелинейная теория упругости: учеб. пособие / А. А. Маркин, Д. В. Христич. – 2-е изд., доп. – Тула : Издательство ТулГУ, 2007. – 92 с.

14. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. В 2 т. Т. 2 / Л. И. Седов. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1970. – 568 с.

15. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды: Учебник / А. А. Ильюшин. – 3-е изд. – Москва : Издательство МГУ, 1990. – 310 с.

УДК 620.179.162

АНИЗОТРОПИЯ СКОРОСТЕЙ УПРУГИХ ВОЛН ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ АЛЮМИНИЯ

Д. Б. Куатхина, Д. А. Третьяков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация. Работа посвящена экспериментальному исследованию зависимости скоростей объемных продольных и поперечных волн от деформаций при одноосном упруго-пластическом деформировании корсетных образцов из алюминиевого проката. Установлено, что изменение скоростей упругих волн разного типа демонстрирует похожее поведение с наступлением различных стадий пластической деформации – упрочнением, образованием шейки и разрушением. Для большинства этапов нагружения по результатам ультразвуковой диагностики удается однозначным образом установить текущую величину деформаций материала. Это позволяет использовать результаты экспериментов в акустической тензометрии металлов.

Ключевые слова: ультразвуковой контроль, продольные и поперечные волны, пластическая деформация, разрушение, эхо-импульсный метод.

Введение

Данные о распространении упругих волн в твердом теле позволяют охарактеризовать его текущее состояние и предсказать механическое поведение в процессе нагружения и деформации. Информация о величине скоростей волн Рэлея и Лэмба используется при акустической тензометрии [1] и исследовании текстуры металлического проката [2]. Измерения разности скоростей поперечных волн взаимно ортогональной поляризации лежит в основе метода акустоупругости [3] и его модификаций — акустопластичности [4] и акустоповрежденности [5]. Они используются для количественной оценки мер поврежденности материала как в скалярных [6, 7], так и в тензорных моделях механики [8, 9]. Комбинированное использование головных волн позволяет увеличить точность результатов неразрушающего контроля при наличии температурных напряжений и деформаций [10].

В линейной теории упругости скорости акустических волн в среде являются постоянными, поскольку описываются через константы упругости материала. Это предположение не позволяет описать ряд экспериментальных явлений, к числу которых относится акустоупругий эффект [11]. Он заключается в существовании связи между напряженно-деформированным состоянием и скоростями распространения волн в твердом теле [12]. Разработанные в 1950–1980-х гг. модели, описывающие акустоупругий эффект (модели акустоупругости), основаны на использовании соотношений нелинейно-упругого материала Мурнагана [13], с помощью которых удалось получить зависимости скоростей волн от деформаций как эффект второго порядка [14]. Они дают на порядок меньшие расчетные значения величины акустоупругого эффекта по сравнению с наблюдаемыми в опытах [15]. Кроме того, данные модели ограничиваются случаем упругих [16] или малых упруго-пластических деформаций среды [17], что ограничивает область применения акустоупругости и акустической тензометрии.

В целом ряде работ отмечается, что скорости волн с ростом деформаций демонстрируют более сложное нелинейное поведение, нежели считалось ранее [18, 19]. В частности, наблюдается связь между скоростями волн Релея и стадиями пластического деформирования [20]. Данная работа посвящена исследованию характера изменения скоростей объемных продольных и поперечных волн при больших упруго-пластических деформациях алюминиевых образцов под нагрузкой.

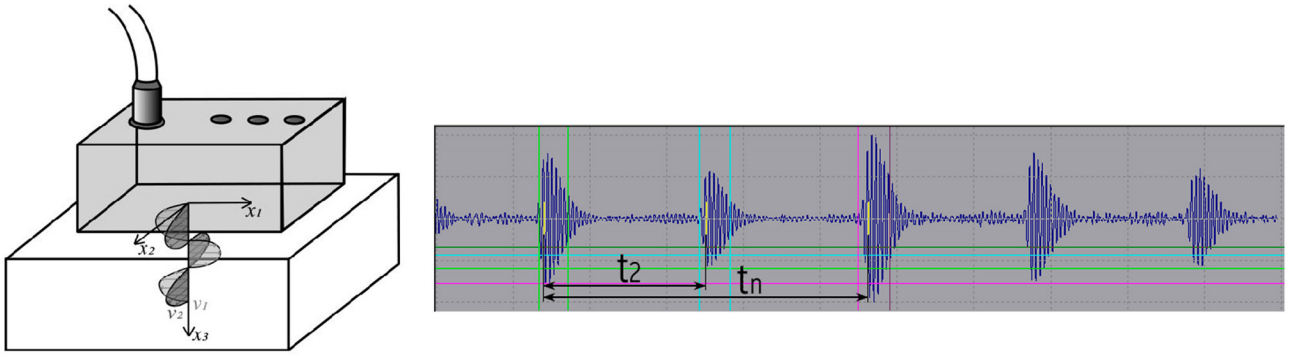
1. Экспериментальные методы и подходы

1.1. Измерение ультразвуковых волн в образце под нагрузкой

В качестве образца была выбрана заготовка из малолегированного алюминиевого сплава АМц, вырезанная поперёк направления проката. Образец имел форму двусторонней лопатки и обладал общей длиной 500 мм, длиной рабочей зоны 270 мм, шириной рабочей зоны 70 мм и толщиной 16 мм.

Образец был испытан на одноосное монотонное растяжение в гидравлической разрывной машине INSTRON-8806. Всего было проведено 20 этапов нагружения. Предел текучести образца составил $\sigma_T = 75$ МПа, полная осевая деформация вплоть до разрушения составила $\varepsilon = 27{,}8\,\%$.

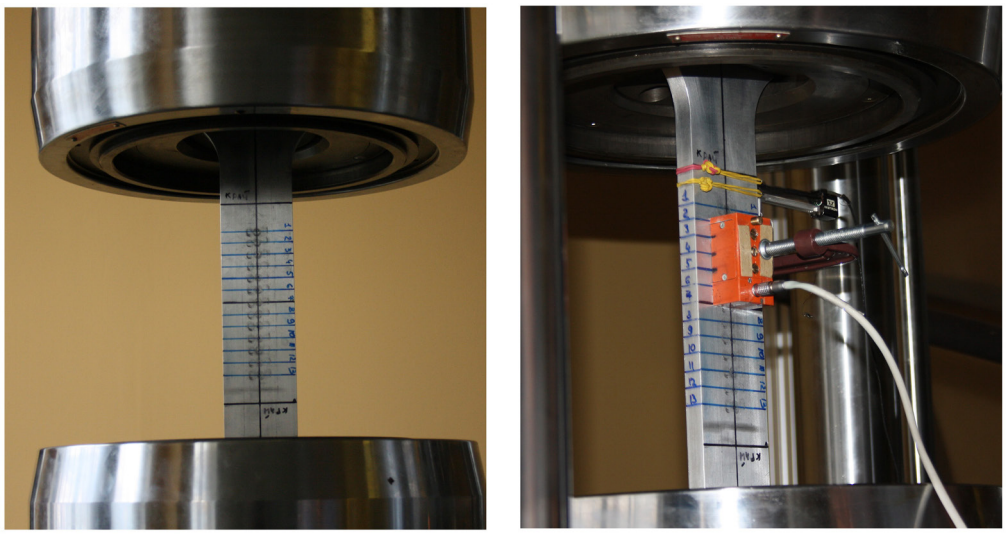
Для акустических измерений использовался трехканальный ультразвуковой прибор ИН-5101А. Прибор реализует эхо-импульсный метод неразрушающего контроля путем генерации плоских поперечных волн V_1, V_2 взаимно ортогональной поляризации и продольной волны V_3. Схема ориентации плоскостей распространения волн показана на рис. 1а.



а *б*

Рис. 1. Акустические измерения: (а) ориентация поперечных (V_1, V_2) и продольных (V_3) волн при одноосном растяжении; (б) определение временных задержек t_2 и t_n между импульсами

На каждом этапе в 10 точках, выбранных в рабочей части образца, фиксировались значения временных задержек t_2 (между 1-м и 2-м отраженными импульсами) и t_n между n отра-



а *б*

Рис. 2. Механические испытания: (а) одноосное растяжение образца; (б) ультразвуковые измерения в образце под нагрузкой

жёнными волновыми пакетами. Согласно техническому описанию прибора, выбирался $n = 3$ волновой пакет. Пример выбора временных задержек между многократно отраженными импульсами представлен на рис.1б. Точки располагались на центральной продольной оси образца на расстоянии 13 мм друг от друга. Измерения проводились под нагрузкой при остановках испытательной машины (рис. 2б) и фиксированных значениях полных осевых деформаций. С помощью микрометра МК 0-25 мм с точностью 0,01мм были получены значения толщины образца в направлении распространения волн для дальнейшего определения фазовых скоростей. В ходе опытов реализовывалось жесткое ступенчатое нагружение образца (рис. 2а).

1.3. Обработка данных ультразвуковых измерений

На каждом этапе нагружения была выполнена проверка (1) на предмет корректного определения границ временных задержек между импульсами по синфазным точкам:

$$\Delta t_{ij} = \left| t_{n\,ij} - t_{ij}^{*} \right| < 0,1...0,4, \tag{1}$$

где время $t_{ij}^{*} = 2 \cdot t_{2\,ij}$, i — номер этапа, j — номер точки.

Далее было вычислено усреднённое значение временной задержки $\overline{t}_{ij}$ (*мкс*) для каждой точки на каждом этапе (2):

$$\overline{t}_{ij} = \frac{t_{n\,ij}}{2}. \tag{2}$$

Затем через скорости распространения волн была вычислена толщина образца $h_{\text{выч}\,ij}$ (*мм*) для каждого этапа нагружения (3):

$$h_{\text{выч}\,ij} = V_{ki} \cdot \frac{\overline{t}_{ij}}{2} \cdot 10^{9}, \tag{3}$$

где V_{ki} — фазовая скорость волны (м/с), $k = 1,2,3$ — обозначение (номер) волны.

Скорости V_{ki} были приняты постоянными в рамках одного этапа. Значения скоростей V_{ki} были подобраны таким образом, чтобы вычисленная толщина $h_{\text{выч}\,ij}$ (*мм*) имела минимально возможное отклонение Δh от измеренного значения фактической толщины $h_{\text{факт}\,ij}$ (*мм*). Для этого было использовано условие (4):

$$\Delta h = \left| h_{\text{факт}\,ij} - h_{\text{выч}\,ij} \right| \le 0,02. \tag{4}$$

2. Результаты и обсуждение

2.1. Нелинейное поведение скоростей волн с ростом деформаций

Были получены нелинейные зависимости скоростей волн $V_k(\varepsilon)$ от истинных (логарифмических) деформаций ε. Графики для скоростей ортогонально поляризованных поперечных волн $V_1(\varepsilon)$, $V_2(\varepsilon)$ представлены на рис. 3, для скорости продольной волны $V_3(\varepsilon)$ — на рис. 4.

Зависимости на рис. 3 и 4 имеют одинаковые характерные участки и критические точки. Значения скоростей волн V_k были найдены по формулам (1)–(4) на основании данных с трех каналов датчика, каждый из которых работает независимо от другого. Это говорит о едином для поперечных и продольных объемных волн характере изменений скоростей V_k, $k = 1,2,3$ с ростом величины упруго-пластических деформаций ε алюминиевого образца.

На рис. 3 и рис. 4 необходимо отметить несколько точек, в которых наблюдаются локальные «всплески» значений скоростей, в частности, при значениях истинной деформации $\varepsilon = 2,1\,\%$ и $\varepsilon = 4,9\,\%$. Перед восьмым этапом измерений ($\varepsilon = 4,9\,\%$) произошла разгрузка образца (испытания проводились в течение двух дней). Это привело к упрочнению и отразилось на графиках скоростей при нагружении образца на следующий день до величины деформаций

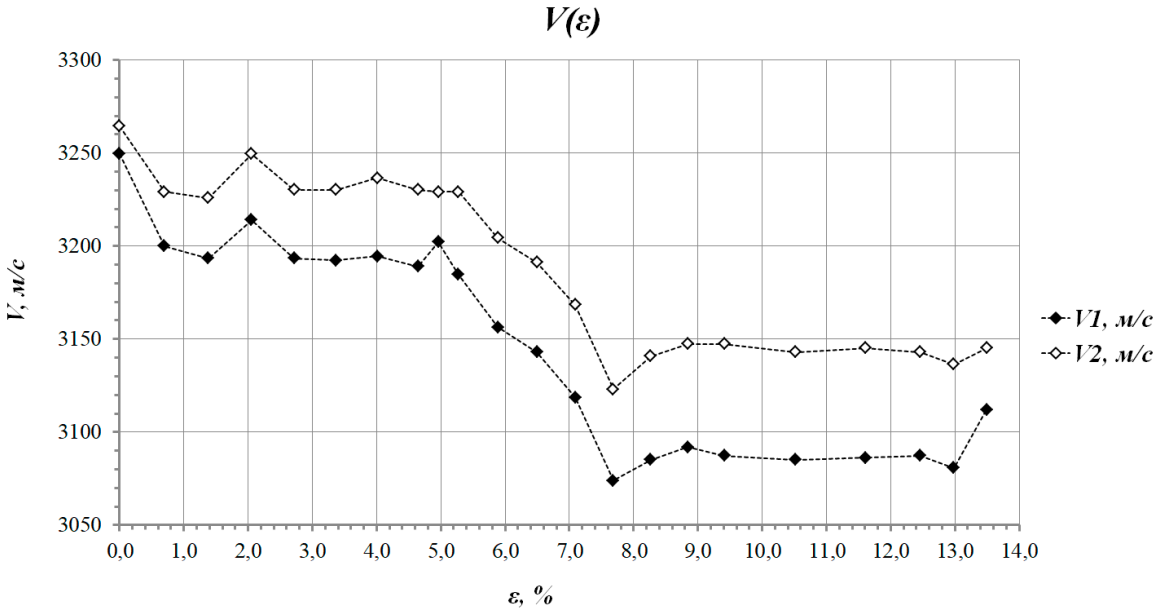


Рис. 3. Зависимость скоростей поперечных волн $V_1(\varepsilon)$, $V_2(\varepsilon)$ от истинных деформаций ε

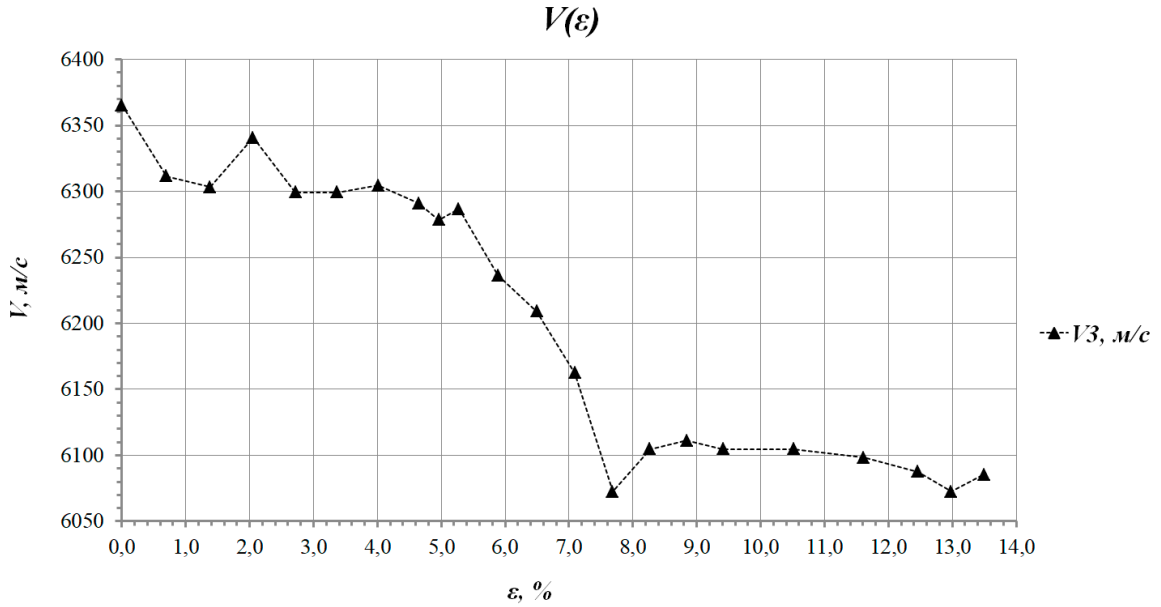


Рис. 4. Зависимость скорости продольной волны $V_3(\varepsilon)$ от истинных деформаций ε

как до разгрузки. Наиболее чувствительной к разгрузке оказалась скорость поперечной волны $V_1(\varepsilon)$, плоскость распространения которой ориентирована по направлению нагружения.

Наблюдаемый на всех графиках на рис. 3 и рис. 4 локальный максимум скоростей при величине истинных деформаций $\varepsilon = 2{,}1\,\%$ нельзя объяснить никаким изменением приложенной внешней растягивающей силы. Можно предположить, что он связан с изменением механических свойств материала на макроуровне в процессе пластической деформации.

2.2. Связь между скоростями продольных и поперечных волн и стадиями пластической деформации

На графиках на рис. 5 можно выделить три общих этапа, наступление которых коррелирует с очередными стадиями пластического деформирования. При значениях логарифмической деформации $\varepsilon = 0{,}6\,\%...4{,}5\,\%$ наблюдается плато значений, которое соответствует стадии

пластического упрочнения образца. Резкий спад при $\varepsilon = 4{,}5\,\%...7{,}6\,\%$ свидетельствует об уменьшении поперечного сечения образца на стадии образовании шейки, которая начинается после превышения предела прочности. Во время образования шейки материал больше не может выдерживать максимальное напряжение, деформация образца увеличивается. Начиная со значения $\varepsilon \geq 7{,}6\,\%$ наблюдается очередное плато, которое соответствует стадии разрушения. Образец при этом вытягивается, наблюдается искривление его поверхности вблизи места будущего разрыва. Выделенные этапы представлены на рис. 5.

Характер полученных зависимостей напоминает кривую Штрибека, которая может быть применима в случае упрочнения материалов при растяжении [21]. Он также подтверждается результатами, полученными для волн Рэлея при деформации стальных образцов [20].

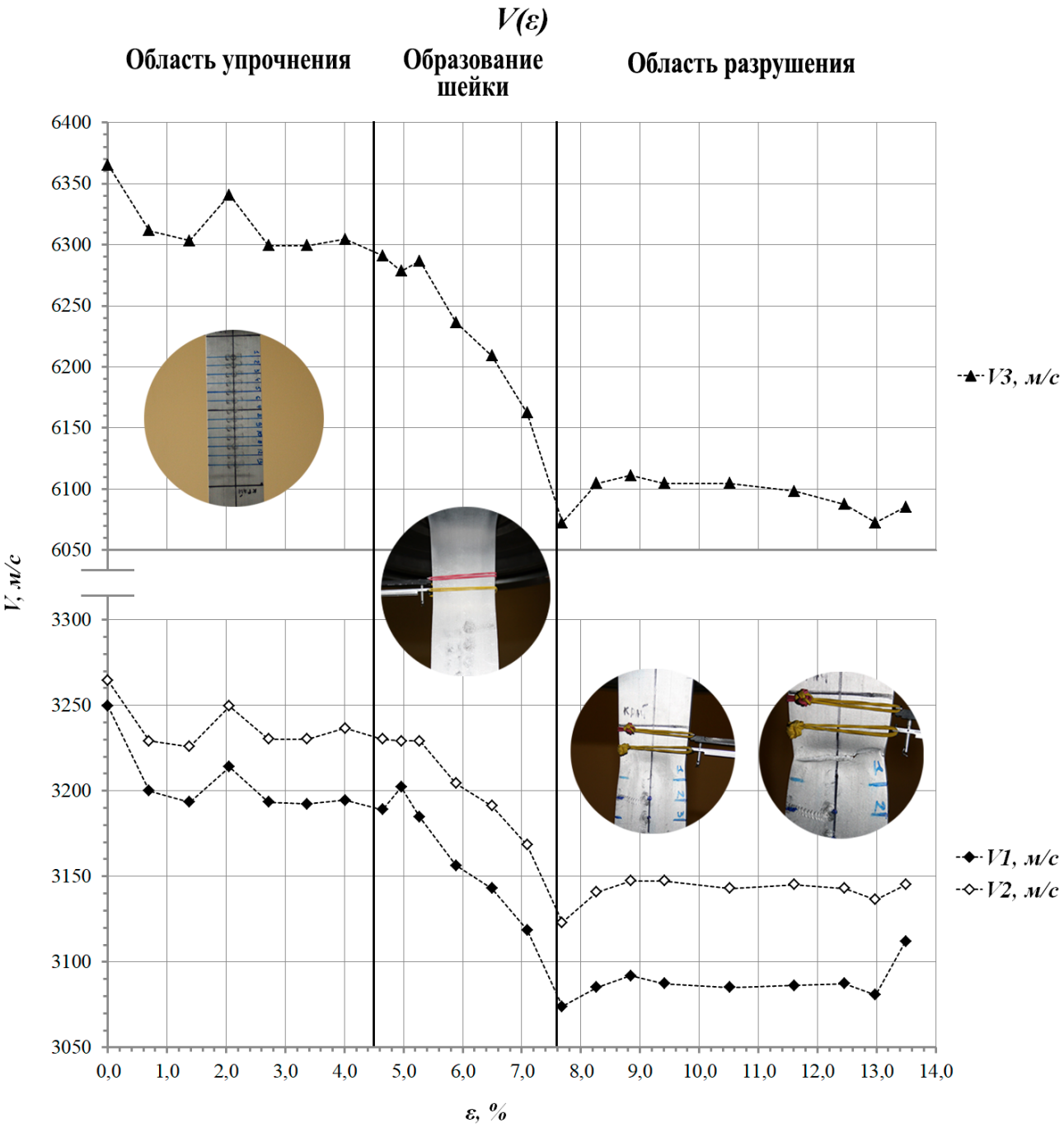


Рис. 5. Характерные этапы зависимости скоростей волн от деформаций

Заключение

В работе была исследована зависимость скоростей объемных продольных и поперечных волн от деформаций при одноосном упруго-пластическом деформировании корсетных образцов из алюминиевого проката. Было установлено, что с ростом деформаций упругие продольные и ортогонально поляризованные волны меняются одинаковым образом. Тренд изменения скоростей напоминает этапы, характерные для кривой Штрибека, которая может быть применима и для описания процесса упрочнения металлов [21]. Эти этапы связаны со стадиями пластической деформации — упрочнением, образованием шейки и разрушением. Качественно близкие результаты наблюдаются для волн Рэлея при деформации стальных образцов [20]. Для большинства этапов нагружения удается однозначным образом установить текущую величину деформаций материала по результатам ультразвуковых измерений. Это может быть использовано при акустической тензометрии деталей машин и элементов конструкций из металлического проката.

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ за счет средств стипендии № СП–5336.2022.1 Президента Российской Федерации.

Литература

1. *Муравьев В. В., Стрижак В. А., Пряхин А. В.* Исследование внутренних напряжений в металлоконструкциях методом акустоупругости // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2016. – Т. 82, №. 12. – С. 52–57.

2. *Volkova L. V., Murav'eva O. V., Murav'ev V. V.* Nonuniformity of acoustic anisotropy of thick-sheet steel // Steel in Translation. – 2021. – Vol. 51. – P. 335–341.

3. *Nikitina N. Y., Kamyshev A. V., Kazachek S. V.* The application of the acoustoelasticity method for the determination of stresses in anisotropic pipe steels // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2015. – Vol. 51. – P. 171–178.

4. *Kobayashi M.* Acoustoelastic theory for finite plastic deformation of solids // JSME International Journal. Ser. 1, Solid Mechanics, Strength of Materials. – 1992. – Vol. 35, No 1. – P. 45–52.

5. *Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Tretyakov D. A.* Estimating of mechanical stresses, plastic deformations and damage by means of acoustic anisotropy // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2020. – No 4. – P. 130–151.

6. *Мишакин В. В., Клюшников В. А., Кассина Н. В.* Исследование процесса разрушения сталей акустическим методом и методом делительных сеток // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 5. – С. 33–39.

7. *Ерофеев В. И., Никитина Е. А.* Локализация волны деформации, распространяющейся в поврежденном материале // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 6. – С. 60–62.

8. *Belyaev A. K. [et al.]* Investigation of the correlation between acoustic anisotropy, damage and measures of the stress-strain state // Procedia Structural Integrity. – 2017. – Vol. 6. – P. 201–207.

9. *Семенов А. С., Полянский В. А., Штукин Л. В., Третьяков Д. А.* Влияние поврежденности поверхностного слоя на акустическую анизотропию // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Vol. 59. – No 6. – P. 201–210.

10. *Гончар А. В., Мишакин В. В., Соловьев А. А., Клюшников В. А.* Применение головных и объемных волн для оценки поврежденности стали Ст3сп5 при усталостном разрушении // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2024. – № 5(770). – С. 48–56.

11. *Benson R. W., Raelson V. J.* Acoustoelasticity // Prod. Eng. – 1959. – Vol. 30, No 29. – P. 56–59.

12. *Hughes D. S., Kelly J. L.* Second-order elastic deformation of solids //Physical Review. – 1953. – Vol. 92, No 5. – P. 1145–1149.

13. *Murnaghan F. D.* Finite deformations of an elastic solid // American Journal of Mathematics. – 1937. – Vol. 59, No 2. – P. 235–260.

14. *Smith R. T.* Stress-induced anisotropy in solids—the acousto-elastic effect // Ultrasonics. – 1963. – Vol. 1, No 3. – P. 135–147.

15. *Belyaev A. K. [et al.]* Propagation of sound waves in stressed elasto-plastic material // 2016 Days on Diffraction (DD). – IEEE, 2016. – P. 56–61.

16. *Fukuoka H., Toda H., Naka H.* Nondestructive residual-stress measurement in a wide-flanged rolled beam by acoustoelasticity // Experimental Mechanics. – 1983. – Vol. 23. – P. 120–128.

17. *Hirao M., Pao Y. H.* Dependence of acoustoelastic birefringence on plastic strains in a beam // The Journal of the Acoustical society of America. – 1985. – Vol. 77, No 5. – P. 1659–1664.

18. *Ivanova Y., Partalin T., Pashkuleva D.* Acoustic investigations of the steel samples deformation during the tensile // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2017. – Vol. 53. – P. 39–50.

19. *Semukhin B. S., Zuev L. B., Bushmeleva K. I.* The velocity of ultrasound in low-carbon steel deformed at the low yield limit // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2000. – Vol. 41, No 3. – P. 556–559.

20. *Баранникова С. А., Лунёв А. Г., Малиновский А. П., Зуев Л. Б.* Изменение скорости ультразвука при водородном охрупчивании высокохромистой стали // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2018. – Т. 20, № 1. – С. 187–196.

21. *Stribeck R.* Die wesentlichen eigenschaften der gleit-und rollenlager // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. – 1902. – Vol. 46. – P. 1341–1348.

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В РАЗНОМОДУЛЬНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

А. А. Лаптева, О. В. Дудко

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. В работе изучаются особенности распространения волн деформаций в разномодульной упругой среде при наличии внешних сил. Разномодульная среда полагается связной, не допускающей разрывов сплошности. Рассматривается нестационарная краевая задача о взаимодействии плоской волны сжатия со свободной границей разномодульного упругого слоя, находящегося в поле силы тяжести. Показано, что наличие силы тяжести расширяет класс функций перемещения на нагружаемой границе слоя, при которых волна сжатия после отражения от свободной границы сохраняет свой тип.
Ключевые слова: разномодульность, упругий слой, сила тяжести, одноосное ударное нагружение, волна сжатия, отражение от свободной границы.

Введение

Известно, что механические свойства многих материалов, таких как горные породы, дерево, некоторые металлические сплавы, зернистые и волокнистые композиты и др. зависят от типа напряженно-деформированного состояния [1, 2]. Сильная физическая нелинейность таких разномодульных сред существенно влияет на процессы их динамического деформирования, а наличие внешних сил (например, силы тяжести) способно добавлять свои особенности в возникновение и движение волн деформаций. В настоящей работе рассматриваются постановочные аспекты и один из частных случаев решения начально-краевой задачи об отражении волны сжатия от свободной границы разномодульного упругого слоя, где предварительное статическое поле деформаций создается силой тяжести. Акцент делается на определении формы закона движения нагружаемой границы, при котором возникшая волна сжатия сохраняет свой тип, отражаясь от свободной границы.

1. Модельные соотношения

Для математической модели разномодульного упругого материала в работе выбран трехконстантный упругий потенциал неаналитической формы [2]. При одноосном деформировании разномодульной упругой среды [2] уравнение движения имеет вид $\ddot{u} = (c(e))^2 u_{xx} + F$, где слагаемое F отлично от нуля, когда среда находится в поле силы тяжести. Характеристическая скорость $c(e)$ является кусочно-постоянной функцией деформаций: $c(e) = a$ в области, где происходит сжатие среды $(e < 0)$, $c(e) = b < a$ при растяжении $(e > 0)$. Значения a и b $(0 < b < a)$ вычисляются через упругие модули среды [2]. Решение уравнения движения можно представить в виде $u(x,t) = f_1(t - x/c(e)) + f_2(t + x/c(e)) + \tilde{u}(x,t)$, где неизвестные функции $f_1(\xi(x,t))$, $f_2(\eta(x,t))$ и частное решение неоднородного уравнения $\tilde{u}(x,t)$ определяются из краевых условий задачи.

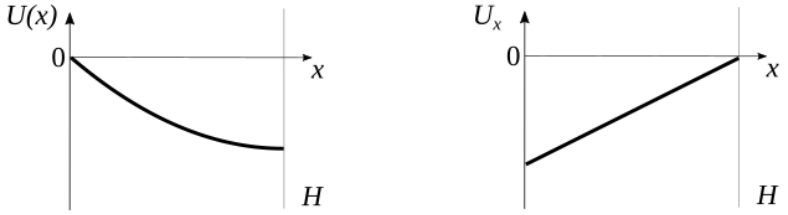
Согласно [3], обобщенное решение уравнения движения разномодульной упругой среды представляет собой кусочно-гладкую функцию $u(x,t)$ и может содержать несколько типов сильных разрывов (скачков первых производных перемещений на волнах деформаций). На фронтах сильных разрывов должны выполняться условия Гюгонио [3], связывающие состояния среды по обе стороны от каждого фронта. По аналогии с [3], для связной разномодульной среды [2] можно выделить следующие типы сильных разрывов: полусигнотон (ненулевой ска-

чок деформаций от свободного состояния или к нему), простой разрыв (скачок деформаций без изменения типа деформированного состояния) и ударная волна (скачок от растяжения к сжатию). Полусигнотоны и простые разрывы могут быть как быстрыми волнами сжатия со скоростью a, так и медленными волнами растяжения со скоростью b. Ударная волна несет сжатие в растянутую область среды и скачком меняет значение характеристической скорости $c(e)$ с b на a. Скачок от сжатия к растяжению с внезапным изменением характеристической скорости от a к b невозможен, поскольку в этом случае на фронте нарушаются условия неубывания энтропии и эволюционности сильного разрыва [4].

Ранее в [5] для модели [2] исследовались особенности распространения граничных возмущений и их отражение от свободной границы в разномодульном упругом слое без присутствия массовых сил. В настоящей работе в рамках модели [2] рассматривается возникновение волны сжатия в результате ударного воздействия на границу слоя, находящегося в поле силы тяжести, ее дальнейшее распространение в среде и отражение от свободной границы.

2. Постановка и частный случай решения начально-краевой задачи

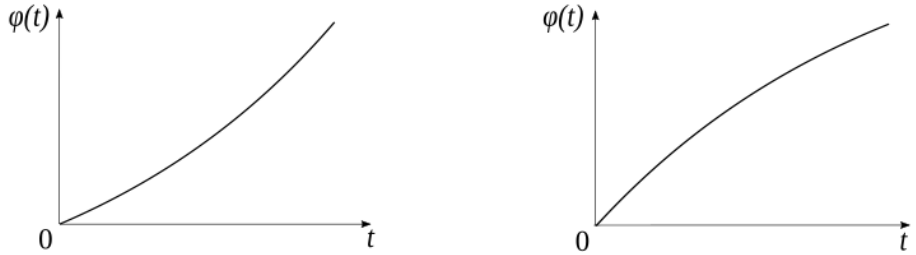
Рассмотрим разномодульный упругий слой толщиной H, который находится под действием силы тяжести. Будем считать, что ось x направлена противоположно действию силы тяжести: $F=-g$. В этом случае статическое поле перемещений, созданное силой тяжести, имеет вид $U(x)=g(x^2-2Hx)/(2a^2)$ (рис. 1, а). Соответственно, до начала ударного воздействия слой находится в статическом сжатом состоянии $U_x=-g(H-x)/a^2$ (рис 1, б).



(а) *(б)*

Рис. 1. Статические поля перемещений (а) и деформаций (б) в слое

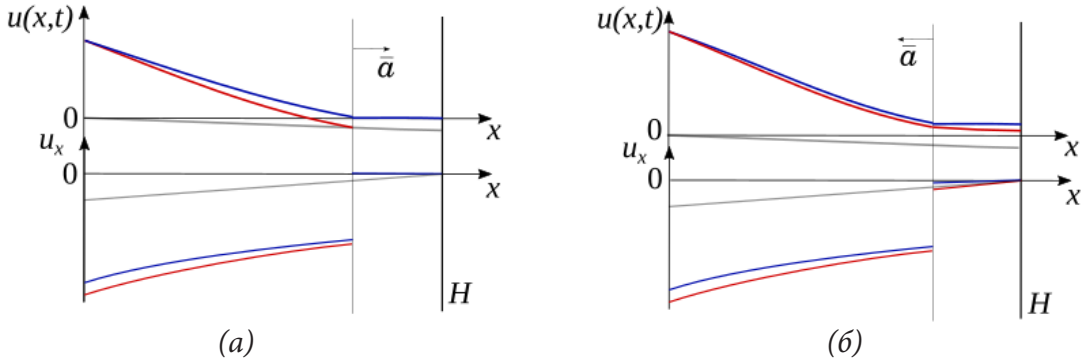
Пусть с момента времени $t=0$ упругий слой подвергается одноосному сжатию таким образом, что движение точек нагружаемой границы $x=0$ при $t\ge 0$ задано положительной монотонно возрастающей функцией граничного перемещения $u(0,t)=\varphi(t)$ (рис. 2). Ударный характер сжимающего граничного воздействия на $x=0$ задается условием $\varphi'(t)\ne 0$ при любом $t\ge 0$. Граница слоя $x=H$ остается свободной от напряжений на протяжении всего процесса деформирования $(\sigma(H,t)=0)$. Такое воздействие приводит к возникновению быстрой волны сжатия $x=at$, бегущей от границы $x=0$. При наличии статического поля сжатия $U_x<0$ возникшая волна является первичным простым разрывом, который несет со скоростью a динамические (дополнительные к статике) деформации сжатия в сторону свободной границы $x=H$ (рис. 3, а). На рис. 3 красные линии соответствуют решению, построенному с



(а) *(б)*

Рис. 2. Варианты функции граничных перемещений $u(0,t)=\varphi(t)$: вогнутая (а), выпуклая (б)

учетом силы тяжести, синие линии — перемещения и деформации без учета массовых сил [5], серым цветом показано статическое состояние, созданное силой тяжести.



(а) *(б)*

Рис. 3. Решение задачи при $t < H / a$ (а) и частный случай решения при $t > H / a$ (б)

Решение задачи при $t < H / a$ до момента взаимодействия волны сжатия со свободной границей слоя имеет вид (рис. 3, а):

$$u(x,t)\,|_{t<H/a} = \begin{cases} U(x) = g(x^2 - 2Hx)/(2a^2), & x \ge at, \\ \varphi\left(t - x/a\right) + U(x), & 0 \le x \le at. \end{cases}$$

В момент времени $t_1 = H / a$ первичный простой разрыв достигает свободной границы слоя $x = H$. Рассмотрим частный случай, когда обратно в слой отражается единственный фронт — волна сжатия (быстрый простой разрыв) с характеристической скоростью a (рис. 3, б). Тогда решение задачи при $t \ge t_1$ имеет вид

$$u(x,t)\,|_{t\ge H/a} = \begin{cases} \varphi\left(t - 2t_1 + x/a\right) + \varphi\left(t - x/a\right) + U(x), & 2H - at \le x \le H, \\ \varphi\left(t - x/a\right) + U(x)\,, & 0 \le x \le 2H - at, \end{cases}$$

совпадающий с решением для линейноупругой среды. Такая отраженная волновая картина возникает не при любой положительной монотонно возрастающей функции граничного перемещения $\varphi(t)$. Деформации за отраженным фронтом вычисляются как $u_x(x,t) = -2(H - x)(\varphi''(t) + g/2)/a^2$. Очевидно, что $u_x < 0$ только при выполнении условия $\varphi''(t) > -g/2$. Следовательно, решение с одним отраженным фронтом сжатия возможно только при определенных ограничениях на форму монотонно возрастающей функции $\varphi(t)$: она должна быть либо вогнутой при $\varphi''(t) \ge 0$ (рис. 2, а), либо выпуклой, но удовлетворяющей условию $-g/2 < \varphi''(t) < 0$ (рис. 2, б). Таким образом, при наличии силы тяжести дополнительная сжимающая нагрузка на границе слоя приводит к возникновению быстрого простого разрыва, его распространению по предварительно сжатой среде и отражению от свободной границы слоя в виде быстрого сжимающего простого разрыва только в ограниченном классе функций $\varphi(t)$. Тем не менее, этот класс оказывается шире по сравнению с решениями аналогичной задачи [5] для связной разномодульной среды [2] в отсутствие массовых сил. Если $\varphi''(t) < -g/2$, то волновая картина, отраженная от свободной границы разномодульного слоя среды [2], будет иметь более сложный вид, требующий дополнительных исследований. Согласно свойствам среды [2], по аналогии с [5] можно утверждать, что в этом случае в пакете отраженных волн должен появиться быстрый фронт, замыкающий зону предварительного сжатия, и медленный фронт, между которым и границей $x = H$ растет зона растяжения. При этом решение для связной разномодульно-упругой среды [2] будет существенно отличаться от решений [4] для упругосыпучей среды, поскольку в модели [2] возможны медленные волны растяжения с ненулевой скоростью распространения.

Заключение

На основе проведенного анализа делаем вывод, что наличие силы тяжести расширяет класс функций граничного перемещения, при которых решение начально-краевой задачи об отражении волны сжатия от свободной границы разномодульного упругого слоя содержит один отраженный фронт сжатия. По этой же причине происходит сужение класса выпуклых монотонно возрастающих функций граничного перемещения, при которых в волновой картине, отраженной от свободной границы слоя, возникают не только волны сжатия, но и волны растяжения. Кроме того, на форму решения после отражения помимо силы тяжести оказывает влияние связность разномодульной среды.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАПУ ДВО РАН (тема № FWFW-2021-0005).

Литература

1. *Ломакин Е. В.* Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами / Е. В. Ломакин // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10, № 5. – С. 41–52.

2. *Ляховский В. А.* О поведении упругой среды с микронарушениями / В. А. Ляховский, В. П. Мясников // Изв. АН ССР. Физика Земли. – 1984. – № 10. – С. 71–75.

3. *Маслов В. П.* Общая теория уравнений движения разномодульной среды / В. П. Маслов, П. П. Мосолов // Прикладная математика и механика. – 1985. – Т. 49, вып. 3. – С. 419–437.

4. *Куликовский А. Г.* Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – Москва : Московский лицей, 1998. – 412 с.

5. *Дудко О. В.* О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / О. В. Дудко, А. А. Лаптева, К. Т. Семенов // Дальневосточный математический журнал. – 2005. – Т. 6, № 1–2. – С. 94–105.

УДК 539.3

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

Ю. В. Малыгина, А. В. Ковалев

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе представлены соотношения для напряжений, перемещений и радиуса упругопластической границы в общем виде, полученные в ходе решения задачи о термодеформировании трубы из упрочняющегося материала, находящейся под действием внутреннего давления. Также проведено компьютерное моделирование решения данной задачи методом конечных элементов. Выполнен сравнительный анализ полученных решений.
Ключевые слова: упругость, пластичность, температура, сжимаемость, упрочнение, напряжения, деформации, перемещения, радиус упругопластической трубы, компьютерное моделирование.

Введение

В процессе поиска решений задач механики сплошных сред возникает вопрос в выборе метода: численного или аналитического. Цель данной статьи заключается в сравнении решений, полученных аналитическим методом и методом компьютерного моделирования, которое может помочь исследователям и инженерам выбрать наиболее эффективный путь для решения конкретной задачи.

В представленной работе рассмотрим решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния упрочняющейся упругопластической трубы, находящейся под действием стационарного поля температуры и внутреннего давления. Проведем сравнение численного и аналитического решений.

1. Аналитическое решение

Рассмотрим толстостенную трубу внутреннего радиуса a и внешнего — b. Пусть труба находится под действием внутреннего давления p и стационарного поля температуры. Материал трубы будем считать упруго сжимаемым. Постоянные материала предполагаются не зависящими от температуры. Осевую деформацию будем считать постоянной.

Запишем полную систему уравнений для рассматриваемой задачи:

– уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \tag{1}$$

где σ_r, σ_θ — компоненты тензора напряжений;

– соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, e_\theta = \frac{u}{r}, \tag{2}$$

где e_r, e_θ — компоненты тензора деформаций; u — радиальное перемещение.

– условие пластичности

$$\left(\sigma_\theta - \sigma_r - c\left(e_\theta^p - e_r^p\right)\right)^2 + \left(\sigma_\theta - \sigma_z - c\left(e_\theta^p - e_z^p\right)\right)^2 + \left(\sigma_r - \sigma_z - c\left(e_r^p - e_z^p\right)\right)^2 = 6k^2, \tag{3}$$

где σ_z — компонента тензора напряжений, c — коэффициент упрочнения, k — предел текучести.

Предположим, что упругие деформации связаны с напряжениями законом Дюамеля-Неймана, а приращение пластических деформаций — ассоциированным законом пластического течения. Поскольку полные деформации упругопластического тела состоят из суммы упругих и пластических, то справедливо следующее соотношение [1, 2]

$$de_r = \frac{1}{E}\left(d\sigma_r - \mu\left(d\sigma_\theta + d\sigma_z\right)\right) + d\left(\alpha T\right) + \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z - c\left(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p\right)\right),$$
$$de_\theta = \frac{1}{E}\left(d\sigma_\theta - \mu\left(d\sigma_r + d\sigma_z\right)\right) + d\left(\alpha T\right) + \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z - c\left(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p\right)\right), \qquad (4)$$
$$de_z = \frac{1}{E}\left(d\sigma_z - \mu\left(d\sigma_r + d\sigma_\theta\right)\right) + d\left(\alpha T\right) + \frac{d\lambda}{3}\left(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta - c\left(2e_z^p - e_r^p - e_\theta^p\right)\right),$$

где e_z — компонента тензора деформаций; μ — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного температурного расширения, $T = T(r)$ — температура, которая является решением стационарного уравнения теплопроводности [2, 3], $d\lambda$ — скалярный положительный множитель;

– граничные условия

$$\sigma_r\big|_{r=a} = -p,$$
$$\sigma_r\big|_{r=b} = 0, \qquad (5)$$

– условия неразрывности на упругопластической границе

$$\left[\sigma_r\right] = \left[\sigma_\theta\right] = \left[u\right] = 0, \qquad (6)$$

При этом предположим, что справедливы соотношения:

$$\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r. \qquad (7)$$

Задачу будем решать методом возмущений. Разложим имеющиеся величины в ряд по малому параметру δ, ограничившись нулевым и первым приближениями. Таким образом, решение будем искать в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)},$$
$$u = u^{(0)} + \delta u^{(1)}, \mu = \frac{1}{2} + \delta\mu^{(1)}, \qquad (8)$$
$$\alpha = \delta\alpha^{(1)}, c = \delta c^{(1)}, \lambda = \lambda^{(0)} + \delta\lambda^{(1)}.$$

В нулевом приближении имеет место плоская деформация упругопластического несжимаемого материала. Решение данной задачи известно [4].

Принимая во внимание решение задачи в нулевом приближении и алгоритм решения задачи в первом приближении (согласно работам [5, 6]), получим следующие выражения напряжений, перемещений и радиуса упругопластической границы, когда температура задана в общем виде:

$$\sigma_r^p = -p + 2k\ln\left(\frac{r}{a}\right) + \delta\frac{3kc^{(1)}}{E}\int_a^r\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3} - \frac{1}{r}\right)dr,$$

$$\sigma_\theta^p = -p + 2k\ln\left(\frac{r}{a}\right) + 2k + \delta\frac{3kc^{(1)}}{E}\left(\int_a^r\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3} - \frac{1}{r}\right)dr + \frac{r_s^{(0)^2}}{r^2} - 1\right),$$

$$\sigma_r^e = kr_s^{(0)^2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right] + \delta\left[2E\alpha^{(1)}\int_r^b\frac{T(r)}{r}dr - 4E\alpha^{(1)}\int_r^b\frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr + \right.$$

$$\left. + \left(2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{T(r)}{r}dr - 4E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr - \frac{3kc^{(1)}}{E}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3} - \frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{r_s^{(0)^2}}{r^2}\frac{b^2 - r^2}{r_s^{(0)^2} - b^2}\right],$$

$$\sigma_\theta^p = kr_s^{(0)^2}\left[\frac{1}{b^2}+\frac{1}{r^2}\right]+\delta\left[2E\alpha^{(1)}\int_r^b\frac{T(r)}{r}dr-4E\alpha^{(1)}\int_r^b\frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr-\right.$$

$$-\left(2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{T(r)}{r}dr-4E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr+\frac{3kc^{(1)}}{E}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3}-\frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{r_s^{(0)^2}}{r^2}\frac{b^2+r^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}+$$

$$\left.+\frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2}\int T(r)rdr-2E\alpha^{(1)}T(r)\right], \qquad (9)$$

$$u^p = \frac{3kr_s^{(0)^2}}{2Er}+\delta\left[-\frac{3}{E}\mu^{(1)}k\left(2\ln\left(\frac{r}{r_s^{(0)}}\right)-1+\frac{r_s^{(0)^2}}{b^2}\right)r-\frac{2}{E}\mu^{(1)}\frac{kr_s^{(0)^2}}{r}+\frac{3\alpha^{(1)}}{r}\int T(r)rdr+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{r}\left(2\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr-\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{T(r)}{r}dr+\frac{3kc^{(1)}}{2E^2}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3}-\frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{r_s^{(0)^2}b^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}\right],$$

$$u^e = \frac{3kr_s^{(0)^2}}{2Er}+\delta\left[-\frac{3}{E}\mu^{(1)}k\frac{r_s^{(0)^2}}{b^2}r+\frac{\mu^{(1)}}{E}\frac{kr_s^{(0)^2}}{r}+\frac{3\alpha^{(1)}}{r}\int T(r)rdr+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{r}\left(2\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr-\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{T(r)}{r}dr+\frac{3kc^{(1)}}{2E^2}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3}-\frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{r_s^{(0)^2}b^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}\right],$$

$$r_s = r_s^{(0)}+\frac{\delta r_s^{(0)}}{2k}\left[\left(4E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{1}{r^3}\int T(r)rdrdr-2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b\frac{T(r)}{r}dr+\frac{3kc^{(1)}}{2E}\int_a^{r_s^{(0)}}\left(\frac{r_s^{(0)^2}}{r^3}-\frac{1}{r}\right)dr\right)\frac{b^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2E\alpha^{(1)}}{r_s^{(0)^2}}\int_{r=r_s^{(0)}}T(r)rdr-E\alpha^{(1)}T(r_s^{(0)})\right],$$

где $r_s^{(0)}$ определяется из соотношения

$$\frac{kr_s^{(0)^2}}{b^2} = -p+k+2k\ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right). \qquad (10)$$

Решение стационарного уравнения теплопроводности с краевыми условиями

$$\begin{aligned} r = a &: T = T_1, \\ r = b &: T = T_0. \end{aligned} \qquad (11)$$

имеет вид

$$T(r) = M+2N\ln(r), \qquad (12)$$

где

$$M = \frac{T_1\ln(b)-T_0\ln(a)}{\ln(b)-\ln(a)}, N = \frac{T_0-T_1}{2(\ln(b)-\ln(a))}. \qquad (13)$$

Подставляя полученное поле температуры (13) в соотношения (9), получим выражения для напряжений, перемещений и радиуса упругопластической границы.

Внутри упругой области должно выполняться условие

$$\sigma_\theta-\sigma_r<2k.$$

Тогда, с учетом полученного температурного поля и принятого соотношения (7), справедливо неравенство

$$0<\left(k+2\delta\alpha^{(1)}EN\frac{b^2}{r_s^{(0)^2}-b^2}\ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right)+\frac{3kc^{(1)}}{E}\left[\frac{r_s^{(0)^2}}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r_s^{(0)^2}}\right)-\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right]\right)\frac{r_s^{(0)^2}}{r^2}-\delta\alpha^{(1)}EN<k. \qquad (14)$$

Подставим в (14) выражение для постоянной N

$$0 < \left(k + \delta\alpha^{(1)} E \frac{T_0 - T_1}{\ln(b) - \ln(a)} \frac{b^2}{r_s^{(0)^2} - b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) + \frac{3kc^{(1)}}{E} \left[\frac{r_s^{(0)^2}}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r_s^{(0)^2}} \right) - \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right] \right) \frac{r_s^{(0)^2}}{r^2} - \\ - \delta\alpha^{(1)} E \frac{T_0 - T_1}{2\left(\ln(b) - \ln(a)\right)} < k. \tag{15}$$

Таким образом, получили ограничения, накладываемые на разность температур внешней и внутренней поверхностей трубы, при которых будут справедливы приведенные выше соотношения.

В дальнейшем исследование будем проводить в безразмерных величинах, поэтому все переменные, имеющие размерность напряжений, отнесем к $2k$, перемещений — к b.

Рассмотрим в качестве примера стальную трубу при следующих значениях постоянных:

$$b = 2a,\ p = 0.577,\ E = 2.1 \cdot 10^5\ МПа,\ \mu = 0.3,\ \delta = 0.01,$$
$$k = 750 МПа, T_0 = 60°C, T_1 = 0°C, \alpha = 1.1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}, c = 3400 МПа. \tag{16}$$

Компьютерный эксперимент

В ходе компьютерного моделирования была простроена расчетная модель толщиной 0.07 *мм*. Поскольку задача является осесимметричной, при исследовании будем рассматривать четверть трубы. В процессе моделирования задавались условия симметрии. На рис. 1 представлена конечно-элементная модель расчетной области.

Решение будем проводить в два этапа.

На первом этапе получим распределение температуры вдоль радиуса трубы, задав значения температуры на внутреннем и внешнем радиусах трубы.

На втором этапе определим распределение радиальной и окружной компонент тензора напряжений и радиальное перемещение, с учетом полученного температурного поля.

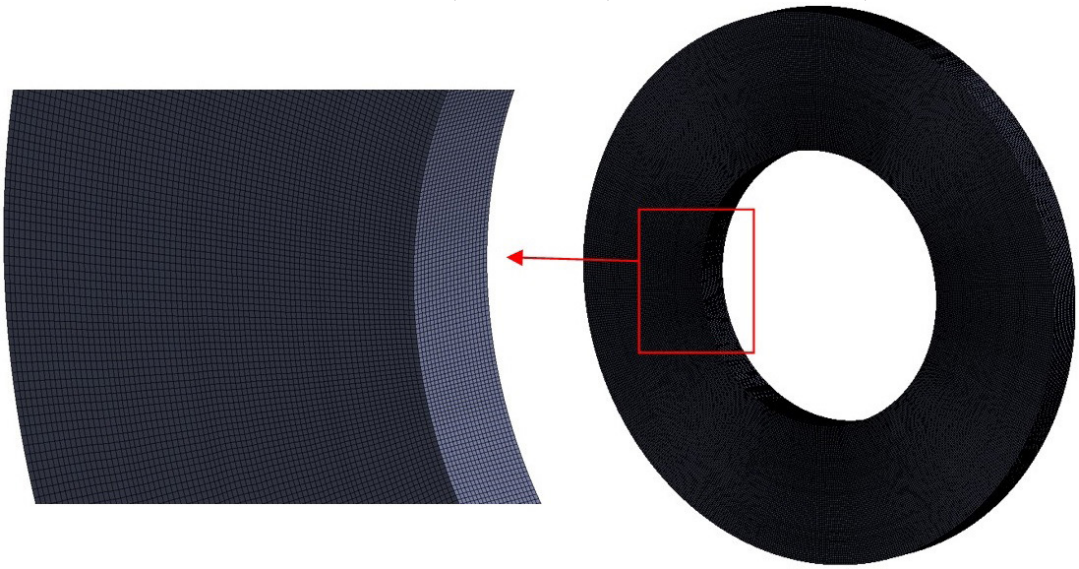


Рис. 1. Конечно-элементная модель

На рис. 2–4 представлены графики сравнений выражений радиальной компоненты перемещений, а также радиальной и окружной компонент тензора напряжений, полученных аналитическим и численным методами.

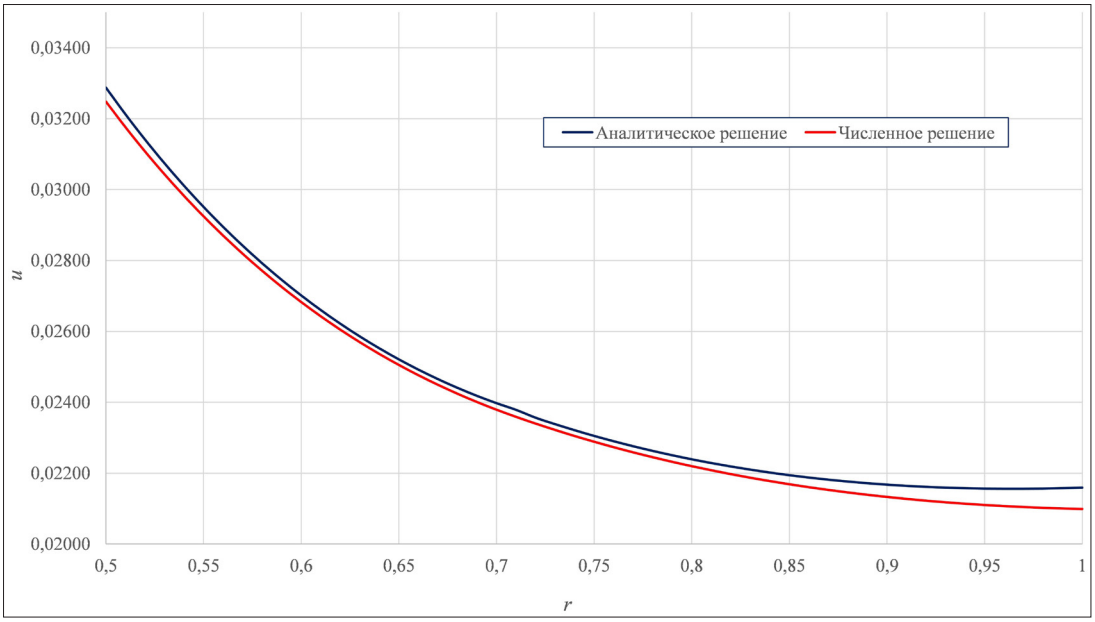


Рис. 2. Численное и аналитическое выражения радиального перемещения

В ходе решения поставленной задачи аналитическим методом было получено, что безразмерное значение радиуса упругопластической границы $r_s = 0.70896$. При компьютерном моделировании указанного процесса данное значение было равным: $r_s = 0.708002$. Относительная погрешность вычисления в таком случае составила около 0,14 %.

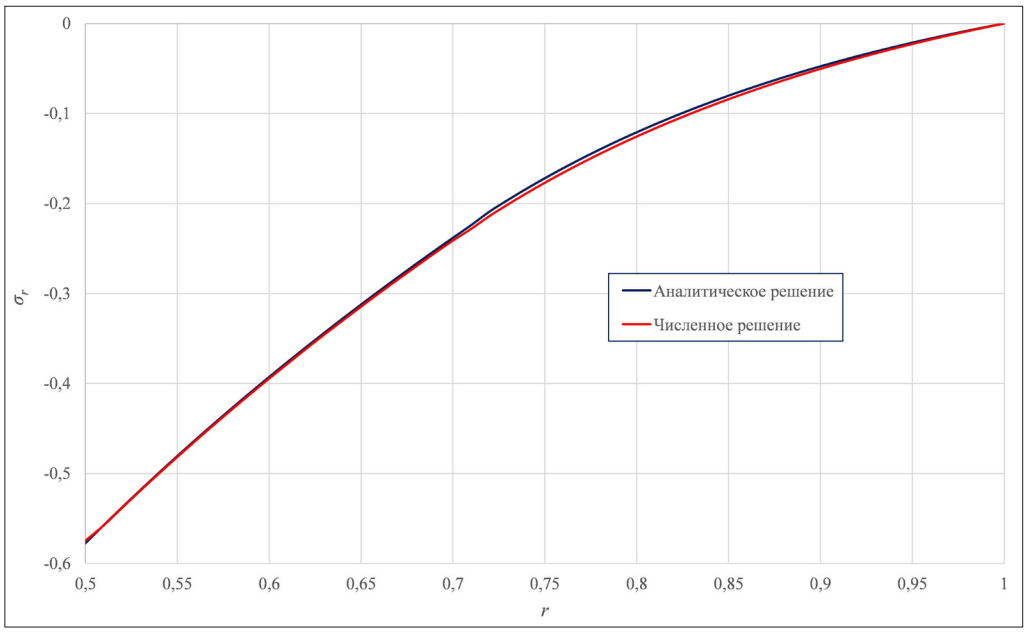


Рис. 3. Численное и аналитическое выражения радиального напряжения

В ходе решения поставленной задачи аналитическим методом было получено, что безразмерное значение радиуса упругопластической границы $r_s = 0.70896$. При компьютерном моделировании указанного процесса данное значение было равным: $r_s = 0.708002$. Относительная погрешность вычисления в таком случае составила около 0,14 %.

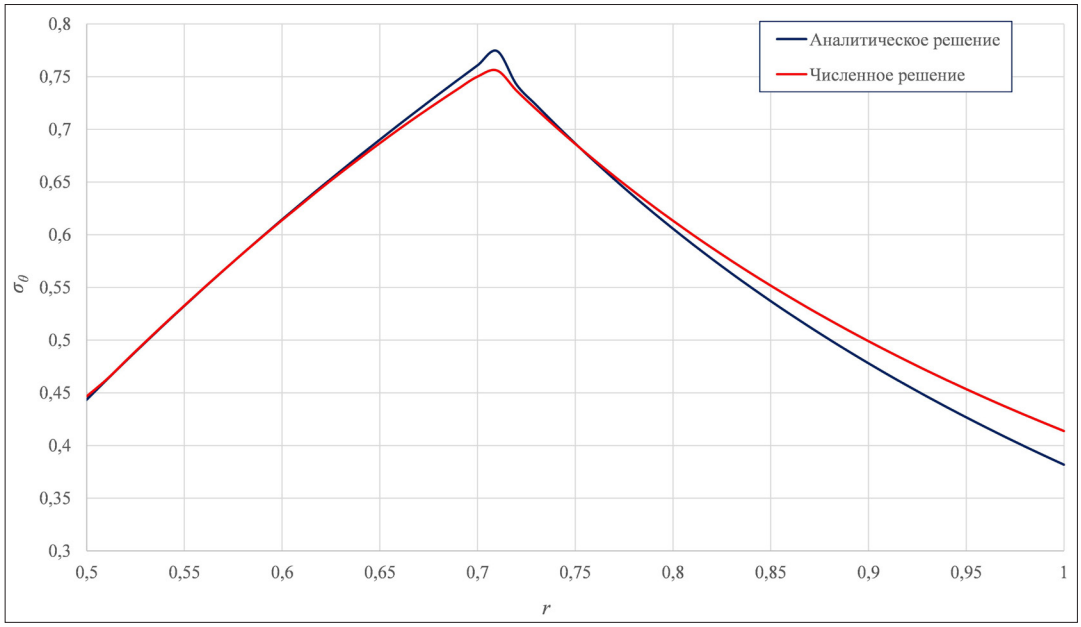


Рис. 4. Численное и аналитическое выражения окружного напряжения

Выводы

По результатам проведенного исследования можно сделать вывод, что полученное аналитическое решение в достаточной степени сходится с результатами вычислительного эксперимента. Отклонения в результатах возникают за счет принятых ограничений и выбранного метода решения задачи. Абсолютная погрешность вычисления безразмерных значений искомых величин находится в пределах величины принятого малого параметра.

Литература

1. *Ивлев Д. Д.* Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Е. В. Макаров, Ю. М. Марушкей // Изв. РАН. МТТ. – 1978. – №4. – С. 80–87.

2. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. – М. : Физматлит, 1963. – 253 с.

3. *Мелан Э.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. –М. : Физматгиз, 1958. – 167 с.

4. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

5. *Ковалев А. В.* К определению напряженно-деформированного состояния в упрочняющейся упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала / А. В. Ковалев, Ю. В. Малыгина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 07–09 декабря 2020 года, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет». – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2021. – С. 1306–1311.

6. *Ковалев А. В.* К расчету упрочняющейся сжимаемой упругопластической трубы с учетом температуры / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, Ю. В. Малыгина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13–15 декабря 2021 г. – Воронеж, 2022. – С. 1191–1195.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ ИЗНОСА МАТЕРИАЛА

Н. В. Минаева[1], С. Ю. Гриднев[2,3], Ю. И. Скалько[3], Д. А. Никулин[1]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Воронежский государственный технический университет
[3]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Аннотация. Проведено изучение напряженно-деформированного состояния толстостенной упругой несжимаемой трубы с учетом абразивно-усталостного износа материала при сжатии. Получено условие, при выполнении которого влияние роста включений будет незначительным. Для слабоповрежденного материала это условие позволяет находить решение на основе метода возмущений с требуемой точностью.
Ключевые слова: упругость, толстостенная труба, абразивно-усталостный износ, непрерывная зависимость, метод возмущений.

Введение

В современных условиях разработки высокоэффективных материалов особое внимание уделяется изучению их механических свойств с учетом влияния дефектов, включений и износа. Износ материала, проявляющийся в виде изменения его упругих свойств, приводит к перераспределению напряжений и деформаций, что влияет на надежность конструкции.

Это особенно важно для материалов, используемых в сложных эксплуатационных условиях, таких как элементы трубопроводов, работающие под действием высокого давления.

При расчете эластомерных конструкций широко используется МКЭ и программные продукты, основанные на подобных методах. Так, в работах [1, 2] предлагается введение различных выражений упругой энергии деформации, которые учитывают слабую сжимаемость эластомера. В работе [3] предложены вариационные формулировки, наиболее приемлемые для задач исследования слабосжимаемых эластомеров. Однако применение смешанных вариационных принципов связано с увеличением порядка разрешающей системы уравнений, с нарушением положительной определенности матрицы уравнений. В работах [4–6] для учета слабой сжимаемости эластомеров предложен способ сокращенного интегрирования, состоящий в том, что поля перемещений и величины, ответственные за слабую сжимаемость, аппроксимируются различными функциями. Вопросу изучения абразивно-усталостного износа конструкций посвящены следующие работы. В работе [7] исследуется механизм износа резиновой футеровки барабанной мельницы и проводится расчет ее оптимальной толщины. Целью работы [8] является построение обобщенной теории абразивно-усталостного износа упруго-наследственных сред с помощью двухкритериального уравнения долговечности. В работе [9] рассматривается динамическая модель волнового абразивно-усталостного износа резиновой футеровки в барабанных мельницах.

Стандартный МКЭ не позволяет учитывать такого свойства эластомеров как слабая сжимаемость, когда материал имеет коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$. Разрушение эластомерной конструкции при абразивно-усталостном износе исследуется при помощи феноменологической модели [10]. Процесс поврежденности эластомера под действием внешних сил можно представить как образование и накопление в исходном материале некоторых областей, имеющих характер включений.

Цель работы заключается в определении, а также в исследовании влияния износа на распределение напряжений и перемещений в упругой трубе.

Исследование влияния износа материала

В данной работе рассматривается исследовании напряженно-деформированного состояния толстостенной упругой трубы с учетом износа материала при сжатии. Труба выполнена из несжимаемого материала, находится под действием сжимающих внутреннего и внешнего давлений [13]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\
&\frac{\partial \tau}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{2\tau}{r}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{u}{r}=0\\
&\sigma_r-\sigma_\theta=4G\frac{\partial u}{\partial r}\\
&\tau=G\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{v}{r}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_n\Big|_{r=\Psi_1(\theta)}=-p_1; \qquad \tau_n\Big|_{r=\Psi_1(\theta)}=0,\\
&\sigma_n\Big|_{r=\Psi_2(\theta)}=-p_2; \qquad \tau_n\Big|_{r=\Psi_2(\theta)}=0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Функции описывают форму поперечного сечения трубы в деформированном состоянии. Предполагается, что материал в начальном состоянии однороден и изотропен. Модуль образующихся включений в n раз больше модуля основного материала (в работе [12] для резины на основе СКИ-3 получено), развивающиеся включения характеризуются матрицей модулей упругости основного материала, упругие модули материала включений не зависят от времени.

С учетом вышеуказанных предположений можно построить макроскопическую характеристику эластомера в виде модуля упругости материала с изменяющимися от поврежденности свойствами

$$G=G_0\left(n+\frac{(1-n)(1-p)(n+1,5)}{(n+1,5)+p(1-n)}\right), \tag{3}$$

где G_0 — модуль упругости исходного материала $p=1-e^{-m}$ — функция, отображающая рост концентрации включений во времени, m — коэффициент снижения модуля упругости ($m=1,2$ [10]).

Для слабоповрежденного материала ($p<<1$), функцию G можно приближенно представить в виде

$$G=G_0\left(1+\left(n-1-\frac{(1-n)^2}{n+1,5}\right)\varepsilon\right), \tag{4}$$

где малый параметр ε характеризует рост концентрации включений.

При $\varepsilon=0$ задача (1), (2) допускает осесимметричное решение, описывающее состояние трубы из однородного материала [13]:

$$\sigma_r^0=\frac{2A}{r^2}+B; \qquad \sigma_\theta^0=-\frac{2A}{r^2}+B; \qquad \tau^0=v^0=0; \qquad u^0=-\frac{A}{r}$$

Граничные условия (2) в этом случае будут такими

$$\sigma_r^0\Big|_{r=\alpha+u^0(\alpha)}=-p_1; \qquad \sigma_r^0\Big|_{r=1+u^0(1)}=-p_2$$

где $\alpha=\dfrac{a}{b}$.

Из (3), (4) получаем систему уравнений относительно произвольных постоянных A и B

$$\frac{2A\alpha^2}{\left(\alpha^2-A\right)^2}+B=-p_1;\qquad \frac{2A}{\left(1-A\right)^2}+B=-p_2. \tag{5}$$

Для того, чтобы выяснить, при выполнении каких условий решение (3) можно брать в качестве приближенного решения задачи (1), (2) в том случае, когда функция, отображающая рост концентрации включений, мало отличаются от нуля, необходимо рассмотреть вопрос о непрерывности зависимости решения задачи (1), (2) от ε при $\varepsilon=0$.

Как следует из теоремы о неявных функциях [13], для проведения анализа упомянутой непрерывности зависимости надо построить следующую задачу относительно вспомогательных функций $\sigma_r^1,\sigma_\theta^1,\tau^1,u^1,v^1,e^1$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\left(\sigma_r^0+\varepsilon\sigma_r^1\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\tau^0+\varepsilon\tau^1\right)}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r^0+\varepsilon\sigma_r^1-\sigma_\theta^0-\varepsilon\sigma_\theta^1}{r}=0\\
\frac{\partial\left(\tau^0+\varepsilon\tau^1\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\sigma_\theta^0+\varepsilon\sigma_\theta^1\right)}{\partial\theta}+\frac{2\left(\tau^0+\varepsilon\tau^1\right)}{r}=0\\
\frac{\partial\left(u^0+\varepsilon u^1\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(v^0+\varepsilon v^1\right)}{\partial\theta}+\frac{u^0+\varepsilon u^1}{r}=0\\
\sigma_r^0+\varepsilon\sigma_r^1-\sigma_\theta^0-\varepsilon\sigma_\theta^1=4(G_0+\varepsilon G_1)\frac{\partial\left(u^0+\varepsilon u^1\right)}{\partial r}\\
\tau^0+\varepsilon\tau^1=(G_0+\varepsilon G_1)\frac{\partial\left(v^0+\varepsilon v^1\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(u^0+\varepsilon u^1\right)}{\partial\theta}-\frac{\left(v^0+\varepsilon v^1\right)}{r}
\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}
\left(\sigma_n^0+\sigma_n^1\right)\Big|_{r=\Phi_1(\theta)}=-p_1;\qquad \left(\tau_n^0+\tau_n^1\right)\Big|_{r=\Phi_1(\theta)}=0,\\
\left(\sigma_n^0+\sigma_n^1\right)\Big|_{r=\Phi_2(\theta)}=-p_2;\qquad \left(\tau_n^0+\tau_n^1\right)\Big|_{r=\Phi_2(\theta)}=0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Как следует из [13], функция $\Phi_i(\theta)$ в (7) с точностью до величин первого порядка малости будут такими

$$\begin{gathered}
\Phi_1\left(\theta\right)=\alpha-\frac{A}{\alpha}+u^1\left(\theta,\alpha\right)\\
\Phi_2\left(\theta\right)=1-A+u^1\left(\theta,1\right).
\end{gathered} \tag{8}$$

Линеаризованная по вспомогательным функциям $\sigma_r^1,\sigma_\theta^1,\tau^1,v^1,e^1,u^1$ задача, соответствующая задаче (6)–(8), будет следующей (с учетом того, что (3) — решение задачи (1), (2) при $\varepsilon=0$)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_r^1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau^1}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r^1-\sigma_\theta^1}{r}=0\\
\frac{\partial\tau^1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta^1}{\partial\theta}+\frac{2\tau^1}{r}=0\\
\frac{\partial u^1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v^1}{\partial\theta}+\frac{u^1}{r}=0\\
\sigma_r^1-\sigma_\theta^1=4\left(G_0\frac{\partial u^1}{\partial r}+G_1\left(-\frac{A}{r^2}\right)\right)\\
\tau^1=G_0\left(\frac{\partial v^1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^1}{\partial\theta}-\frac{v^1}{r}\right)
\end{gathered} \tag{9}$$

Граничные условия (7) примут такой вид

$$\left(\sigma_r^1+\frac{d\sigma_r^0}{dr}u^1(\theta,\alpha)\right)_{r=\alpha-\frac{A}{\alpha}}=\left[\tau^1+\frac{\left(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0\right)}{r}\frac{\partial u^1(\theta,\alpha)}{\partial\theta}\right]_{r=\alpha-\frac{A}{\alpha}}=0$$
$$\left(\sigma_r^1+\frac{d\sigma_r^0}{dr}u^1(\theta,1)\right)_{\rho=1-A}=\left[\tau^1+\frac{\left(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0\right)}{r}\frac{\partial u^1(\theta,1)}{\partial\theta}\right]_{r=1-A}=0 \qquad (10)$$

Введем замену таким образом, чтобы выполнялось условие несжимаемости:

$$u^1=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta},\ \ v^1=\frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

Тогда уравнение для новой функции Φ будет таким:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial\theta^4}+r^4\frac{\partial^4\Phi}{\partial r^4}+2r^2\frac{\partial^4\Phi}{\partial r^2\partial\theta^2}+2r^3\frac{\partial^3\Phi}{\partial r^3}-2r\frac{\partial^3\Phi}{\partial r\partial\theta^2}+4\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}-r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+r\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0$$

Будем искать решение в виде:

$$\Phi=rR(r)\varphi(\theta).$$

В результате имеем

$$rR\varphi^{(4)}+(2rR+2r^2R'+2r^3R'')\varphi''+(r^5R^{(4)}+6r^4R'''+5r^3R''-r^2R'+rR)\varphi=0.$$

Положим $\varphi(\theta)=\sin n\theta$ тогда

$$\Phi(r,\theta)=(B_1r^{n+2}+B_2r^{-n}+B_3r^n+B_4r^{2-n})\sin n\theta.$$

Зная выражение для $\Phi(r,\theta)$ определим выражения для σ_r^1, τ^1 и u^1.

$$\begin{aligned}\sigma_r^1=G_0(&-(n+1)(n+2)B_1r^n-n(n+1)B_2r^{-(n+2)}-n(n-1)B_3r^{n-2}-(2-n)(1-n)B_4r^{-n}-\\&-n^2B_1r^n+\frac{n^3}{n+2}B_2r^{-(n+2)}-\frac{n^3}{n-2}B_3r^{n-2}+n^2B_4r^{-n}+\\&+5(n+2)B_1r^n+\frac{5n^2}{n+2}B_2r^{-(n+2)}-\frac{5n^2}{n-2}B_3r^{n-2}-5(2-n)B_4r^{-n}-\\&-4B_1r^n+\frac{4n}{n+2}B_2r^{-(n+2)}-\frac{4n}{n-2}B_3r^{n-2}+4B_4r^{-n})\cos n\theta+G_1\left(-\frac{2A}{r^2}\right)\\ \tau^1=G_0(&-(n+1)(n+2)B_1r^n-n(n+1)B_2r^{-(n+2)}-n(n-1)B_3r^{n-2}-(2-n)(1-n)B_4r^{-n}+\\&+n^2(B_1r^n+B_2r^{-(n+2)}+B_3r^{n-2}+B_4r^{-n})-\\&-(n+2)B_1r^n-nB_2r^{-(n+2)}-nB_3r^{n-2}-(2-n)B_4r^{-n})\sin n\theta\\ u^1=&-n(B_1r^{n+1}+B_2r^{-n-1}+B_3r^{n-1}+B_4r^{1-n})\cos n\theta.\end{aligned} \qquad (11)$$

Как следует из (3), (11), два первых условия в (10) совпадают, и два оставшихся тоже совпадают. Следовательно, для определения произвольных постоянных c_1 и c_2 из (10), (11) получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}&\left[\left(\alpha-A\alpha^{-1}\right)^4+\alpha^2A\right]c_1+\left(1+\alpha^{-2}A\right)c_2=0,\\&\left[\left(1-A\right)^4+A\right]c_1+\left(1+A\right)c_2=0.\end{aligned} \qquad (12)$$

Как следует из (11), (12), задача (9), (10) имеет нетривиальное решение при выполнении следующего условия

$$\Delta=\left[\left(\alpha-A\alpha^{-1}\right)^4+\alpha^2A\right]\left(1+A\right)-\left(1+\alpha^{-2}A\right)\left[\left(1-A\right)^4+A\right]=0. \qquad (13)$$

Из (5) получаем следующее уравнение относительно произвольной постоянной A

$$p_1 - p_2 = 2A\left[\left(\frac{1}{1-A}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - A}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Обозначим через p_* наибольший отрицательный, а через p_{**} наименьший положительный корень системы уравнений (14) и следующего уравнения

$$p = 2A\left[\left(\frac{1}{1-A}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - A}\right)^2\right]. \tag{15}$$

Тогда условия существования нетривиального решения задачи (9), (10) запишем так

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= p_* \\ p_1 - p_2 &= p_{**} \end{aligned} \tag{16}$$

Например, при $\alpha = 0,8;\ \ p_* \approx -0,502;\ \ p_{**} \approx 0,034.$

Итак, если точка, определяемая координатами параметров внешних нагрузок p_1 и p_2, не выходит из области, ограниченной графиками функций (16), то характеристики напряженно-деформированного состояния трубы, т.е. решения задачи (1), (2), непрерывно зависят от ε при $\varepsilon = 0$. Следовательно, при достаточно малом росте концентрации включений (слабый абразивно-усталостный износ материала) напряженно-деформированное состояние трубы будет мало отличаться от осесимметричного, описываемого решением (3), (5). Для учета влияния включений для указанных параметров давлений можно найти решение методом возмущений с требуемой точностью.

Заключение

В проведенной работе исследовано напряженно-деформированное состояние толстостенной упругой несжимаемой трубы с учетом абразивно-усталостного износа материала при сжатии. Полученные результаты показывают, что износ материала оказывает существенное влияние на перераспределение напряжений и деформаций в конструкции.

Разработанное условие, при выполнении которого влияние роста включений становится незначительным, позволяет находить приближенные решения на основе метода возмущений с заданной точностью для слабоповрежденного материала. Это условие может быть использовано при проектировании и анализе элементов трубопроводных систем, работающих в сложных эксплуатационных условиях.

Проведенный анализ подчеркивает важность учета абразивно-усталостного износа и слабой сжимаемости материала для повышения точности расчетов и надежности конструкций. Предложенные подходы могут быть интегрированы в существующие численные методы, включая метод конечных элементов, что расширяет их применимость для исследования сложных инженерных задач.

Таким образом, результаты работы вносят вклад в развитие методов расчета конструкций из несжимаемых материалов, подвергающихся абразивно-усталостному износу, и могут быть полезны для практического применения в различных отраслях промышленности.

Литература

1. *Penn R. W.* Volume Changes Accompanylug Extenslon of Rubber // Trans. Soc. Rheol. – 1970. – Vol. 14, № 4. – P. 507–517.

2. *Дымников С. И., Мейерс И. Р., Эрдманис А. Г.* Упругие потенциалы для слосжимаемых эластомерных материалов // Вопр. динамики и прочности. – 1983. – Вып. 40. – С. 98–108.

3. *Пиан Т., Ли С.* О методе конечных элементов для почти несжимаемых материалов // Ракетная техника и космонавтика. – 1976. – № 6. – С. 147–149.

4. *Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L.* Reduced integration technique in general analysis of plates and schells // Intern. J. Numerical Methods Eng. – 1971. – Vol. 3, № 3. – P. 275–290.

5. *Oden I. T., Kikuchi N.* Finite element methods for constrained problems in elasticity // Intern. J. Numer. Meth. Eng. – 1983. – Vol. 18, № 5. – P. 701–725.

6. *Кабриц С. А., Мальков В. М., Мансурова С. Е.* Нелинейные уравнения плоского слоя для трех моделей эластомерного материала // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 1. – С. 38–47.

7. Стецюк М. В., Луценко С. Н. Проблемы эксплуатации резиновой футеровки вибропитателей при добыче урановых руд // Геотехническая механика. – 2013. – Вып. 108. – С. 229–235.

8. *Кобец А. С., Дырда В. И., Калганков Е. В., Цаниди И. Н.* Энергетическая оценка износа антифрикционных материалов // Геотехническая механика. – 2012. – Вып. 106. – С. 78–90.

9. *Дырда В. И., Калашников В. А., Евенко С. Л., Маркелов А. Е., Хмель И. В., Стойко А.* Динамическая модель волнового абразивно-усталостного разрушения резиновой футеровки в барабанных мельницах // Геотехническая механика. – 2012. – Вып. 106. – С. 15–24.

10. *Гребенюк С. Н., Бова А. А., Юречко В. З.* Напряженно-деформированное состояние эластомерных конструкций при абразивно-усталостном износе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, вып. 4, ч. 1. – С. 455–463.

11. *Чижик Е. Ф., Дырда В. И.* Феноменологическая модель разрушения резины при абразивно-усталостном износе // Геотехническая механика. –1999. – № 11. – С. 226–256.

12. *Дырда В. И.* Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. – Киев : Наук.думка, 1988. – 232 с.

13. *Минаева Н. В., Сабынин Д. В.* О напряженно-деформированном состоянии стохастически неоднородной толстостенной трубы // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2021. – № 2. – С. 157–164.

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

С. А. Нестеров

Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН

Аннотация. Исследованы задачи оптимизации переменных термомеханических характеристик неоднородных тел. В качестве функционалов качества выступают либо функционал податливости, либо максимальное смещение, либо средняя температура. В качестве ограничений принято условие постоянства суммарного значения термомеханических характеристик либо их ограничение в некоторых пределах. Для решения задачи оптимизации модуля Юнга нагретого стержня применяется метод сопряженных уравнений и вариационный принцип Лагранжа. Метод возмущений применяется для решения задачи оптимизации коэффициента теплового расширения нагретой трубы. С учетом дополнительного ограничения снизу на коэффициент теплопроводности стержня с граничными условиями первого рода построено оптимальное решение без особых точек для управляющей функции.

Ключевые слова: модуль Юнга, коэффициент температурного расширения, коэффициент теплопроводности, стержень, труба, оптимизация, вариационный принцип Лагранжа, метод возмущений, неоднородный материал.

Введение

Функционально-градиентные материалы (ФГМ) по сравнению с традиционными материалами находят все более широкое применение для повышения термоустойчивости объектов, подвергающихся длительным термическим нагрузкам. ФГМ — это композиционные двухфазные материалы, созданные путем механического перемешивания металла и керамики, процентное содержание объемных фракций которых непрерывно меняется по объему [1]. В работах [1–3] рассмотрены различные технологии изготовления ФГМ с заданными свойствами, в том числе применение аддитивных технологий, методов порошковой металлургии, физического и химического осаждения слоев. Создание желаемых распределений смещений, напряжений и температуры в твердом теле путем оптимизации распределения внутри тела термомеханических характеристик — сложная и актуальная научно-техническая задача [3, 4].

Исследованию оптимизационных задач механики и теплопроводности посвящено достаточно большое число работ [4–12]. Так, в работах [5, 6] для поиска оптимальных распределений геометрических характеристик для минимизации веса и увеличения прочности применяются как аналитические, так и численные методы. Среди аналитических методов исследования оптимизационных задач важное место занимают: метод построения сопряженных уравнений на основе вариационного принципа Лагранжа [7]; метод возмущений (метод разложения по малому параметру) [8].

В работах [8, 9] представлены результаты оптимизации физических характеристик слоистых упругих и термоупругих тел, а в работах [10–12] — неоднородных упругих и теплопроводных тел со смешанными граничными условиями. Однако несколько важных с практической точки зрения оптимизационных задач термомеханики все еще не решены. Кроме того, не все оптимальные с математической точки решения можно реализовать на практике. Большой вопрос, например, вызывает случай, описанный в работе [12], когда коэффициент теплопроводности стержня обращается в нуль во внутренней точке, которую называют сингулярной. Однако эта особенность является недостатком, который на данный момент не исправлен.

Настоящее исследование посвящено построению аналитических решений ряда новых задач оптимизации переменных термомеханических характеристик, в том числе коэффициента температурного расширения и модуля Юнга стержня и трубы для смешанных граничных условий и при ограничениях управляющих функций на среднее значение или значение в некоторых пределах; коэффициента теплопроводности стержня с источником теплоты и одинаковой температурой на торцах и ограничениями на среднее и минимальное значение управляющей функции.

1. Оптимальное распределение модуля Юнга стержня

В качестве первого примера рассмотрим применение вариационного принципа Лагранжа для решения задачи оптимального распределения переменного модуля Юнга $E(x)$ неоднородного стержня, который нагревается с одного торца. Пусть на защемленном торце $x=0$ стержня поддерживается нулевая температура, а на свободном торце $x=l$ — тепловой поток q_0. В качестве функционала качества выступает жесткость системы (функционал податливости), а в качестве ограничения — среднее интегральное значение модуля упругости.

Задача несвязанной термоупругости сводится к задаче изотермической теории упругости с фиктивными массовыми $\frac{d}{dx}\big(\alpha(x)T(x)\big)$ и поверхностными $\alpha(l)T(l)$ силами. Пусть $T(x)=\frac{q_0}{k}x$ — распределение температуры по длине стержня. Коэффициент температурного расширения α считаем постоянным и равным α_0.

Вариационная обезразмеренная постановка задачи теории упругости для стержня с фиктивными силами имеет вид:

$$\frac{d}{dz}\left(\overline{E}(z)\frac{dU}{dz}\right)=Q_1,\quad 0\le z\le 1, \tag{1}$$

$$U(0)=0,\qquad \overline{E}(1)\frac{dU}{dz}(1)=Q_1, \tag{2}$$

$$\int_0^1 \overline{E}(z)dz=s_0, \tag{3}$$

$$J_1=\int_0^1 Q_1 U dz->min_{\overline{E}}. \tag{4}$$

Здесь $z=\frac{x}{l}$, $U=\frac{u}{l}$, $\overline{E}=\frac{E}{E_0}$, $Q_1=\frac{q_0 l}{k}\alpha_0$, E_0 — некоторое характерное значение модуля Юнга, k — коэффициент теплопроводности.

Пусть $v(z)$ — сопряженная функция, такая, что $v(0)=0$. Тогда слабая постановка задачи (1), (2) имеет вид:

$$L_0=\int_0^1 \overline{E}\frac{dU}{dz}\frac{dv}{dz}dz+Q_1\int_0^1 v(z)dz-Q_1 v(1), \tag{5}$$

Расширенный функционал Лагранжа, полученный путем присоединения к слабой постановке (5), функционала качества (4) и изопериметрического условия (3), умноженного на множитель λ, имеет вид:

$$L_1=Q_1\int_0^1 U(z)dz+\int_0^1 \overline{E}\frac{dU}{dz}\frac{dv}{dz}dz+Q_1\int_0^1 v(z)dz-Q_1 v(1)+\lambda\left(\int_0^1 \overline{E}(z)dz-s_0\right). \tag{6}$$

Согласно [12] выполним следующие действия: найдем первую вариацию функционала (6) и приравняем ее к нулю, далее воспользовавшись формулой интегрирования по частям, и группируя слагаемые по независимым вариациям $\delta\overline{E}$, δU, δv, получим:

а) постановку прямой задачи (1), (2);
б) постановку сопряженной задачи

$$\frac{d}{dz}\left(\overline{E}(z)\frac{dv}{dz}\right)=Q_1, \tag{7}$$

$$v(0)=0,\quad \overline{E}(1)\frac{dv}{dz}(1)=0; \tag{8}$$

в) условие оптимальности

$$\frac{dU}{dz}\frac{dv}{dz}+\lambda=0. \tag{9}$$

Выразив $\frac{dU}{dz}$ из задачи (1), (2), а $\frac{dv}{dz}$ из задачи (7), (8) и подставив их в (9), получим

$$\overline{E}(z)=\sqrt{\frac{Q_1 z(1-z)}{\lambda}}. \tag{10}$$

Подставив (10) в изопериметрическое условие (3), получим $\lambda=\frac{\pi^2 Q_1}{64 s_0}$.

Тогда выражение для оптимального распределения упругого модуля примет вид:

$$\overline{E}_{opt}(z)=\frac{8s_0}{\pi}\sqrt{z(1-z)}. \tag{11}$$

При значениях $s_0=Q_1=1$ проведено сравнение значений функционала (4) в случае однородного стержня $\overline{k}_{\text{hom}}=1,\ U_{\text{hom}}=\frac{z^2}{2}$ и неоднородного с оптимальным законом коэффициента теплопроводности (11). Выигрыш от оптимизации составил 18 %.

Из (11) следует, что управляющая функция $\overline{E}_{opt}(z)$ обращается в нуль в торцевых точках $z=0$ и $z=1$. Однако этот случай в принципе не является проблемой при практической реализации.

2. Оптимальное распределение коэффициента температурного расширения трубы

В качестве второго примера рассмотрим применение метода возмущений для решения задачи оптимизации радиального распределения коэффициента температурного расширения $\alpha(r)$ неоднородной трубы. Пусть на защемленной внутренней поверхности $r=r_1$ поддерживается нулевая температура, на внешней поверхности $r=r_2$ — тепловой поток q_0. В качестве функционала качества выступает радиальное смещение на внешней поверхности $r=r_2$, а в качестве ограничения — изменение коэффициента температурного расширения в некоторых пределах. Модуль Юнга E считаем постоянным, а распределение температуры по радиусу трубы имеет вид $T(r)=\frac{q_0 r_2}{k}\ln\frac{r}{r_1}$.

Вариационная обезразмеренная постановка задачи теории упругости для трубы с фиктивными силами имеет вид:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}(\xi U)\right)=q(\xi),\quad q(\xi)=Q_2\frac{d}{d\xi}\left(\overline{\alpha}(\xi)W(\xi)\right),\qquad \xi_0\le\xi\le 1, \tag{12}$$

$$U(\xi_0)=0,\quad \frac{dU}{d\xi}(1)+U(1)=Q_2\overline{\alpha}(1)\ln 1, \tag{13}$$

$$\alpha_{\min}\le\overline{\alpha}(\xi)\le\alpha_{\max}, \tag{14}$$

$$J_2=U(1)->min_{\alpha}. \tag{15}$$

Здесь $\xi = \frac{r}{r_2},\ \xi_0 = \frac{r_1}{r_2},\ U = \frac{u}{r_2},\ \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0},\ W = \alpha_0 T,\ Q_2 = (1+\nu)\alpha_0 \frac{q_0 r_2}{k}$.

В предположении о слабой неоднородности материала согласно [7, 12] полагаем

$$\bar{\alpha}(\xi) = 1 + \delta f(\xi), \quad U(\xi) = U_0 + \delta U_1, \quad \delta = \frac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{\alpha_{max} + \alpha_{min}}, \quad 0 < \delta < 1. \tag{16}$$

Подставив (16) в (12), (13), и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра δ, получим следующие задачи для нулевого и первого приближений.

При δ^0:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}(\xi U_0)\right) = Q_2 \frac{d}{d\xi}\left(\ln\frac{\xi}{\xi_0}\right), \quad \xi_0 \le \xi \le 1, \tag{17}$$

$$U_0(\xi_0) = 0, \quad \frac{dU_0}{dr}(1) + U_0(1) = Q_2 \ln \xi_0^{-1}, \tag{18}$$

решением которой является функция

$$U_0(\xi) = \frac{Q_2}{2\xi} \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2. \tag{19}$$

При δ^1:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}(\xi U_1)\right) = Q_2 \frac{d}{d\xi}\left(f(\xi)\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)\right), \qquad \xi_0 \le \xi \le 1, \tag{20}$$

$$U_1(\xi_0) = 0, \quad \frac{dU_1}{d\xi}(1) + U_1(1) = Q_2 f(1) \ln \xi_0^{-1}, \tag{21}$$

решением которой является функция

$$U_1(\xi) = \frac{Q_2}{\xi} \int_{\xi_0}^{\xi} \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \frac{f(\xi)}{\xi} \xi d\xi. \tag{22}$$

Согласно [12] для функции $f(\xi)$ установим следующие ограничения:

$$\int_{\xi_0}^{1} f(\xi)\xi d\xi = 0, \quad |f(\xi)| \le 1, \quad \int_{\xi_0}^{1} \left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 \xi d\xi \le C_0^2. \tag{23}$$

Расширенный функционал, полученный путем присоединения к (15), первого и третьего условий из (23), умноженных на множители Лагранжа λ_1 и λ_2 соответственно, имеет вид:

$$L_2 = Q_2 \int_{\xi_0}^{1} \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \frac{f(\xi)}{\xi} \xi d\xi + \lambda_1 \int_{\xi_0}^{1} f(\xi)\xi d\xi + \lambda_2 \int_{\xi_0}^{1} \left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 \xi d\xi. \tag{24}$$

Из условия стационарности функционала (24) следует постановка краевой задачи для нахождения $f(\xi)$:

$$f'' = -\frac{1}{2\lambda_2}\left(\frac{Q_2}{\xi}\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) - \lambda_1\right), \quad f'(\xi_0) = 0, \quad f'(1) = 0. \tag{25}$$

Постоянная λ_1 определяется из условия $\int_{\xi_0}^{1} \left(\frac{Q_2}{\xi}\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) - \lambda_1\right)\xi d\xi = 0$, а постоянная λ_2 должна удовлетворять неравенству $|f(\xi)| \le 1$.

Отсюда следует, что:

$$f(\xi)=Q_2\left(\frac{\xi\ln^2\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)}{2}-\xi\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)+\xi-\frac{\ln^2\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)}{4(1-\xi_0)}\right). \quad (26)$$

Относительный выигрыш по функционалу (15), рассчитанный по формуле $\frac{U_1(1)}{U_0(\xi_0)}\delta\cdot 100\,\%$ составляет 43δ %.

3. Оптимальное распределение коэффициента теплопроводности стержня

В качестве третьего примера рассмотрим задачу теплопроводности для неоднородного стержня длины l с тепловыми источниками ϑ, на обоих торцах которого задана одинаковая температура.

Рассмотрим подход к оптимизации переменного коэффициента теплопроводности стержня, при котором управляющая функция нигде в нуль не обращается. Будем искать такую функцию $k(x)$, которая удовлетворяет следующим двум условиям: изопериметрическому условию и ограничению снизу. В качестве функционала качества выступает средняя интегральная температура.

Обезразмеренная постановка вариационной задачи теплопроводности для стержня имеет вид [12]:

$$\frac{d}{dz}\left(\overline{k}(z)\frac{dW}{dz}\right)+\vartheta=0,\quad 0\le z\le 1, \quad (27)$$

$$W(0)=W(1)=0, \quad (28)$$

$$\int_0^1\overline{k}(z)dx=k_0, \quad (29)$$

$$\overline{k}(z)\ge k_{\min}, \quad (30)$$

$$J_3=\int_0^1 W(z)dz->min_{\overline{k}}. \quad (31)$$

Без учета неравенства (30) поставленная задача решена в работе [12]. Однако такая постановка задачи является сингулярной, т. к. производная $\frac{dW}{dz}$ терпит скачок 1-го рода в особой точке (в центре стержня), в которой коэффициент теплопроводности обращается в нуль. Осуществим построение оптимального решения без особой точки, учтя дополнительное ограничение снизу на управляющую функцию (30).

Дополнительное условие (30) будет выполнено, если ввести функцию $c^2(z)=\overline{k}(z)-k_{\min}\ge 0$.

Рассмотри следующий функционал:

$$J=\int_0^1\chi(z)\left(c^2(z)-\overline{k}(z)+k_{\min}\right). \quad (32)$$

Пусть λ_3 и χ — множители Лагранжа. Составим расширенный функционал путем сложения (32) с функционалом (31) и изопериметрическим условием (29), умноженным на λ_3. Находя стационарное значение расширенного функционала, получим:

а) уравнение теплопроводности (27);

б) модифицированное условие оптимальности

$$(W')^2=\lambda_3-\chi(z); \quad (33)$$

в) дополнительное условие на функции $\chi(z)$ и $c(z)$ в виде

$$\chi(z)c(z)=0. \tag{34}$$

Функция $c(z)$ введена таким образом, что обращается в нуль в области, где срабатывает ограничение $\overline{k}(z)\ge k_{\min}$. В этой области $\overline{k}(z)=\text{const}$ и поэтому можно построить аналитическое решение задачи. Из (34) следует, что в оставшейся части стержня $\chi(z)=0$. Следовательно (33) упрощается до ранее используемого в [12] условия оптимальности $(W')^2=\lambda_3$. Это условие позволяет путем интегрирования найти общий вид функций $W(z)$, $\overline{k}(z)$. Поскольку коэффициент теплопроводности не обращается в нуль, то исключаются случаи, при которых W' терпит скачки (из соображений непрерывности теплового потока).

В силу симметрии граничных условий будем искать симметричные относительно середины отрезка решения в виде:

$$\overline{k}_{opt}=\begin{cases}\overline{k}_1(z), z<z_0\\ \overline{k}_2(z), z_1\le z\le 0.5\end{cases},\quad W_{opt}=\begin{cases}W_1(z), z<z_0\\ W_2(z), z_0\le z\le 0.5\end{cases}. \tag{35}$$

где $W_1(z)=z$, $W_2(z)=\dfrac{1}{k_{\min}}\left(-\dfrac{\vartheta z^2}{2}+a_1z+a_2\right)$, $\overline{k}_1(z)=-\vartheta z+a_3$, $\overline{k}_2(z)=k_{\min}$.

За счёт выбранной структуры решения граничное условие $W(0)=0$ удовлетворяются автоматически. Для нахождения неизвестных a_1, a_2, a_3, z_0 выпишем условия сопряжения по температуре и тепловому потоку:

$$W_1(z_0)=W_2(z_0),\quad \overline{k}_1(z_0)W_1'(z_0)=\overline{k}_2(z_0)W_2'(z_0), \tag{36}$$

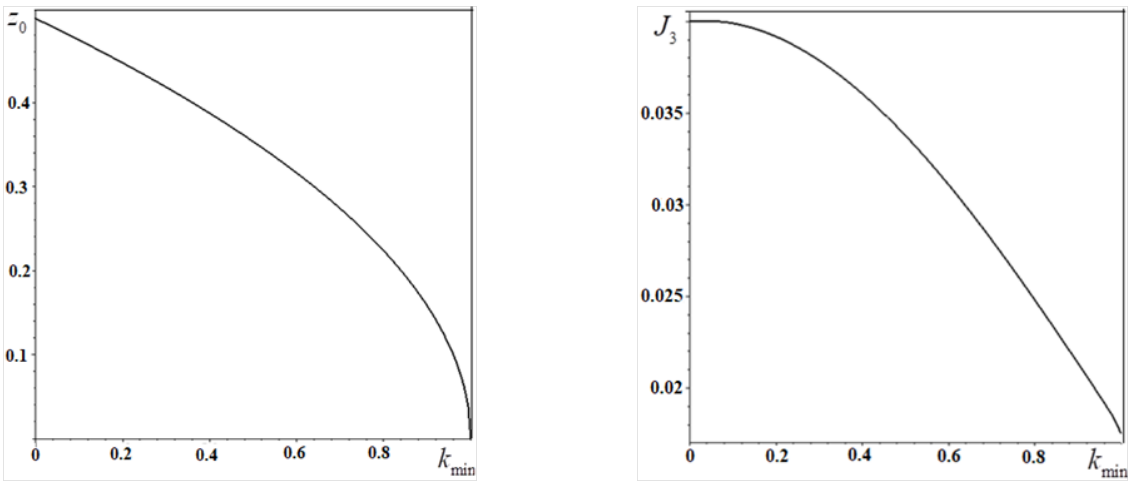
а также условие непрерывности коэффициента теплопроводности в точке сопряжения и изопериметрическое условие (30)

$$\overline{k}_1(z_0)=k_{\min},\quad \int_0^{z_0}\overline{k}_1(z)dz+k_{\min}(0.5-z_0)=\frac{k_0}{2}. \tag{37}$$

Для различных значений $k_{\min}$ при $k_0=\vartheta=1$ найдены: точка сопряжения z_0, коэффициент теплопроводности, температура и функционал качества (31).

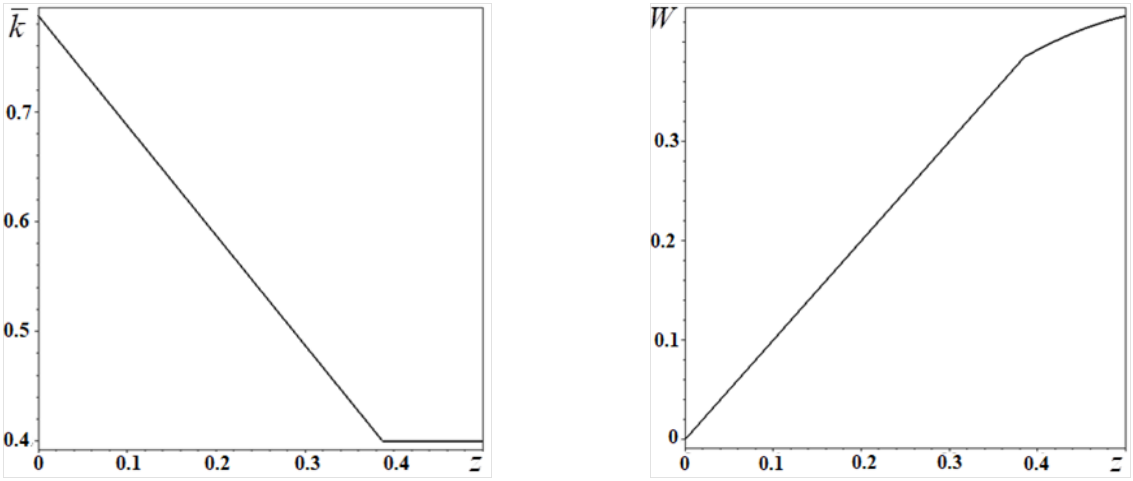
На рис. 1 представлены график зависимости: а) точки сопряжения z_0; б) функционала качества (31) от нижнего ограничения $k_{\min}$.

На рис. 2 приведено оптимальное распределение: а) закона изменения коэффициента теплопроводности $\overline{k}(z)$; б) температуры $W(z)$ при $k_{\min}=0.4$, $k_0=1$, $\vartheta=1$.



а) *б)*

Рис. 1. График зависимости параметров от нижнего ограничения $k_{\min}$: точки сопряжения (а); функционала качества J_3 (б)



а) *б)*

Рис.2. График оптимального распределения по координате z: коэффициента теплопроводности (а); температуры (б)

Заключение

Рассмотрены новые задачи оптимизации термомеханичских характеристик неоднородных тел. Задача термоупругости для стержня со смешанными граничными условиями решалась на основе вариационного метода Лагранжа; для трубы — метода возмущений; задача теплопроводности для стержня с источником теплоты и одинаковой температурой на торцах — путем введение ограничения снизу на управляющую функцию и нового функционала, позволяющего построить оптимальное решение, которое не обращается в нуль внутри стержня. Проведенные расчеты показали, что уменьшение значений функционалов качества составляло более 18 % в случае оптимальных законов распределения термомеханических характеристик по сравнению с их постоянными значениями.

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, https://rscf.ru/project/22-11-00265/ в Южном федеральном университете.

Литература

1. *Birman V.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L. W. Byrd // Applied Mechanics Reviews. – 2007. – Vol. 60(5). – P. 195–216.

2. *Быков Ю. В.* Создание маталлокерамических функционально-градиентных материалов спеканием при микроволновом нагреве / Ю. В. Быков, С. В. Егоров, А. Г. Еремеев и др. // Физика и химия обработки материалов. – 2011. – № 4. – С. 52–61.

3. *Wetherhold R. C.* The Use of Functionally Graded Materials to Eliminated or Control Thermal Deformation / R. C. Wetherhold, S. Seelman, J. Wang // Composites Science and Technology. – 1996. – № 56. – P. 1099–1104.

4. *Tong Z.-X.* Optimizing thermal conductivity distribution for heat conduction problems with different optimization objectives / Z.-X. Tong, M.-J. Li, J.-J. Yan, W.-Q. Tao // International Journal of Heat Mass Transfer. – 2018. – Vol. 119. – P. 343–354.

5. *Павлов С. П.* Оптимизация формы термоупругих тел / С. П. Павлов, В. А. Крысько. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. – 160 с.

6. *Кунташев П. А.* О некоторых свойствах оптимальных термоупругих проектов при фиксированных полях напряжений или деформаций / П. А. Кунташев, Ю. В. Немировский // Прикладная математика и механика. – 1985. – Т. 49, № 3. – С. 476–484.

7. *Братусь А. С.* Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций / А. С. Братусь, В. М. Картвелишвили // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 6. – С. 119–139.

8. *Баничук Н. В.* Оптимизация формы упругих тел / Н. В. Баничук. – Москва: Наука, 1980. – 255 с.

9. *Алехин В. В.* Проектирование поперечно-слоистой консоли минимальной массы при ограничении на максимальный прогиб / В. В. Алехин // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, №4. – С. 104–110.

10. *Rammerstorfer F. G.* On the optimal distribution of the Young's modulus of a vibrating prestressed beam / F. G. Rammerstorfer // Journal of Sound and Vibration. – 1974. – Vol. 37. – P. 140–145.

11. *Warner W. H.* Optimal Design Problems for Elastic Bodies by Use of the Maximum Principle / W. H. Warner // Journal of Elasticity. – 2000. – Vol. 59. – P. 357–367.

12. *Ватульян А. О.* Некоторые аналитические решения в задачах оптимизации переменного коэффициента теплопроводности / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Владикавказский математический журнал. – 2024. – Т. 26, № 3. – С. 33–46.

УДК 539.3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ПОЛОСТИ

В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, В. В. Затонская

Липецкий государственный технический университет

Аннотация. Термоэластостатическое состояние многополостного тела описано набором определяющих соотношений среды. Представлена разрешающая система уравнений. Описаны наборы характеристик, содержащихся в элементах изоморфных гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний тела. Скалярные произведения изоморфных пар элементов из обоих пространств равны между собой (гильбертов изоморфизм). Проведены оценки состояний двухполостного шара, подверженного давлению и потокам тепла изнутри полостей. Выполнены и прокомментированы расчеты.
Ключевые слова: термоэластостатика, метод граничных состояний, МГС, сферические полости, многополостность, краевые задачи термоупругости.

Введение

Работа посвящена исследованию влияния термических воздействий на напряженно-деформированное состояние (НДС) равновесной термоупругой среды и является развитием темы [1]. Круг задач, ведущих к достижению цели:

1) описание внутреннего состояния термоупругой среды и ему соответствующего граничного состояния;

2) формирование базиса пространства состояний двухполостного ограниченного тела;

3) развитие аппарата метода граничных состояний (МГС) к решению классических задач термоэластостатики (ТЕ-задач) многосвязных тел;

4) решение конкретных задач для кругового цилиндра со сферическими полостями.

1. Описание состояния термоэластостатической среды

Набор определяющих соотношений, описывающих термоэластостатическое состояние 3D-тела V с границей ∂V описывается определяющими соотношениями [2], содержащими 16 уравнений:

$$T_{,ii} + \frac{1}{\kappa} Q = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\theta\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\,T\,\delta_{ij}, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0. \tag{4}$$

Уравнение Пуассона (1) отвечает за распределение температуры T во внутренних точках $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in V$; здесь κ — параметр температуропроводности, Q — объемная плотность тепловых источников. Соотношения Коши (2) выражают компоненты тензора деформаций ε_{ij} через составляющие вектора перемещений u_i линейной упругой изотропной среды. Закон Дюамеля — Неймана (3) обобщает закон Гука на предмет учета температурных деформаций: $\theta = \varepsilon_{kk}$ — объемная упругая деформация, λ, μ — упругие параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера, α — параметр температурного расширения среды. Уравнениями равновесия (4) приведены при учете объемных сил X_i произвольной физической природы.

Частные решения, отвечающие регулярным силам X_i и теплоисточникам Q строятся эффективно [3], поэтому неоднородные составляющие линейной системы уравнений (1)–(4) можно из рассмотрения исключить. Разрешающий набор дифференциальных уравнений при отсутствии неоднородных составляющих уравнений $(X_i = 0,\ Q = 0)$ состоит из системы уравнений Ламе и уравнения Лапласа:

$$\begin{gathered} \mu\, u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,i} = 0, \\ T_{,ii} = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Это — замкнутая разрешающая система уравнений в частных производных эллиптического типа относительно температуры и перемещений.

Описываем температурное состояние тела избыточным набором согласованных характеристик, совокупность всех вариантов их наборов $\xi^T = \{T, T_{,i}\} \in \Xi^T$ образует термостатическое пространство внутренних состояний. Ему изоморфно пространство граничных состояний с элементами $\gamma^T = \left\{T, \dfrac{dT}{d\mathbf{n}}\right\} \in \Gamma^T$. Аналогичный подход используем для представления пространств состояний упругой среды: $\xi^E = \{u_i^E, \varepsilon_{ij}^E, \sigma_{ij}^E\} \in \Xi^E$, $\gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E$. Здесь символом E помечены характеристики состояний, отвечающих обобщенному закону Гука $\sigma_{ij}^E = \lambda \sigma_{kk}^E\ \delta_{ij} + 2\mu\ \varepsilon_{ij}^E$. В целом характеристики состояния учитывают как «приобретенные» температурные деформации $\varepsilon_{ij}^T = \alpha T \delta_{ij}$ и «потерянные» напряжения, $\sigma_{ij}^T = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}$:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^T,\ \ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E + \sigma_{ij}^T.$$

Соответствующее граничное состояние имеет характеристики $\gamma = \{u_i^E, u_i^T, p_i^E, p_i^T, T, dT/d\mathbf{n}\} \in \Gamma$, $\gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E$.

Пространства Ξ, Γ являются гильбертовыми со скалярными произведениями $(a, b > 0)$

$$(\xi^m, \xi^n)_\Xi = a(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E + b(\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_T,$$

$$(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E = \int_V \sigma_{ij}^{E(m)} \varepsilon_{ij}^{E(n)} dV, \quad (\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_T = \int_V T_{,i}^{(m)} T_{,i}^{(n)} dV.$$

— в пространстве внутренних состояний Ξ, и

$$(\gamma^m, \gamma^n)_\Xi = a(\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E + b(\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_T,$$

$$(\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E = \int_{\partial V} p_i^{(m)} u_i^{(n)} dS, \quad (\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_T = \int_{\partial V} T^{(m)} \frac{dT^{(n)}}{d\mathbf{n}}\ dS$$

— в пространстве граничных состояний Γ. Для изоморфных пар элементов пространств $\Xi \leftrightarrow \Gamma$ справедливо равенство

$$(\xi^{(m)}, \xi^{(n)})_\Xi = (\gamma^{(m)}, \gamma^{(n)})_\Gamma.$$

Скалярные произведения предназначены для ортогонализации базисов обоих пространств, которую можно проводить как в Ξ, так и в Γ.

Любой элемент гармонического базиса порождает три состояния пространства Ξ^E (следствие общих решений Аржаных — Слободянского [2]), и независимо от этого, один элемент пространства Ξ^T. Их «чистка» [4] формирует базисы соответствующих пространств, используемых в МГС [5]. Следовательно, каждый элемент пространства гармонических функций позволяет построить три элемента вида $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, 0, 0\} \in \Xi$ и один элемент вида $\xi = \{u_i^T, \varepsilon_{ij}^T, \sigma_{ij}^T, T, T_{,i},\} \in \Xi$, где символом T помечены частные решения от объемных сил теплового характера.

После ортогонализации базиса, использования разложения Фурье

$$\xi = \sum_k c_k \xi^{(k)},\ \gamma = \sum_k c_k \gamma^{(k)} \tag{6}$$

и обработки граничных условий система уравнений (1), (5) приводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье c_j

$$\sum_j a_{kj} c_j = b_k, \tag{7}$$

где коэффициенты a_{kj} определяются через поверхностные интегралы от базисных элементов $\gamma^{(k)}, \gamma^{(j)}$ либо через объемные интегралы от $\xi^{(k)}, \xi^{(j)}$, а правые части используют кроме $\gamma^{(k)}$ еще и содержимое граничных условий.

Решение усеченной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (БСУ) проводится с учетом двух факторов: 1) насыщение суммы Бесселя; 2) невязка построенного граничного состояния с условиями на границе тела.

Классические варианты краевых задач ТЕ-среды исходят из формулирования ГУ для равновесной упругости и термостатики: «1», «2» означают соответственно первую и вторую задачи теории упругости, «D», «N» — условия Дирихле и Неймана. Легко понимается смысл основных задач термоупругости, обозначаемых как «1D», «1N», «2D», «2N». Нетрудно понять смысл аббревиатуры смешанных задач «12D», «1DN» и др.

2. Термоэластостатическое состояние двухполостного шара

Нижеизложенное представлено в обезразмеренной форме. Шар радиуса $R_1 = 1$ содержит центральную полость радиуса $R_2 = 1/2$ и «возмущающую» полость радиуса $R_3 = 1/8$, расположенную в позиции $\{0, 0, 3/4\}$ (рис. 1).

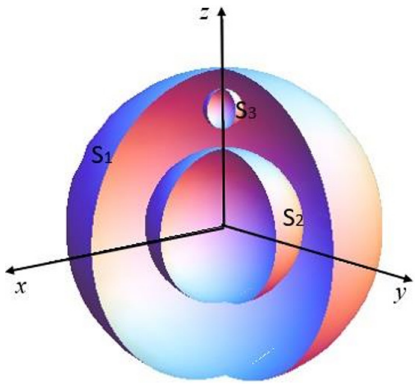


Рис.1. Шар с двумя полостями

Обе полости являются источниками тепла либо холода. Потоки тепла через границы S_1, S_2, S_3 полагаются равномерными с интенсивностями $T_{nk} = \dfrac{dT}{d\mathbf{n}_k}$, $k \in \{1,2,3\}$. При вычислениях принимались значения $T_{n1} = \mp\frac{65}{64}$, $T_{n2} = \pm 4$, $T_{n3} = \pm 1$. Значения тепловых потоков отвечают условию стационарности температурного поля в теле: количество тепла в теле V не меняется с течением времени и, следовательно, имеет место баланс температуры (1). Полагается отсутствие объемных теплоисточников $(Q = 0)$. Верхние знаки в T_{nk} отвечают источникам тепла, нижние — источникам холода.

Кроме тепловых полости оказывают на тело механические воздействия давлением интенсивности $p_0 = 1$. Внешняя граница свободна от нагрузки.

Набор граничных условий характеризует краевую задачу как задачу класса «1N»:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = T_{nk}, (x,y,z) \in S_k, \quad \mathbf{p} = \begin{cases} 0, (x,y,z) \in S_1, \\ p_0, (x,y,z) \in S_2, \\ p_0, (x,y,z) \in S_3. \end{cases}$$

Для проведения решения средствами МГС были сформированы и ортонормированы отрезки базисов пространств состояний Ξ^T, Ξ^E количеством 180 и 35 единиц соответственно и выполнены решения задачи Неймана для уравнения Лапласа и первой основной задачи для уравнений Ламе. Суммирование механических характеристик привело к построению полей перемещений, деформаций, напряжений в упругом теле (параметры Ламе $\lambda = \mu = 1$ при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/4, \alpha = 0.2$). На рис. 2 представлены распределения температуры в обоих вариантах теплового воздействия; фрагменты осевых купюр полей вблизи «возмущающей» полости показаны укрупненно.

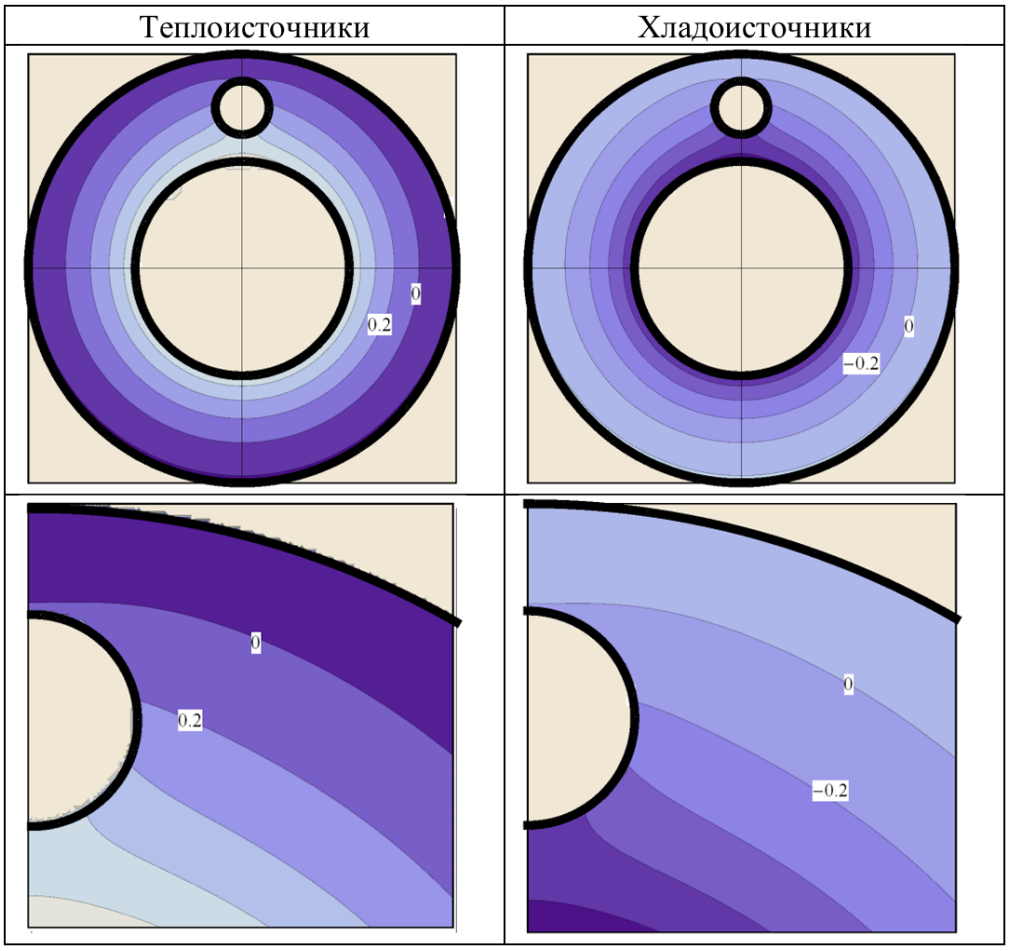


Рис. 2. Распределение температуры при источниках тепла и холода

Температурные поля от тепло- и хладоиточников имеют противоположные характеры. Эти же диаграммы в соответствующих масштабах отвечают характерам распределения «приобретенных деформаций» и «потерянных напряжений». Фрагмент диаграммы, выделенной вблизи «возмущающей» полости, более качественно иллюстрирует окрестные температурные и напряженно-деформационные характеристики, обусловленные внешними тепловыми воздействиями.

На рис. 3 для обоих вариантов тепловых воздействий приведены купюры, поясняющие распределение радиальных $\sigma_r = \sigma_{xx}\big|_{y=0}$, окружных $\sigma_\theta = \sigma_{yy}\big|_{y=0}$, осевых $\sigma_z = \sigma_{zz}\big|_{y=0}$, сдвиговых $\sigma_{rz} = \sigma_{xz}\big|_{y=0}$ напряжений в осесимметричном теле.

Анализ полей напряжений ТЕ-состояний позволяет сделать конкретные выводы:

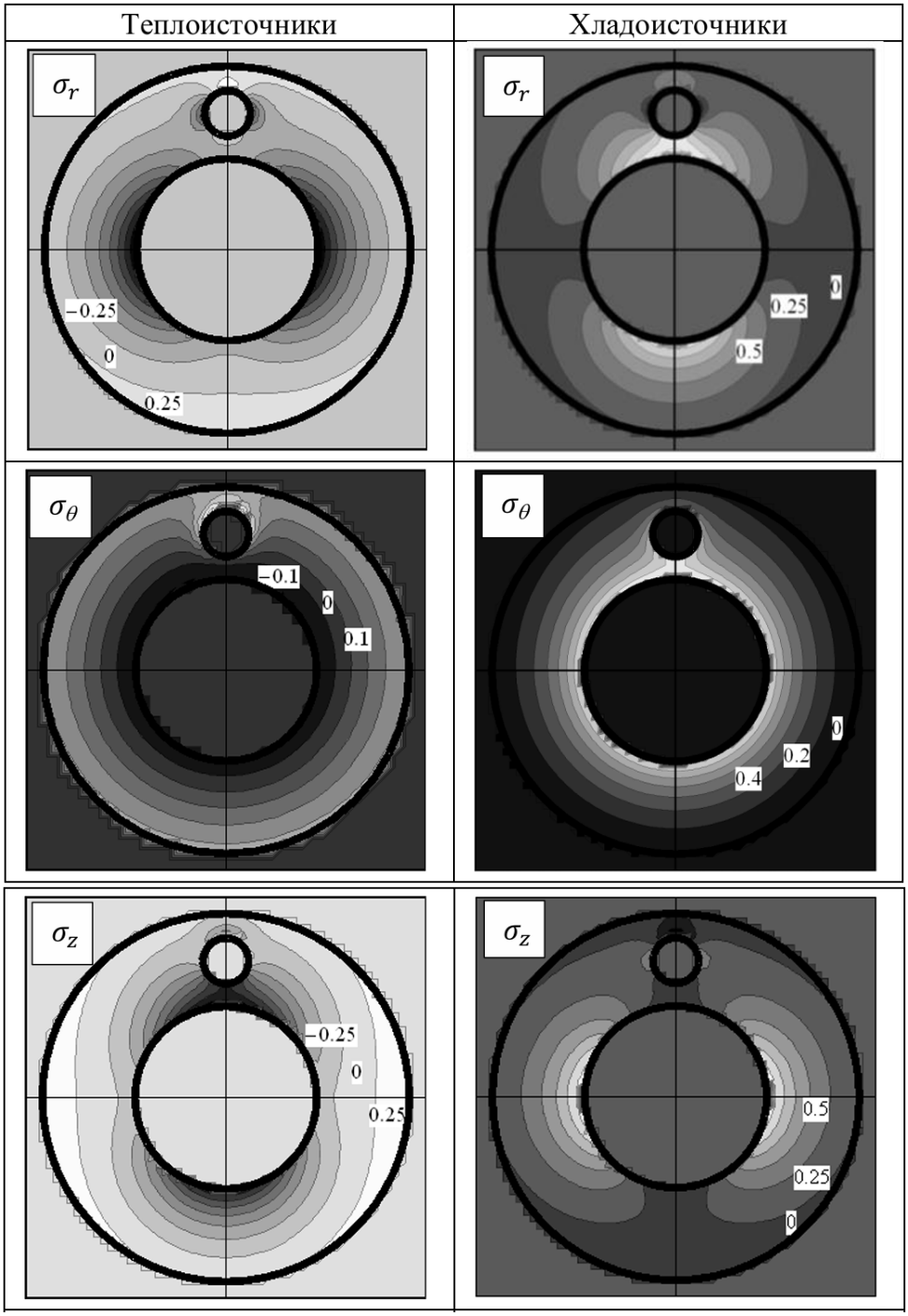
1) радиальные напряжения σ_r вблизи экватора центральной полости при теплоисточниках имеют естественный характер: убывающее сжатие радиальных волокон при перемещении от полости в внешней границе; при охлаждении они незначительны. По-видимому, это вызва-

но наличием «возмущающей» полости. радиальные волокна в слое между полостями удлиняются слабо при теплоисточниках и весьма существенно при источниках холода;

2) поля окружных напряжений σ_θ получают существенные искажения воздействием «возмущающей» полости: при нагреве окружные волокна существенно удлиняются в слое между полостями, при охлаждении — между внешней границей и S_3;

3) осевые напряжения σ_z — существенно сжимающие вблизи полюсов и слабо сжимающие при воздействии хладоисточников. Вблизи экватора внешней границы он приобретают существенный растягивающий характер, но при охлаждающих воздействиях удлинения волокон незначительны. Вблизи оси симметрии тела между S_3 и S_1 осевые напряжения незначительны;

4) напряжения сдвига σ_{rz} имеют классический упругий характер. Они от температурных воздействий не зависят.



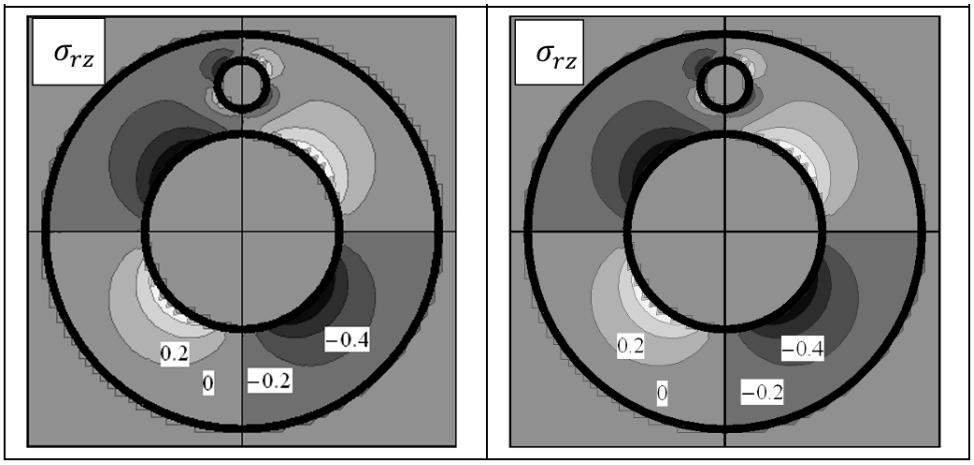


Рис. 3. Распределение радиальных, окружных, осевых, сдвиговых напряжений

Заключение

Проведенные исследования состояния двухполостного шарового тела позволяют сделать ряд выводов.

1. Набор определяющих соотношений (1)–(4) термоэластостатики является замкнутым и позволяет сформировать структуры внутренних и граничных состояний для многополостного тела.

2. Разрешающие уравнения (5) для ТЕ-статики порождают эффективный способ формирования изоморфных счетных базисов гильбертовых пространств состояний многополостного тела. Гильбертов изоморфизм, обусловленный равенством скалярных произведений для изоморфных пар элементов пространств внутренних и граничных состояний ТЕ-тела позволяет эффективно проводить ортогонализацию базисов $\Xi \leftrightarrow \Gamma$.

3. Выполнен численно-аналитический анализ ТЕ-состояния двухполостного тела (шара с двумя сферическими полостями). результаты расчетов проиллюстрированы и прокомментированы. Отмечено существенное искажение полей внутренних состояний наличием «возмущающей» полости малого диаметра при двух вариантах потоков температурных воздействий на тело со стороны обеих полостей.

Ближайшие перспективы исследований просматриваются в планах варьирования уровней температурных воздействий, в допущении температурных воздействий альтернативного характера (одна полость — нагревающая, вторая — охлаждающая), в варьировании распределения потоков от теплоисточников через границы тела, в отклонении в постановках задач от цилиндрической симметрии.

Литература

1. *Penkov V. B.* An Effective Method for Assessing the Thermoelastostatic State of the Cavity Body / V. B. Penkov, L. V. Levina, M. Yu. Levin // 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2023. – 2023. – P. 165–170.

2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М. : Наука, 1979. – 744 с.

3. *Пеньков В. Б.* Метод опорного базиса построения частного решения линейного неоднородного операторного уравнения математической физики / В. Б. Пеньков, Л. В. Левина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2022. – № 3. – С. 91–101.

4. *Пеньков В. Б.* Эффективный статистический метод организации базиса пространства состояний эластостатического 3D-тела / В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, Г. С. Наумова, С. А. По-

номарев // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – № 7. – С. 72–77.

5. *Пеньков В. Б.* Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости / В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина. – Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. – 108 с.

6. *Penkov V. B.* The use of the method of boundary states to analyse an elastic medium with cavities and inclusions / V. B. Penkov, L. V. Satalkina, A.S. Shulmin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – Vol 78, No 4. – P. 384–394.

УДК 539.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ — МИТЧЕЛЛА

К. Н. Пестов[1], М. А. Гузев[2], О. Н. Любимова[3]

[1]Владивостокский филиал Российской таможенной академии
[2]Институт прикладной математики ДВО РАН
[3]Дальневосточный федеральный университет

Аннотация. В работе получен ковариантный вид уравнений Бельтрами-Митчелла, позволяющий прояснить их геометрический смысл. Перспектива дальнейших исследований связана с новыми модельными представлениями в механике деформируемого твердого тела в рамках римановой геометрии.
Ключевые слова: уравнения Бельтрами — Митчелла, тензор Риччи, условия совместности Сен-Венана.

Введение

Актуальность работы определяется прежде всего проблемой теоретического описания особенностей динамики локализации деформаций и дефектов в материалах со сложной реологией. Новые теоретические представления о поведении материалов, содержащих дефекты, а следовательно, и нетипичные сложные структурно-геометрические особенности, связаны прежде всего с неклассическими подходами к моделированию физической среды. С конца прошлого века в работах А. Кадич, Д. Эделен, В. Е. Панина, С. К. Годунова, В. П. Мясникова и М. А. Гузева сложилось новое направление в конструировании новых моделей для описания структурно-деформационных особенностей механического поведения различных материалов на основе неевклидовой геометрии, неравновесной термодинамики и методологии механики сплошной среды с изменением гипотезы о совместности деформаций. В исследованиях [1–3] в рамках неевклидовой модели в механики получены новые модельные уравнения, в работах [4–5] на их основе получены аналитические зависимости проясняющие феномен зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки. При изучении предлагаемого нового направления в рамках подходов римановой геометрии, авторами работы, замечены простые и естественные выводы некоторых известных уравнений механики твердого тела. Например, стандартных уравнений Бельтрами — Митчелла, которые выводятся из уравнений совместности Сен-Венана [6], в том числе, и для римановых пространств путем преобразований компонент тензора Римана [7] или вариационного принципа Кастильяно [8]. В данной работе эти уравнения получаются естественным образом при вычислении компонент тензора Риччи сплошной среды в деформированном состоянии. Известно, что для трехмерного пространства тензор кривизны Римана полностью определяется тензором Риччи [9]. Причем в трехмерном пространстве независимых компонент тензора кривизны Римана всего 6 из 81. Тензор Риччи представляет собой симметричный тензор второго ранга, у которого так же 6 (в трехмерном пространстве) независимых компонент, получаемый сверткой двух индексов в тензоре кривизны. Несмотря на то, что для классических моделей оба этих тензора равны нулю, выражение тензора Риччи в деформациях или напряжениях может быть полезно в расширении этих моделей на римановы многообразия.

1. Тензор Риччи в терминах деформаций и напряжений

Пусть сплошная среда в недеформированном состоянии (отчетной конфигурации) описывается системой координат с компонентами метрического тензора g_{ij} и компонентами связности Леви-Чивита Γ^i_{kl}. Тензор Риччи в данном случае тривиален

$$\hat{R} = 0.$$

В деформированном состоянии (актуальной конфигурации) компоненты метрического тензора и компоненты связности, ассоциированной с этой метрикой, порождают тензор Риччи с компонентами

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^i} + \tilde{\Gamma}^i_{km}\tilde{\Gamma}^m_{ji} - \tilde{\Gamma}^i_{im}\tilde{\Gamma}^m_{jk},$$

где компоненты связности Леви-Чивита равны

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \tilde{g}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{g}_{kl}}{\partial x^m}\right), \quad \tilde{g}_{ij} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}.$$

Компоненты метрических тензоров актуальной и отчетной конфигурации связаны через компоненты тензора деформации

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}.$$

Прямое вычисление тензора Риччи в первом порядке по деформациям дает

$$\hat{R} = \Delta\hat{\varepsilon} + \nabla\nabla Tr(\hat{\varepsilon}) - \nabla\left(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}\right) - \left(\nabla\left(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}\right)\right)^T,$$

где $Tr(\hat{\varepsilon})$ — след тензора деформаций, $(\nabla(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}))^T$ — тензор, транспонированный к $\nabla(\nabla\cdot\hat{\varepsilon})$. Если закон Гука записать через параметры Ламэ в виде

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}\left(\hat{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}Tr(\hat{\sigma})\hat{g}\right),$$

то подставляя его в тензор Риччи, получается

$$\hat{R} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\hat{g}\Delta Tr(\hat{\sigma}) + \Delta\hat{\sigma} - \nabla(\nabla\cdot\hat{\sigma}) - \left(\nabla\left(\nabla\cdot\hat{\sigma}\right)\right)^T\right].$$

2. Тензор Риччи в терминах деформаций и напряжений

При выполнении уравнений равновесия

$$\nabla\cdot\hat{\sigma} + \vec{F} = 0,$$

где $\vec{F}$ — вектор объемных сил, тензор Риччи примет вид

$$\hat{R} = \frac{1}{2\mu}\left[\Delta\hat{\sigma} + \left(\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\right)\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\hat{g}\Delta Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\vec{F} + \left(\nabla\vec{F}\right)^T\right].$$

При этом скалярная кривизна будет иметь вид

$$R = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\Delta Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\cdot\vec{F}\right].$$

В классической постановке тензор Риччи для актуальной конфигурации так же считается равным нулю (сплошная среда погружена в трехмерное евклидовое пространство). Используя условие равенства кривизны нулю, в компонентах тензора Риччи можно исключить слагаемое с $\Delta Tr(\hat{\sigma})$.

Равенство нулю тензора Риччи и есть уравнения Бельтрами — Митчелла

$$\hat{R} = \frac{1}{2\mu}\left[\Delta\hat{\sigma} + \left(\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\right)\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\vec{F} + \left(\nabla\vec{F}\right)^T + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}\right] = 0,$$

или в более привычных технических константах E и ν

$$\Delta\hat{\sigma}+\frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})=-\nabla\vec{F}-\left(\nabla\vec{F}\right)^{T}-\frac{\nu}{1-\nu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}.$$

Так как для тензора Риччи справедливо дифференциальное тождество Бьянки [9]

$$\nabla\cdot\hat{R}=\frac{1}{2}\nabla R,$$

то очевидно, что и уравнения Бельтрами — Митчелла не являются полностью независимыми. В общем случае существует три независимых дифференциальных тождества на эти уравнения.

Заключение

Получена ковариантная связь в линейном приближении тензора Риччи с тензором деформаций, а для линейной упругой среды с тензором напряжений. Показано, что классические уравнения Бельтрами — Митчелла совпадают с условием евклидовости материального континуума, записанного для трехмерного пространства в терминах тензора Риччи.

Литература

1 *Гузев. М. А., Мясников В. П.* Неевклидова структура поля внутренних напряжений сплошной среды //Дальневост. матем. журн. – 2001. – 2:2. – С. 29–44.

2. *Guzev M. A.* The Affine-Metric Structure of an Elastoplastic Model of a Continuum // Proc. Steklov Inst. Math. – 1998. – 223. – P. 23–30.

3. *Гузев М. А.* Равновесные состояния в калибровочной теории упругости // Докл. РАН. – 1996. – 351:3. – С. 326–328.

4. *Гузев М. А., Макаров В. В.* Реализация подхода физической мезомеханики при моделировании геосреды // Физ. мезомех. – 2020. – Т. 23, № 6. – С. 25–32.

5. *Гузев М. А., Макаров В. В.* Деформирование и разрушение сильно сжатых горных пород вокруг выработок. Монография. – Владивосток : Дальнаука, 2007. – 237 с.

6. *Аменздаде Ю. А.* Теория упругости. Учебник для университетов. – 3-е изд., доп. – М. : Высшая школа, 1976. – 272 с.

7. *Азанов Н. П.* Уравнения совместности Сен-Венана и Бедьтрами–Митчелла в римановом пространстве // Тр. геом. сем. – 1989. – Т. 19. – С. 9–13.

8. *Немцев Е. А., Галимов К. З.* Вывод динамических условий совместности напряжений из вариационного принципа Кастильяно / /Исслед. по теор.пластин и оболочек. – 1973. – вып. 10. – С. 332–337.

9. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

УДК 539.3

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ЧАСТОТНОГО МЕТОДА ДИАГНОСТИКИ НДС АРМАТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А. Л. Попов[1,2], А. А. Хади[2], Д. А. Челюбеев[1]

[1]Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
[2]Московский государственный строительный университет

Аннотация. В работе продемонстрирована возможность неповреждающей частотной диагностики продольного усилия в стержне, моделирующем арматурный элемент, при которой возбуждение и регистрацию частот поперечных колебаний натяжного элемента производится без вскрытия канала, в котором расположен натяжной элемент, с использованием небольшого выступающего участка арматурного элемента, свободного от растягивающего усилия. Предложена простая теоретическая модель, адекватно описывающая зависимость частот собственных колебаний арматурного элемента с анкерным зажимом от продольной силы.

Ключевые слова: арматурный стержень, сила натяжения, неповреждающая диагностика, поперечные колебания, частоты.

Введение

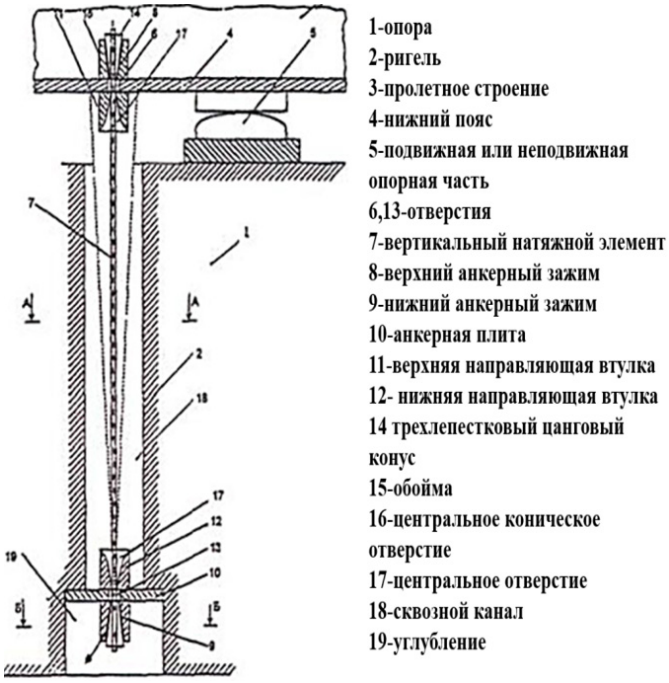


Рис. 1. Схема анкерного устройства

Анкерные устройства в мостовых конструкциях, обладающие податливостью только в одном продольном направлении, используются для ограничения поперечных перемещений пролетного строения моста, и — как антисейсмическое устройство для предотвращения сброса пролетного строения с опор. На рис.1 приведена принципиальная схема выполнения анкерного устройства, где штриховыми линиями обозначены положения натяжного элемента в процессе перемещения пролетного строения [1]. Для натяжения вертикальных натяжных элементов 7 используют гидравлические домкраты мощностью 20 тс.

В процессе эксплуатации проектное натяжение имеет тенденцию к ослаблению. Разница с усилием натяжения по проекту объясняется различными потерями: релаксацией напряжения в натяжном элементе, потерями в анкерах и другими причинами [2]. Вследствие этого возникает необходимость контроля усилия натяжения. Статические и динамическая методики контроля усилия в натяжных элементах описаны в [3].

Динамический метод состоит в установлении связи между частотой собственных поперечных колебаний арматурного элемента и действующей в нём продольной силой натяжения. Для возбуждения и регистрации собственных колебаний требуется свободный доступ к элементу, для чего обычно производится вскрытие канала, в котором расположен арматурный элемент. Ниже предложена модификация частотного метода, обеспечивающая возбуждение и реги-

страцию частот поперечных колебаний натяжного элемента без вскрытия канала. Для этого будет использоваться небольшой выступающий участок арматурного элемента, свободный от растягивающего усилия.

1. Стержневая модель натяжного элемента

Представим расчётную модель натяжного элемента в виде стержня, растянутого силой N и шарнирно опёртого с дополнительной упругостью в отношении поворотов (рис. 2). С помощью дополнительной упругости учитывается угловая жёсткость анкерных закреплений, которая считается заранее неизвестной. Она определяется по совпадению одной из собственных частот поперечных колебаний модели с соответствующим экспериментальным значением при заданной величине растягивающей силы.

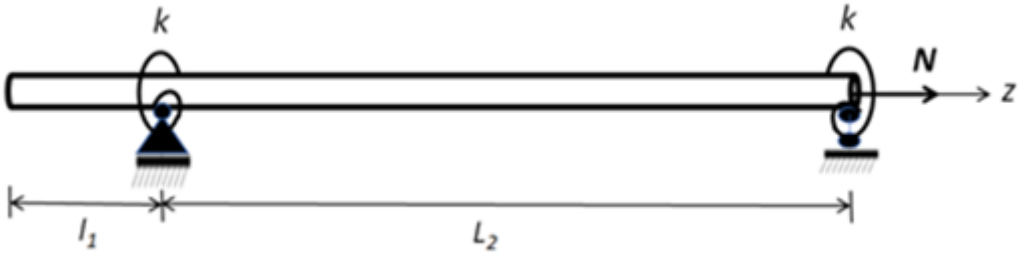


Рис. 2. Расчётная модель натяжного элемента

Будем считать, что $l_1 \ll l_2$, и поэтому выступающий участок не оказывает заметного влияния на собственные частоты стержня. Отметим, что на выступающий участок не передаётся сила N.

Уравнение колебаний стержня и граничные условия имеют вид

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - N\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \rho \mathrm{F}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$W = 0, \quad EI\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - k\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{1}$$

$$W = 0, \quad EI\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = l_2,$$

где $W = W(z,t)$ — динамический прогиб стержня, E, ρ — модуль упругости и плотность материала стержня, J, F — момент инерции и площадь поперечного сечения стержня, k — дополнительная угловая жёсткость в шарнирных опорах, создаваемая анкерным креплением.

Общее решение может быть представлено в форме:

$$W(z,t) = X(z)\sin\left(\omega t + \varphi\right),$$

$$X\left(z\right) = C_1 \operatorname{sh}\beta z + C_2 \operatorname{ch}\beta z + C_3 \sin\gamma z + C_4 \cos\gamma z, \tag{2}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4\left(EJ\right)^2} + \frac{\rho F\omega^2}{EJ}}}, \quad \gamma = \sqrt{-\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4\left(EJ\right)^2} + \frac{\rho F\omega^2}{EJ}}}.$$

Подстановка выражения (2) в граничные условия (1) приводит к системе четырёх однородных алгебраических уравнений, приравняв нулю определитель которой, получаем частотное уравнение:

$$\left\{2k\gamma\left(\beta^2+\gamma^2\right)\cos\gamma l - \left[\beta^4 + \beta^2\left(2\gamma^2+k^2\right) + \gamma^2\left(\gamma^2-k^2\right)\right]\sin\gamma l\right\}\operatorname{sh}\beta l -$$

$$-2k\beta\left[\left(\beta^2+\gamma^2\right)\sin\gamma l \operatorname{ch}\beta l - k\gamma\left(\cos\gamma l \operatorname{ch}\beta l - 1\right)\right] = 0, \quad l = l_2.$$

При $k = 0$ оно сводится к уравнению для шарнирно-опёртого стержня, растянутого продольной силой [4].

2. Экспериментальный образец. Методика измерений

В качестве образца использовался стальной цилиндрический стержень длиной 335 мм, диаметром 6 мм с резьбой на концах. Стержень закреплялся в растягивающей установке посредством гаек (рис. 3а). Вначале изучались поперечные колебания открытого стержня при ударном возбуждении между гайками крепления, выполняющими роль анкерного закрепления. Затем возбуждение и регистрация колебаний осуществлялись через выступающий конец стержня (рис. 3б). Для уменьшения влияния звукоизлучения основной части стержня (между гайками), эта часть была закрыта кожухом со строительным войлоком.

а *б*

Рис. 3. Экспериментальный образец в установке: а) общий вид; б) в кожухе

На рис. 4 представлена схема возбуждения колебаний и снятия акустической информации с выступающего конца стержня.

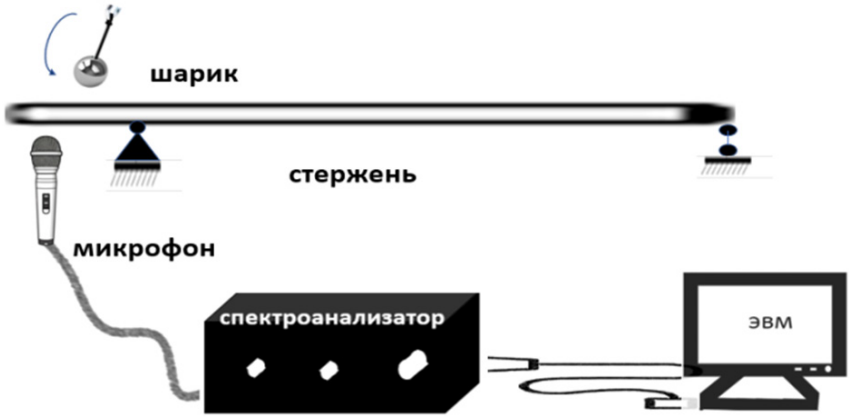


Рис. 4. Схема возбуждения и регистрации колебаний

Возбуждение колебаний осуществлялось ударным воздействием при помощи шарика, подвешенного на нити. Акустическое излучение регистрировалось измерительным микрофоном ZT 333-507, данные передавались на спектроанализатор ZET 032-500 и далее в ЭВМ. Обра-

ботка выполнялась с помощью программы «Узкополосный спектр» программного комплекса ZETLAB. Отметим, что при возбуждении и регистрации вибраций стержня через выступающий конец, регистрируемые экспериментальные частоты не отличались от тех, которые возбуждались и регистрировались во внутренней части стержня.

3. Обработка результатов. Сравнение с теоретической моделью

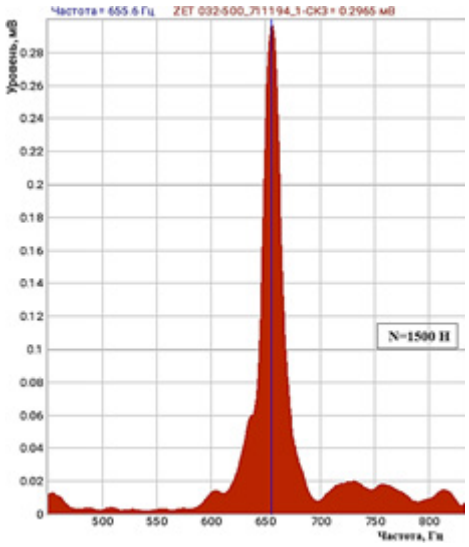


Рис. 5. Фрагмент АЧЗ в окрестности частоты 655 Гц

Из результатов измерений были выбраны значения собственных частот, полученные при обработке амплитудно-частотных зависимостей (АЧЗ) акустического сигнала при разных значениях растягивающей силы. На рис. 5 приведён фрагмент АЧЗ в диапазоне 500–800 Гц при продольной нагрузке 1500 Н. Виден сильный отклик на частоте 655 Гц, которому соответствует вторая частота теоретической модели.

В теоретическую модель были заложены коэффициенты жёсткости упругих закреплений стержня. Их определение производилось из условия совпадения второй частоты, наиболее очётливо выраженной в спектре, при среднем значении нагрузки. Найденные значения жёсткости использовались при расчёте остальных частот при нагрузках от 500 Н до 2500 Н с шагом 500 Н.

В табл. 1 представлены три пары экспериментальных и теоретических частот.

Таблица 1

N, кН	Частоты экспериментальные / теоретические, Гц		
	f_1	f_2	f_3
0.5	*/ 227.3	601.6 / 600.2	1232.8 / 1156.0
1	238.8 / 246.8	626 / 628.8	1223.6 / 1188.6
1.5	255.6 / 264.8	655.6 / 656.1	* / 1220.3
2	269.6 / 281.5	679 / 682.3	1284 / 1251.2
2.5	285.2 / 297.2	708.8 / 707.4	1320 / 1281.3

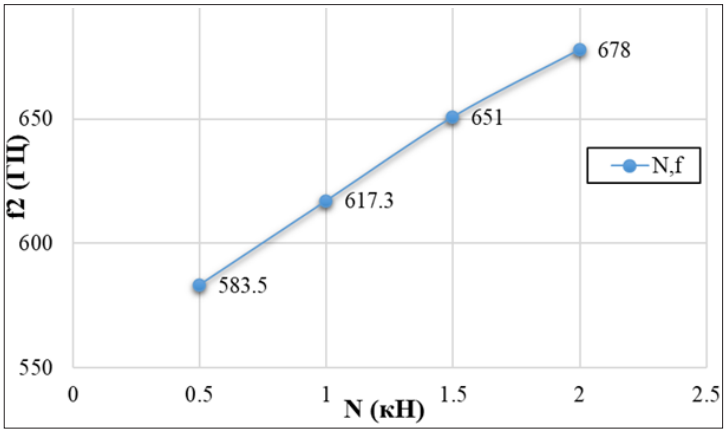


Рис. 6. Вторая экспериментальная частота колебаний как функция силы, приложенной к стержню

Видно, что отличия между экспериментальными и расчётными значениями частот укладываются в доли процента. В то же время отмечается заметная зависимость собственных частот от приложенного усилия. Зависимость второй частоты собственных колебаний стержня от продольного усилия показана на рис. 6.

На рис. 6 отчётливо видна зависимость частот колебаний от продольной силы. Результаты показывают также работоспособность предложенной простой теоретической модели.

Заключение

В работе продемонстрирована возможность неповреждающей диагностики продольного усилия в стержне, моделирующем арматурный элемент, без вскрытия канала, в котором находится основная часть стержня. Предложена простая теоретическая модель, адекватно описывающая зависимость частот собственных колебаний арматурного элемента от продольной силы.

Литература

1. *Казарян В. Ю.* Анкерное крепление для пролетного строения мостового сооружения // Мир дорог. – 2005. – вып. 17. – С. 37.

2. *Крутиков О. В., Гершуни И. Ш.* Определение усилий в канатах пролетного строения Ворошиловского моста в городе Ростов-на-Дону // Институт Гипростроймост. – 2015. – № 9. – С. 107–111.

3. ГОСТ 22362-77. Конструкции железобетонные. Методы измерения силы натяжения арматуры. – М. : Изд-во стандартов, 1988.

4. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. – М. : Высшая школа, 1980. – 408 с.

УДК 539.3

ПЕРЕДАЧА ТЕПЛА В МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ СРЕДАХ CGNI И CGNII

Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы математического моделирования процессов теплопередачи в анизотропных микрополярных термоупругих средах CGNI и CGNII. Проводится сравнение двух моделей теплопроводности (первого и второго типов) для линейного анизотропного микрополярного связанного термоупругого тела. Выбираются подходящие параметры термодинамического состояния и квадратичные термодинамические потенциалы. Рассматриваются уравнения баланса энтропии и различные формы баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца. Найдены определяющие уравнения для анизотропных микрополярных термоупругих тел CGNI и CGNII. На протяжении всего изложения выполняется сравнение подходов к моделированию процессов теплопередачи первого и второго типов. Выводятся нелинейные уравнения теплопроводности, а также обсуждаются их линеаризованные формы.

Ключевые слова: теплопроводность, термоупругость, микрополярность, анизотропия, термодинамический потенциал, CGNI, CGNII.

1. Вводные замечания

Изучение термомеханических свойств современных конструкционных материалов и метаматериалов оказывается возможно в результате синтеза аппарата современной термодинамики и нано/микроструктурных представлений. Определяющие псевдоскаляры, характерные для целого ряда материалов, проявляющие гемитропные свойства, оказываются чувствительными к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства, в частности, к зеркальным отражениям и инверсиям. В общем анизотропном случае связанное термоупругое микрополярное тело CGNI/CGNII характеризуется 199-ю определяющими постоянными, что, несомненно, затрудняет аналитическое представление самих дифференциальных уравнений и исследование их решений.

Для описания состояния термодинамической системы используются термодинамические потенциалы состояния (внутренняя энергия и свободная энергия Гельмгольца), зависящие от базисных термодинамических переменных (параметров состояния). В представлениях квадратичных термодинамических потенциалов используются определяющие тензоры и псевдотензоры различных рангов и весов. Визуализация указанных тензоров и псевдотензоров как целостных символов достаточна сложна и приводится в работе [1], выступая при этом как неотъемлемый начальный этап математического моделирования.

Термомеханический подход к описанию процессов деформирования микрополярных материалов использовался, например, в работах [2, 3], где проводится построение определяющих уравнений для упругих микрополярных материалов в терминах абсолютных тензоров. Акронимы CGNI, CGNII используются в настоящей статье для обозначения теплопроводящих микрополярных тел, опирающиеся на классификацию предложенную в работе [2], а литера C отсылает к E. Cosserat & F. Cosserat [4].

Изложение настоящей работы в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты предыдущих статей [1, 5–7].

2. Уравнения баланса внутренней энергии и энтропии для микрополярных тел

Термодинамическая система, с точки зрения протекающих в ней процессов, характеризуется значениями ее параметров состояния, изменяющимися с течением времени. Параметрами состояния, образующими термодинамический базис, в случае микрополярного термоупругого тела CGNI/CGNII выступают:

- s — энтропия в расчете на единицу массы;
- $\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - e_{ijk}\phi^k$ — асимметричный тензор деформации;
- $\kappa_{i\cdot}^{\cdot j} = \nabla_i \phi^s$ — тензор изгиба–кручения.

Здесь ∇_i — символ ковариантного дифференцирования, e_{ijk} — тензор перестановок, u_j — вектор трансляционных перемещений, ϕ^k — спинвектор (вектор микроповоротов).

Физическую величину внутренней энергии u в расчете на единицу массы в механике континуума удобнее рассматривать как непрерывное физическое поле (physical field). Подлинный интерес представляет трактовка внутренней энергии как термодинамического потенциала состояния, т.е. как однозначной непрерывной функциональной зависимости от параметров состояния. Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. Например $\overline{u}$ означает, что внутренняя энергия u рассматривается как термодинамический потенциал состояния

$$u = \overline{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{i\cdot}^{\cdot j}). \tag{1}$$

Фундаментальный утверждением (1) постулируется тождество физического количества внутренней энергии u (абсолютного скаляра, не зависящего от зеркальных отражений и инверсий трехмерного пространства) и значения функциональной зависимости $\overline{u}$.

Уравнение баланса внутренней энергии для микрополярных теорий, как хорошо известно, имеет следующий вид

$$\rho \dot{\partial} u = t^{ij} \dot{\partial} \epsilon_{ij} + \mu_{\cdot k}^{i\cdot} \dot{\partial} \kappa_{i\cdot}^{\cdot k} + \rho q - \nabla_i h^i. \tag{2}$$

Здесь $\dot{\partial}$ — производная по времени при фиксированных координатах x^k, t^{ik} — тензор силовых напряжений, ρ — массовая плотность, $\mu_{\cdot k}^{i\cdot}$ — тензор моментных напряжений, q — лучистое тепло, h^i — вектор потока тепла. В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \dot{\partial} a$.

Уравнение баланса энтропии примем в конвенциональном виде

$$\rho \dot{\partial} s = -\nabla_j J^j + \rho\sigma + \rho\xi, \tag{3}$$

где J^j — вектор потока энтропии, ξ — неконтролируемое (внутреннее) производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы), σ — контролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Отметим, что ξ и σ являются абсолютными скалярами.

Термомеханический принцип необратимости гласит, что внутреннее производство энтропии не может быть отрицательным ни для какого термодинамически допустимого процесса, т. е. при отсутствии лучистого притока тепла не допускает стока энтропии:

$$\xi \geq 0. \tag{4}$$

3. Приведенное уравнение баланса свободной энергии Гельмгольца

В термомеханике широко используется еще одни термодинамический потенциал — свободная энергия Гельмгольца, определяющаяся с помощью преобразования Лежандра внутренней энергии. Для микрополярного тела CGNI свободная энергия Гельмгольца

$$\psi = \overline{\psi}(\theta, \epsilon_{ij}, \kappa_{i\cdot}^{\cdot s}). \tag{5}$$

где θ — абсолютная термодинамическая температура.

Свободная энергия Гельмгольца (в расчете на единицу массы) в случае микрополярного тела CGNII выступает как термодинамический потенциал состояния следующего вида:

$$\psi = \overline{\psi}(\overset{\cdot}{\partial}\vartheta, \nabla_i \vartheta, \epsilon_{is}, \kappa_{i\cdot}^{\cdot s}), \tag{6}$$

где

$$\overset{\cdot}{\partial}\vartheta = \theta. \tag{7}$$

Уравнение баланса свободной энергии, справедливое для моделей теплопроводности CGNI/CGNII, можно получить подстановкой соотношений (3) и (5) в уравнение (2). В результате чего имеем

$$-\rho(\overset{\cdot}{\partial}\psi + s\overset{\cdot}{\partial}\theta) + t^{ij}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \mu_{\cdot k}^{i\cdot}\overset{\cdot}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot k} - J^j\nabla_j\theta + \nabla_j(\theta J^j - h^j) + \rho(q - \sigma\theta) = \rho\xi\theta, \tag{8}$$

Если предположить справедливость следующих равенств

$$\theta J^j = h^j, \quad \sigma\theta = q, \tag{9}$$

то уравнение баланса (8) преобразуется к приведенной форме

$$-\rho(\overset{\cdot}{\partial}\psi + s\overset{\cdot}{\partial}\theta) + t^{ij}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \mu_{\cdot k}^{i\cdot}\overset{\cdot}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot k} - \theta^{-1}h^j\nabla_j\theta = \rho\xi\theta, \tag{10}$$

справедливой как для моделей CGNI, так и для моделей CGNII.

С учетом приведенного уравнения баланса энергии (10) термодинамическое неравенство необратимости (4) примет вид:

CGNI	CGNII
$C\overset{\cdot}{\partial}\theta + A^{ij}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + B_{\cdot k}^{i\cdot}\overset{\cdot}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot k} + $ $+\theta^{-1}h^j\nabla_j\theta = -\rho\xi\theta \le 0$	$C\overset{\cdot}{\partial}\theta + A^{is}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{is} + B_{\cdot s}^{i\cdot}\overset{\cdot}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot s} + $ $+\rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}\nabla_k\theta + \theta^{-1}h^i\nabla_i\theta = -\rho\theta\xi \le 0$

В данных выше формулах используются обозначения:

CGNI	CGNII
$A^{is} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{is}} - t^{is}$	$A^{ij} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{ij}} - t^{ij}$
$B_{\cdot s}^{i\cdot} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}} - \mu_{\cdot s}^{i\cdot}$	$B_{\cdot s}^{i\cdot} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}} - \mu_{\cdot s}^{i\cdot}$
$C = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta} + \rho\overline{s}$	$C = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial(\overset{\cdot}{\partial}\vartheta)} + \rho\overline{s}$

Отсюда немедленно следуют определяющие уравнения:

CGNI	CGNII
$t^{is} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{is}}$	$t^{ij} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{ij}}$
$\mu_{\cdot s}^{i\cdot} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}}$	$\mu_{\cdot s}^{i\cdot} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}}$
$\rho\overline{s} = -\rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta}$	$\rho\overline{s} = -\rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial(\overset{\cdot}{\partial}\vartheta)}$

Следовательно, внутреннее производство энтропии вычисляется в виде

CGNI	CGNII
$\rho\theta\xi = -\theta^{-1}h^j\nabla_j\theta$	$\rho\theta\xi = -\left(J^k + \rho\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}\right)\nabla_k\theta$

Отметим, что в случае модели CGNII внутреннее производство энтропии исчезает, если вектор потока энтропии задать следующим определяющим уравнением:

$$J^k = -\rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}.$$

4. Анизотропные теплопроводящие микрополярные среды CGNI/CGNII

Линеаризованную свободную энергию для анизотропного микрополярного термоупругого континуума $\overline{\psi}$, можно принять в формах:

для тел типа CGNI:

$$2\rho\overline{\psi} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{H}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}\kappa_{l\cdot}^{\cdot m} + \underset{3}{H}^{isl\cdot}_{\cdots m}\epsilon_{is}\kappa_{l\cdot}^{\cdot m} + \underset{1}{G}^{is}\epsilon_{is}\theta + \underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot s}\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}\theta + F\theta^2; \tag{11}$$

для тел типа CGNII:

$$2\rho\overline{\psi} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{H}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}\kappa_{l\cdot}^{\cdot m} + \underset{3}{H}^{isl\cdot}_{\cdots m}\epsilon_{is}\kappa_{l\cdot}^{\cdot m} + \underset{1}{G}^{is}\epsilon_{is}\theta + \underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot s}\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}\theta + F\theta^2 + \theta_0^{-1}\Lambda^{is}\nabla_i\vartheta\nabla_s\vartheta. \tag{12}$$

Здесь $\underset{1}{H}^{islm}$, $\underset{2}{H}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}$, $\underset{3}{H}^{isl\cdot}_{\cdots m}$, $\underset{1}{G}^{is}$, $\underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot s}$, F, Λ^{is} — определяющие тензоры микрополярного термоупругого континуума.

Определяющие уравнения с учетом (11) и (12) запишутся в виде:

CGNI	CGNII
$t^{is} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\underset{3}{H}^{isl\cdot}_{\cdots m}\kappa_{l\cdot}^{\cdot m} + \frac{1}{2}\underset{1}{G}^{is}\theta$	$t^{is} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\underset{3}{H}^{isl\cdot}_{\cdots m}\kappa_{l\cdot}^{\cdot m} + \frac{1}{2}\underset{1}{G}^{is}\theta$
$\mu_{\cdot s}^{i\cdot} = \underset{2}{H}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\kappa_{l\cdot}^{\cdot m} + \frac{1}{2}\underset{3}{H}^{lmi\cdot}_{\cdots s}\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot s}\theta$	$\mu_{\cdot s}^{i\cdot} = \underset{2}{H}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\kappa_{l\cdot}^{\cdot m} + \frac{1}{2}\underset{3}{H}^{lmi\cdot}_{\cdots s}\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot s}\theta$
$-2\rho\overline{s} = \underset{1}{G}^{is}\epsilon_{is} + \underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot s}\kappa_{i\cdot}^{\cdot s} + 2F\theta$	$-2\rho\overline{s} = \underset{1}{G}^{is}\epsilon_{is} + \underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot s}\kappa_{i\cdot}^{\cdot s} + 2F\theta$
$h^i = -\underset{3}{G}^{is}\nabla_s\theta$	$h^i = -\Lambda^{is}\nabla_s\vartheta$

5. Уравнение теплопроводности для микрополярных тел типа CGNI/II

На основании уравнения баланса энтропии (3) при учете определяющих уравнений нелинейное уравнение теплопроводности может быть представлено следующим образом:

CGNI	CGNII
$\rho\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial\epsilon_{ij}}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \rho\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot k}}\overset{\cdot}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot k} + \rho\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial\theta}\overset{\cdot}{\partial}\theta = -\nabla_j(\theta^{-1}h^j) + \theta^{-1}\rho q$	$\rho\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial\epsilon_{ij}}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \rho\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot j}}\overset{\cdot}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot j} + \rho\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial\theta}\overset{\cdot}{\partial}\theta + \rho\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial\nabla_k\vartheta}\nabla_k\theta = -\nabla_j(\theta^{-1}h^j) + \theta^{-1}\rho q$

Последние уравнения без труда линеаризуются, в результате чего для анизотропных тел получаем:

CGNI	CGNII
$\frac{1}{2}\underset{1}{G}^{is}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \frac{1}{2}\underset{2\cdot s}{G}^{i\cdot}\overset{\cdot}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot k} + F\overset{\cdot}{\partial}\theta + \theta_0^{-1}\underset{3}{G}^{is}\nabla_i\nabla_s\theta + \theta_0^{-1}\rho q = 0$	$\frac{1}{2}\underset{1}{G}^{is}\overset{\cdot}{\partial}\epsilon_{ij} + \frac{1}{2}\underset{2\cdot s}{G}^{i\cdot}\overset{\cdot}{\partial}\kappa_{i\cdot}^{\cdot k} + F\overset{\cdot\cdot}{\partial}^2\vartheta + \theta_0^{-1}\Lambda^{is}\nabla_i\nabla_s\vartheta + \theta_0^{-1}\rho q = 0$

Учитывая, что $F = -\rho c / \theta_0$ «доминирующая» часть уравнения теплопроводности CGNII будет гиперболической, c — теплоемкость на единицу массы.

Для получения связанной системы дифференциальных уравнений термомеханики микрополярных сред CGNI/II уравнения теплопроводности следует дополнить уравнениями баланса (количества движения и момента количества движения):

$$\begin{aligned} \nabla_i t^{ik} &= -\rho(f^k - \ddot{\partial}^2 u^k), \\ \nabla_i \mu^{i\cdot}_{\cdot k} + e_{ksl} t^{[sl]} &= -\rho(l_k - \Im \ddot{\partial}^2 \phi_k), \end{aligned} \tag{13}$$

где f^k — массовые силы, l_k — массовые пары, $\Im$ — коэффициент микроинерции.

Заключение и выводы

В работе приводится сравнение двух моделей теплопроводности (первого и второго типов) для линейного анизотропного микрополярного связанного термоупругого тела. Получены замкнутые системы дифференциальных уравнений, составляющих математическую формулировку моделей в форме связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Рассмотрены уравнения баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца, а также уравнение баланса энтропии, из которого впоследствии находятся уравнения теплопроводности первого и второго типов.

2. В качестве основного термодинамического потенциала выбрана свободная энергия Гельмгольца, что позволяет наиболее просто получить определяющие уравнения микрополярной термоупругости первого и второго типов. Функциональными аргументами свободной энергии Гельмгольца для сред CGNI являются: асимметричный тензор малых деформаций, асимметричный тензор изгиба–кручения и термодинамическая температура. Набор функциональных аргументов свободной энергии Гельмгольца для сред CGNII отличается от CGNI тем, что в него входит дополнительный векторный аргумент — пространственный градиент температурного смещения.

3. Получены определяющие уравнения для анизотропных микрополярных связанных термоупругих тел CGNI/II.

4. Получены нелинейные уравнения теплопроводности, а также приведены их линеаризованные формы. Отмечено, что «доминирующая» часть уравнения теплопроводности CGNII является гиперболической.

Благодарности

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

Литература

1. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On algebraic tripleweights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 1. – P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274

2. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. – Изд-во Саратовского ун-та, 2009. – 328 с.

3. *Green A. E, Naghdi P. M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. – 1993. – Vol. 31. – P. 189–208.

4. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Herman et Fils, Paris, 1909. – vi+226 p.

5. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // Ученые записки Казанского университета. Се-

рия Физико-математические науки. – 2023. – Т. 165, № 4. – С. 389–403. DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403

6. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58, No 9. – P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255

7. *Радаев Ю. Н.* Теплопроводность второго типа в линейных анизотропных термоупругих микрополярных средах // Известия РАН: Механика твердого тела. – 2024. – № 6. (В печати)

УДК 539.3

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

М. Ю. Соколова, Е. М. Исаматова

Тульский государственный университет

Аннотация. В рамках модели гипоупругости рассматривается распространение звуковых волн в трансверсально-изотропном материале, в котором создано предварительное однородное напряженно-деформированное состояние. Полагается, что в начальном состоянии в среде созданы конечные деформации, что приводит к необходимости учета нелинейности при записи динамических уравнений. Динамические уравнения распространения упругих волн записаны относительно поля скоростей, связанных с распространением волны. Для плоских монохроматических волн получено выражение для акустического тензора, который оказывается зависимым от предварительных напряжений. Продемонстрировано влияние вида начальных напряжений на полярные диаграммы фазовых скоростей для волн, распространяющихся в плоскости изотропии материала.
Ключевые слова: упругие волны, гипоупругость, анизотропия, трансверсально-изотропный материал, плоскость изотропии, динамические уравнения, конечные деформации, начальные напряжения, плоские монохроматические волны, фазовые скорости.

Введение

Задача о распространении упругих (звуковых) волн является классической задачей динамики. В анизотропных материалах с симметрией свойств материала, присущей одной из кристаллографических систем, в одном направлении распространяются три упругие волны: одна продольная (квазипродольная) и две поперечных (квазипоперечных) [1, 2]. Известно, что материалы, симметрия свойств которых относится к гексагональной кристаллографической системе, в отношении упругих свойств ведут себя как трансверсально-изотропный материал, характеризующийся наличием главной поворотной оси бесконечного порядка и перпендикулярной к ней плоскостью симметрии. При конечных деформациях такой материал можно рассматривать в рамках модели гипоупругости, в которой скорость изменения напряжений полагается пропорциональной тензору деформации скорости.

В работах [3–6] рассматриваются волны в гипоупругих изотропных материалах. Авторы этих работ подчеркивают, что использование модели гипоупругости позволяет учитывать влияние начальных напряжений на основные характеристики распространения звуковых волн. Задача о распространении звуковых волн в гипоупругих анизотропных материалах рассмотрена в работах [7, 8]. В данной статье получены динамические уравнения распространения упругих волн, записанные относительно поля скоростей, вызываемого волной. В рамках теории наложения малых деформаций на конечные уравнения линеаризованы в предположении, что при распространении упругих волн скорости и их градиенты малы. Получено обобщение уравнения Кристоффеля на случай распространения плоских волн в гипоупругих материалах с начальными напряжениями. На основе построенной модели проведен анализ влияния начальных напряжений на фазовые скорости распространения плоских волн в трансверсально-изотропном материале. Получены аналитические выражения для фазовых скоростей распространения волн в плоскости изотропии и построены их полярные диаграммы при начальных напряжениях различных видов.

1. Основные уравнения модели

Рассмотрим трансверсально-изотропный гипоупругий материал, в котором скорость изменения напряжений пропорциональна тензору деформации скорости. Будем считать, что появление начальных напряжений связано с однородными конечными деформациями среды, задаваемыми аффинором деформаций $\mathbf{\Phi}(t)$. В качестве меры напряженного состояния используем обобщенный тензор напряжений $\mathbf{\Sigma}$, связанный с тензором истинных напряжений Коши $\mathbf{S}$ соотношением:

$$\mathbf{\Sigma} = J\mathbf{S}, \tag{1}$$

где $J = \det \mathbf{\Phi}$ — относительное изменение объема, связанное с плотностью материала выражением $J = \rho_0 / \rho$.

В модели в качестве меры скорости изменения напряжений используем яуманновскую производную тензора $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{\Sigma}^{\nabla} = \dot{\mathbf{\Sigma}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где $\dot{\mathbf{\Sigma}} = \dfrac{d\mathbf{\Sigma}}{dt}$ — полная производная тензора напряжений по времени, $\boldsymbol{\omega}$ — тензор вихря.

Тензор деформации скорости $\mathbf{W}$ и тензор вихря $\boldsymbol{\omega}$ выражаются через составляющие полярного разложения аффинора деформаций $\mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$, $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, и их производные по времени известными соотношениями [9]:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R} + \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}.$$

Определяющие соотношения для гипоупругого материала записываются в виде [9]:

$$\mathbf{\Sigma}^{\nabla} = \mathbf{N} \cdot\cdot \mathbf{W}, \tag{4}$$

где $\mathbf{N} = N_{ijkl}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j\mathbf{a}_k\mathbf{a}_l$ — тензор упругих свойств среды, полусимметричный по парам индексов:

$$N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}.$$

Компоненты тензора упругости определены относительно главных осей анизотропии материала с ортонормированным базисом $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ $(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij})$. В трансверсально-изотропном материале направим вектор $\mathbf{a}_3$ вдоль главной поворотной оси материала, а векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ будем считать расположенными в плоскости изотропии, перпендикулярной поворотной оси. Полагая, что компоненты тензора $\mathbf{N}$ в главных осях анизотропии постоянны в течение всего процесса деформирования, запишем тензор упругости трансверсально-изотропного материала в виде полиадного разложения [2, 9]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} = {} & C_{11}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\right) + C_{12}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\right) + \\
& + C_{13}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\right) + C_{33}\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 + \\
& + C_{44}\left(\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\right)\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\right) + \left(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2\right)\left(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2\right)\right) + \\
& + C_{66}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right)\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где в соответствии с нотацией Фойгта введены обозначения $C_{11} = N_{1111} = N_{2222}$, $C_{12} = N_{1122}$, $C_{13} = N_{1133} = N_{2233}$, $C_{33} = N_{3333}$, $C_{14} = N_{1313} = N_{2323}$, $C_{66} = N_{1212} = \dfrac{1}{2}\left(C_{11} - C_{12}\right)$.

Пусть в гипоупругом трансверсально-изотропном материале к моменту времени t_1 создано однородное напряженно-деформированное состояние, которое характеризуется аффинором деформаций $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}(t_1)$ и тензором напряжений $\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{\Sigma}(t_1)$. Это состояние назовем начальным. Дальнейшее деформирование вызывается звуковой волной, приводящей к возмущению

поля перемещений: $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_1,t)=\mathbf{v}(\mathbf{x}_1,t)\delta t$, где $\mathbf{x}_1$ — радиус-векторы частиц среды в момент времени t_1, $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1,t)$ — поле скоростей частиц среды, связанное с прохождением волны. В дальнейшем полагаем, что возмущения перемещений и их градиенты малы, что позволяет провести линеаризацию динамических уравнений. Как показано в работах [7, 8], при использовании определяющих соотношений в форме (4) удобно записать динамические уравнения относительно поля скоростей. Линеаризованные относительно начального состояния уравнения движения имеют вид [7, 8]:

$$\nabla_1\cdot J_1\dot{\mathbf{S}}=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}, \tag{6}$$

где $\nabla_1()=\dfrac{\partial()}{\partial\mathbf{x}_1}$ — набла-оператор начального состояния.

С учетом связи между обобщенным тензором истинных напряжений и тензором напряжений Коши (1), уравнения (6) принимают вид:

$$\nabla_1\cdot\dot{\boldsymbol{\Sigma}}-\boldsymbol{\Sigma}_1\cdot\nabla_1(\nabla_1\cdot\mathbf{v})=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Подставляя в уравнения (7) определяющие соотношения (4), а также выражения для тензоров $\mathbf{W}$ и $\boldsymbol{\omega}$ через поле скоростей

$$\mathbf{W}=\frac{1}{2}\left(\nabla_1\mathbf{v}+\mathbf{v}\nabla_1\right),\quad \boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\left(\nabla_1\mathbf{v}-\mathbf{v}\nabla_1\right),$$

запишем динамические уравнения в виде:

$$\mathbf{N}\cdots\nabla_1\nabla_1\mathbf{v}+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Sigma}_1\cdot\cdot\nabla_1\nabla_1\mathbf{v}-\nabla_1\mathbf{v}\nabla_1\cdot\cdot\boldsymbol{\Sigma}_1\right)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_1\cdot(\nabla_1\cdot\nabla_1\mathbf{v}+\nabla_1\nabla_1\cdot\mathbf{v})=\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Уравнения (8) являются дифференциальными уравнениями второго порядка относительно поля скоростей, связанного с распространением звуковых волн в гипоупругом материале при действии в нем начальных напряжений $\boldsymbol{\Sigma}_1$.

2. Распространение плоских волн

Пусть в трансверсально-изотропном материале распространяется плоская монохроматическая волна с полем скоростей, определяемым выражением:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_1,\tau)=A\mathbf{p}\exp\left(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1-\omega\tau)\right), \tag{9}$$

где A — амплитуда скорости,

$\mathbf{p}$ — вектор поляризации $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=1)$,

$\mathbf{k}=k\mathbf{n}$ — волновой вектор, k — волновое число, $\mathbf{n}$ — вектор волновой нормали $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1)$,

ω — круговая частота, $\tau=t-t_1>0$ — время.

В этом случае уравнения (8) принимают вид

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{n},\boldsymbol{\Sigma}_1\right)\cdot\mathbf{p}=\rho_0c^2\mathbf{p}, \tag{10}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{n},\boldsymbol{\Sigma}_1)$ — акустический тензор,

$c=\dfrac{\omega}{k}$ — фазовая скорость распространения волны.

Входящий в уравнения (10) акустический тензор имеет вид

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{n},\boldsymbol{\Sigma}_1\right)=\mathbf{M}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_1\cdot\mathbf{n}\mathbf{E}-\boldsymbol{\Sigma}_1\right)-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Sigma}_1\cdot\mathbf{n}\mathbf{n}+\mathbf{n}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_1\right), \tag{11}$$

где $\mathbf{M}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}$ — тензор Кристоффеля [2],

$\mathbf{E}=\delta_{ij}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ — единичный тензор.

Выражение (11) показывает, что в рассматриваемой модели акустический тензор определяется упругими свойствами среды $\mathbf{N}$ и зависит не только от направления распространения волны $\mathbf{n}$, но и от действующих в начальном состоянии напряжений $\mathbf{\Sigma}_1$. Из уравнений (10) векторы поляризации $\mathbf{p}$ и фазовые скорости распространения волн с находятся как собственные векторы и собственные значения акустического тензора и, следовательно, зависят от начальных напряжений, действующих в материале. Рассмотрим, как влияет вид напряженного состояния в начальном состоянии на угловые зависимости фазовых скоростей распространения волн в трансверсально-изотропном материале.

3. Результаты численного исследования

Пусть волна распространяется в плоскости изотропии материала, тогда вектор волновой нормали $\mathbf{n}_1 = \cos\varphi\,\mathbf{a}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{a}_2$, где φ — угол, отсчитываемый от вектора $\mathbf{a}_1$. В этом случае тензор Кристоффеля имеет вид

$$\mathbf{M} = (C_{11}\cos^2\varphi + C_{66}\sin^2\varphi)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + (C_{11}\sin^2\varphi + C_{66}\cos^2\varphi)\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \\ + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{66})\sin 2\varphi\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right) + C_{44}\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3. \tag{12}$$

Пусть в начальном состоянии напряжения определяются тензором $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2)$. Учитывая выражения (11) и (12), найдем акустический тензор:

$$\mathbf{A} = \left(\left(C_{11} - \sigma\right)\cos^2\varphi + C_{66}\sin^2\varphi\right)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \left(\left(C_{11} - \sigma\right)\sin^2\varphi + C_{66}\cos^2\varphi\right)\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \\ + \left(\left(C_{12} + C_{66} - \sigma\right)\sin\varphi\cdot\cos\varphi\right)\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right) + \left(C_{44} + 0{,}5\sigma\right)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3. \tag{13}$$

При распространении волн в этой плоскости возникают: продольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(1)} = \cos\varphi\,\mathbf{a}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{a}_2$ и фазовой скоростью

$$c_1 = \sqrt{\frac{C_{11} - \sigma}{\rho}};$$

поперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(2)} = -\sin\varphi\,\mathbf{a}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{a}_2$ и фазовой скоростью

$$c_2 = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}};$$

поперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{a}_3$ и фазовой скоростью $c_3 = \sqrt{\dfrac{C_{44} + 0{,}5\sigma}{\rho}}$.

Таким образом, если вектор волновой нормали лежит в плоскости изотропии материала, то при действии напряжений $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2)$ фазовые скорости распространения продольной и поперечных волн не зависят от угла φ, поэтому полярные диаграммы фазовых скоростей являются окружностями (рис.1). В тоже время, фазовые скорости c_1 и c_3 зависят от величины σ действующих напряжений, поэтому на рис. 1 их графики, построенные при $\sigma = 500$ МПа и обозначенные сплошной линией, не совпадают с графиками, построенными при $\sigma = 0$ МПа и обозначенными точками. При действии в плоскости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ растягивающих напряжений скорость распространения продольной волны c_1 уменьшается, а скорость распространения поперечной волны c_3 увеличивается.

Пусть в начальном состоянии напряжения определяются тензором $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)$. В этом случае акустический тензор принимает вид:

$$\mathbf{A} = \left(C_{11}\cos^2\varphi + C_{66}\sin^2\varphi\right)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \left(C_{11}\sin^2\varphi + C_{66}\cos^2\varphi\right)\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \\ + \left(\frac{1}{2}\left(C_{12} + C_{66}\right)\sin 2\varphi - \sigma\right)\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right) + \left(C_{44} + \frac{1}{2}\sigma\sin 2\varphi\right)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3. \tag{14}$$

В рассматриваемой плоскости распространяются: квазипродольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(1)}$ и фазовой скоростью

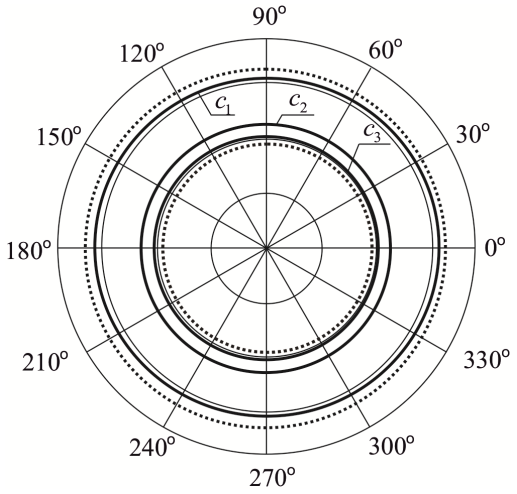


Рис. 1. Полярные диаграммы скоростей распространения продольных и поперечных волн в плоскости изотропии при действии напряжений $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2)$

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{C_{11}+C_{66}}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_{11}-C_{66}}{2}\right)^2 - 2\sigma\frac{C_{11}-C_{66}}{2}\sin 2\varphi + \sigma^2}\right)};$$

квазипоперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(2)}$ и фазовой скоростью

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{C_{11}+C_{66}}{2} - \sqrt{\left(\frac{C_{11}-C_{66}}{2}\right)^2 - 2\sigma\frac{C_{11}-C_{66}}{2}\sin 2\varphi + \sigma^2}\right)};$$

а также поперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_{(3)} = \mathbf{a}_3$ и фазовой скоростью

$$c_3 = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(C_{44} + \frac{1}{2}\sigma\sin 2\varphi\right)}.$$

При действии в плоскости изотропии касательных напряжений вектор поляризации $\mathbf{p}_{(1)}$ в общем случае не совпадает с направлением волновой нормали, поэтому такая волна является квазипродольной. Вектор $\mathbf{p}_{(2)}$ не перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$, поэтому такая волна оказывается квазипоперечной. В этом случае фазовые скорости распространения волн c_1, c_2, c_3 зависят от угла φ, поэтому изменяется форма полярных диаграмм, построенных для этих величин при $\sigma \neq 0$ (рис. 2).

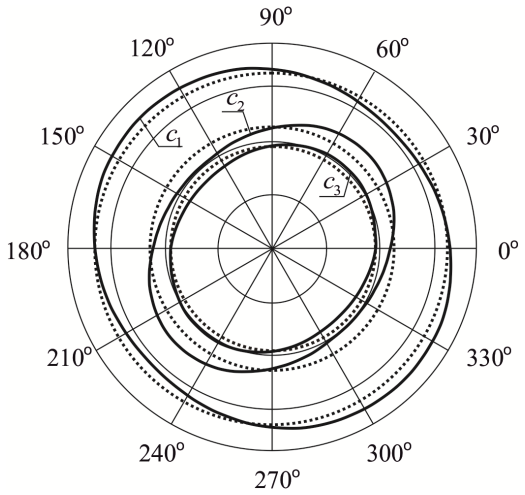


Рис. 2. Полярные диаграммы скоростей распространения продольных и поперечных волн в плоскости изотропии при действии напряжений $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \sigma(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1)$

Заключение

Предложенная модель распространения волн в гипоупругих материалах при действии начальных однородных напряжений отражает зависимость скоростей распространений звуковых волн как от вида действующих напряжений, так и от их величины. Фазовые скорости распространения продольных волн при действии растягивающих напряжений уменьшаются, а для поперечных волн — увеличиваются. При действии касательных напряжений этот эффект проявляется в главных осях тензора напряжений, наибольшие изменения фазовых скоростей наблюдаются для углов $\varphi = 45°,\ 135°,\ 225°,\ 315°$.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах / Ф. И. Федоров. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – 383 с.

2. *Сиротин Ю. И.* Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 640 с.

3. *Rushchitsky J. J.* Nonlinear plane waves in hypoelastic materials / J. J. Rushchitsky // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. – 2014. – Cham : Springer. doi:10.1007/978-3-319-00464-8_8

4. *Rushchitsky J. J.* On the types and number of plane waves in hypoelastic materials / J. J. Rushchitsky // International Applied Mechanics. – 2005. – V. 41, № 11. – P. 1288–1298. doi:10.1007/s10778-006-0035-x

5. *Demidov V. N.* Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses / V. N. Demidov // Key Engineering Materials. – 2016. – V. 712. – P. 384–389. doi:10.4028/www.scientific.net/kem.712.384

6. *Демидов В. Н.* О расщеплении волн сдвига в изотропных гипоупругих материалах / В. Н. Демидов // Физическая мезомеханика. – 2000. – Т. 3, № 2. – С. 15–36.

7. *Markin A. A.* Dynamic equations for the propagation of acoustic waves in pre-deformed materials / A. A. Markin, M. Yu. Sokolova // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, № 2. – P. 679–688. doi: 10.1134/S0025654423601350

8. *Соколова М. Ю.* Акустические волны в гипоупругих телах. II. Анизотропные материалы / М. Ю. Соколова, Д. В. Христич // Чебышевский сборник. – 2024. – Т. 25, В. 2. – С. 334-349. doi: 10.22405/2226-8383-2024-25-2-334-349

9. *Маркин А. А.* Термомеханика упругопластического деформирования / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.

УДК 53.096

АНАЛИЗ ТЕРМОМЕХАНИКИ ФОТОПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ПРИМЕРЕ ENVISIONTEC SI500

В. И. Струкова, Ю. О. Носов, А. А. Каменских

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Аннотация. В рамках работы на основе данных открытых источников построена термомеханическая модель поведения фотополимерного материала Envisiontec SI500 на основе рядов Prony. Для математического описания поведения материала выбрана термовязкоупругая модель. Материальные константы модели Prony полученные с использованием численной процедуры идентификации с учетом температурно-временной аналогии и многопарамтерической оптимизации на основе данных об изменении модуля свободного сжатия, коэффициента Пуассона и модуля объемного сжатия от температуры. Выполнена верификация описанных определяющих соотношений на имитационной модели, повторяющей эмпирическое исследование. Проведен анализ термомеханического поведения материала Envisiontec SI500 в условия свободного и стесненного расширения цилиндрических образцов.
Ключевые слова: фотополимер, температура, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модель Prony, термомеханика, эксперимент, процедура идентификации.

Введение

Аддитивные технологии на настоящий момент являются флагманом для развития технологических процессов производства машиностроительной отрасли [1, 2]. Создание элементов конструкций, оснастки, специализированных объектов для получения сложных структур с использованием 3D-печати актуально и находит подтверждение в разных сферах науки и техники. Фотополимерные смолы посредством отверждения при аддитивной печати позволяют получить структуры сложной геометрии, в том числе с различными каналами, что может найти применение в технологии литейного производства [3, 4]. Сфера применения фотополимерных материалов обширная: биомедицина, хирургия, оптика, машиностроение, ювелирное дело и многое другое. Фотополимерные материалы часто удаляются разными технологиями для получения нужного вида геометрии детали (изделия). При этом исследователями отмечено, что термическое расширение фотополимеров может привести к снижению процента изделий без брака [4]. Для рационализации технологических процессов требуется анализ термомеханики материалов и построение численных аналогов материала в рамках компьютерного инжиниринга [5]. В работе рассмотрена задача об описании термомеханичесокго поведения фотополимерного материала, на примере Envisiontec SI500, на основе экспериментальных исследований, представленных в открытых источниках. Для описания поведения материала выбрана модель вязкоупругого поведения на основе рядов Prony, которая нашла широкое применение в прикладных пакетах конечно-элементного анализа. Реализация задачи выполнена на языке APDL в ANSYS Mechanical с использованием итерационных алгоритмов идентификации на основе Python.

1. Модель поведения фотополимерного материала Envisiontec SI500

Экспериментальные исследования Envisiontec SI500 выполнены согласно методике представленной в [6] на базе лаборатории пластмасс ПНИПУ д.т.н. Сметанниковым О. Ю., к.т.н. Субботин Е. В., Самусевым И. В. [7, 8]. Схема эксперимента включала деформирование ци-

линдрических образцов постоянной нагрузкой с изменением температуры от 20 до 150 °С с регистрацией кривых изменения механических характеристик материалов [8]. Данные кривые легли в основу для определения вязкоупругого поведения материала на основе рядов Prony [10]. Схема процедуры определения параметров рядов Prony приведена на рис. 1.

Рис. 1. Схема определения термомеханической модели поведения материала

По результатам экспериментальных исследований были построены зависимости модуля свободного сжатия, коэффициента Пуассона и модуля объемного сжатия от температуры в диапазоне от 0 до 100 °С (рис. 2) [7, 8].

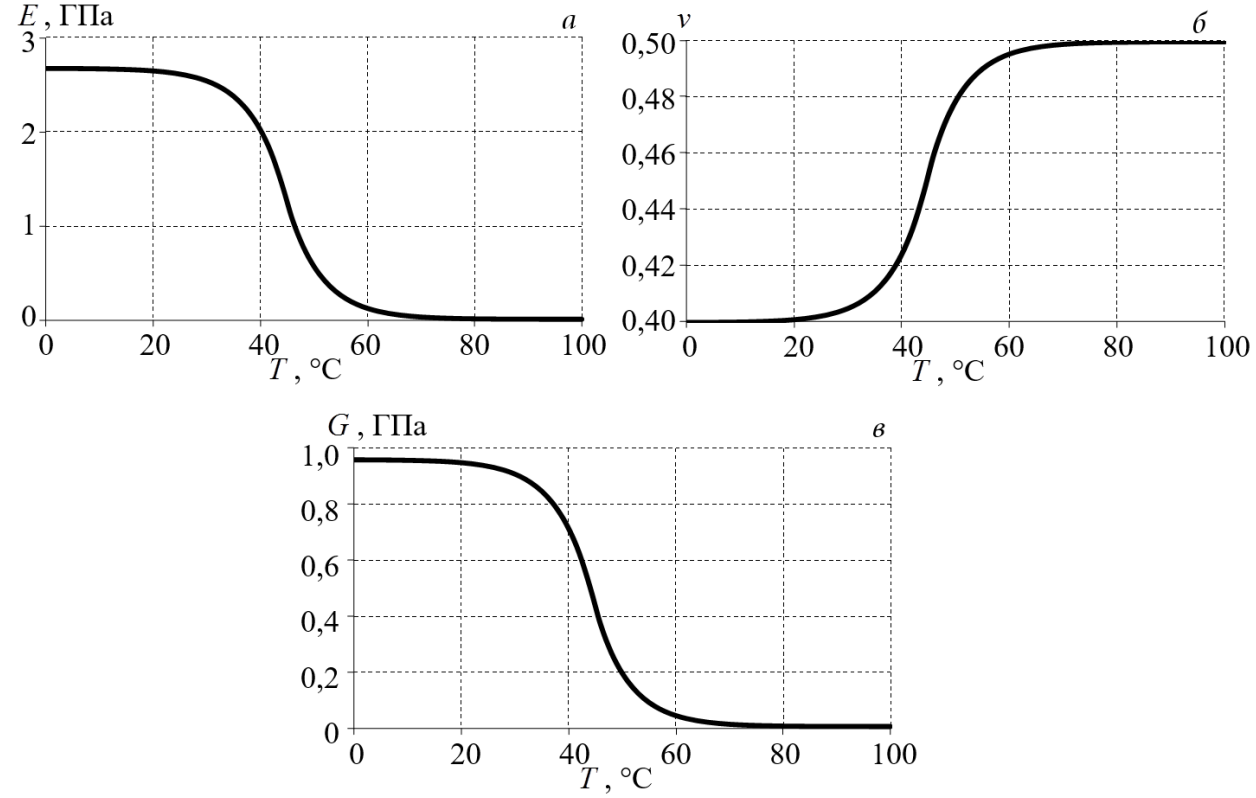


Рис. 2. Свойства материала: а — модуль свободно сжатия; б — коэффициент Пуассона; в — модуль объемного сжатия

Для построения модели поведения фотополимера в рамках термовязкоупругости использована процедура численной идентификации [9], ранее подтвердившая свою функциональность при описании смазочных и полимерных материалов [10].

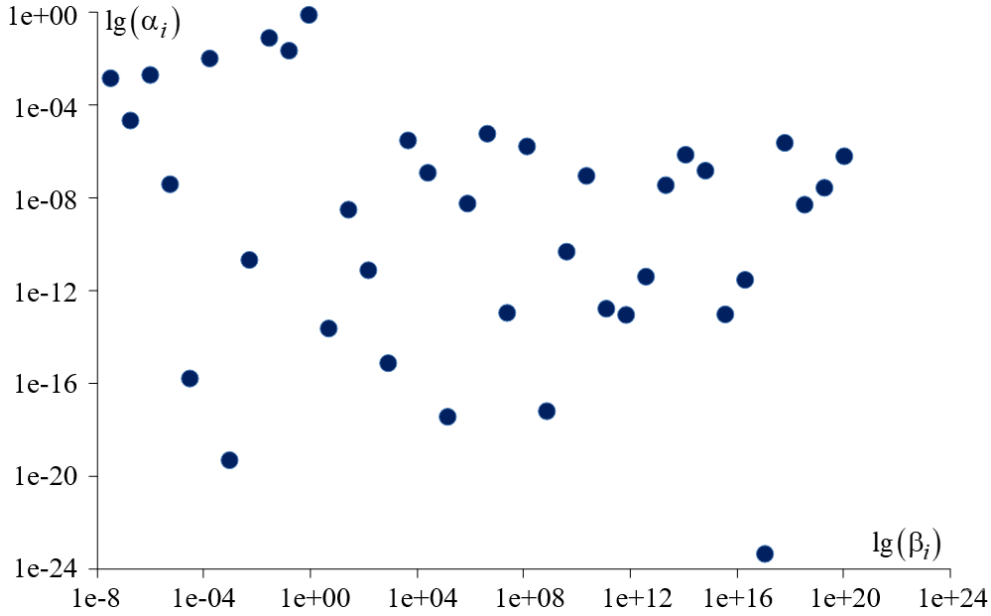
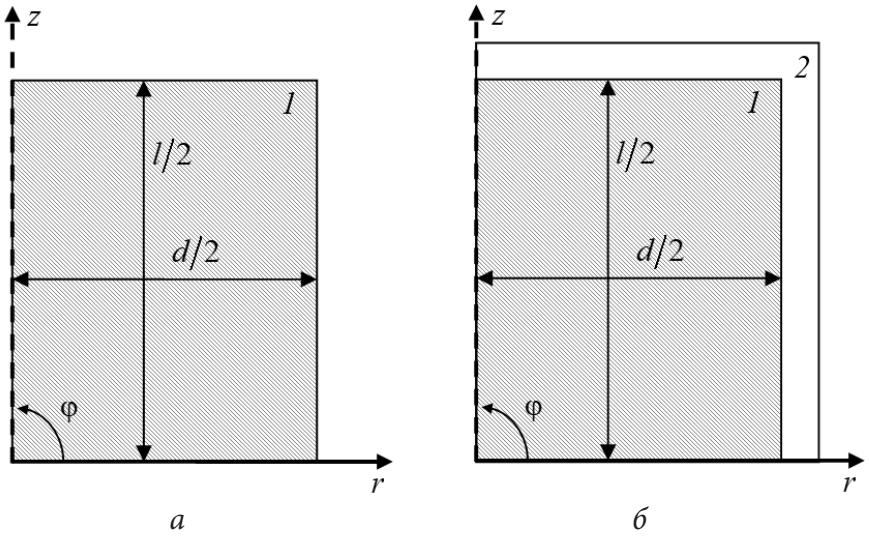


Рис. 3. Параметры ряда Prony (описание модели поведения материала)

Для верификации математической модели с экспериментом построена имитационная модель, повторяющая условия эмпирического исследования. При погрешности менее 5 % итерационной процедуры идентификации свойств материала с учетом многопараметрической оптимизации получено удовлетворительное совпадение результатов натурного и численного эксперимента.

2. Численный анализ термомеханического поведения фотополимерного материала

Для анализа влияния температуры на поведение образцов из Envisiontec SI500 реализованы тестовые задачи (рис. 4), которые рассматривают термическое расширение образца при нагреве от комнатной температуры до $T = 150$ °C с разной скоростью нагрева $\dot{T} = 1; 2; 5; 10; 16$ °C/мин.



а *б*

Рис. 4. Расчетные схемы вычислительных экспериментов:
а — свободное расширение; б — стесненное расширение; 1 — фотополимер; 2 — керамика

Задача рассматривает свободное и стесненное расширение фотополимера в осесимметричной постановке. При реализации стесненного расширения цилиндрический образец из фотополимерного материала помещается в керамическую оболочку. Исследовано влияние толщины керамической оболочки на деформационное поведение системы. Проанализировано поведение фотополимера при учете жесткой керамической формы и влияние деформирования образца на керамическую форму.

Заключение

В рамках работы построена модель поведения фотополимерного материала Envisiontec SI500 полученного в рамках аддитивных технологий на основе теории вязкоупругости. Выполнена верификация полученных определяющих соотношений на имитационной модели, повторяющей условия эмпирических исследований. Выполнен анализ термомеханического поведения материала при свободном и сжатом термическом расширении.

Развитие работы предполагается в нескольких направлениях:

1. Материал Envisiontec SI500 имеет много современных отечественных и иностранных аналогов (HARZ Labs Jewelry J-Cast, Gorky Liquid Castable LCD, IFUN Jewelry Casting Resin и т. д.). Для построения нелинейных моделей поведения материалов требуется проведение серии экспериментальных исследований, так как данные производителей и открытых источников ограничены.

2. Моделирование термического расширения материалов с учетом ячеистых структур по технологии от простого к сложному: эффективные характеристики, модели пористых сред, моделирование геометрии структур и т.д.

Материалы получены в рамках программы развития передовой инженерной школы «Высшая школа авиационного двигателестроения» ПНИПУ г. Пермь (федеральный проект «Передовые инженерные школы»).

Литература

1. *Токарев С. П.* Исследование экономических преимуществ и вызовов внедрения аддитивных технологий в современное производство / С. П. Токарев // Вопросы природопользования. – 2024. – Т. 3, № 1. – С. 64–73.

2. *Бирюков Ю. А.* Барьеры, препятствующие развитию аддитивных технологий / Ю. А. Бирюков, Д. Е. Кардаш // Строительные и дорожные машины. – 2023. – № 5. – С. 48–52.

3. *Huang Y. M.* Numerical analysis of a mask type stereolithography process using a dynamic finite-element method / Y. M. Huang, C. P. Jiang // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2003. – Vol. 21. – P. 649–655.

4. Проектирование CAD-моделей для расчета значений термического напряжения / Н. В. Трапезников, А. А. Шумков, Е. В. Матыгуллина, Т. Р. Абляз // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2018. – Т. 20, № 2. – С. 55–61.

5. *Huang Y.-M.* CAD/CAE/CAM integration for increasing the accuracy of mask rapid prototyping system / Y.-M. Huang, H.-Y. Lan // Computers in Industry. – 2005. – Vol. 56. – P. 442–456.

6. *Сметанников О. Ю.* Экспериментальная идентификация модели термомеханического поведения стеклующихся полимеров / О. Ю. Сметанников, Н. А. Труфанов // Вестник удмуртского университета. Механика. – 2009. – Вып.4. – С.133–145.

7. *Сметанников О. Ю.* Экспериментальная идентификация параметров определяющих соотношений для фотополимерного композита / О. Ю. Сметанников, И. В. Самусев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 105–116.

8. *Шумков А. А.* Разработка технологии выжигаемых фотополимерных моделей для отливок сложного профиля: специальность 05.16.04 «Литейное производство»: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Шумков Алексей Александрович, 2019. – 148 с.

9. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023618695 Российская Федерация. Идентификация математической модели вязкоупругого поведения тела Максвелла на основе рядов Прони: № 2023617843: заявл. 27.04.2023: опубл. 27.04.2023 / А. А. Каменских, Ю. О. Носов; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

10. *Nosov Y. O.* Experimental study of the rheology of grease by the example of CIATIM-221 and identification of its behavior Model / Y. O. Nosov, A. A. Kamenskikh // Lubricants. – 2023. – Vol. 11. – Art. 295.

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ЗАДАЧАХ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

А. И. Сумин[1], А. Л. Фролов[1], Р. С. Сумина[1], О. А. Фролова[2]

[1]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»
[2]Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются вопросы потери устойчивости нелинейных сред дифференциального типа по отношению к конечным возмущениям в применении к задачам, возникающим в гидрометеорологии. Используя теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое решение системы будет асимптотически устойчиво в некоторой области начальных возмущений амплитуд наложенных перемещений, температур, градиентов температур и их скоростей.
Ключевые слова: устойчивость, нелинейная вязкоупругая среда, конечные возмущения, принцип усреднения.

Рассмотрим нелинейно-вязкоупругую среду дифференциального типа сложности 1, иллюстрацией которой может служить среда рассматриваемая в гидрометеорологии. Для такого тела напряжения и тепловой поток определяются через функцию свободной энергии Ψ и диссипативный потенциал Φ по формулам [1]

$$S=\frac{\partial\Psi}{\partial E}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{E}},\qquad \eta=\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\theta}},\qquad \frac{1}{\rho_R\theta}h_R=-\frac{\partial\Phi}{\partial g_R}, \tag{1}$$

где

$$\Psi=\Psi\left(E_{ij},\theta\right),\qquad \Phi=\Phi\left(E_{ij},\theta,g_{Ri}\right). \tag{2}$$

Возьмем эти функции в виде [2]

$$\Psi=\frac{1}{2}C^{(E)}_{klmn}E_{kl}E_{mn}+\frac{1}{2}C^{(\theta)}\theta^2+C^{(E\theta)}_{kl}E_{kl}\theta \tag{3}$$

$$\Phi=\frac{1}{2}D^{(E)}_{klmn}\dot{E}_{kl}\dot{E}_{mn}+\frac{1}{2}D^{(\theta)}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}D^{(q)}_{kl}g_Rg_l+D^{(E\theta)}_{kl}\dot{E}_{kl}\dot{\theta}+D^{(Eq)}_{klm}\dot{E}_{kl}g_m+D^{(q\theta)}_{k}g_k\dot{\theta}.$$

Подставляя (3) в (1) получаем линейные определяющие соотношения для материала типа Кельвина — Фойхта

$$S_{kl}=C^{(E)}_{klmn}E_{mn}+C^{(E\theta)}_{kl}\theta+D^{(E\theta)}_{klmn}\dot{E}_{mn}+D^{(E\theta)}_{kl}\dot{\theta}+D^{(Eq)}_{klm}\dot{g}_m, \tag{4}$$

$$-\eta=C^{(E\theta)}_{kl}E_{kl}+C^{(\theta)}\theta+D^{(E\theta)}_{kl}\dot{E}_{kl}+D^{(q\theta)}_{k}g_k+D^{(\theta)}\dot{\theta}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\rho_R\theta}=h_{Rm}=D^{(Eq)}_{klm}\dot{E}_{kl}+D^{(q)}_{mn}g_n+D^{(q\theta)}_{m}\dot{\theta}. \tag{6}$$

Для нелинейных соотношений перед скобками появляется скалярный множитель $\lambda\neq1$.

Рассмотрим возмущенное состояние, для которого компоненты тензора скоростей деформаций

$$2\dot{E}_{kl}=\dot{u}_{k,l}+\dot{u}_{l,k}. \tag{7}$$

Для возмущений компонент тензора деформаций получим

$$S_{kl}=C^{(E)}_{klmn}\left(E_{mn}(1)+E_{mn}(2)\right)+C^{(E\theta)}_{kl}\theta+D^{(E\theta)}_{klmn}\dot{E}_{mn}+D^{(E\theta)}_{kl}\dot{\theta}+D^{(Eq)}_{klm}\dot{g}_m,$$

$$-\eta = C_{kl}^{(E\theta)}\left[E_{kl}(1)+E_{kl}(2)\right]+C^{(\theta)}\theta+D_{kl}^{(E\theta)}\dot{E}_{kl}+D_{k}^{(q\theta)}g_{k}+D^{(\theta)}\dot{\theta}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\rho_R\theta}=h_{Rm}=D_{klm}^{(Eq)}\dot{E}_{kl}+D_{mn}^{(q)}g_{n}+D_{m}^{(q\theta)}\dot{\theta},$$

где

$$S_{kl}=S_{kl}(1)+S_{kl}(2), \tag{9}$$

$$S_{kl}(1)=C_{klmn}^{(E)}E_{mn}(1)+C_{kl}^{(E\theta)}\theta+D_{klmn}^{(E)}\dot{E}_{mn}+D_{kl}^{(E\theta)}\dot{\theta}+D_{klm}^{(Eq)}\dot{g}_{m},$$

$$S_{kl}(2)=C_{klmn}^{(E)}(2).$$

Используя принцип возможных перемещений, получим [3]

$$\int_V\left[\left(\delta_{ik}+\overset{0}{u}_{i,k}\right)S_{kj}+\overset{0}{S}_{kj}u_{i,k}+S_{kj}u_{i,k}\right]\phi_{inm,j}dV+\int_V\ddot{u}_i\phi_{inm}dV=0 \tag{10}$$

или

$$\int_V\left[\left(\delta_{ik}+\overset{0}{u}_{i,k}\right)\left[S_{kj}(1)+S_{kj}(2)\right]+\overset{0}{S}_{kj}u_{i,k}+\left[S_{kj}(1)+S_{kj}(2)\right]u_{i,k}\right] \tag{11}$$

$$\phi_{inm,j}dV+\int_V\ddot{u}_i\,\phi_{inm}dV=0.$$

Зависимость (8) перепишем с учетом следующих обозначений

$$C_{klmn}^{(E)}=C_1,\quad C_{kl}^{(E\theta)}=C_2,\quad D_{klmn}^{(E)}=D_1,\quad D_{kl}^{(E\theta)}=D_2,\quad D_{klm}^{(Eq)}=D_3,\quad E_{mn}(1)=f^{(1)}E^{(1)},$$

$$E_{mn}(2)=f^{(1)}f^{(2)}E^{(12)},\quad g_m=g^{(1)}Q(X_k),$$

$$2E^{(1)}=\phi_{mij,n}+\phi_{nij,m}+\overset{0}{u}_{k,m}\phi_{kij,n}+\phi_{kij,m}\overset{0}{u}_{k,n},$$

$$2E^{(2)}=\phi_{rij,m}\phi_{rkl,n},$$

$$S(1)=C_1E^{(1)}f^{(1)}+C_2\theta^{(1)}\Psi^{(1)}+D_1\theta^{(1)}E^{(0)}+D_2\theta^{(1)}\Psi^{(1)}+D_3\dot{g}^{(1)}Q,$$

$$S(2)=C_1f^{(1)}f^{(2)}E^{(12)}.$$

Систему уравнений (10) перепишем так

$$\int_V\left\{\left(I+\overset{0}{H}+f^{(1)}H^{(1)}\right)\left(C_1E^{(1)}f^{(1)}+C_2\theta^{(1)}\Psi^{(1)}+D_1f^{(1)}E^{(01)}+D_2\dot{\theta}^{(1)}\Psi^{(1)}+D_3\dot{q}^{(1)}Q+C_1f^{(1)}f^{(2)}f^{(12)}\right)+\right.$$

$$\left.+\overset{0}{S}f^{(1)}H^{(1)}\right\}H^{(1)}dV+\int_V H^{(1)}H^{(1)T}dV=0. \tag{12}$$

Введем коэффициенты

$$A=\int_V H^{(1)}H^{(1)T}dV,\quad B=\int_V\left(I+\overset{0}{H}\right)D_1E^{(0)}H^{(1)}dV,\quad C=\int_V\left(I+\overset{0}{H}\right)D_2\Psi^{(1)}H^{(1)}dV,$$

$$D=\int_V\left(I+\overset{0}{H}\right)D_3QH^{(1)}dV,\quad E=\int_V\left(I+\overset{0}{H}\right)C_2\Psi^{(1)}H^{(1)}dV,\quad K=\int_V C_1\left(H^{(1)}E^{(1)}+E^{(12)}\right)H^{(1)}dV,$$

$$K_1=\int_V\left[\left(I+\overset{0}{H}\right)C_1E^{(1)}+\overset{0}{S}H^{(1)}\right]H^{(1)}dV,$$

$$K_2=\int_V H^{(1)}C_2\Psi^{(1)}H^{(1)}dV,$$

$$K_3=\int_V H^{(1)}D_1E^{(0)}H^{(1)}dV,$$

$$K_4 = \int_V H^{(1)} D_2 \Psi^{(1)} H^{(1)} dV,$$

$$K_5 = \int_V H^{(1)} D_3 Q H^{(1)} dV.$$

Тогда система (11) запишется в виде

$$A\ddot{f}^{(1)} + B\dot{f}^{(1)} + C\dot{\theta}^{(1)} + D\dot{g}^{(1)} + E\theta^{(1)} + Kf^{(1)} + K_1 f^{(1)} f^{(1)} +$$
$$+K_2 f^{(1)}\theta^{(1)} + K_3 f^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_4 f^{(1)}\dot{\theta}^{(1)} + K_5 f^{(1)} g^{(1)} = 0. \qquad (13)$$

В общем случае коэффициенты системы (13) переменные. Если принять допущение, что в начальном деформированном состоянии прошли все релаксационные процессы, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Аналогичную систему можно получить, если предположить, что в основном состоянии тело подвергается моно и полигармоническому нагружению. Применяя принцип усреднения за период получим постоянные коэффициенты, причем для типичных вязкоупругих материалов погрешности такого представления не превосходят нескольких процентов [2, 3].

Умножим систему (13) справа на $\dot{f}^{(1)}$

$$A\ddot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + B\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + C\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + D\dot{g}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + E\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)} + Kf^{(1)}\dot{f}^{(1)} +$$
$$+K_1 f^{(1)} f^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_2 f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_3 f^{(1)} f^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_4 f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_5 f^{(1)} g^{(1)}\dot{f}^{(1)} = 0. \qquad (14)$$

Перепишем (14) в виде

$$A\ddot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + Kf^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_1 f^{(1)} f^{(1)}\dot{f}^{(1)} = -\Big[B\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + C\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + D\dot{g}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + E\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)} +$$
$$+K_2 f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_3 f^{(1)} f^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_4 f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_5 f^{(1)} g^{(1)}\dot{f}^{(1)} \Big] = 0$$

Введем функции

$$\Pi = \frac{1}{2} A\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + \frac{1}{2} Kf^{(1)} f^{(1)} + \frac{1}{3} K_1 f^{(1)} f^{(1)} f^{(1)}, \qquad (15)$$

$$W = B\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + C\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + D\dot{g}^{(1)}\dot{f}^{(1)} + E\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_2 f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)} +$$
$$+K_3 f^{(1)} f^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_4 f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)} + K_5 f^{(1)} g^{(1)}\dot{f}^{(1)}. \qquad (16)$$

Если функции Π и W положительно определенные в некоторой области фазового пространства фазовых переменных $f^{(1)}$, $\dot{f}^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $\dot{\theta}^{(1)}$, $g^{(1)}$ $\dot{g}^{(1)}$, то из системы (14) видно, что производная от положительно определенной функции Π в силу системы будет отрицательно определенной функцией — W и согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое решение системы (14) будет асимптотически устойчиво в некоторой области начальных возмущений амплитуд наложенных перемещений, температур, градиентов температур и их скоростей. Таким образом, решение задачи об устойчивости невозмущенного состояния нелинейно-вязкоупругого тела Кельвина — Фойхта сводится к задаче устойчивости нулевого решения системы (14), которая решается при условии нахождения областей начальных возмущений и их скоростей. Значения начальных возмущений и их скоростей находятся из соотношений

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{f}^{(1)}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial f^{(1)}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\theta}^{(1)}}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{g}^{(1)}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial g^{(1)}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{f}^{(1)}}\right)_0 = 0. \tag{17}$$

Подставляя (15) и (16) в (17), получим

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{f}^{(1)}}\right)_0 = A\dot{f}^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial f^{(1)}}\right)_0 = Kf^{(1)}(0) + K_1 f^{(1)}(0) f^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\theta}^{(1)}}\right)_0 = C\dot{f}^{(1)}(0) + K_4 f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \theta^{(1)}}\right)_0 = E\dot{f}^{(1)}(0) + K_2 f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0) = 0, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{g}^{(1)}}\right)_0 = D\dot{f}^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial g^{(1)}}\right)_0 = K_5 f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{f}^{(1)}}\right)_0 = 2B\dot{f}^{(1)}(0) + C\dot{\theta}^{(1)}(0) + D\dot{g}^{(1)}(0) + E\dot{\theta}^{(1)}(0) + K_2 f^{(1)}(0)\dot{\theta}^{(1)}(0) +$$

$$+2K_3 f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0) + K_4 f^{(1)}(0)\dot{\theta}^{(1)}(0) + K_5 f^{(1)}(0) g^{(1)}(0) = 0.$$

Соотношения (18) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно величин начальных возмущений и их скоростей. Решение системы дает область начальных возмущений и их скоростей, в которых нулевое решение системы (14) будет устойчиво. Решение системы (18) дает счетное количество критических возмущений, которые образуют некоторую последовательность. Выбирая из этих значений минимальное, можно провести гиперсферу в фазовом пространстве переменных, внутри которой основной процесс деформирования, соответствующий нулевому решению системы (14) будет устойчив. Последовательность значений фазовых переменных в начальный момент времени, полученных из системы (18) образует конечную цепочку бифуркационных точек, из которых реализуется вначале минимальное. Отличие представленного подхода от линеаризированной теории в том, что нелинейно-вязкоупругое тело может потерять устойчивость при любой отличной от нуля величине начальных деформаций, если возмущения превысят определенный предел.

Литература

1. *Trusdell C., Noll W.* In "Handbuch der Phyzic" (Flugge S. ed.), Band 3, No. 3, Springer, Berlin, 1965.

2. *Карнаухов В. Г.* Термодинамика предварительно деформированных вязкоупругих тел / В. Г. Карнаухов, Б. П. Гуменюк. – Киев : Наук. думка, 1990. – 304 с.

3. *Спорыхин А. Н.* О новых явлениях в теории устойчивости нелинейных сред при конечных возмущениях / А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин. – Докл. АН УССР, сер. А, № 8, 1982. – С. 46–49.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ

Е. А. Холоша

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе представлены соотношения для напряжений и деформаций, полученные в ходе решения задачи о пластине, подверженной локальному нагреву по прямой линии.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температура, упрочнение, напряжения, деформации, перемещения.

Введение

Процессу деформирования материалов (как обратимого, так и необратимого) посвящено, например [1–3], в которых рассматриваются модели с различными свойствами.

В работах [7, 8] найдено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии пластины, диска. В первом случае при двуосном растяжении, когда отверстие свободно от нагрузок. И во втором случае, когда материал находится под действием теплового источника, который помещен в центр диска.

Данная работа посвящена моделированию и исследованию деформирования упругопластической пластины. В последнее время со стороны исследователей значительно возрос интерес к нелинейным задачам механики твердого деформируемого тела, учитывающих все более сложные процессы. Такие задачи возникают в производстве, где широко используются материалы со сложными физико-механическими свойствами, также существует проблема моделирования технологических процессов. При этом нужно учитывать, что в элементах конструкций могут возникать конечные деформации, и решение задач такого рода осложняется тем, что материалы характеризуются различными физическими свойствами, такими как упругость, пластичность, вязкость. Поэтому создание эффективных методов исследования нелинейных процессов деформирования, применимых к более широкому классу задач, является актуальной задачей на сегодняшний день.

1. Постановка задачи

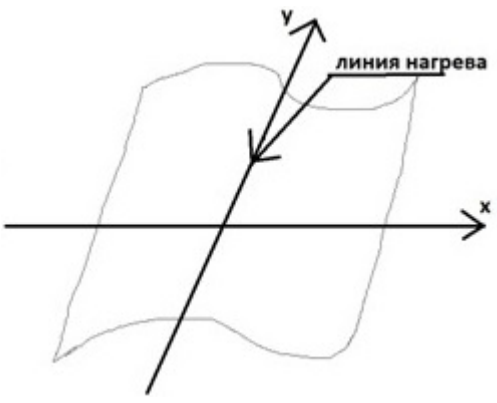


Рис. 1. Схематическое изображение пластины

Рассмотрим бесконечно длинную пластину шириной $2s$, которая представлена на рис. 1. Систему декартовых координат свяжем с краем пластины так, чтобы координаты изменялись в пределах $0 \le x \le 2s$; $-\infty < y < \infty$. С целью упрощения дальнейшего, будем считать, что локальный нагрев осуществляется по прямой линии $x = s$. Примем, что внешняя поверхность пластины свободна от усилий, массовые силы отсутствуют. Требуется определить напряженно-деформированное состояние тела.

2. Запись основных уравнений в декартовой системе координат

2.1. Упругая зона

Соотношения, связывающие полные и упругие деформации в упругой зоне имеют вид:

$$e_x = e_x^{\,e}, \quad e_y = e_y^{\,e}, \quad e_z = e_z^{\,e}, \tag{1}$$

где e_x, e_y, e_z — компоненты тензора полных деформаций; e_x^e, e_y^e, e_z^e — компоненты тензора упругих деформаций;

В упругой зоне полная система уравнений принимает вид:

– уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y$ — компоненты тензора напряжений;

– соотношения закона Дюамеля — Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu e_x + \lambda(e_x + e_y + e_z) - 3K\alpha(T - T_0) \\ \sigma_y &= 2\mu e_y + \lambda(e_x + e_y + e_z) - 3K\alpha(T - T_0) \\ \sigma_z &= 2\mu e_z + \lambda(e_x + e_y + e_z) - 3K\alpha(T - T_0) = 0 \end{aligned}, \tag{3}$$

где постоянные λ и μ называют параметрами Ламе; α — коэффициент линейного температурного расширения; K — модуль всестороннего сжатия; T — температура (определяется из решения уравнения теплопроводности); T_0 — температура в начальный момент времени;

– соотношения Коши:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \\ e_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{aligned} \tag{4}$$

где u_i — компоненты вектора перемещений;

– граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y = P_x \\ \sigma_{yx} n_x + \sigma_y n_y = P_y \end{aligned}, \tag{5}$$

где n_j — направляющие косинусы; P_j — компоненты вектора внешней нагрузки на части поверхности, где заданы усилия;

$$\begin{aligned} u_x = u_x^* \\ u_y = u_y^* \end{aligned}, \tag{6}$$

где u_x^*, u_y^* — компоненты вектора перемещений на части поверхности, где заданы перемещения u_x, u_y.

2.2. Пластическая зона

Соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации в пластической зоне имеют вид:

$$e_x = e_x{}^e + e_x{}^p, e_y = e_y{}^e + e_y{}^p, e_z = e_z{}^e + e_z{}^p, \tag{7}$$

где e_x^p, e_y^p, e_z^p — компоненты тензора пластических деформаций;

– уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}; \tag{8}$$

– соотношения закона Дюамеля — Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_x = 2\mu e_x^e + \lambda(e_x^e + e_y^e + e_z^e) - 3K\alpha(T - T_0) \\ \sigma_y = 2\mu e_y^e + \lambda(e_x^e + e_y^e + e_z^e) - 3K\alpha(T - T_0) \\ \sigma_z = 2\mu e_z^e + \lambda(e_x^e + e_y^e + e_z^e) - 3K\alpha(T - T_0) = 0 \end{aligned}; \tag{9}$$

– соотношения Коши:

$$\begin{aligned} e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{aligned}; \tag{10}$$

– функция нагружения:

$$\max\left\{\left|\sigma_x - ce_x^p - \sigma\right|, \left|\sigma_y - ce_y^p - \sigma\right|, \left|\sigma_z - ce_z^p - \sigma\right|\right\} = \frac{4}{3}k, \tag{11}$$

где k — предел текучести, $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$;

– соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$\begin{aligned} de_x^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \\ de_{xy}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \\ de_y^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \end{aligned}, \tag{12}$$

где $d\lambda$ — множитель Лагранжа; $f(\sigma_{ij})$ — определяется соотношением (11).

Граничные условия имеют вид в пластической зоне имеют аналогичный вид (5), (6).

На границе раздела зон упругого и пластического деформирования должны быть выполнены условия сопряжения

3. Решение в упругой области

Предположим, что в начальный момент времени пластина будет деформироваться обратимо. Если пренебречь торцевыми эффектами по длине пластины, то получим $e_y = 0$. Закон Дюамеля — Неймана описывает связь между главными напряжениями σ_x, σ_y, $\sigma_z = 0$ и упругими деформациями e_x^e, $e_y^e = 0$, e_z^e.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= e_x^e\left(\lambda+2\mu\right)+\lambda e_z^e-3K\alpha\left(T-T_o\right)\\ \sigma_y &= +\lambda(e_x^e+e_z^e)-3K\alpha\left(T-T_o\right)\\ \sigma_z &= e_z^e\left(\lambda+2\mu\right)+\lambda e_x^e-3K\alpha\left(T-T_o\right)=0\end{aligned}, \tag{13}$$

где $K=\lambda+\frac{2}{3}\mu$;

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{4\mu\left(\lambda+\mu\right)u_{x,x}-6\mu K\alpha\left(T-T_0\right)}{\lambda+2\mu}\\ \sigma_y &= \frac{2\mu\lambda u_{x,x}-6\mu K\alpha\left(T-T_0\right)}{\lambda+2\mu}\end{aligned}. \tag{14}$$

В рассматриваемой задаче уравнение равновесия примет вид:

$$\sigma_{x,x}=0. \tag{15}$$

Из уравнения (15) следует, что

$$\sigma_x=C_1, \tag{16}$$

где C_1 — константа интегрирования, которая находится из граничных условий.

В качестве граничных условий примем:

$$\begin{aligned}\sigma_x\big|_{x=0}&=0\\ u_x\big|_{x=0}&=0\end{aligned}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что $\sigma_x=0$. Тогда единственное нетривиальное напряжение запишется в виде:

$$\sigma_y=\frac{3\mu K\alpha\left(T-T_0\right)\left(\lambda-2\lambda-2\mu\right)}{\left(\lambda+\mu\right)\left(\lambda+2\mu\right)}=-\frac{3\mu K\alpha\left(T-T_0\right)}{\left(\lambda+\mu\right)}. \tag{18}$$

4. Решение в пластической области

В некоторый момент на линии $x=s$ выполняется условие $\sigma_y=-2k\left(x\right)+\frac{3}{2}ce_y^p$. Зарождается упругопластическая граница $r=n_1(t)$. В области пластического течения $n_1(t)\le r\le s$ начинают расти деформации e_x^p, e_y^p, e_z^p, которые являются необратимыми.

Из ассоциированного закона пластического течения следует, что

$$e_x^p=e_z^p,\ e_y^p=-2e_x^p. \tag{19}$$

Закон Дюамеля — Неймана запишется в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left(\lambda+2\mu\right)\left(e_x-e_x^p\right)+\lambda\left(e_z+e_x^p\right)-3K\alpha\left(T-T_o\right)=0\\ \sigma_y &= \left(\lambda+2\mu\right)(2e_x^p)+\lambda\left(e_x+e_z+2e_x^p\right)-3K\alpha\left(T-T_o\right)=-2k\left(x\right)+\frac{3}{2}ce_y^p\\ \sigma_z &= \left(\lambda+2\mu\right)\left(e_z-e_x^p\right)+\lambda\left(e_x+e_x^p\right)-3K\alpha\left(T-T_o\right)=0\end{aligned}. \tag{20}$$

Решая данную систему уравнений, получим:

$$e_x^p=-\frac{\left(\lambda+\mu\right)}{3K\mu}k(x)+\frac{1}{2}\alpha\left(T-T_0\right). \tag{21}$$

Из уравнения равновесия следует $\sigma_x=0$. Используя (19) разрешим (20):

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_y = -2k(x) - \frac{c(\lambda+\mu)}{\frac{1}{2}c(\lambda+\mu)+3K\mu}k(x) - \frac{3c}{\frac{3c(\lambda+\mu)}{3K\mu}+2}\alpha(T-T_0). \qquad (22)$$

$$\sigma_z = 0$$

5. Разгрузка

Когда нагрев платины прекращается, в области пластического течения необратимые деформации замедляют свой рост и на линии $x = s$ образуется упругопластическая граница $r = m_1(t)$.

В области разгрузки $m_1(t) \le r \le s$ необратимые деформации $e_x^p(r,t)$, $e_y^p(r,t)$, $e_z^p(r,t)$, ранее зависящие от местоположения и времени, перейдут в необратимые деформации, зависящие исключительно от местоположения $p_x(r)$, $p_y(r)$, $p_z(r)$. Закон Дюамеля — Неймана принимает вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= (\lambda+2\mu)(e_x - p_x) + \lambda(e_z + p_z - p_y) - 3K\alpha(T-T_o) = 0 \\
\sigma_y &= (\lambda+2\mu)(-p_y) + \lambda(e_x + e_z - p_z - p_x) - 3K\alpha(T-T_o) \\
\sigma_z &= (\lambda+2\mu)(e_z - p_z) + \lambda(e_x - p_x - p_y) - 3K\alpha(T-T_o) = 0
\end{aligned} \qquad (23)$$

Решая систему (23), находим единственное ненулевое напряжение:

$$\sigma_y = -\frac{\mu(3K\alpha(T-T_0) + 3\lambda\mu p_y + 2\mu^2 p_y)}{\lambda+\mu} = -\frac{3\mu K\alpha(T-T_0)}{\lambda+\mu} - \frac{\mu p_y(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}. \qquad (24)$$

Преобразуем выражение $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ к виду $3K = 3\lambda + 2\mu$ и упростим (24)

$$\sigma_y = -\frac{3K\mu p_y}{\lambda+\mu} - \frac{3K\mu\alpha(T-T_0)}{\lambda+\mu} \qquad (25)$$

6. Повторное пластическое течение

Если максимальная температура нагрева была значительной, ее скорости хватило для образования необратимых деформаций, достаточных для появления повторного пластического течения. Повторное пластическое течение зарождается на линии $x = s$; здесь начинает выполняться условие $\sigma_y = 2k(x) - ce_y^p$ и зарождается упругопластическая граница $r = n_2(t)$.

В области повторного пластического течения необратимая деформация имеет вид:

$$p_i = p_i + e_i^p. \qquad (26)$$

В области повторного пластического течения $n_2(t) \le r \le s$ используя (26), преобразуем систему (23). Получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= (\lambda+2\mu)(e_x - e_x^p - p_x) + \lambda(e_z - e_z^p - e_y^p + p_z - p_y) - 3K\alpha(T-T_o) = 0 \\
\sigma_y &= (\lambda+2\mu)(-p_y - e_y^p) + \lambda(e_x + e_z - e_x^p - e_z^p - p_z - p_x) - 3K\alpha(T-T_o) = 2k(x) - \frac{3}{2}ce_y^p \\
\sigma_z &= (\lambda+2\mu)(e_z - e_z^p - p_z) + \lambda(e_x - e_x^p - e_y^p - p_x - p_y) - 3K\alpha(T-T_o) = 0
\end{aligned} \qquad (27)$$

Решая систему (27), получим:

$$e_x^p = \frac{3K\alpha\mu\left(T-T_0\right)+3\lambda p_y-\lambda\frac{3}{2}cp_y+2\mu^2 p_y-\mu\frac{3}{2}cp_y+2k\mu+2k\lambda}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}= \\ =\frac{\lambda+\mu}{3K\mu}k+\frac{1}{2}\alpha\left(T-T_0\right)-p_x+\frac{3cp_x\left(\lambda+\mu\right)}{3K\mu}. \tag{28}$$

7. Остаточные напряжения

Рост необратимых деформаций прекращается при полном остывании пластины. Материал пластины деформируется снова обратимо. В области повторного пластического течения необратимая деформация $p_y = p_y + e_y^p$.

Единственное ненулевое напряжение будет находиться из соотношения

$$\sigma_y = -\frac{3K\mu p_y}{\lambda+\mu}. \tag{29}$$

Заключение

В данной статье решалась задача об определении напряженно-деформируемого состояния упрочняющейся упругопластической пластины при локальном нагреве. В результате написания статьи были получены напряжения в упругой и пластической областях, а также пластические деформации в упругой и пластической областях.

При занулении параметра упрочнения получим решение, которое совпадает с результатами полученными Щербатюк Галиной Анатольевной в диссертации «Условие максимальных приведенных напряжений в качестве средства расчетов одномерных неустановившихся температурных напряжений в упругопластических цилиндрических телах» [9].

Литература

1. *Абашкин Е. Е.* Условие пластичности максимальных приведенных касательных напряжений в качестве средства расчетов эволюции плоских напряженных состояний / Е. Е. Абашкин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Серия: Науки о природе и технике. – 2018. – № II-1(34). – С. 51–62.

2. *Абашкин Е. Е.* Комбинированное тепловое воздействие в качестве средства получения сварного соединения с повышенными прочностными свойствами / Комсомольск-на-Амуре, 2019.

3. *Абрамов В. В.* Напряжение и деформация при термической обработке стали / В. В. Абрамов. – Донецк : Вища шк., 1985. – 133 с.

4. *Буренин А. А.* Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Известия Российской академии наук. Серия: Механика твердого тела. – 2014. – С. 124–131.

5. *Ишлинский А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

6. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

7. *Ковалев А. В., Спорыхин А. Н.* О двухосном растяжении пластины с отверстием // Информационные технологии и системы МАИ. Вып. 2. Воронеж. – 1998. – С. 61 – 66.

8. *Ковалев А. В., Спорыхин А. Н., Гоцев Д. В.* Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов // Журнал «Прикладная механика и техническая физика», СО РАН. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 146–151.

9. *Щербатюк Г. А., Буренин А. А.* Условие максимальных приведенных напряжений в качестве средства расчетов одномерных неустановившихся температурных напряжений в упругопластических цилиндрических телах. – Комсомольск-на-Амуре, 2018.

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

А. Д. Чернышов[1], О. Ю. Никифорова[1], В. В. Горяйнов[2], С. Ф. Кузнецов[1]

[1]Воронежский государственный университет инженерных технологий
[2]Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Приведена постановка задачи о нахождении прогибов прямоугольной пластины на упругом основании с произвольными граничными условиями и произвольной нагрузкой. Аналитическое решение представляется универсальным быстрым разложением, которое удобно применять в случаях присутствия в задачах производных как четного, так и нечетного порядков Сформулирован принцип получения условий совместности входных данных на границах прямоугольника, невыполнение которых приводит к большим неустранимым погрешностям в его углах.
Ключевые слова: бигармоническое уравнение, прогиб пластины, условия совместности граничных условий, быстрые разложения.

Введение

Для решения бигармонического уравнения применяются различные численные и аналитические методы. В работах [1–4] используется метод итераций. В [5] применяется комбинация метода конечных разностей и метода граничных элементов. В работах [6, 7] решение ищется в виде ряда Фурье, для которого не обсуждаются вопросы его сходимости и возможности почленного дифференцирования. В данной работе для аналитического решения бигармонического уравнения будут использованы быстрые разложения [8, 9], которые ранее с успехом применялись для решения краевых задач уравнений в частных производных [10–13].

Постановка задачи и описание особенностей ее решения

Уравнения равновесия для прямоугольной пластины на упругом основании с произвольными граничными условиями и произвольной нагрузкой запишем в виде неоднородного линейного бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+K_0 w=q(x,y),\ (x,y)\in\Omega_{\square}\left(x\in[-a,a],y\in[-b,b]\right). \tag{1}$$

Упругое основание пластины в уравнении (1) учитывается слагаемым $K_0 w$, величина $q(x,y)$ — переменная поперечная нагрузка на поверхность пластины, w — вертикальное перемещение пластины. На боковых границах $\Gamma_{\square}$ зададим $w(x,y)$ и нормальные к её границе $\Gamma_{\square}$ производные от перемещения

$$w\big|_{x=-a}=\varphi_1(y),\ w\big|_{y=-b}=\varphi_2(x),\ w\big|_{x=a}=\varphi_3(y),\ w\big|_{y=b}=\varphi_4(x),$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=-a}=\psi_1(y),\ \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=-b}=\psi_2(x),\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a}=\psi_3(y),\ \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=b}=\psi_4(x), \tag{2}$$
$$\left(q(x,y),\ w,\ \varphi_i,\ \psi_i,\ i=1\div 4\right)\in C^{(8)}(\Omega_{\square}),\ (x,y)\in\Omega_{\square}.$$

Граничные условия (2) означают, что на $\Gamma_{\square}$ задано вертикальное смещение материальных точек пластины и упругий поворот краев пластины. Подобные задачи особенно сложны из-за присутствия в них производных как четного, так и нечетного порядков. Поэтому для решения

задачи (1), (2) будем использовать универсальные быстрые разложения [9], которые удобно применять в подобных задачах. В данном случае бигармоническое уравнение содержит четные производные, граничные условия — нечетные производные. Для построения решения будем использовать граничную функцию $M_6(x,y)$ шестого порядка, т. е. не ниже четвертого порядка, так как ДУ (1) имеет четвертый порядок.

Быстрое разложение для $w(x,y)$ запишем в виде суммы граничной функции $M_6(x,y)$ с частичной суммой ряда Фурье

$$w(x,y)=M_6(x,y)+a_0(y)+\sum_{m=1}^{N}\left(a_m(y)\cos m\pi\frac{x}{a}+b_m(y)\sin m\pi\frac{x}{a}\right). \tag{3}$$

В (3) N — количество членов в ряде Фурье, функция $M_6(x,y)$ имеет вид

$$M_6(x,y)=\sum_{q=0}^{6}A_q(y)P_q(x), \tag{4}$$

где $A_q(y)$ некоторые функции от переменной y, $P_q(x)$ специального вида полиномы от переменой x [9]

$$P_0(x)=\frac{x}{2a},\ P_1(x)=\frac{x^2}{4a},\ P_2(x)=\frac{x^3}{12a}-\frac{ax}{12},\ P_3(x)=\frac{x^4}{48a}-\frac{ax^2}{24},\ P_4(x)=\frac{x^5}{240a}-\frac{ax^3}{72}+\frac{7a^3x}{720},$$
$$P_5(x)=\frac{x^6}{1440a}-\frac{ax^4}{288}+\frac{7a^3x^2}{1440},\ P_6(x)=\frac{1}{1440}\left(\frac{x^7}{7a}-ax^5+\frac{7a^3x^3}{3}-\frac{31a^5x}{21}\right). \tag{5}$$

В (3) коэффициенты a_0,a_m,b_m вычисляются интегральными формулами Фурье по переменной x. Функции $A_q(y)$ находятся из выражения [9]

$$A_q(y)=w^{(q)}(a,y)-w^{(q)}(-a,y),\ \ q=0\div 6. \tag{6}$$

Равенство (6) удобно использовать, когда производные $w^{(q)}(\pm a,y)$ на концах отрезка $[-a,a]$ известны, т. е. когда $w(x,y)$ известная функция, либо $A_q(y)$ находится из граничных условий, либо из ДУ равновесия пластины. Формула (6) может быть модифицирована к более совершенному виду

$$A_q(y)=w^{(q)}\left(a(1-\varepsilon),y\right)-w^{(q)}\left(-a(1-\varepsilon),y\right),\ \ q=0\div 6. \tag{7}$$

где ε — малая величина, которую следует задавать произвольно, но меньше погрешности используемых физических величин, определяемых концепцией сплошности среды.

Разложение (3) позволяет свести задачу с двумя переменными (x,y) к задаче о нахождении коэффициентов $A_q(y)$, $a_0(y)$, $a_m(y)$, $b_m(y)$ с одной переменной y. Входными данными задачи являются постоянные a, b и функции из граничных условий:

$$\varphi_i,\ \psi_i,\ i=1\div 4. \tag{8}$$

При рассмотрении многомерных задач, когда неизвестное перемещение $w(x,y)$ зависит от многих переменных, для получения аналитического гладкого решения возникает проблема согласования входных данных (8) задачи (1), (2). Условия согласований записываются из следующих соображений.

Граница односвязной области $\Omega_{\square}$ имеет четыре особые точки – углы прямоугольника, где терпят разрыв проекции вектора нормали к $\Gamma_{\square}$. Решение задачи (1), (2) будем строить из класса гладких функций $C^{(8)}(\Omega_{\square})$. В дальнейшем понадобится вычисление производных 8-го порядка, т. е. на 2 выше порядка используемой граничной функции. Тогда в углах $\Omega_{\square}$ должны выполняться: *условия непрерывности перемещений, непрерывности производных от перемещений и их вторых смешанных производных. Это означает, что при подходе к углу с разных направлений надо получать одинаковые значения указанных величин подобно тому, как получаются условия Коши — Римана в ТФКП. Условия непрерывности будем называть условиями совместности входных данных, т.е. граничных условий. Если же решение допускает разрывы,*

то должно быть какое-либо обоснование физического характера для этих разрывов, но тогда прямое применение рядов Фурье будет проблематичным.

При подходе к углу с разных направлений надо получить одинаковые значения указанных величин (8). При этом в условиях совместности должны присутствовать только входные данные (8). Этот принцип использован для получении всех ниже приведенных условий совместности.

Из условий непрерывности перемещений получаем первые четыре условия совместности граничных условий

$$w(-a,-b)=\varphi_1(-b)=\varphi_2(-a),\quad w(a,-b)=\varphi_2(a)=\varphi_3(-b),$$
$$w(a,b)=\varphi_3(b)=\varphi_4(a),\quad w(-a,b)=\varphi_4(-a)=\varphi_1(b). \tag{9}$$

Кроме (9) в угловых точках должны выполняться условия непрерывности вторых смешанных производных

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right|_{x=-a,y=-b}=\psi_1'(-b)=\psi_2'(-a),\quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right|_{x=a,y=-b}=\psi_3'(-b)=\psi_2'(a),$$
$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right|_{x=a,y=b}=\psi_3'(b)=\psi_4'(a),\quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right|_{x=-a,y=b}=\psi_1'(b)=\psi_4'(-a). \tag{10}$$

Штрихом в (10) обозначены производные по той переменной, от которой зависит соответственная функция.

К условиям совместности (9) и (10) добавим условия, связывающие производные от функций для перемещений, заданных в (2), с функциями для производных по нормали к границе $\Gamma_{\square}$ от перемещений из (2), т. е.

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=-a,y=-b}=\left.\frac{d\varphi_1(y)}{dy}\right|_{y=-b}=\psi_2(-a),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=a,y=-b}=\left.\frac{d\varphi_3(y)}{dy}\right|_{y=-b}=\psi_2(a),$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=a,y=b}=\left.\frac{d\varphi_3(y)}{dy}\right|_{y=b}=\psi_4(a),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=-a,y=b}=\left.\frac{d\varphi_1(y)}{dy}\right|_{y=b}=\psi_4(-a),$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=-a,y=-b}=\left.\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right|_{x=-a}=\psi_1(-b),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a,y=-b}=\left.\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right|_{x=a}=\psi_3(-b),$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a,y=b}=\left.\frac{d\varphi_4(y)}{dy}\right|_{y=b}=\psi_3(b),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=-a,y=b}=\left.\frac{d\varphi_4(x)}{dx}\right|_{y=b}=\psi_1(b). \tag{11}$$

Равенства (9)–(11) будем называть условиями совместности граничных условий. Если же хотя бы одно из условий (9)–(11) не выполняется, то в углах будем иметь разрывы и тогда нельзя будет дифференцировать ряды Фурье для разрывных функций, т. е. нельзя их будет подставлять в дифференциальное уравнение равновесия упругой пластины (1).

Заключение

Таким образом, при построении гладкого решения нельзя задавать входные данные (8) задачи (1), (2) произвольно, они должны удовлетворять условиям их совместности, что позволит строить решение с высокой точностью в пространстве гладких функций $C^{(8)}(\Omega_{\square})$, и тогда возможно применение рядов Фурье. Критерием существования невыполненных условий совместности является большая неустранимая погрешность в угловых точках.

Литература

1. *Quang A. D.* Iterative method for solving the second boundary value problem for biharmonic-type equation / A. D. Quang, N. Van Thien // Journal of Applied Mathematics. – 2012. – Т. 2012. – P. 891519.

2. *Павлов С. П.* Итерационная процедура сведения бигармонического уравнения к уравнению типа Пуассона / С. П. Павлов, М. В. Жигалов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – Т. 1, № 1 (52). – С. 22–29.

3. *Ермоленко А. В.* К решению неоднородного бигармонического уравнения / А. В. Ермоленко, Н. В. Кожагельдиев // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 3 (44). – С. 64–78.

4. *Сорокин С. Б.* Переобусловливание при численном решении задачи Дирихле для бигармонического уравнения / С. Б. Сорокин // Сиб. журн. вычисл. Математики. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 205–213.

5. *Nekrasova N. N.* Foundation slabs bending model with variable stiffness ratio rested on elastic foundation / N. N. Nekrasova, L. V. Akchurina // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Engineering and Computational Mechanics. – 2019. – Т. 172, № 2. – P. 70–78.

6. *Федосеев В. Н.* Прогиб тонкой прямоугольной пластины со свободными краями при сосредоточенных воздействиях / В. Н. Федосеев, Д. А. Ягнятинский // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 4. – С. 653–659

7. *Тимошенко С. П.* Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука. – 1966. – 636 с.

8. *Чернышов А. Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А. Д. Чернышов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 1. – С. 13–24.

9. *Chernyshov A. D.* Universal fast expansion for solving nonlinear problems / A. D. Chernyshov, D. S. Saiko, E. N. Kovaleva // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – P. 012147.

10. Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий / А. Д. Чернышов, В. М. Попов, В. В. Горяйнов, О. В. Лешонков // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, № 5. – С. 1288–1297.

11. Решение задачи о контактном тепловом сопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, В. М. Попов, А. С. Шахов, В. В. Горяйнов, А. П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4, № 12. – С. 544–552.

12. *Чернышов А. Д.* Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы / А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горяйнов // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4, № 11. – С. 482–486.

13. Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / В. М. Попов, А. С. Шахов, В. В. Горяйнов, О. А. Чернышов, А. П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2014. – Т. 6, № 4. – С. 179–191.

УДК 539.3

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О ПЛИТЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВКЛЮЧЕНИЕ, МЕТОДОМ РЕГРЕССИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А. Ю. Яковлев, Р. М. Землянухин

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния толстой упругопластической плиты с эллиптическим отверстием и упругим включением под действием растягивающих нагрузок. Предложен метод построения регрессионной модели на основе гауссовских процессов, позволяющий прогнозировать распределение напряжений в пластине. Для верификации модели применена математическая модель плиты и выполнено сравнение результатов с помощью компьютерного эксперимента. Полученные результаты демонстрируют высокую точность регрессионного моделирования при ограниченном объеме данных, что открывает возможности для практического применения в инженерных расчетах.

Ключевые слова: упругопластическая плита, эллиптическое отверстие, упругое включение, напряженно-деформированное состояние, метод возмущений, регрессионное моделирование, гауссовские процессы, апостериорное распределение, ковариационная функция, инженерные расчеты, прогнозирование напряжений, математическое моделирование.

Введение

Определению напряженно-деформированного состояния в толстых пластинах с отверстиями и включениями посвящены работы многих авторов [1, 2]. Для решения этой проблемы активно применялся метод возмущений с учетом соответствующих допущений. Развитие электронно-вычислительной техники привело к появлению различного оборудования, с помощью которого можно выводить эксперименты по определению силовых характеристик реальных объектов. Так, например, появились доступные и высокоточные датчики для определения напряжений, а деформации можно определять, применяя камеры высокого разрешения. Таким образом, возникла возможность получения качественной информации о соответствующей величине. При этом в последние десятилетия существенный прогресс возник в методах машинного обучения, в частности нелинейном регрессионном моделировании. Методы регрессионного моделирования активно применяются при решении задач мехатроники и робототехники.

Перечисленные аспекты легли в основу данной работы по построению регрессионной модели напряженного состояния толстой плиты с отверстием и включением методом гауссовских процессов. В качестве источника данных для регрессионной модели выступила математическая модель толстой упругопластической плиты со включением [1, 2].

1. Упругопластическая задача о плите, содержащей включение

Рассмотрим математическую модель двухосного растяжения толстой плиты с отверстием в форме эллипса, в которое с натягом вставлено упругое включение — цилиндр. Материал плиты предполагается идеально упругопластическим, включение предполагается упругим (рис. 1).

Внутренний и внешний контуры включения имеют эллиптическую форму. Плита на бесконечности растягивается взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями P_1 и P_2, внутренний контур включения нагружен нормальным давлением P_0.

При этом материал конструкции считается не сжимаемым, однородным, изотропным, материалы плиты и включения предполагаются различными. При построении математической

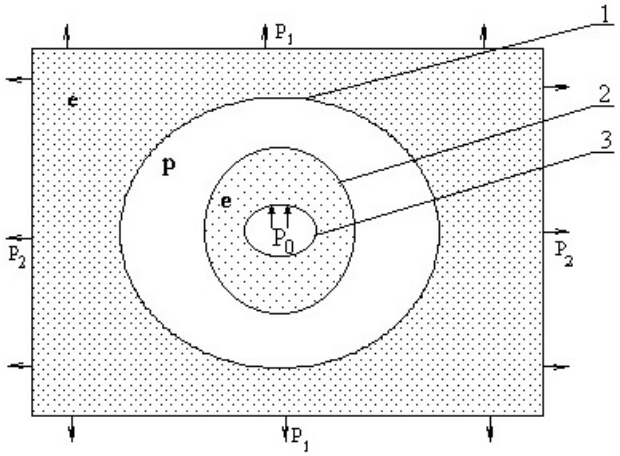


Рис. 1. 1 — граница раздела упругой и пластических областей плиты, 2 — граница контакта включения и плиты, 3 — внутренний контур включения

модели исходили из предположения, что пластическая зона в плите полностью охватывает контур отверстия.

В результате решения задачи получено распределения поля напряжений (компонент тензора напряжений σ_{ij}) и перемещений (компонент вектора перемещений u_i) во всей составной конструкции, а также формы упругопластической границы в плите.

В качестве метода использован приближенно — аналитический метод — метод малого параметра или более широко – метод возмущений. Известно [3], что применение этого метода позволяет получить приближенное решение вблизи уже известного точного решения. Для рассматриваемой задачи с эллиптическими контурами, такой близкой задачей будет задача о плите с круговыми контурами, представляющая нулевое приближение или невозмущенное состояние в искомом решении. Ограничившись нулевым и первым приближениями, решение общей задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \delta\sigma_\rho^1; \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \delta\sigma_\theta^1;\\
&\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}^0 + \delta\tau_{\rho\theta}^1; \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta);\\
&u = u^0 + \delta u^1; \qquad \upsilon = \upsilon^0 + \delta\upsilon^1; \qquad \rho_k = R_0 + \delta R_1,\\
&r_s = 1 + \delta r_s^{(1)},
\end{aligned} \tag{1}$$

где верхний индекс 1 указывает на первое приближение, а индекс 0 на нулевое приближение, δ — малый параметр, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; u, υ — перемещения вдоль осей соответственно; r_s — радиус упругопластической границы в плите, ρ_k — линия контакта включения и плиты.

Соотношения в цилиндрической системе координат ρ, θ, z, определяющие форму контуров отверстий, форму упругопластической границы в плиты, а также полей напряжений и перемещений приведены в [1].

2. Описание метода построения регрессионной модели

Для решения задачи будем применять метод регрессионного моделирования с помощью гауссовских процессов. В этом случае предполагается, что данные $D = \{X = [\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n]^T, Y[y_1, ..., y_n]^T\}$ были сформированы в соответствии с правилом $y_i = h(x_i) + \varepsilon_i$, где $h : R^{\,D} \to R$, $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ — независимый гауссовский шум измерения. Функцию h рассматривают как случайную функцию и выводят апостериорное распределение

$p(h \mid D)$ по h из априорного распределения $p(h)$, данных D и предположений о гладкости h [4]. Апостериорное распределение используется при прогнозировании значений функции $h(\mathbf{x}_*)$ для произвольных входных данных $x_* \in R^D$.

Вектор состояния системы имеет вид $\mathbf{x} = [\rho, \theta]^T \in R^2$ [1] и представляет собой вектор независимых параметров. Соответствующий зависимый параметр, согласно цели прогнозирования, выбран как $y = \sigma_\rho \in R$ [1].

Для определения апостериорного распределения для случайной функции h, используем метод байесовского вывода в рамках гауссовских процессов (ГП) [4]. Байесовский вывод можно считать трехэтапной процедурой: во-первых, необходимо указать априорное значение распределения для неизвестной функции h. Во-вторых, провести наблюдение и фиксацию данных D. В-третьих, вычислить апостериорное распределение по h, которое уточняет априорное значение путем включения доказательств из наблюдений D. Функция априорного среднего выбирается тождественно равная нулю, а ковариационная функция имеет вид [4]

$$k_h = k_{SE} + \delta_{pq}\sigma_\varepsilon^2,$$

$$k_{SE}(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) = \alpha^2 \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q)^T \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q)\right),\ \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q \in R^D, \tag{2}$$

здесь α^2 дисперсия сигнала функции h, диагональная матрица $\Lambda = diag([l_1^2, ..., l_D^2])$ зависит от характерных масштабов длины l_i, δ_{pq} — символ Кронекера [4]. Величины масштабов длины $l_1, ..., l_D$, дисперсия сигнала α^2 и дисперсия шума σ_ε^2 называются гиперпараметрами скрытой функции h, которые собираются в векторе гиперпараметров $\boldsymbol{\theta}$.

После проведения измерения значений функции h для входных значений обучающего набора данных, получаем набор данных, состоящий из n входных векторов $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ и соответствующих целевых значений $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)^T$. Далее вычисляем гиперпараметры методом максимизации логарифма функции правдоподобия. Логарифм функции правдоподобия в этом случае имеет вид

$$\log p(\mathbf{y} \mid \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \left(\mathbf{K}_{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2}\log\left|\mathbf{K}_{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}\right| - \frac{D}{2}\log(2\pi), \tag{3}$$

где $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} k_h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}) & . & . & k_h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}) \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ k_h(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}) & . & . & k_h(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером $n \times n$.

Используя выражение (3), находим вектор оптимальных, для имеющегося набора данных, гиперпараметров $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \arg\max \log p(\mathbf{y} \mid \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$.

Согласно определению ГП следует, что значения функции для некоторых тестовых и обучающих входных данных являются совместно гауссовыми, то есть [4]

$$p(\mathbf{h}, \mathbf{h}_* \mid \mathbf{X}, \mathbf{X}_*) = N\left(\begin{bmatrix} m_h(\mathbf{X}) \\ m_h(\mathbf{X}_*) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_*) \\ \mathbf{K}_{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_*) & \mathbf{K}_* \end{bmatrix}\right), \tag{4}$$

где $\mathbf{h} = [h(\mathbf{x_1}), ..., h(\mathbf{x_n})]^T$, $\mathbf{h}_* = [h(\mathbf{x}_{*\mathbf{1}}), ..., h(\mathbf{x}_{*\mathbf{n}})]^T$, $\mathbf{n}$ — количество обучающих векторов данных, m – количество тестовых векторов для прогнозирования.

Рассмотрим случай прогнозирования значения функции $h(\mathbf{x}_*)$, $h : R^D \to R$, при неопределенном тестовом входе $\mathbf{x}_* \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \in R^D$, $y_* \in R$, где h есть ГП с функцией ковариации k_h (2) плюс функция ковариации шума. С учетом (2) среднее значение μ_* прогнозируемого распределения имеет вид [4]

$$\mu_* = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{q}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{K} + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y}$,

$$\mathbf{q} = \left[q_1, ..., q_n\right]^T \in R^n,\ \ q_i = \alpha^2 \left|\mathbf{\Sigma}\Lambda^{-1} + \mathbf{I}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}\right)^T \left(\mathbf{\Sigma} + \Lambda\right)^{-1} \left(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}\right)\right),$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_h\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\right) & . & . & k_h\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n\right) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ k_h\left(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1\right) & . & . & k_h\left(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n\right) \end{pmatrix}.$$

3. Описание алгоритма построение регрессионной модели

Рассмотрим алгоритм построения регрессионной модели напряженного состояния толстой плиты со включением под действием растягивающих нагрузок гауссовским процессом в рамках трехэтапной Байесовской процедуры [4].

1. Используя математическую модель толстой плиты со включением, формируем набор кортежей данных, которые состоят из входных значений — координат $(\rho, \theta)^T$ и соответствующих целевых значений радиальных напряжений σ_ρ. Априорное распределение задается выражением (2).

3. Для сформированного набора данных, вычисляем гиперпараметры (3), путем определения экстремума логарифма правдоподобия (3) методом BFGS [4].

4. Вычисляем апостериорного распределение значений моделируемой функции, используя соотношение (4), (5) для некоторого тестового входного значения, заданного математическим ожиданием $\boldsymbol{\mu}_* = [\mu_\rho, \mu_\theta]$ и ковариационной функцией $\mathbf{\Sigma}$.

4. Результаты моделирования

Для компьютерного эксперимента разработана программа на языке C++ в среде Processing [5], которая реализует приведенный выше алгоритм с визуализацией процессов. Программа состоит из восьми модулей и имеет размер 123Кб. Среди основных модулей можно выделить модули:

GP.pde реализует функцию логарифма правдоподобия (3), функцию вычисления прогнозного значения по соотношению (5) для входных значений, заданных математическим ожиданием и ковариационной функцией;

Unit.pde реализует функцию нелинейного поиска максимума у соотношения (3) методом BFGS [4];

Matrix.pde содержит обширный набор функций по работе с матрицами;

Model_EP.pde реализует математическую модель толстой плиты со включением и позволяет определять напряженно-деформированное состояние в зависимости от геометрии включения и внешних нагрузок.

На рис. 2 приведен результат работы программы при моделировании распределения поля напряжений (напряжение). На левой панели представлен результат математического моделирования и точки на плите для обучающего набора, на правой панели результат регрессионного моделирования на основе набора из 43-х точек.

На рис. 3 представлен график распределения напряжения в плите в зависимости от радиуса ρ и при соответствующих значениях угла θ.

В качестве вывода можно отметить высокую степень точности моделирования при сравнительно небольшом объеме обучающих данных. Результаты, полученные в работе, можно использовать для построения регрессионной модели реальной пластины с отверстием, находящейся под действием внешних нагрузок. Для получения данных можно использовать оп-

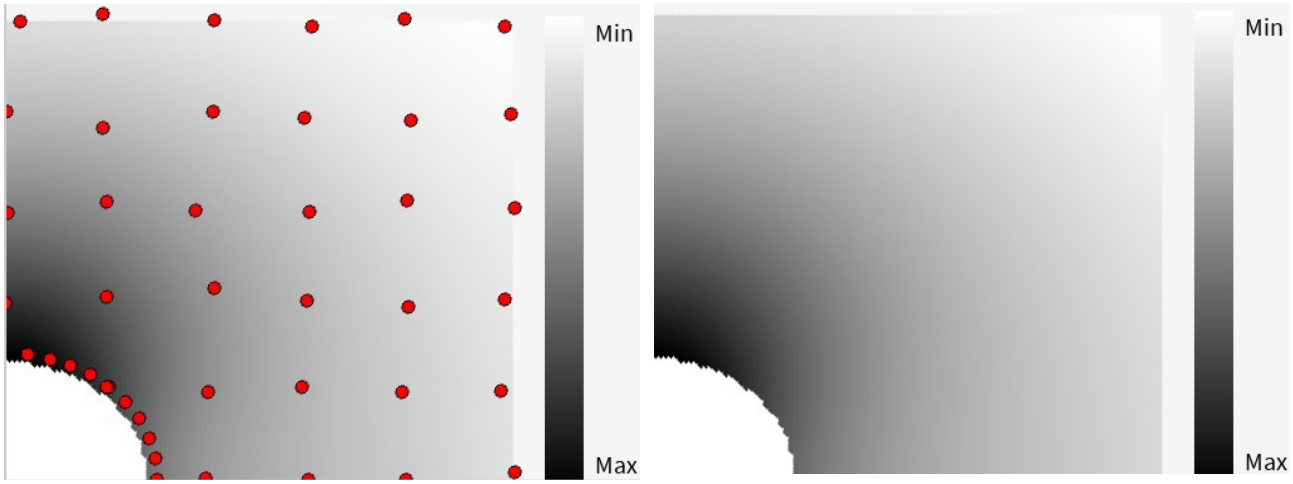


Рис. 2. Слева результат математического моделирования распределения поля напряжений в плите, красными маркерами отмечены точки, где производились измерения напряжения для создания обучающего набора данных. Справа результат соответствующего регрессионного моделирования

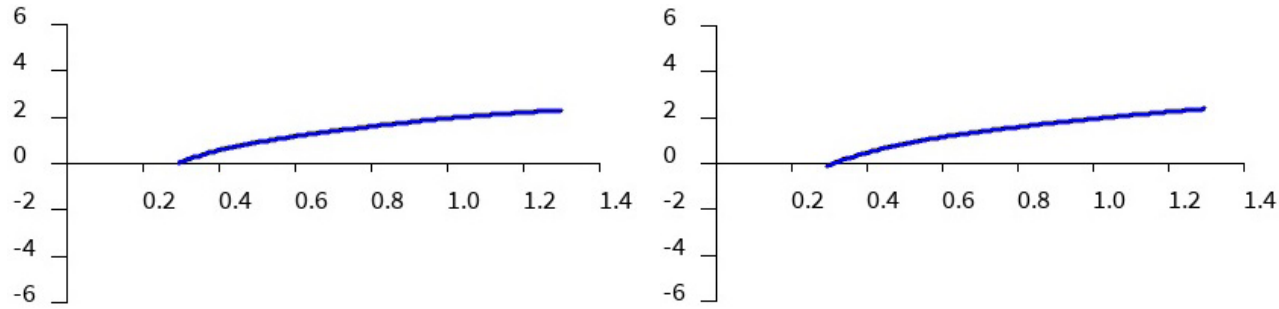


Рис. 3. Слева результат математического моделирования напряжения в плите в зависимости от радиуса ρ и при значении угла θ = 26 градусов. Справа результат соответствующего регрессионного моделирования

тический метод измерения деформаций. Регрессионная модель позволит проводить анализ распределения соответствующих характеристик по пластине, исследовать на устойчивость плиты, применяя аналитические методы.

Заключение

В работе построена регрессионная модель толстой упругопластической плиты с включением. Модель позволяет прогнозировать распределение напряжений в зависимости от геометрии включения и условий нагружения. Полученные результаты могут быть использованы для анализа прочности и устойчивости толстых упругопластических пластин с отверстиями и включениями в инженерной практике.

Литература

1. *Спорыхин А. Н.* Теория и практика решения неодномерных задач упругопластического деформирования / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, А. Ю. Яковлев. – Воронеж, 2003.

2. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

3. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М. : Мир, 1967. – 310 с.

4. *Deisenroth M. P.* Efficient Reinforcement Learning using Gaussian Processes. KIT Scinticfic Publishing, 2011.

5. Processing : официальный сайт. URL: https://processing.org

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, МОДЕЛИРОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СТРУКТУР

УДК 532.526

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ВЫЯСНЕНИЮ ОСОБЕННОСТЕЙ ТРАНСЗВУКОВОГО ПЕРЕХОДА

А. Н. Богданов

НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация. Вопрос возможности непрерывного трансзвукового перехода течения газа в сопле является принципиальным. Построенные ранее аналитические решения такую возможность не показывали. Попытки уточнения указанных результатов успеха не принесли, потребовались принципиально новые подходы к анализу проблемы.
Ключевые слова: газовая динамика, математическое моделирование, трансзвуковые течения, аналитические методы, дифференциальные уравнения.

Перестройка течения от дозвукового режима к сверхзвуковому при разгоне потока в канале переменного сечения (трансзвуковом сопле), логично должна следовать следующей схеме: при достижении газом определенной скорости в минимальном сечении канала — области наибольшего ускорения потока — возникают местные сверхзвуковые зоны, растущие с увеличением скорости потока, они достигают друг друга и смыкаются –возникает течение с переходом через скорость звука по одной звуковой линии, пересекающей весь поток.

Вид линии перехода (звуковой линии), процесс ее видоизменения являются принципиальными вопросами. Первые попытки исследовать переход одного типа течения в другой приписываются [1] Ф.И. Франклю [2] и Г. Гертлеру [3].

Аналитические модели трансзвуковых течений в каналах в случае двумерного стационарного режима в виде разложений по степеням отклонений пространственных координат от начала координатных осей были предложены уже достаточно давно, они носят имена своих первоисследователей [4]:

• течение с одной линией перехода через скорость звука, разделяющей области дозвукового и сверхзвукового течения (течение Мейера — см. рис. 1);

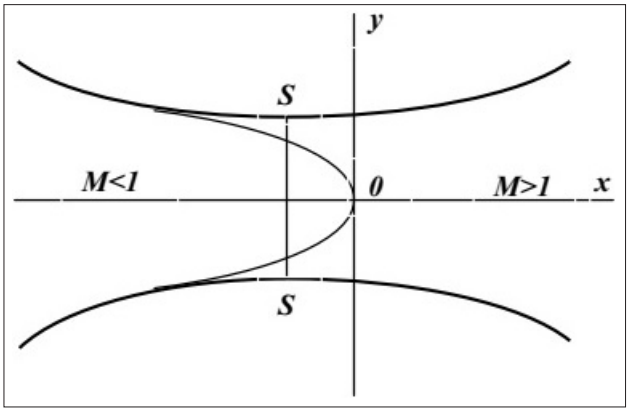


Рис. 1

• дозвуковое в целом течение, содержащее области сверхзвукового течения (течение Тейлора — см. рис. 2).

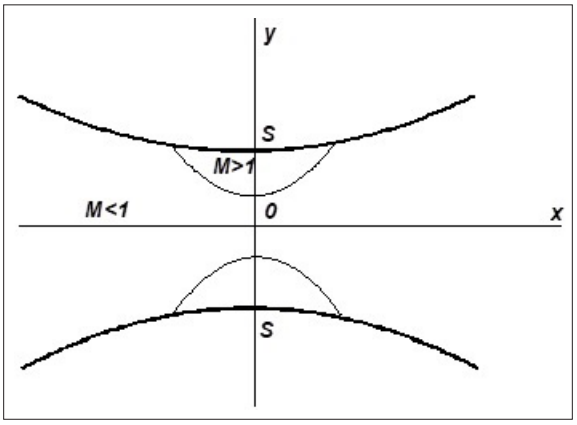


Рис. 2

В стационарном случае для течений майеровского типа традиционно использовались разложения скорости [4] по пространственным координатам (в случае плоского канала) вида

$$u = a\left[1+\alpha x+\frac{\gamma+1}{2}\alpha^2 y^2+\ldots\right],\quad v = a\left[(\gamma+1)\alpha^2 xy+\frac{(\gamma+1)^2}{6}\alpha^3 y^3+\ldots\right], \tag{1}$$

где a — скорость звука, α — постоянная, определяемая из граничных условий.

Для течений с местными сверхзвуковыми зонами (течений Тейлора) традиционно использовались разложения скорости [4] по пространственным координатам (в случае плоского канала) вида

$$u = a\left[1-\eta-\beta x^2+\eta(\gamma+1)\beta y^2+\ldots\right],\quad v = a\left[2\eta(\gamma+1)\beta xy+\ldots\right], \tag{2}$$

где η, β — постоянные, определяемые граничными условиями. Для плоского сопла имеем

$$\alpha = (\gamma+1)R_s y_s,\quad \eta = \frac{y_s}{3}\sqrt{(\gamma+1)\frac{y_s}{R_s}},\quad \frac{1}{\beta} = 2\eta(\gamma+1)y_s R_s,$$

заметим, что **число Маха M в определяющие параметры звуковых линий не входит**. Получается, что через данное сопло можно осуществить только одно стационарное течение, определяемое его конфигурацией однозначно.

Видно, что звуковые линии в течениях Мейера и Тейлора (определяемые по соотношению $u^2+v^2=a^2$) имеют качественно различную геометрическую форму:

$$x = -\frac{\gamma+1}{2}\alpha y^2 \text{ (парабола)} \quad \text{и} \quad -\frac{\beta}{\eta}x^2+(\gamma+1)\beta y^2 = 1 \text{ (гипербола)} \tag{3}$$

соответственно. Заметим здесь, что местные сверхзвуковые области, определяемые их звуковыми линиями вида (3), достигать друг друга на оси сопла $x = y = 0$ не могут, как и скорость (2) — звуковой величины не достигает, а есть лишь $1-\eta$. При $\eta \to 0$ звуковая линия, определяемая (3), стремится схлопнуться в вертикальную прямую $x = 0$, конфигурация сопла при этом принимает совершенно нереальные формы с запредельно искривленными стенками и ничтожно узким протоком.

Если принять схему разгона потока до сверхзвуковых скоростей как смену режима Тейлора на режим Мейера, то принципиальным является вопрос о характере перехода от одного режима к другому — непрерывен ли он или происходит скачком, или развивающимся нестационарным процессом, или как последовательность стационарных картин? Возможны ли на звуковой линии точки перегиба и ее конфигурации (рис. 3), объединяющие приведенные выше конфигурации для Мейера и Тейлора?

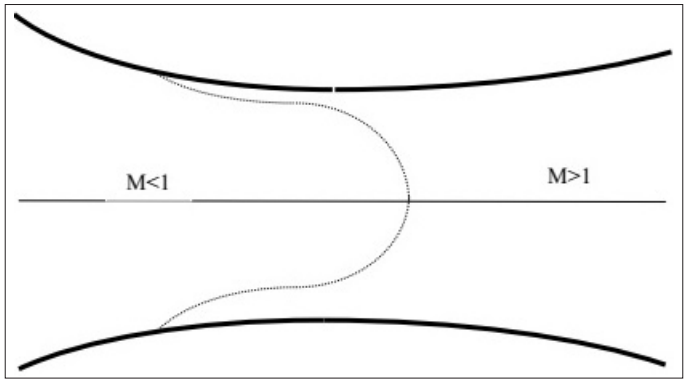


Рис. 3

В «Лекциях по основам газовой динамики» [5] Л. В. Овсянникова, при обсуждении проблем околозвуковых течений в последнем, § 27, приводит конфигурацию звуковой линии, сходную с изображенной на рис. 3, в задаче об истечении сверхзвуковой струи, когда первоначально дозвуковой поток из плоского сужающегося сопла разгоняется в свободное пространство.

По Гудерлею [6] режим течения в самом узком сечении сопла может быть различный. В симметричном относительно направления течения сопле изменение скорости может быть линейным по продольному направлению, давление вдоль оси сопла может падать быстрее, чем по линейному закону (но в этом случае в точке пересечения оси сопла и звуковой линии распределение скоростей имело бы вертикальную касательную, что невозможно обеспечить расширением стенок канала и потому неосуществимое). Снижение давления вдоль оси сопла медленнее, чем по линейному закону определяет горизонтальную касательную соответствующего распределения скоростей, что может обеспечиваться кривизной стенок сопла. По Гудерлею это единственный режим, который устанавливается сам собой.

В своей статье 1946 года [7] С. В. Фалькович высказал следующие соображения: «если перемещаться вдоль прямой, перпендикулярной оси симметрии сопла, удаляясь от оси, то при этом мы будем пересекать линии тока с всё увеличивающейся кривизной и, следовательно, встречать частицы газа, обладающие все большей скоростью, следовательно, звуковая линия должна быть кривой, выпуклой в сторону сверхзвуковых скоростей с вершиной на оси симметрии» (рис. 1). Соглашаясь с Савелием Владимировичем в таком характере изменения скорости течения, заметим, что принципиальный вопрос о невозможности существования участков выпуклости с другой кривизной (рис. 3) эти соображения не решают.

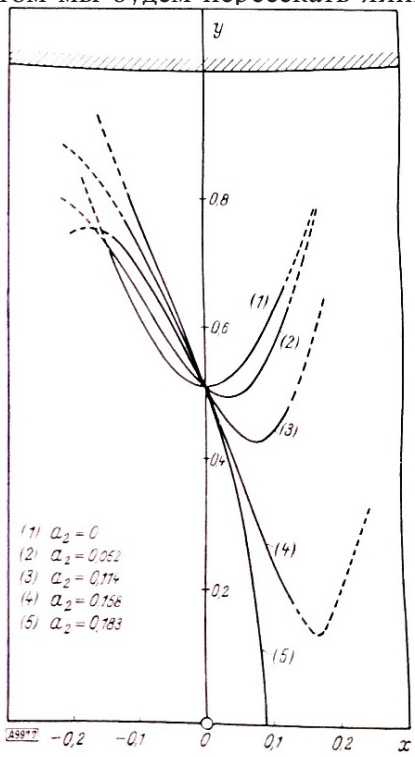


Рис. 4

Гертлер взял на себя труд вычислить коэффициенты разложений по пространственным координатам по пятый порядок включительно $c_k x^i y^j$, $i + j = 5$. Ввиду громоздкости вычислений явный вид линии перехода в момент смыкания местных сверхзвуковых зон определен им не был (рис. 4).

Результаты численных расчетов перехода в сопле имеются в монографии У. Г. Пирумова и Г. С. Рослякова [8]. На приведенных ими рисунках (см. рис. 5) виден даже процесс зарождения конфигурации с точкой перегиба, однако продолжение течения в область $x > 0$ ими не приведено и вызывает вопросы. Местные сверхзвуковые зоны в течении Тейлора «чувствуют» друг друга, подвергаясь воздействию свободно проходящих во всех направлениях через разделя-

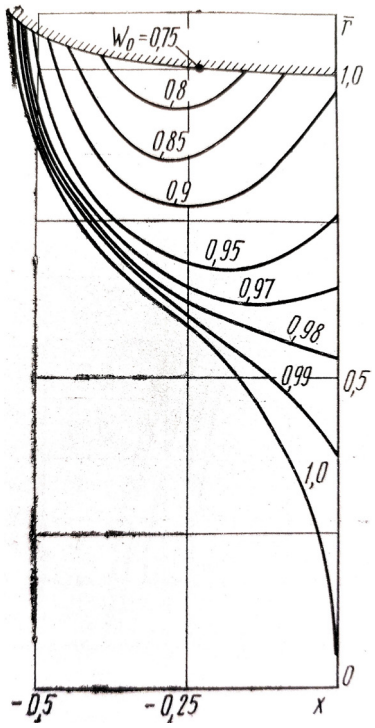


Рис. 5

ющую их область дозвукового течения даже очень слабых возмущений, зародившихся в самих зонах (или вне их) по какой-либо причине; но, например, возникновение на линии перехода точек заострения представляется физически недопустимым.

Звуковая линия задается уравнением

$$u^2 + v^2 = a^2. \tag{4}$$

Входящие в это уравнение для плоского стационарного режима слагаемые являются функциями обоих пространственных координат x, y и таким образом уравнение (4) есть связь, определяющая звуковую линию как явную $y = y(x)$ (или неявную $F(x, y) = 0$) зависимость.

Наличие точек перегиба на линии $y = y(x)$ определяется условием

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Дифференцирование зависимости (4) как функции $F(x, y) = 0$ дважды по x позволяет определить условие наличия точек перегиба. В рассматриваемом здесь случае они могут иметь место при выполнении условия

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 - a\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0. \tag{5}$$

Наличие в первом уравнении системы (5) членов принципиально разных знаков позволяет сделать вывод, что точки перегиба на звуковой линии формально не исключены.

Заключение

Новый подход к анализу трансзвукового перехода позволил обосновать возможность непрерывного процесса перестройки течения при разгоне трансзвукового сопла от дозвукового режима к сверхзвукового.

Литература

1. *Рыжов О. С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. – М. : ВЦ АН СССР, 1965. – 238 с.

2. *Франкль Ф. И.* О плоскопараллельных воздушных течениях в каналах при околозвуковых скоростях // Мат. сборник. – 1933. – Т. 40, Вып. 1.

3. *Görtler G.* Zum Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindig-keiten in Düsen // ZAMM. – 1939. – B. 19, H. 6. – S. 325–337.

4. *Зауер Р.* Течения сжимаемой жидкости. – М. : Изд-во иностр. лит., 1954. – 312 с.

5. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 368 с.

6. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. Перевод с немецкого Г. А. Вольперта. Под редакцией Л. В. Овсянникова. – М. : ИЛ, 1960. – 421 с.

7. *Фалькович С. В.* К теории сопла Лаваля // ПММ. – 1946. – Т. 10, Вып. 4. – С. 503–512.

8. *Пирумов У. Г., Росляков Г. С.* Течения газа в соплах. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 351 с.

УДК 533.6, 538.9

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КАПЛЕВИДНОГО ТЕЛА

С. О. Гладков, Н. С. Нагибин

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Аннотация. В настоящем сообщении приведены подробности модельного вычисления коэффициента лобового сопротивления для конкретного случая каплевидной формы обтекаемого тела.

Ключевые слова: коэффициент лобового сопротивления, динамическая вязкость, число Рейнольдса.

В настоящем сообщении речь будет идти о модельном вычислении коэффициента сопротивления в случае, если тело представляет собой каплевидную форму. Как отмечено в монографии [1], подобная структура должна представлять собой идеально обтекаемую поверхность.

При решении этой задачи мы воспользуемся результатами работы [2]. Также как и в [2], будем рассматривать центральное сечение симметричного тела, толщина которого h считается конечной. Форму контура будем обозначать с помощью функции $\eta(x)$.

Согласно общепринятому определению [1] коэффициент лобового сопротивления введем как

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u^2 S}, \tag{1}$$

где ρ — плотность континуума, u — скорость течения, S — полная площадь поверхности, F_x — сила сопротивления.

Силу сопротивления будем вычислять с помощью формулы

$$F_x = 2\mu h u a \int_0^a H dx, \tag{2}$$

где μ — динамическая вязкость, u — скорость гидродинамического потока.

Что касается подынтегральной функции, то согласно [2]

$$H = \frac{1}{x^2}\left[\left(2G + \frac{\eta}{x}G'\right)\eta' + G'\left(1 - \frac{\eta^2}{x^2}\right) - \frac{2\eta}{x}G - \frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{a}{x}G\right)\eta''\right]\Bigg|_{\xi=\frac{\eta}{x}}, \tag{3}$$

где зависимость

$$G(\xi) = \frac{1}{C\left(\xi^2+1\right) - \frac{\mathrm{R}}{4}\left[\xi + \left(\xi^2+1\right)\operatorname{arctg}\xi\right]}. \tag{4}$$

Аргумент этой функции задан в виде $\xi = \dfrac{\eta(x)}{x}$, а C — безразмерная константа.

Если воспользоваться аппроксимационным подходом, предложенным в свое время Л. Д. Ландау, представим зависимость $\eta(x)$ с помощью моделирующей функции

$$\eta(x) = xe^{-\alpha\frac{x}{a}}, \tag{5}$$

где α — некоторая безразмерная феноменологическая константа.

Подобный подход весьма удобен в тех случаях, когда мы имеем дело со сложной функциональной зависимостью, найти которую строго аналитически представляется часто большой

проблемой. Именно подобное упрощение благодаря (5) несколько упрощает вычисления и делает их немного более простыми. В результате из (2) находим, что

$$S = 2\int_0^a xe^{-\alpha\frac{x}{a}}dx = 2a^2\left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha}\right]. \tag{6}$$

Подставив (6) и (5) в (4), получаем

$$G(t) = \frac{t^2}{C\left(t^2+f^2\right) - 0,25\,\mathrm{R}\left[tf + \left(t^2+f^2\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{f}{t}\right)\right]},$$

$$G'(\xi) = \frac{t^4\left[\left(t^2+f^2\right)\left(\mathrm{R}\,t - 4Cf\right) + t^2\,\mathrm{R}\,f\operatorname{arctg}\left(\frac{f}{t}\right)\right]}{2a\left(t^2+f^2\right)\left\{C\left(t^2+f^2\right) - 0,25\,\mathrm{R}\left[tf + \left(t^2+f^2\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{f}{t}\right)\right]\right\}^2}, \tag{7}$$

где $t = \frac{x}{a}$, а $f = f(t) = te^{-\alpha t}$.

Далее

$$\eta = ate^{-\alpha t},$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} = \left(1-\alpha t\right)e^{-\alpha t}, \tag{8}$$

$$\eta'' = \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\alpha\left(\alpha t - 2\right)e^{-\alpha t}}{a}.$$

С учетом этих формул для коэффициента лобового сопротивления будем иметь в результате

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u^2 S} = \frac{2h}{a\,\mathrm{R}}\xi(\alpha)J, \tag{9}$$

где $\mathrm{R} = \frac{au}{\nu}$ — число Рейнольдса, а $\xi(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\left[1-\left(\alpha+1\right)e^{-\alpha}\right]}$.

Поскольку

$$J = \int_0^1 H\left(t, \mathrm{R}, C, \lambda\right)dt, \tag{10}$$

где подынтегральная функция после довольно трудоемких вычислений может быть приведена к виду

$$H\left(t, \mathrm{R}, C, \lambda\right) = \alpha\left(2-\alpha\right)e^{-\alpha t} - \frac{\alpha^2 e^{-\alpha t}}{\psi} + \frac{\varphi_1\varphi_2}{2\psi^2}, \tag{11}$$

где входящие сюда безразмерные функции определены как

$$\varphi_1 = \varphi_1\left(\alpha, \lambda\right) = \frac{1+\left(1-\alpha t - \lambda^2\right)e^{-2\alpha t}}{1+\lambda^2 e^{-2\alpha t}},$$

$$\varphi_2 = \varphi_2\left(\alpha, \lambda, C, \mathrm{R}\right) = \frac{\mathrm{R}}{t}\left[1+\lambda^2 e^{-2\alpha t} - 4\lambda C e^{-\alpha t}\left(1+\lambda^2 e^{-2\alpha t}\right)\right] + \frac{\lambda\,\mathrm{R}\,e^{-\alpha t}}{t^2}\operatorname{arctg}\left(\lambda e^{-\alpha t}\right), \tag{12}$$

$$\psi = \psi\left(\alpha, \lambda, C\right) = C\left[1+\lambda^2 e^{-2\alpha t} + \operatorname{arctg}\left(\lambda e^{-\alpha t}\right)\right] + \lambda e^{-\alpha t}.$$

Причем $\lambda = \frac{b}{a}$. В результате мы приходим к окончательной аналитической формуле для коэффициента лобового сопротивления

$$C_x = \frac{h\lambda}{2l} \frac{\xi(\alpha)\left(2-\lambda^2\right)\operatorname{arctg}\lambda}{\left[C\left(1+\lambda^2+\operatorname{arctg}\lambda\right)+\lambda\right]^2\left(1+\lambda^2\right)}. \tag{13}$$

Заметим, что при $\alpha = 0 \;\; \xi(\alpha) = 1.$

В предельном случае, когда $\lambda \ll 1,$ отсюда следует, что

$$C_x \approx \frac{h\lambda^2}{lC^2}\xi(\alpha) \sim \lambda^2. \tag{14}$$

Итак,

1. Предложен аппроксимационный подход для вычисления коэффициента лобового сопротивления каплевидного тела, сечение которого имеет конечную ширину h;

2. Анализ полученной формулы указывает на качественно корректную трактовку результата.

Литература

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. Т. 6. – М. : Наука, 1988. – 733 с.

2. *Гладков С. О., Нагибин Н. С.* К вопросу аналитического определения наилучшей формы обтекания тел в вязком континууме // Известия вузов. Физика. – 2024. – Т. 67, В. 3. – С. 39–52.

УДК 536.4+539.3+539.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ТЕЛ С НАБЕГАЮЩИМ ПОТОКОМ ВОЗДУХА

К. Н. Ефимов

Томский государственный университет

Аннотация. Выполнено численное моделирование поведения комбинированной системы тепловой защиты летательного аппарата. Данное тело совершает заданные колебательные движения в набегающем высокоскоростном потоке воздуха. Вследствие этого возникают дополнительные факторы, влияющие на нестационарный процесс теплообмена между тепловой защитой летательного аппарата и потоком воздуха. Проведено исследование влияния этих колебательных движений тела на характеристики его тепло- и массообмена с набегающим высокоскоростным потоком воздуха.
Ключевые слова: теплозащитное покрытие, высокоскоростной поток воздуха, термическое разрушение.

Введение

Летательные аппараты (ЛА) при высокоскоростном движении в плотных слоях атмосферы Земли подвергаются сильному тепловому воздействию. Следствием этого являются изменение их формы и аэродинамических характеристик. Дополнительными факторами, оказывающими влияние на свойства, являются особенности пространственных движений ЛА относительно набегающего газового потока. К их числу можно отнести колебательные движения, которые приводят к изменению условий обтекания и теплового состояния тела в отличие от случаев их отсутствия. В работах [1–3] показано, что обтекание тела под постоянным углом атаки в течение длительного периода времени приводит к возникновению значительных различий тепловых потоков и теплового нагрева на подветренной и наветренной сторонах его поверхности. Для уменьшения этого эффекта летательным аппаратам могут придаваться вращательные и колебательные движения. Вследствие глубокой взаимосвязи протекания тепловых и аэродинамических процессов описанная задача должна решаться в сопряженной постановке [4]. В работах [5–7] было проведено исследование влияния вращения вокруг оси тела на характеристики сопряженного тепломассопереноса при пространственном сверхзвуковом обтекании. В настоящей работе исследуется влияние на эти характеристики взаимодействия тела с набегающим потоком воздуха при задании колебательного движения ЛА, сопровождаемого изменением угла атаки по периодическим законам.

1. Постановка задачи

На рис. 1 представлено графическое представление о геометрии обтекаемого потоком воздуха тела, которое является конусом, затупленным по сфере. В работах [5, 6] были представлены способы оценки времен релаксации в газовой и конденсированной фазах. На основании этих оценок характеристики сопряженного тепло- и массообмена находятся из решения квазистационарных уравнений пространственного пограничного слоя при различных режимах течения. Для модели химически равновесного воздуха, используя гипотезы «пассивности» и равенства чисел Льюиса для всех компонентов равными единице, система уравнений пространственного пограничного слоя в естественной системе координат, связанной с внешней поверхностью обтекаемой оболочки, представлена в работах [5, 8].

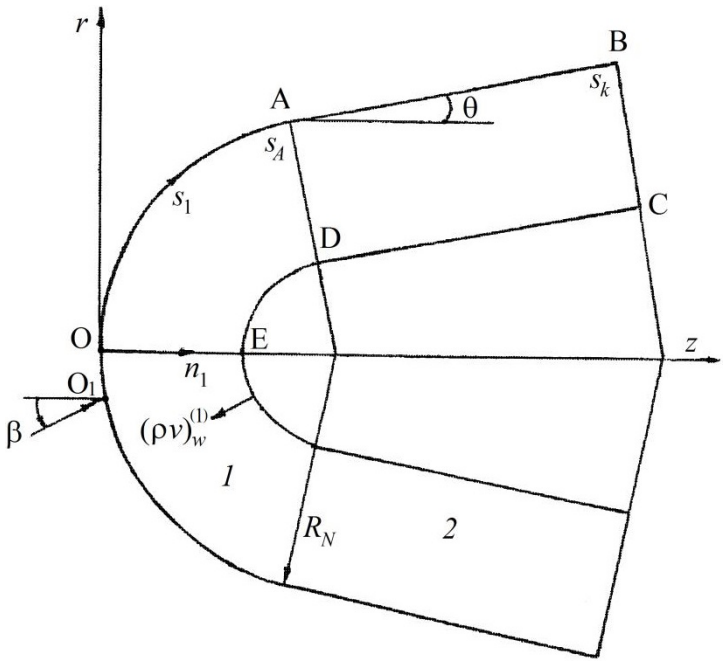


Рис. 1. Геометрия обтекаемого тела:
1 — пористое сферическое затупление, 2 — коническая часть

Для сферического затупления тепловое состояние определяется из решения нестационарного уравнения сохранения энергии для пористого сферического затупления и квазистационарного уравнения для скорости фильтрации охлаждающего воздуха в порах в направлении нормали к поверхности в рамках однотемпературной модели. Система уравнений для пористой сферической оболочки в рассматриваемой системе координат, связанной с осью симметрии тела, выписана в работах [5, 7]. Квазистационарное уравнение неразрывности совместно с уравнением состояния фильтрующего воздуха, нелинейным законом Дарси и граничными условиями на внутренней и внешней поверхностях оболочки тела можно проинтегрировать и найти расход и давление газа в области 1 [7]. Давление на внутренней «холодной» поверхности оболочки сферической части тела задано в виде:

$$P_L = kP_{e0}, \tag{1}$$

где k — некоторая постоянная, которая подбирается так, чтобы температура материала сферического затупления не превышала температуры плавления каркаса из пористых металлов [9] на участке теплового воздействия во все время процесса.

Для конической части тела уравнения сохранения энергии и массы в подвижной системе координат (s, n_1, η) с учетом термического разрушения материала вследствие процесса пиролиза записывается по математическим моделям работы [8].

$$\rho_c c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \psi \frac{\partial T}{\partial n_1} \right) + c_{p2} G \frac{\partial T}{\partial n_1} = \frac{\partial}{\partial n_1}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{1}{r_2^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - Q_c \frac{d\rho_c}{dt}, \tag{2}$$

$$\frac{d\rho_c}{dt} = \left(\frac{\partial \rho_c}{\partial t} - \psi \frac{\partial \rho_c}{\partial n_1} \right) = \begin{cases} -k_c \rho_{c0} \left(\dfrac{\rho_c - \rho_{c*}}{\rho_{c0}} \right) \exp\left(-\dfrac{E_c}{RT} \right), & \rho_c > \rho_{c*}, \\ 0, & \rho_c \le \rho_{c*}, \end{cases} \tag{3}$$

$$G = \int_0^{l_1} \frac{d\rho_c}{\partial t} dn_1, \quad r_2 = \left(R_N - n_1 \right)\cos\theta + \left(s - s_1 \right)\sin\theta,$$

$$l = L - x(t),\ x(t) = \int_0^t \psi\, d\tau,\ (\rho v)_{1w} = G_w,$$

$$(\rho v)_w^{(2)} = (\rho v)_{1w} + (\rho v)_{2w} + (\rho v)_{3w},\ \psi = \sum_{i=2}^{3} \frac{(\rho v)_{iw}}{\rho_{cw}}. \qquad (4)$$

В данной работе рассматриваются периодические колебания угла атаки в плоскости тангажа. Это движение описывается выражением:

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_m - \left|\omega_f t - \beta_m\right| - (n-1)T_f,\ at\ (n-1)T_f \le t < nT_f/2 \\ \left|\omega_f t - 3\beta_m\right| - \beta_m - nT_f/2,\ at\ nT_f/2 \le t < nT_f \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь t — длительность процесса, $n = 1,2,\ldots$, $T_f = 4\beta_m/\omega_f$ — период флуктуации, ω_f — угловая скорость изменения угла атаки β, β_m — максимальный угол атаки. Вводится следующее допущение: характерная линейная скорость колебания тела много меньше скорости набегающего потока:

$$\Omega_f = \frac{\omega_f R_N}{V_\infty} << 1. \qquad (6)$$

Начальные и граничные условия для задачи выписаны согласно работ [2, 4, 8].

На границе раздела сред при $s \ge s_1$ рассматривалась следующая кинетическая схема протекания неравновесных химических реакций ($T_w \approx 4000$ К) [4, 8]:

$$C + O_2 \to CO_2,\ 2C + O_2 \to 2O,\quad C + O \to CO,\ C + CO_2 \to 2CO,$$
$$2O + C \to O_2 + C,\ 2N + C \to N_2 + C,\quad C \leftrightarrow C_1,\ C \leftrightarrow C_3,\ C + N \leftrightarrow CN. \qquad (7)$$

Молярные и массовые скорости протекания данных химических реакций (7) и выражение для массовой скорости уноса рассчитываются согласно [4, 8]. Для балансовых соотношений для массовых концентраций компонент используется закон Фика для диффузионных потоков и аналогия процессов тепло- и массообмена [4, 8].

Здесь и ниже R_N — радиус сферического затупления; $r_i, i = 1, 2,$ — коэффициенты Ламе; $(\rho v)_w^{(2)}$ — полный массовый унос с углеродной поверхности конической части тела; $(\rho v)_{1w}$ — массовый унос за счет пиролиза; $(\rho v)_{2w}$ — массовый унос за счет поверхностных кинетических реакций; $(\rho v)_{3w}$ — массовый унос за счет поверхностных реакций сублимации; L — толщина оболочки; θ — угол конусности; β — угол атаки; n_1 — нормаль к поверхности тела направлена в глубь оболочки; Ψ — линейная скорость перемещения поверхности разрушения; $x(t)$ — граница раздела газообразной и конденсированной фазы (глубина выгорания); k_c, E_c и Q_c — предэкспонент, энергия активации и тепловой эффект реакции пиролиза. Индексы e, $e0$ и w соответствуют величинам на внешней границе пограничного слоя, на внешней границе в точке торможения и на поверхности обтекаемого тела; ∞ — величинам набегающего газового потока на бесконечности; T, 0 — характеристикам турбулентного переноса и начальным условиям.

Система уравнений пространственного пограничного слоя решалась с учетом ламинарной, переходной и турбулентной областей течения. Для описания турбулентного течения применялась двухслойная модель турбулентного пограничного слоя [10, 11]. Коэффициент перемежаемости Γ и переход от ламинарного к турбулентному режиму течения описывался с помощью формулы Дхавана-Нарасимхи [12]. При численном интегрировании принималось, что: $\mathrm{Pr} = 0.72,\ \mathrm{Pr}_T = 1.$

Расчеты обтекания конуса, затупленного по сфере, с углом полураствора $\theta = 15°$ потоком химически равновесного воздуха с переменным углом атаки $-\beta_n \le \beta \le \beta_m,\ \beta_m = 10°$ проводились для параметров $R_N = 0.1$ м, $L_0 = 0.02$ м. Кинетические константы гетерогенных реакций (7) брались из [4, 5]. Для углеродного материала конической оболочки теплофизические коэффициенты приведены в работе [8], для пористой стали для сферического затупления — в [13].

2. Результаты и их анализ

Представленные ниже численные результаты относятся к сечению на конической части тела $s/R_N = 5$, которое располагается ниже по течению от завесной зоны вследствие вдува газа на сферическом затуплении.

На рис. 2 показана временная зависимость температуры поверхности при скорости набегающего потока $V_\infty = 5000$ м/сек и для фиксированного угла атаки $\beta = \beta_m = 10°$ ($\omega_f = 0$ град/сек) (кривые 1 и 2) and $\omega_f = 5$ град/с (кривые 3-5). В отсутствии колебательного процесса наблюдается монотонный рост температуры в точках $\eta = 180°$ (кривая 1) и $\eta = 0°$ (кривая 2). При наличии колебательного движения (рис. 2, кривая 3) происходит немонотонное изменение температуры поверхности в точках с окружными координатами $\eta = 0°, 90°, 180°$, соответствующим кривым 3, 4, 5. При этом происходит одновременное периодическое пересечение кривых 3–5 в определенных точках временного процесса нагрева тела. Как видно из рис. 2, колебательное движение приводит к снижению перепада температур.

Это также может быть продемонстрировано посредством распределений температуры поверхности тела вдоль окружной координаты η, которые представлены на рис. 3 для момента времени $t = 10$ сек. Здесь кривым 1–4 поставлены в соответствие значения $\omega_f = 0, 20, 40.100$ град/сек. Из рис. 3 видно, что в этот момент времени координата $\eta = 180°$ соответствует наветренной стороне для кривых 1–3 и подветренной для кривой 4. Максимальный перепад температуры на поверхности по окружной координате η достигается при отсутствии колебаний тела $\omega_f = 0$ град/сек (кривая 1). С увеличением угловой скорости колебаний ω_f происходит снижение перепада температур.

Как следствие, при наличии колебаний изменение формы тела вследствие линейного уноса материала из углепластика с поверхности тела, обусловленного аэродинамическим нагревом, будет более равномерным (рис. 4). Кривые 1– 3 на рис. 4 отвечают значениям $\omega_f = 0, 5, 40$ град/сек. При наличии колебаний угла атаки средние значения функций распределения глубины выгорания $x(\eta)$, представленных на рис. 4, по сравнению с $\omega_f = 0$ град/сек будут меньше более чем на ~18 %. Это говорит о том, что подобные колебания тела в целом приводят к меньшему изменению формы ЛА как в качественном, так и количественном отношении.

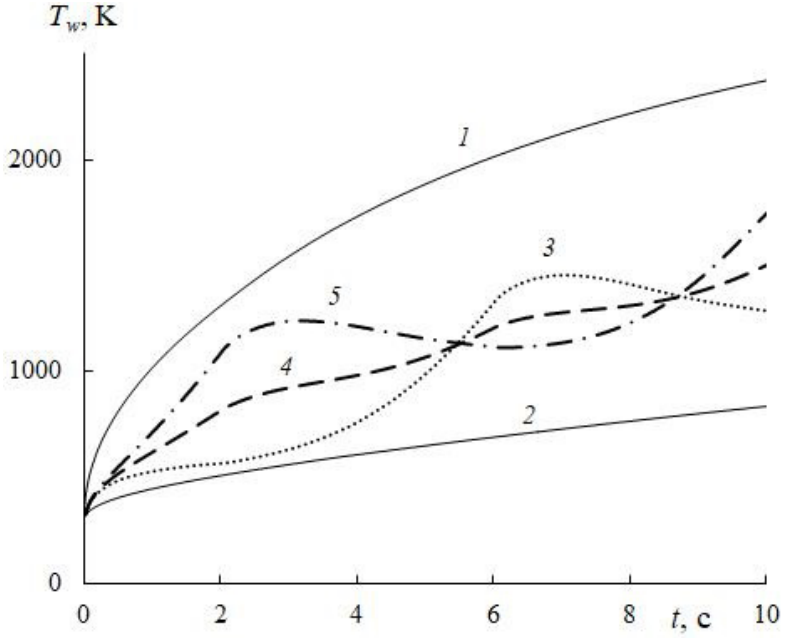


Рис. 2. Зависимости от времени температуры поверхности в сечении $s/R_N = 5$

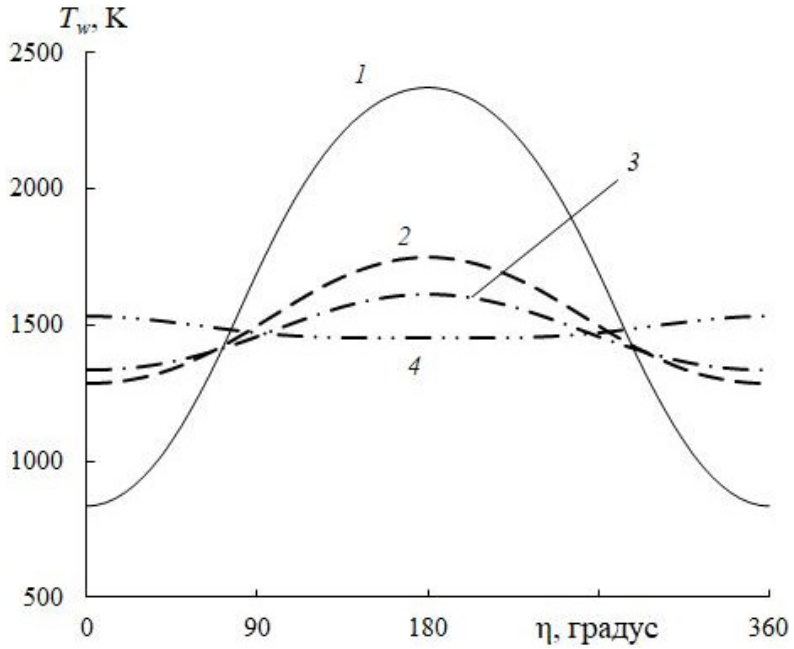


Рис. 3. Зависимости от окружной координаты η температуры поверхности для момента времени $t = 10$ сек

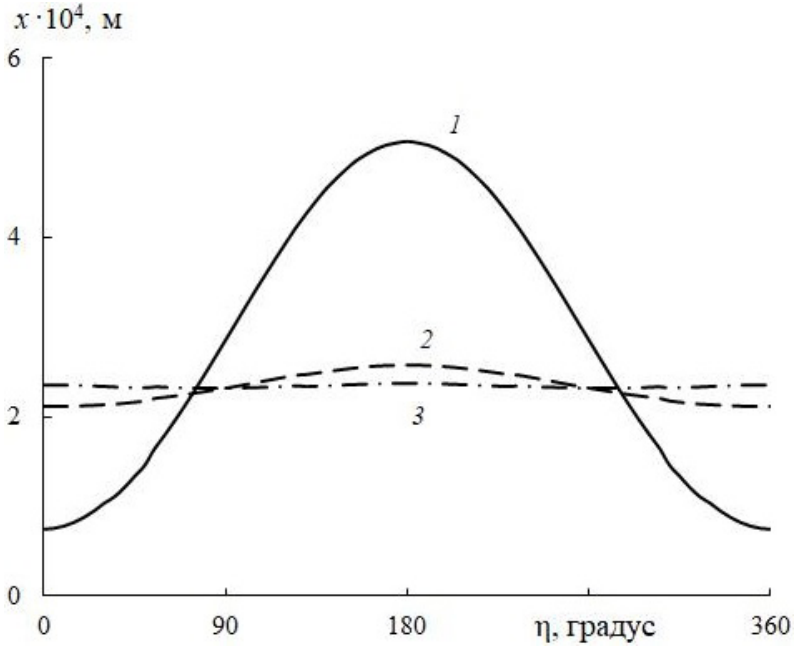


Рис. 4. Зависимости глубины выгорания материала тела для момента времени $t = 10$ сек

Заключение

В рамках сопряженной постановки задачи оценено интегральное влияние регулярного колебательного движения тела на перетекание тепла в теплозащитном покрытии. Показано, что даже при небольших значениях скорости колебаний значительно уменьшается перепад температур на поверхности тела. Показано, что изотермические режимы поверхности тела возникают с нерегулярной цикличностью. Периодические колебания угла атаки приводят к более равномерному и уменьшенному изменению формы летательного аппарата по сравнению с движением с постоянным углом атаки. Тем самым обеспечивается лучшее сохранение аэродинамических характеристик летательного аппарата

Литература

1. *Зинченко В. И.* Исследование характеристик сопряженного тепломассообмена при пространственном обтекании затупленного по сфере конуса и вдуве газа с поверхности затупления / В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов // ИФЖ. – 2007. – Т. 80, № 4. – С. 110–117.

2. *Ефимов К. Н.* Численный анализ характеристик теплообмена при радиационно-конвективном нагреве конуса, затупленного по сфере / К. Н. Ефимов, В. А. Овчинников, А. С. Якимов, С. А. Гаар // ТВТ. – 2019. – Т. 57, № 1. – С. 83–93.

3. *Зинченко В. И.* Исследование характеристик сопряженного тепло- и массообмена при вдуве газа и термохимическом разрушении обтекаемого тела / В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов // ТВТ. – 2007. – Т. 45, № 5. – С. 749–760.

4. *Гришин А. М.* Сопряжённые и нестационарные задачи механики реагирующих сред / А. М. Гришин, В. М. Фомин. – Новосибирск : Наука, СО АН СССР, 1984. – 319 с.

5. *Efimov K. N.* Rotation influence on heat transfer at supersonic flow around a blunted body / K. N. Efimov, V. A. Ovchinnikov, A. S. Yakimov // AIAA Journal. – 2018. – Vol. 56, No 2. – P. 743–751.

6. *Ефимов К. Н.* Математическое моделирование влияния вращения на характеристики сопряженного тепломассообмена при высокоэнтальпийном обтекании затупленного по сфере конуса под углом атаки / К. Н. Ефимов, В. А. Овчинников, А. С. Якимов // Теплофизика и аэромеханика. – 2017. – Т. 24, № 5. – С. 677–689.

7. *Ефимов К. Н.* Численное исследование влияния вращения на характеристики сопряженного тепломассообмена при сверхзвуковом обтекании конуса, затупленного по сфере под углом атаки и массовом уносе с поверхности / К. Н. Ефимов, В. А. Овчинников, А. С. Якимов // ТВТ. – 2018. – Т. 56, № 2. – С. 253–260.

8. *Гришин А. М.* Математическое и физическое моделирование тепловой защиты / А. М. Гришин, А. Н. Голованов, В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов. – Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2011. – 358 с.

9. *Зиновьев В. Ф.* Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справочник / В.Ф. Зиновьев. – Москва : Металлургия, 1989. – 383 с.

10. *Патанкар С.* Тепло- и массообмен в пограничных слоях / С. Патанкар, Д. Сполдинг. – Москва : Энергия, 1970. – 127 с.

11. *Cebeci T.* Behavior of turbulent flow near a porous wall with pressure gradient / T. Cebeci // AIAA Journal. – 1970. – Vol. 8, No 12. – P. 2152–2156.

12. *Dhawan D.* Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion / D. Dhawan, R. Narasimha // Journal of Fluid Mechanics. – 1958. – No 3. – P. 418–436.

13. *Андриевский Р. А.* Пористые металлокерамические материалы / Р. А. Андриевский. – Москва : Металлургия, 1964. – 187 с.

УДК 536.4+539.3+539.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ТЕЛ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ НАБЕГАЮЩИМ ПОТОКОМ ВОЗДУХА

К. Н. Ефимов

Томский государственный университет

Аннотация. Выполнено численное моделирование поведения материала тепловой защиты летательного аппарата. Рассмотренное тело подвергалось воздействию переменных по времени тепловых нагрузок со стороны набегающего высокоскоростного потока воздуха. Исследованы процессы теплопереноса и термического разрушения в объеме материала тепловой защиты в зависимости от рассмотренных сценариев моделирования нестационарных набегающих потоков воздуха.
Ключевые слова: тепловая защита, высокоскоростной нестационарный поток воздуха, термическое разрушение.

Введение

Известно, что высокоскоростные летательные аппараты (ЛА) подвергаются значительному тепловому воздействию при своем движении в плотных воздушных слоях. Начиная с определенных тепловых состояний материалы оболочки этих тел начинают претерпевать физико-химические изменения. Следствием этого являются термическое разрушение материала оболочек этих тел, что влечет изменение их формы. Так как процессы протекания тепловых и аэродинамических процессов взаимосвязаны, эта задача должна решаться в сопряженной постановке [1]. В настоящей работе исследуется влияние на эти характеристики взаимодействия тела с набегающим потоком воздуха при стационарном разгоне ЛА по траектории в некотором диапазоне скоростей движения.

1. Постановка задачи

На рис. 1 представлена геометрия обтекаемого потоком воздуха тела, которое модели-руется с помощью конуса, затупленного по сфере. Опираясь на методы, развитые в работе [1], для оценок времен релаксации в газовой и конденсированной фазах в данной работе характеристики сопряженного тепло- и массообмена находятся из решения квазистационарных уравнений пространственного пограничного слоя при различных режимах течения. Для модели химически равновесного воздуха, используя гипотезы «пассивности» и равенства чисел Льюиса для всех компонентов равными единице, система уравнений пространственного пограничного слоя в естественной системе координат, связанной с внешней поверхностью обтекаемой оболочки, представляется в виде [2, 3]. При обтекании высокоэнтальпийным потоком на поверхности композиционных материалов может наблюдаться явление шероховатости, что в конечном итоге оказывает влияние на величины тепловых потоков к таким поверхностям. Для учета этих эффектов используются результаты работ [4, 5].

В качестве оболочки тела рассматривается ограниченный в двух сторон элементами сфероидов заданных радиусов слой из углепластика, переходящий в аналогичной толщины элемент на конической части тела. Для описания поведения элемента тепловой защиты используется уравнения сохранения энергии и массы в виде в подвижной системе координат (s, n_1, η) с учетом термического разрушения материала вследствие процесса пиролиза записывается по математическим моделям работы [6]:

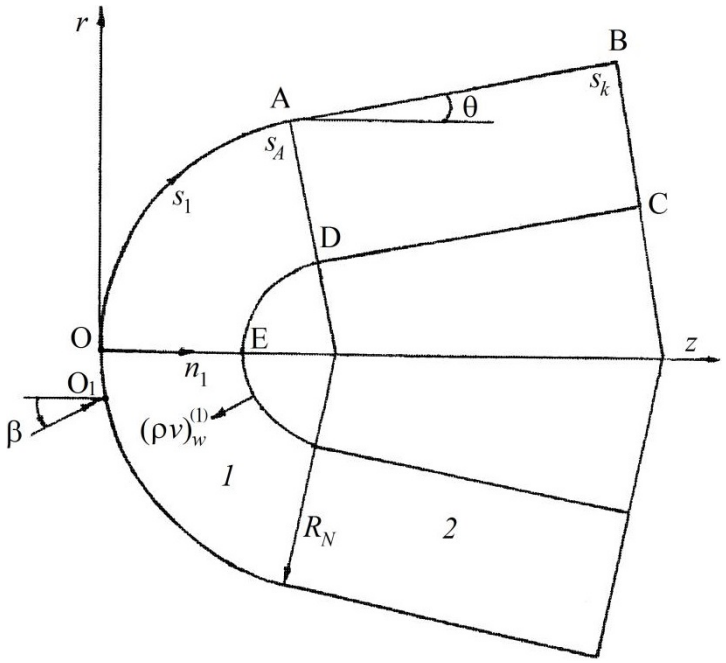


Рис. 1. Геометрия обтекаемого тела:
1 — сферическое затупление, 2 — коническая часть

$$\rho_c c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}-\psi\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)+c_{p2}G\frac{\partial T}{\partial n_1}=\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial s}\right)+\frac{1}{r_2^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)-Q_c\frac{d\rho_c}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d\rho_c}{dt}=\left(\frac{\partial\rho_c}{\partial t}-\psi\frac{\partial\rho_c}{\partial n_1}\right)=\begin{cases}-k_c\rho_{c0}\left(\dfrac{\rho_c-\rho_{c^*}}{\rho_{c0}}\right)\exp\left(-\dfrac{E_c}{RT}\right), & \rho_c>\rho_{c^*},\\ 0, & \rho_c\le\rho_{c^*},\end{cases} \tag{2}$$

$$G=\int_0^{l_1}\frac{d\rho_c}{\partial t}dn_1,\ \ r_2=\left(R_N-n_1\right)\cos\theta+\left(s-s_1\right)\sin\theta,$$

$$l=L-x(t),\ \ x(t)=\int_0^t dd\tau,\ \ (\rho v)_{1w}=G_w,$$

$$(\rho v)_w^{(2)}=(\rho v)_{1w}+(\rho v)_{2w}+(\rho v)_{3w},\ \ d=\sum_{i=2}^{3}\frac{(\rho v)_{iw}}{\rho_{cw}}. \tag{3}$$

Начальные и граничные условия для задачи выписаны согласно работ [3, 6].

На границе раздела сред рассматривалась следующая кинетическая схема протекания неравновесных химических реакций ($T_w\approx 4000$ К) [1, 3]:

$$C+O_2\to CO_2,\ 2C+O_2\to 2CO,\quad C+O\to CO,\ C+CO_2\to 2CO,$$
$$2O+C\to O_2+C,\ 2N+C\to N_2+C,\quad C\leftrightarrow C_1,\ C\leftrightarrow C_3,\ \ C+N\leftrightarrow CN. \tag{4}$$

Молярные и массовые скорости протекания данных химических реакций (4) и выражение для массовой скорости уноса рассчитываются согласно [1, 3]. Для балансовых соотношений для массовых концентраций компонент используется закон Фика для диффузионных потоков и аналогия процессов тепло- и массообмена [1, 3].

Здесь и ниже R_N — радиус сферического затупления; $r_i, i=1,2,$ — коэффициенты Ламе; $(\rho v)_w^{(2)}$ — полный массовый унос с углеродной поверхности конической части тела; $(\rho v)_{1w}$ — массовый унос за счет пиролиза; $(\rho v)_{2w}$ — массовый унос за счет поверхностных кинетических реакций; $(\rho v)_{3w}$ — массовый унос за счет поверхностных реакций сублимации; L — тол-

щина оболочки; θ — угол конусности; β — угол атаки; n_1 — нормаль к поверхности тела направлена в глубь оболочки; Ψ — линейная скорость перемещения поверхности разрушения; $x(t)$ — граница раздела газообразной и конденсированной фазы (глубина выгорания); k_c, E_c и Q_c — предэкспонент, энергия активации и тепловой эффект реакции пиролиза. Индексы e, $e0$ и w соответствуют величинам на внешней границе пограничного слоя, на внешней границе в точке торможения и на поверхности обтекаемого тела; ∞ — величинам набегающего газового потока на бесконечности; T, 0 — характеристикам турбулентного переноса и начальным условиям.

Система уравнений пространственного пограничного слоя решалась с учетом ламинарной, переходной и турбулентной областей течения. Для описания турбулентного течения применялась двухслойная модель турбулентного пограничного слоя [8, 9]. Коэффициент перемежаемости Γ и переход от ламинарного к турбулентному режиму течения описывался с помощью формулы Дхавана-Нарасимхи [10]. При численном интегрировании принималось, что: $\mathrm{Pr} = 0.72$, $\mathrm{Pr}_T = 1$.

Расчеты обтекания конуса, затупленного по сфере, с углом полураствора $\theta = 15°$ потоком химически равновесного воздуха с нулевым углом атаки проводились в условиях равномерного разгона от скорости $V_\infty = 300$ м/сек до $V_\infty = 3000$ м/сек с величинами ускорения $a_\infty = 150$ м/сек^2 и $a_\infty = 300$ м/сек^2, $R_N = 0.06$ м, $L_0 = 0.02$ м. Кинетические константы гетерогенных реакций (4) брались из [1, 3]. Для углеродного материала конической оболочки теплофизические коэффициенты приведены в работе [3].

2. Результаты и анализ

На рис. 2 представлены распределения тепловых потоков вдоль поверхности тела при достижении разгоняющимся телом фиксированных значений скоростей: кривая 1 – скорость $V_\infty = 3000$ м/сек, ускорение $a_\infty = 300$ м/сек^2, кривая 2 — скорость $V_\infty = 3000$ м/сек, ускорение $a_\infty = 150$ м/сек^2, кривая 3 — скорость $V_\infty = 2001$ м/сек, ускорение $a_\infty = 300$ м/сек^2, кривая 4 — скорость $V_\infty = 2001$ м/сек, ускорение $a_\infty = 150$ м/сек^2, кривая 5 — скорость $V_\infty = 999$ м/сек, ускорение $a_\infty = 300$ м/сек^2, кривая 6 — скорость $V_\infty = 999$ м/сек, ускорение $a_\infty = 150$ м/сек^2.

На рис. 3 представлены распределения температур поверхности тела при достижении разгоняющимся телом фиксированных значений скоростей. Номера и стили линий соответствуют таковым для тех же условий, что и на рис. 2.

Рис. 4 демонстрирует неизменность по глубине оболочки плотности материала тела вследствие отсутствия процессов термической деструкции вследствие сравнительно низких уровней тепловой нагрева тепловой защиты тела при данной скорости движения $V_\infty = 999$ м/сек.

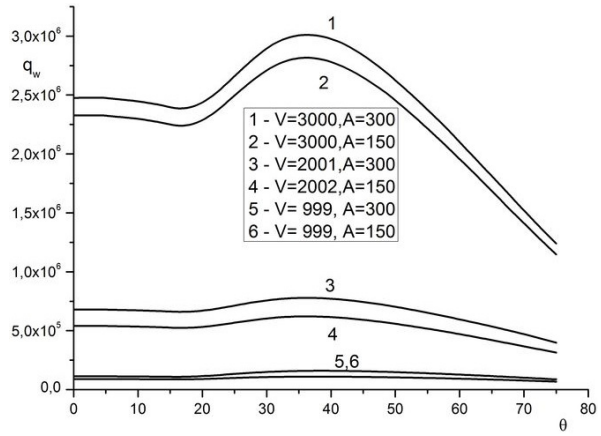


Рис. 2. Распределения тепловых потоков на поверхности тела

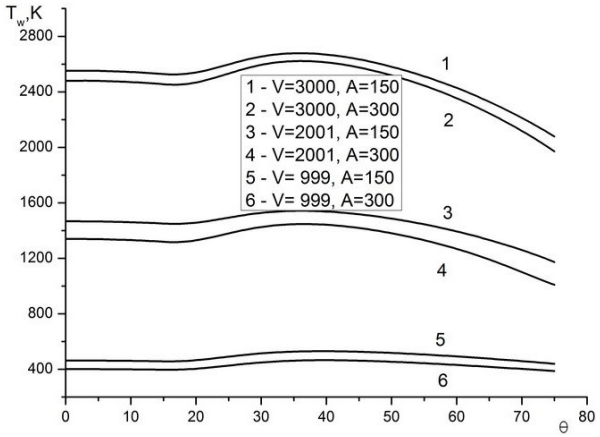


Рис. 3. Распределения температур на поверхности тела

На рис. 5 показаны распределения температуры по глубине материала оболочки в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения $V_\infty = 999$ м/сек: зеленые кривые — ламинарный режим течения воздушного потока в лобовой точке торможения, красные линии — развитый турбулентный режим течения в окрестности звуковой линии, синие линии — режим реламинаризации течения в окрестности точки сопряжения сферической и конической частей тела, при этом сплошные линии соответствуют ускорению $a_\infty = 150$ м/сек, штриховые линии — ускорению $a_\infty = 300$ м/сек.

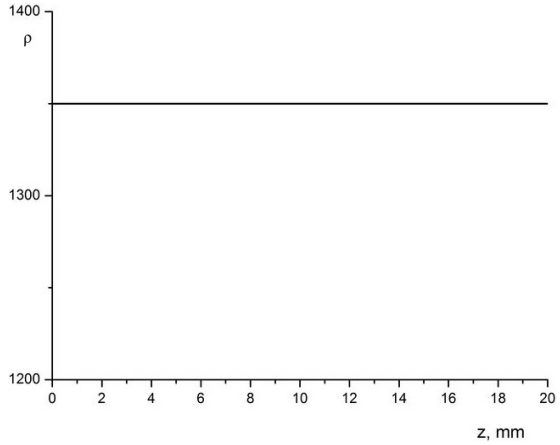


Рис. 4. Распределение по глубине оболочки плотности материала тела, $V_\infty = 999$ м/сек

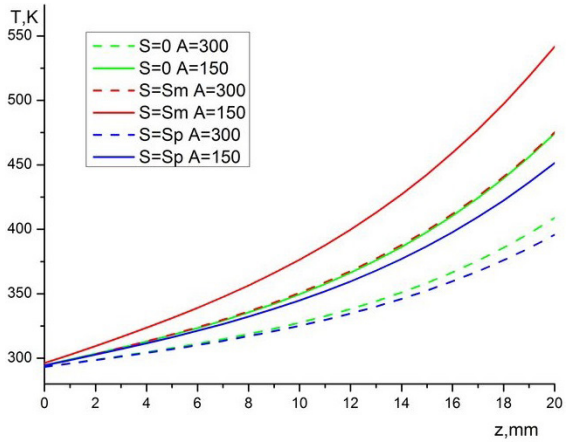


Рис. 5. Распределение температуры по глубине оболочки, $V_\infty = 999$ м/сек

На рис. 6 показаны распределения по глубине оболочки плотности материала тела в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения $V_\infty = 2001$ м/сек. Стили линий соответствуют стилям линий на рис. 5. Величины d являются глубиной выгорания материала тепловой защиты вследствие процессов поверхностного термического разрушения. Достижение уровня плотности в $\rho_c = 1000$ кг/м^3 для данного углепластического материала является признаком завершения что в данном сечении при рассматриваемых условиях процесса его пиролиза. Рис. 6 демонстрирует, что процесс пиролиза завершился для всех рассмотренных сечений материала тепловой защиты и сценариев ускорения тела, кроме варианта окрестности точки сопряжения сферической и конической частей тела и величины ускорения $a_\infty = 300$ м/сек.

На рис. 7 показаны распределения температуры по глубине материала оболочки в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения $V_\infty = 2001$ м/сек. Стили линий соответствуют стилям линий на рис. 5.

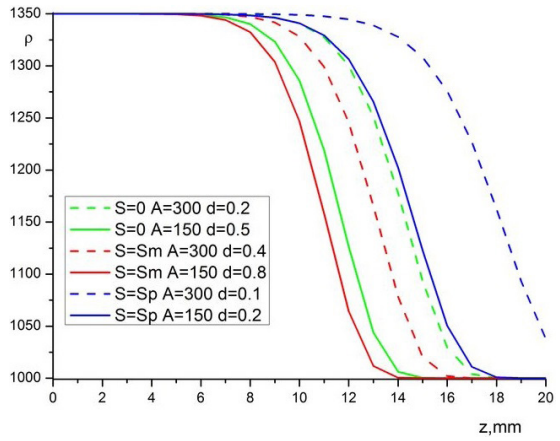


Рис. 6. Распределение по глубине оболочки плотности материала тела, $V_\infty = 2001$ м/сек

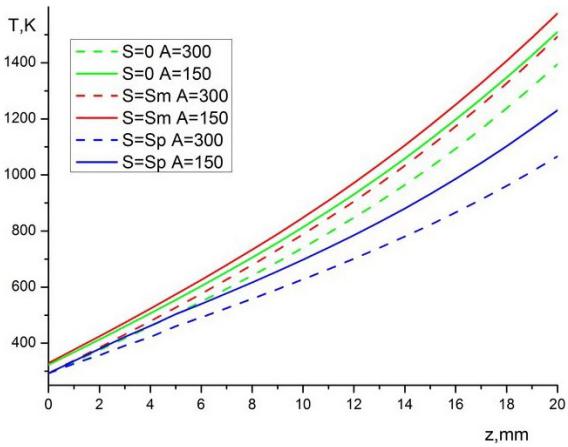


Рис. 7. Распределение температуры по глубине оболочки, $V_\infty = 2001$ м/сек

На рис. 8 показаны распределения по глубине оболочки плотности материала тела в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения $V_\infty = 3000$ м/сек. Стили линий соответствуют стилям линий на рис. 5. Величины d являются глубиной выгорания материала тепловой защиты вследствие процессов поверхностного термического разрушения. Рис. 8 демонстрирует, что процесс пиролиза завершился для всех рассмотренных сечений материала тепловой защиты тела.

На рис. 9 показаны распределения температуры по глубине материала оболочки в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения $V_\infty = 3000$ м/сек. Стили линий соответствуют стилям линий на рис. 5.

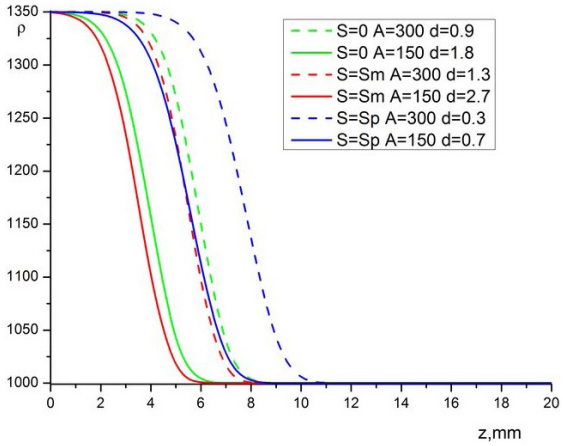


Рис. 8. Распределение по глубине оболочки плотности материала тела, $V_\infty = 3000$ м/сек

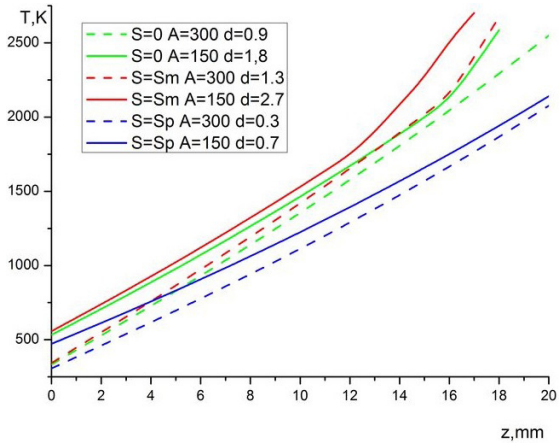


Рис. 9. Распределение температуры по глубине оболочки, $V_\infty = 3000$ м/сек

Заключение

В результате решения задачи аэродинамического нагрева тела в виде сферически затупленного конуса при ускоренном высокоскоростном обтекании потоком химически равновесного воздуха с учетом термохимического разрушения ТЗП из углепластика исследовано влияние величины ускорения на характеристики тепло- и массообмена в элементе тепловой защиты такого тела. Показано, что увеличение ускорения движения тела для достижения целевой скорости приводит к уменьшению темпа роста температуры и степени термического разрушения композитного материала тепловой защиты.

Литература

1. *Гришин А. М.* Сопряжённые и нестационарные задачи механики реагирующих сред / А. М. Гришин, В. М. Фомин. – Новосибирск : Наука, СО АН СССР, 1984. – 319 с.

2. *Зинченко В. И.* Исследование характеристик сопряженного тепло-массообмена при пространственном обтекании затупленного по сфере конуса и вдуве газа с поверхности затупления / В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов // ИФЖ. – 2007. – Т. 80, № 4. – С. 110–117.

3. *Гришин А. М.* Математическое и физическое моделирование тепловой защиты / А. М. Гришин, А. Н. Голованов, В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов. – Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2011. – 358 с.

4. *Nestler D. E.* Compressible Turbulent boundary layer heat transfer to rough surfaces / D. E. Nestler // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9, No 9. – P. 1799–1803.

5. *Sigal A.* New correlation of roughness density effect on the turbulent boundary layer / A. Sigal, J. E. Danberg // AIAA Journal. – 1990. – Vol. 28, No 3. – P. 554–556.

6. *Зинченко В. И.* Исследование характеристик сопряженного тепло- и массообмена при вдуве газа и термохимическом разрушении обтекаемого тела / В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов // ТВТ. – 2007. – Т. 45, № 5. – С. 749–760.

7. *Патанкар С.* Тепло- и массообмен в пограничных слоях / С. Патанкар, Д. Сполдинг. – Москва : Энергия, 1970. – 127 с.

8. *Cebeci T.* Behavior of turbulent flow near a porous wall with pressure gradient / T. Cebeci // AIAA Journal. – 1970. – Vol. 8, No 12. – P. 2152–2156.

9. *Dhawan D.* Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion / D. Dhawan, R. Narasimha// Journal of Fluid Mechanics. – 1958. – No 3. – P. 418–436.

УДК 539.62+ 536.21

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЕЕ ДВИЖЕНИИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. Н. Колодежнов

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

Аннотация. Рассмотрена постановка задачи нестационарного теплопереноса при фрикционном взаимодействии твердого полупространства и движущейся по его поверхности пластины при наличии сухого трения между ними. В такой задаче поверхность контакта тел выступает в качестве плоского источника тепла с заданной интенсивностью тепловыделения. При этом предполагается, что в начальный момент времени тела имеют одинаковую температуру, а внешняя поверхность движущейся пластины является теплоизолированной. Для частного случая, когда пластина и полупространство выполнены из одного и того же материала, получено точное решение рассматриваемой задачи.
Ключевые слова: фрикционное взаимодействие, диссипативный разогрев, распределенный по поверхности контакта источник тепловыделения.

Введение

Фрикционное взаимодействие тел при движении друг относительно друга с проскальзыванием сопровождается тепловыделением на поверхности их контактирования. Этот эффект имеет место в самых различных технологиях: обработка металлов резанием и шлифование [1, 2], волочение [3, 4], функционирование тормозных систем [5–7], процесс сварки трением [8, 9] и другие технические приложения [10].

Стационарная задача диссипативного разогрева в системе двух пластин, взаимодействующих фрикционно, с учетом возможного проплавления на их общей границе была рассмотрена в [11]. Моделирование процесса нестационарного теплопереноса при фрикционном взаимодействии двух коаксиальных цилиндров в случае постановки граничных условий третьего рода на свободной поверхности внешнего цилиндра проведено в [12].

В настоящей работе проводится моделирование неустановившегося теплопереноса в случае, когда пластина движется по поверхности полупространства при наличии сухого трения между ними. При этом предполагается, что начальная температура тел является одинаковой, а внешняя свободная поверхность пластины — теплоизолирована.

1. Постановка задачи диссипативного разогрева

Пусть пластина толщины H внешними усилиями прижимается к поверхности полупространства, заполненного материалом с заданными теплофизическими характеристиками. При этом пластина движется прямолинейно и поступательно по отношению к неподвижной поверхности с постоянной скоростью V. Предполагается, что нормальные усилия (давление), прижимающие пластину к поверхности полупространства, равномерно распределены по ее поверхности с интенсивностью P.

Будем полагать, что на поверхности фрикционного взаимодействия пластины и полупространства происходит обусловленное диссипацией механической энергии тепловыделение, поверхностная плотность мощности которого принимается равной [13]

$$q = f \cdot P \cdot V, \tag{1}$$

где f — постоянный и не зависящий от температуры коэффициент сухого трения на поверхности взаимодействия рассматриваемых тел.

В рамках такой постановки граница раздела тел выступает в качестве плоского источника тепла. При этом, естественно, соотношение плотностей отдельных тепловых потоков, отводимых с поверхности фрикционного взаимодействия в пластину q_1 и полупространство q_2 не известно заранее. Вместе с тем предполагается, что выполняется следующее условие баланса

$$q = q_1 + q_2.$$

Считая, что в начальный момент времени пластина и полупространство имели одинаковую температуру T_0, будем далее рассматривать случай, когда внешняя поверхность пластины полностью теплоизолирована.

Введем прямоугольную систему координат. Размещая начало координат на поверхности контакта тел, сориентируем ось Ox в плоскости фрикционного взаимодействия в направлении движения пластины, а ось Oy направим по нормали к поверхности контакта внутрь движущейся пластины.

Рассмотрим следующий набор безразмерных величин, функций и параметров

$$y' = \frac{y}{H};\quad t' = Fo = \frac{a_1 \cdot t}{H^2};\quad T_1'(t', y') = \frac{T_1(t, y) - T_0}{T_C - T_0};\quad T_2'(t', y') = \frac{T_2(t, y) - T_0}{T_C - T_0};$$

$$a_2' = \frac{a_2}{a_1};\quad \lambda_2' = \frac{\lambda_2}{\lambda_1};\quad \mathrm{Ki} = \frac{f \cdot P \cdot V \cdot H}{\lambda_1 \cdot (T_C - T_0)}, \tag{2}$$

где $T_1(t, y)$, $T_2(t, y)$ — распределения температур в пластине и полупространстве в зависимости от времени t и поперечной координаты y; T_C — некоторая характерная температура, например, температура фазового перехода для материала пластины либо твердого полупространства; λ_1, λ_2, a_1, a_2 — коэффициенты, соответственно, теплопроводности и температуропроводности для материалов пластины и полупространства; Fo — число Фурье; Ki — критерий подобия Кирпичева [14].

В выражениях (2), и далее верхними штрихами отмечены безразмерные величины и функции. При этом, нижние цифровые индексы 1 и 2 указывают на то, что такие параметры задачи относятся, соответственно, к движущейся пластине и полупространству.

Тогда, принимая во внимание (2), уравнения теплопереноса в рассматриваемой системе для определения температуры T_1' в пластине и T_2' в полупространстве в безразмерной форме записи могут быть представлены следующим образом [15–17]

$$\frac{\partial T_1'}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T_1'}{dy'^2};\qquad \frac{\partial T_2'}{\partial Fo} = a_2' \cdot \frac{\partial^2 T_2'}{dy'^2}; \tag{3}$$

С учетом сделанных выше допущений в рамках постановки задачи запишем начальные и граничные условия

$$\begin{aligned}
&Fo = 0; && T_1' = T_2' = 0;\\
&y' = 1; && \frac{\partial T_1'}{dy'} = 0;\\
&y' = 0; && T_1' = T_2'; \qquad -\frac{\partial T_1'}{dy'} + \lambda_2' \cdot \frac{\partial T_2'}{dy'} = Ki;\\
&y' \to -\infty; && T_2' \to 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

В общем случае получить точное решение для такой задачи аналитическими методами представляется затруднительным. В этой связи рассмотрим далее один частный случай.

2. Точное решение поставленной задачи для одного частного случая

В рамках постановки представленной выше задачи рассмотрим частный случай, когда пластина и полупространство выполнены из одного и того же (с точки зрения значений теплофизических параметров) материала.

В такой ситуации имеем

$$a_2' = 1; \quad \lambda_2' = 1. \tag{5}$$

Применяя тогда метод интегральных преобразований Лапласа, решение системы уравнений (2) с учетом начальных и граничных условий (3) для частного случая (5) на всем диапазоне изменения поперечной координаты может быть представлено в следующей единой форме записи

$$T_{1,2}'(t', y') = \frac{Ki}{2} \cdot \int_0^{t'} \left\{ erfc\left(\frac{2 - y'}{2 \cdot \sqrt{\tau}} \right) + erfc\left(\frac{|y'|}{2 \cdot \sqrt{\tau}} \right) \right\} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \cdot (t' - \tau)}}; \quad -\infty < y' \le 1. \tag{6}$$

Здесь дополнительная функция ошибок Гаусса традиционно задается следующим образом

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_z^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot d\xi.$$

Максимальное значение температуры разогрева достигается, естественно, на поверхности фрикционного взаимодействия и принимает значение

$$T_{\max}'(t') = T_{1,2}'(t',\, 0) = \frac{Ki}{2} \cdot \int_0^{t'} \left\{ 1 + erfc\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \right\} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \cdot (t' - \tau)}}.$$

Из последнего соотношения приходим к следующему уравнению для определения момента времени t_C', при котором температура на поверхности фрикционного взаимодействия достигнет заданного критического уровня, например, температуры фазового перехода (плавления или сублимации) для материалов пластины и полупространства

$$\sqrt{t_C'} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{t_C'} erfc\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{t_C' - \tau}} = \frac{\sqrt{\pi}}{Ki}.$$

Анализируя (6), можно видеть, что полученные распределения температур в полупространстве и движущейся пластине прямо пропорциональны значению критерия подобия Кирпичева. В свою очередь числовые значения этого критерия подобия с учетом (2) пропорциональны исходному набору чисто механических параметров процесса таких, как скорость V относительного движения тел, коэффициент сухого трения f, величина нагрузки P, прижимающей пластину к полупространству.

Заключение

Задача о диссипативном разогреве твердого полупространства при движении по его поверхности теплоизолированной пластины допускает точное решение для частного случая, когда оба контактирующих тела выполнены из одного и того же (по теплофизическим характеристикам) материала. При этом следует отметить, что все температурные характеристики оказались прямо пропорциональны основным, чисто механическим параметрам процесса, а именно скорости движения пластины по поверхности полупространства, давлению, прижимающему пластину к полупространству и коэффициенту сухого трения на поверхности фрикционного взаимодействия.

На основе полученного решения для распределения температуры в рассматриваемых телах получено выражение, позволяющее описывать динамику нарастания с течением времени максимальной температуры в рассматриваемой системе на поверхности фрикционного контакта.

В свою очередь это позволяет оценить время развития процесса диссипативного разогрева, в течение которого максимальная температура достигнет критического уровня, например, соответствующего началу фазового перехода типа плавления или сублимации.

Литература

1. *Резников А. Н.* Теплофизика резания / А. Н. Резников. – М. : Машиностроение, 1969. – 288 с.

2. *Попок Н. Н.* Теория резания: В 2 ч. Ч. 2. Тепловые явления, изнашивание режущего инструмента, качество обрабатываемой поверхности, комбинированные виды обработки, оптимизация функционирования системы резания / Н. Н. Попок. – Новополоцк : ПГУ, 2005. – 166 с.

3. *Рудской А. И.* Волочение / А. И. Рудской, В. А. Лунев, О. П. Шаболдо. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 126 с.

4. *Верещагин М. Н.* Влияние скорости волочения на температуру и напряженно-деформированное состояние в проволоке из высокоуглеродистой стали / М.Н. Верещагин, Ю. Л. Бобарикин, А. Н. Савенюк, А. В. Веденеев, М. Ю. Целуев, О. И. Игнатенко // Литье и металлургия. – 2008. – № 1 (45). – С. 40–48.

5. *Иноземцев В. Г.* Тепловые расчеты при проектировании и эксплуатации тормозов / В. Г. Иноземцев. – М. : Транспорт, 1966. – 40 с.

6. Галай Э. И. Тепловой расчет фрикционных узлов тормоза грузовых вагонов / Э. И. Галай, П. К. Рудов, Е. Э. Галай // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып.11. – С. 31–40.

7. *Хоньшев Н. В.* Методика теплового расчета автомобильных дисковых тормозных механизмов / Н. В. Хоньшев, А. А. Лавренченко, А. В. Прохоров, Д. Н. Коновалов // Транспорт. Вестник гражданских инженеров. – 2020. – №4 (81). – С. 203–207.

8. *Масленников А. В.* Физико-математическая модель фрикционной сварки перемешиванием / А. В. Масленников, В. А. Ерофеев // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. – 2008. – № 10. – С. 64–73.

9. *Рзаев Р. А.* Динамика температурного поля и оценка технологических параметров при сварке трением с перемешиванием биметаллических пластин / Р. А. Рзаев, А. У. Джалмухамбетов, В. В. Смирнов, Ш. М. Атуев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – Т. 18, № 1(2). – С. 274–278.

10. *Амосов А. П.* Разогрев и воспламенение твердых ВВ при сухом трении с износом / А. П. Амосов // Физика горения и взрыва. – 1980. – № 3. – С. 12–19.

11. *Колодежнов В. Н.* Диссипативный разогрев с проплавлением при фрикционном взаимодействии двух пластин / В. Н. Колодежнов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4–6 декабря 2023 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 1285–1289.

12. *Колодежнов В. Н.* Диссипативный разогрев в системе двух фрикционно взаимодействующих цилиндров / В. Н. Колодежнов // Теплофизика высоких температур. – 2024. – Т. 62, № 2. – С. 272–278.

13. *Амосов А. П.* Элементарные теплофизические модели трения / А. П. Амосов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Т. 13, № 4(3). – С. 656–662.

14. *Колодежнов В. Н.* Безразмерные комплексы и критерии подобия в гидроаэромеханике: Справочник / В. Н. Колодежнов. – Воронеж : Воронежский госпедуниверситет, 2011. – 580 с.

15. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.

16. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 2001. – 550 с.

17. *Лыков А. В.* Тепломассообмен: Справочник / А. В. Лыков. – М : Энергия, 1978. – 480 с.

УДК 532.5.013.2:532.135

ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В РАМКАХ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ВЯЗКОСТИ

В. Н. Колодежнов

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

Аннотация. Рассмотрено автомодельное решение первой задачи Стокса для случая течения неньютоновских жидкостей со степенным законом вязкости. Получено выражение для скорости жидкости, механическое поведение которой описывается реологической моделью Оствальда — де Ваэля. Показано, что такое решение имеет место при дополнительном ограничении на вязкие свойства, когда жидкость демонстрирует псевдопластическое поведение. Представлено выражение, определяющее распределение касательных напряжений в области течения. Проведен анализ особенностей изменения касательных напряжений в окрестности поверхности движущейся пластины.
Ключевые слова: первая задача Стокса, неньютоновская жидкость, распределение касательного напряжения.

Введение

В гидродинамике известна первая задача Стокса [1], которая заключается в нахождении поля скоростей классической жидкости с постоянным значением вязкости в полупространстве, ограниченном пластиной, внезапно приведенной в поступательное движение с заданной скоростью. При этом течение жидкости предполагается ламинарным. Эта нестационарная задача имеет хорошо известное автомодельное решение [2], которое в ряде случаев используется для проверки соответствующих численных методов [3, 4].

Однако для многих реальных жидкостей вязкость демонстрирует более сложное механическое поведение [5–7], демонстрируя зависимость от скорости сдвига.

Нередко, такую зависимость аппроксимируют степенным законом, что приводит к реологической модели Оствальда — де Ваэля [8, 9]. Эта и другие подобные модели используются при рассмотрении самых различных задач гидродинамики [10, 11].

На основе автомодельного решения первой задачи Стокса для случая неньютоновских жидкостей, поведение которых описывается в рамках реологической модели Оствальда — де Ваэля [12], в данной работе рассматриваются особенности распределения касательных напряжений в окрестности движущейся пластины.

1. Распределение касательного напряжения в области течения

Рассмотрим традиционную постановку первой задачи Стокса, но для случая, когда вязкость жидкости не постоянна и зависит от скорости сдвига так, что поведение жидкости подчиняется реологической модели Оствальда — де Ваэля [8, 9]

$$\tau_{xy} = k \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (1)$$

где τ_{xy} — соответствующая компонента тензора напряжений; $u = u(y,t)$ — скорость жидкости в направлении продольной оси Ox, сориентированной вдоль пластины в направлении ее движения; t — время; y — поперечная координата, отсчитываемая от поверхности пластины

внутрь заполненного жидкостью полупространства; k — коэффициент консистенции; n — индекс течения.

Если для рассматриваемой задачи ввести в рассмотрение безразмерную автомодельную переменную следующим образом

$$\eta = \eta(y',t') = y' \cdot \left(2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot t'\right)^{-\frac{1}{n+1}}, \tag{2}$$

то уравнение динамики жидкости относительно $u'(\eta)$ с учетом (1) принимает вид [12]

$$\frac{d^2u'}{d\eta^2} - 2 \cdot \eta \cdot \left(-\frac{du'}{d\eta}\right)^{2-n} = 0. \tag{3}$$

Безразмерные величины в (2), (3) определяются посредством соотношений

$$u' = \frac{u}{U_0}; \qquad t' = \frac{t \cdot U_0}{L}; \qquad \tau'_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\rho \cdot U_0^2}; \qquad y' = \frac{y}{L},$$

где U_0 — скорость поступательного движения пластины; ρ — плотность жидкости; L — некоторый характерный, принимаемый в качестве масштабного, линейный размер области течения, который полагается равным

$$L = \left(\frac{k}{\rho \cdot U_0^{2-n}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Заметим, что в частном случае $n = 1$ автомодельная переменная (2) и уравнение (3) приводятся к виду [2], соответствующему классической постановке первой задачи Стокса для жидкости с постоянным значением вязкости.

Решение уравнения (3) с учетом удовлетворения условиям

$$\eta = 0; \qquad u' = 1;$$
$$\eta \to \infty; \qquad u' = 0,$$

которые следуют из начального и граничных условий исходной задачи, имеет вид [12]

$$u'(\eta) = 1 - \int_0^{\eta} \left[(1-n) \cdot \left(\xi^2 + C\right)\right]^{\frac{1}{n-1}} \cdot d\xi, \tag{4}$$

где C — константа интегрирования.

Эта константа, как функция индекса течения $C = C(n),$ должна определяться численно из решения уравнения

$$\int_0^{\infty} \left[(1-n)\cdot\left(\xi^2 + C\right)\right]^{\frac{1}{n-1}} \cdot d\xi = 1. \tag{5}$$

Важно отметить, что при проявлении реологического свойства дилатантности, когда $n > 1,$ уравнение (5) теряет смысл и получить решение для распределения скорости не представляется возможным. Поэтому выражение (4) может быть использовано лишь для случая, когда $0 < n < 1$ и неньютоновская жидкость демонстрирует псевдопластическое поведение.

Принимая теперь во внимание (4), приходим к следующему выражению для распределения безразмерного касательного напряжения

$$\tau'_{xy} = -\left\{\left[(1-n)\cdot\left(\eta(y',t')^2 + C(n)\right)\right]^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left[2 \cdot n \cdot (1+n) \cdot t'\right]^{-\frac{1}{1+n}}\right\}^n. \tag{6}$$

Как и следовало ожидать, начальному моменту времени (когда пластина внезапно приводится в состояние поступательного движения) в рамках рассматриваемой модели течения соответствует особый случай, для которого $\left|\tau'_{xy}\right| \to \infty.$

В последующие моменты времени зависимость модуля касательного напряжения от поперечной координаты демонстрирует монотонное убывание до нулевого уровня по мере удаления от движущейся пластины.

Поскольку с учетом (2), (6) выполняется условие

$$\left.\frac{\partial\left|\tau'_{xy}\right|}{\partial y'}\right|_{y'=0}=0,$$

на поверхности пластины модуль касательного напряжения, как функция поперечной координаты, имеет экстремум типа максимум. При этом соответствующее максимальное значение модуля касательного напряжения

$$\max\left\{\left|\tau'_{xy}\right|\right\}=\left\{\left[(1-n)\cdot C(n)\right]^{\frac{1}{n-1}}\cdot\left[2\cdot n\cdot(1+n)\cdot t'\right]^{-\frac{1}{1+n}}\right\}^{n}$$

убывает с течением времени.

Кроме этого отметим, что на профиле зависимости модуля касательного напряжения от поперечной координаты при некотором значении $y'=y'_{\inf}(t')$ имеет место точка перегиба, положение которой определяется следующим образом

$$y'_{\inf}(t')=\left[2\cdot n\cdot(1+n)\cdot t'\right]^{\frac{1}{1+n}}\cdot\sqrt{\frac{(1-n)}{(1+n)}\cdot C(n)}.$$

При этом для фиксированного момента времени положение точки перегиба удаляется от движущейся пластины по мере возрастания значения индекса течения.

Заключение

Рассмотренное автомодельное решение в рамках постановки первой задачи Стокса для течения неньютоновской жидкости со степенным законом вязкости может быть использовано при моделировании гидродинамических процессов в соответствующем технологическом оборудовании, а также при проведении тестирования различных численных методов.

Литература

1. *Stokes G. G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums / G. G. Stokes // Trans. Cambr. Phil. Soc. 1851. V. IX, Part II. Cambridge: Printed at the Pitt Press, by John W. Parker. P. 1–99. https://archive.org/details/b22464074/page/n1/mode/2up

2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М. : Наука. 1974. – 712 с.

3. *Янилкин Ю. В.* Об аппроксимации вяз-кости разностных схем и расчеты течений вязкой жидкости / Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова, А. Л. Стадник, Л. Е. Корзакова // ВАНТ. Серия : ММФП. – 2016. – № 3. – С. 3–17.

4. *Никонов В. В.* О тестировании конечно-разностной схемы моделирования процесса вязкой диффузии с учетом сжимаемости газа в двумерном случае / В. В. Никонов // Изв. Самар. науч. центра РАН. – 2020. – Т. 22, № 5. – С. 128–131.

5. *Виноградов Г. В.* Реология полимеров / Г. В. Виноградов, А. Я. Малкин. – М. : Химия, 1977. – 440 с.

6. *Астарита Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Марруччи. – М. : Мир, 1978. – 312 с.

7. *Малкин А. Я.* Реология. Концепции, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев. – М. : Профес-сия, 2007. – 560 с.

8. *De Waele A. A.* Viscometry and plastometry / A. A. De Waele // J. Oil Colour Chem. Assoc. – 1923. – V. 6. – P. 33–88.

9. Ostwald W. Ueder die rechnerische Durstelung des Strukturgrbietes der Viskositat / W. Ostwald // Koll. – Zeitschr, 1929. – V. 47. – P. 176–187. https://doi.org/10.1007/BF01496959

10. *Борзенко Е. И.* Ламинарное течение степенной жидкости в Т–образном канале при заданных перепадах давления / Е. И. Борзенко, О. А. Дьякова, Г. Р. Шрагер // Изв. РАН. МЖГ. – 2019. – № 4. – С. 63–71.

11. Рыльцев И. А. Кинематика течения степенной жидкости в трубе переменного сечения / И. А. Рыльцев, К. Е. Рыльцева, Г. Р. Шрагер // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2020. – № 63. – С. 125–138.

12. *Колодежнов В. Н.* Автомодельное решение первой задачи Стокса для неньютоноских жидкостей со степенным законом вязкости / В. Н. Колодежнов // Изв. РАН МЖГ. – 2024. – № 2. – С. 52–57.

УДК 538.9

МЕТОД ВИЗУАЛИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЗЛОВ ПО КООРДИНАЦИОННЫМ СФЕРАМ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЁТКЕ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

А. С. Кочкин, М. Д. Старостенков, К. А. Теников

Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова

Аннотация. Предложен метод визуализации распределения атомных положений (узлов) по координационным сферам в кристаллической решётки кубической симметрии. Визуализация сфер осуществляется при помощи специально разработанного программного обеспечения, позволяющего производить расчёты и представлять трёхмерные модели координационных сфер на основе их индексов узлов, то есть номеров. В статье продемонстрированы графические материалы, таблицы, которые демонстрируют связи между нумерацией координационных сфер и их геометрическими формами, что в свою очередь способствует более детальному и глубокому пониманию структуры модели.
Ключевые слова: координационные сферы, визуализация, кубическая решётка, узлы, атомы, многогранник, трёхмерное моделирование.

Введение

Кристаллография прошла через четыре важных этапа в своем развитии: 1) эмпирический период до начала XIX века, в ходе которого собирались фактические данные о структуре кристаллов, 2) теоретический период в XIX веке, завершившийся в 1912 году и связанный с разработкой теоретических принципов и законов, определяющих строение кристаллов, 3) современный экспериментальный период с 1912 года, вектор которого сместился к практике, эксплуатации и применению открытой информации; и, наконец, 4) предсказательный период с 2010 года, стремящийся предсказывать свойства кристаллических веществ. Все они принесли свои плоды в углублении понимания структуры и закономерностей образования кристаллических материалов [1–7].

Поиск идеальных конфигураций нанокластеров с использованием компьютерного моделирования представляет собой сложный и трудоёмкий процесс. В связи с этим, исследование структурных закономерностей размещения малых металлических кластеров становится важной и актуальной задачей [8, 9].

Важным и ключевым этапом в процессе разработке правил заполнения кристаллической структуры пространственными многогранниками является определение минимальной элементарной ячейки. Ячейка охватывает, как атомные узлы, так и пустоты, из которых можно выделить, например, тетраэдрические и октаэдрические [10, 11], которые играют основную роль в определении физических и химических свойств материалов. Пустоты оказывают влияние на логистику атомов, распределение междоузлий, на стабильность кристаллической решётки.

Главные особенности кристаллических решёток представляются в виде закономерности распределения атомных узлов внутри координационных сфер. Однако стоит отметить, что нет общего ответа на вопрос о геометрии размещения узлов в произвольной координационной сфере. В случае простой кубической решётки (ПК) связь между порядковым номером координационной сферы и координатными индексами просматривается только для первых шести сфер, в виде формулы:

$$n_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \tag{1}$$

где набор $\{x_i, y_i, z_i\}$ задаёт основной многогранник (или многогранники) и количество узлов [12].

Часть натуральных чисел не могут быть представлены в виде суммы квадратов трёх координационных чисел. Данные числа называются согласно из списка литературы с нулевым заполнением [13; 14]. Они находятся по следующей формуле:

$$N = (8\mu - 1)\vartheta^2, \tag{2}$$

где $\mu \in N$, $\vartheta\{1, 2, 4, 6\ldots\}$. Цифра 8 соответствует числу узлов (вершин в кубе).

1. Методика представления алгоритма конструирования заполнения координационных сфер

В данном разделе приводится процедура моделирования координационных сфер в кристаллических решётках кубической симметрии. Ключевой целью этой методики является оптимизация процесса расчёта и визуализации координационных сфер. С акцентом на их заполнение детализированными многогранниками, что в свою очередь позволит лучше изучить и понять их геометрическую структуру.

Каждая координационная сфера содержит атомные узлы, расположенные на определённом расстоянии от центрального атома, так же основные параметры, такие как: количество узлов, радиус — будут определяться в зависимости от симметрии кристаллической решётки, а также выбранных индексов [15–17].

Алгоритм содержит несколько шагов:

1. Определения порядкового номера координационной сферы n_i для центрального атома используя формулу (1).

2. Вычисления численных свойств (параметры) для каждой координационной сферы включая количество узлов и объём.

3. Исходя из полученных данных применения правила заполнения различных классов с помощью многогранников, как показано в схеме [18, 19].

4. Визуализировать полученные 3D модели координационных сфер с использованием разработанного приложения.

Последовательность, порядок заполнения кристаллических многогранников по координационным сферам представляется по схеме [18–20]:

$$f(8\mu - 7): \begin{cases} (2l \pm 1, 0, 0) \rightarrow \text{Октаэдр} \\ (2l \pm 1, 4p, 0) \rightarrow \text{Усеченный октаэдр} \\ (2l \pm 1, 2p, 2k) \rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \end{cases} \tag{3}$$

$$f(8 - 6): \begin{cases} (2l \pm 1, 2p \pm 1, 0) \rightarrow \text{Кубооктаэдр, Усеченныйоктаэдр} \\ (4l, 2p \pm 1, 2k \pm 1) \rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \end{cases} \tag{4}$$

$$f(8 - 5): \{(2l \pm 1, 2p \pm 1, 2k \pm 1) \rightarrow \text{Ромбокубооктаэдр, Усеченный куб, Усеченныйкубооктаэдр, Куб} \tag{5}$$

$$f(8\mu - 4): \begin{cases} (2l, 0, 0) \rightarrow \text{Октаэдр} \\ (2l, 2p, 0) \rightarrow \text{Кубооктаэдр} \\ (21, 2p, 2k) \rightarrow \text{Куб, Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \\ (4l, 4p, 2k) \rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \end{cases} \tag{6}$$

$$f(8\mu - 3): \begin{cases} (2l, 2p \pm 1, 0) \rightarrow \text{Усеченныйоктаэдр} \\ (2l, 2p \pm 1, 2k) \rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \end{cases} \tag{7}$$

$$f(8\mu - 2): \{(2l, 1, 2p \pm 1, 2k \pm 1) \rightarrow \text{Ромбокубооктаэдр, Усеченный куб, Усеченныйкубооктаэдр} \tag{8}$$

$$f(8\mu-0):\begin{cases}(2l,2p,0)\rightarrow \text{Кубооктаэдр, Усеченныйоктаэдр}\\(4l,0,0)\rightarrow \text{Октаэдр}\\(41,4p,4k)\rightarrow \text{Куб, Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр}\\(4l,4p,2k)\rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр}\end{cases} \quad (9)$$

Как видно из алгоритма каждой координационной сфере соответствует базовый (основной) многогранник или их комбинации, для решётки ПК. В случае с решёткой ПК будет соответствовать алгоритм заполнения в виде формул: $f(8\mu-4)$ и $f(8\mu-0)$, при использовании соответствующего набора многогранников. Для решётки ГЦК алгоритм будет представляться формулами. На основе приведённых данных следует, что ОЦК решётка представляется менее плотно упакованной по сравнению с ГЦК решёткой: $f(8\mu-6)$, $f(8\mu-4)$, $f(8\mu-2)$, $f(8\mu-0)$.

2. Результаты и обсуждение

В табл. 1 представлены результаты для ГЦК кристаллической решётки. В таблице 1 представлен результат исследования связи номера координационной сферы с индексами узлов, типом многогранников, количеством вершин.

Таблица 1

Связь номера координационной сферы с индексами узлов, типом многогранников, количеством вершин [21–23]

n_i	n_{pn}	Индексы узлов	Многогранники	Количество вершин
1	1	100	O (Октаэдр)	6
2	2	110	CO (Кубооктаэдр)	12
3	3	111	CO (Кубооктаэдр)	8
4	4	200	O (Октаэдр)	6
5	5	210	TO (Усеченный Октаэдр)	24
6	6	211	RCO (Ромбокубооктаэдр)	24
7	8	220	CO (Кубооктаэдр)	12
8	9	300, 221	O (Октаэдр), TC (Усеченный куб)	30
9	10	310	TO (Усеченный октаэдр)	24
10	11	311	RCO (Ромбокубооктаэдр)	24
11	12	222	CO (Кубооктаэдр)	8
12	13	320	TO (Усеченный октаэдр)	24
13	14	321	RCO (Ромбокубооктаэдр)	48
14	16	400	O (Октаэдр)	6
15	17	410	CO (Кубооктаэдр)	12

Так, табл. 2 иллюстрирует результаты анализа координационных сфер, полученные с использованием разработанного программного обеспечения и демонстрируя совпадения между табл. 1 и вычисленными значениями в программном обеспечении.

В программном обеспечении реализована возможность наложения одной координационной сферы на другую сферу, например, можно наложить седьмую координационную сферу на пятую координационную сферу, что с свою очередь позволит визуализировать итоговое распределение.

Таблица 2

Вычисленные в программное обеспечение параметры координационных сфер

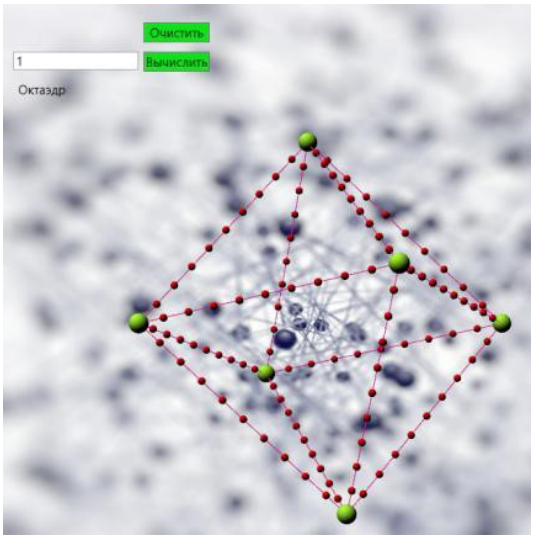


Рис. 1. При $n_i = 1$

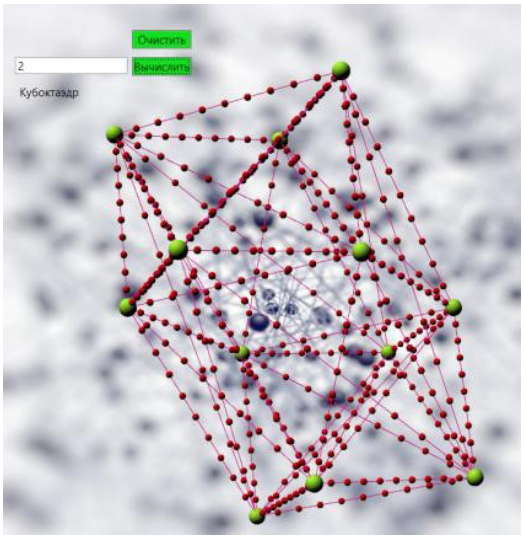


Рис. 2. При $n_i = 2$

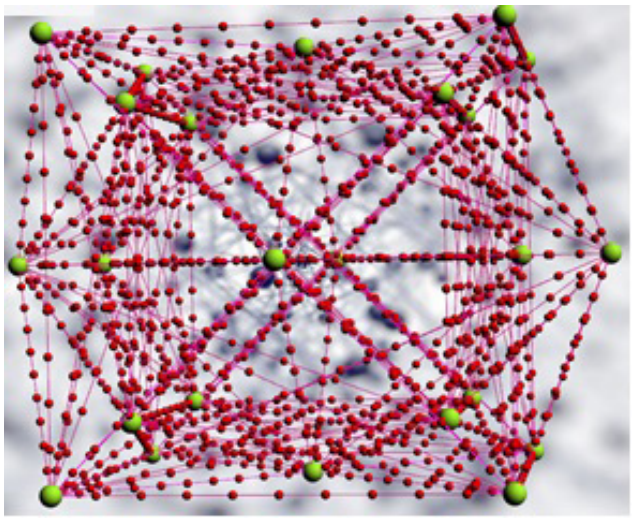


Рис. 3. При $n_i = 3$

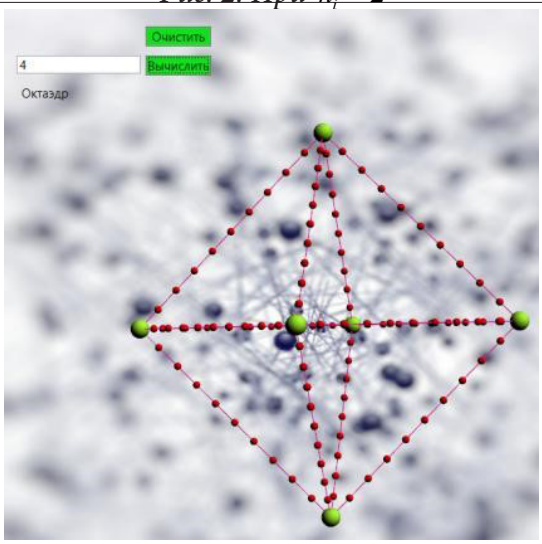


Рис. 4. При $n_i = 4$

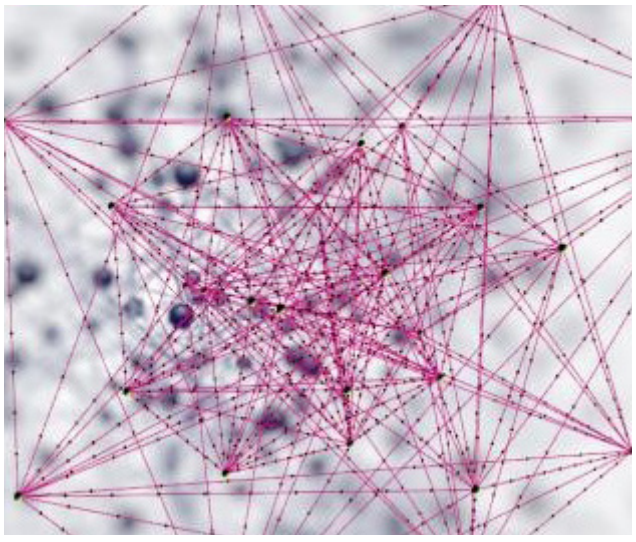


Рис. 5. При $n_i = 5$

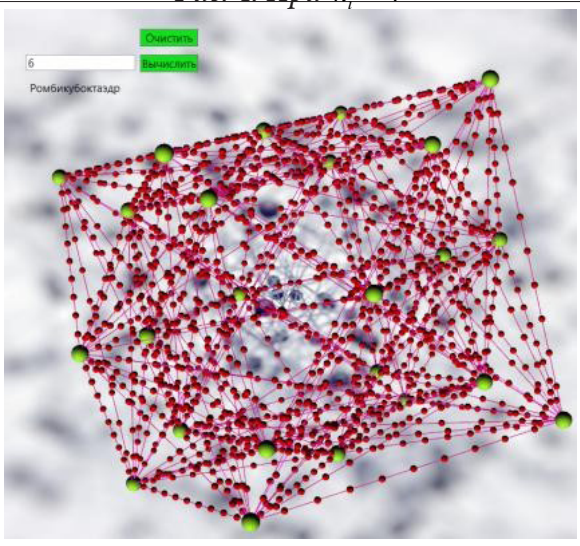


Рис. 6. При $n_i = 6$

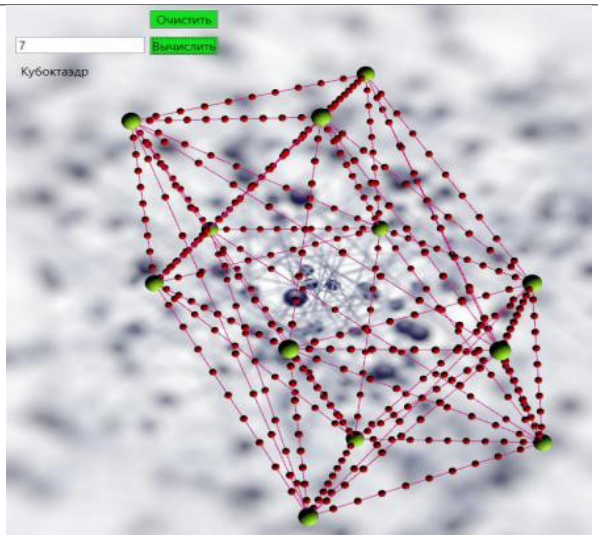


Рис. 7. При $n_i = 7$

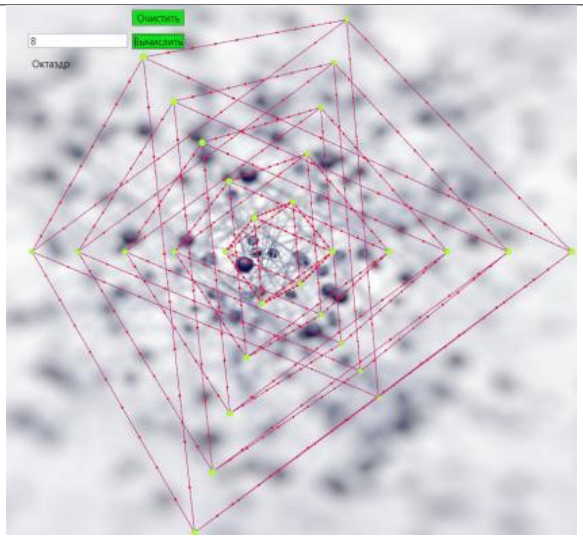


Рис. 8. При $n_i = 8$

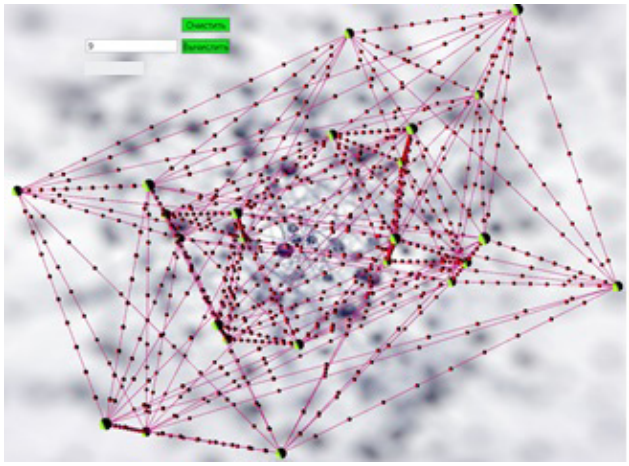


Рис. 9. При $n_i = 9$

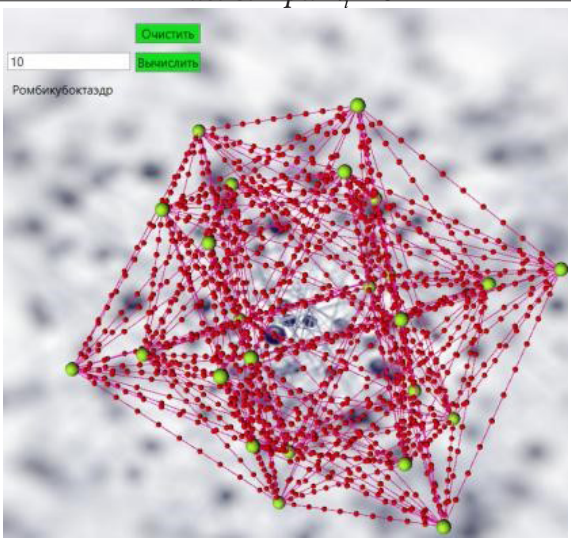


Рис. 10. При $n_i = 10$

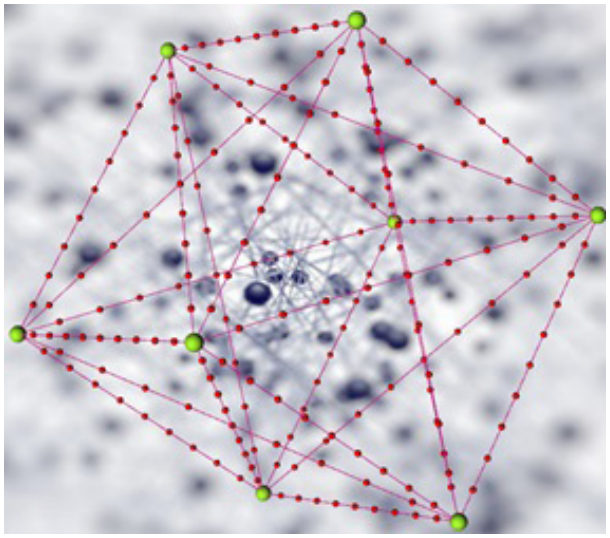


Рис. 11. При $n_i = 11$

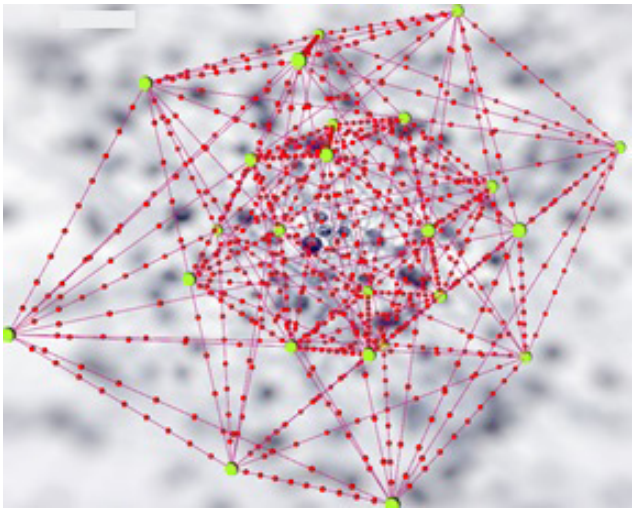


Рис. 12. При $n_i = 12$

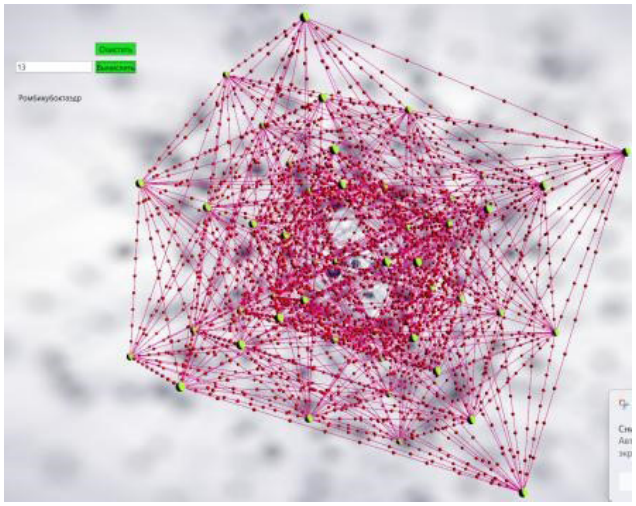


Рис. 13. При $n_i = 13$

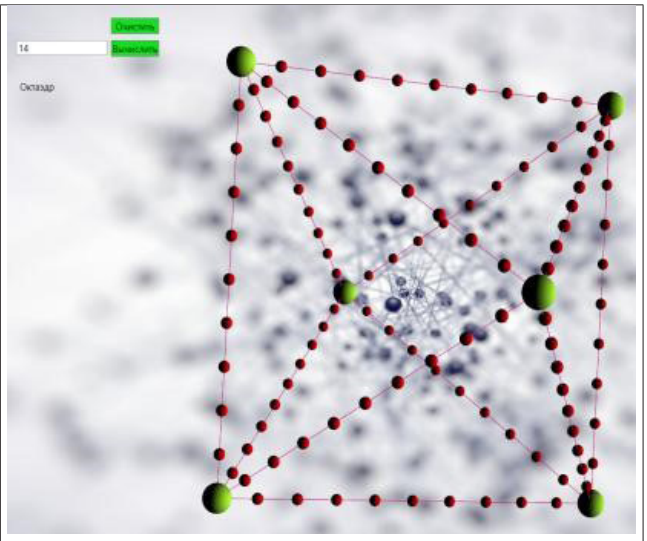


Рис. 14. При $n_i = 14$

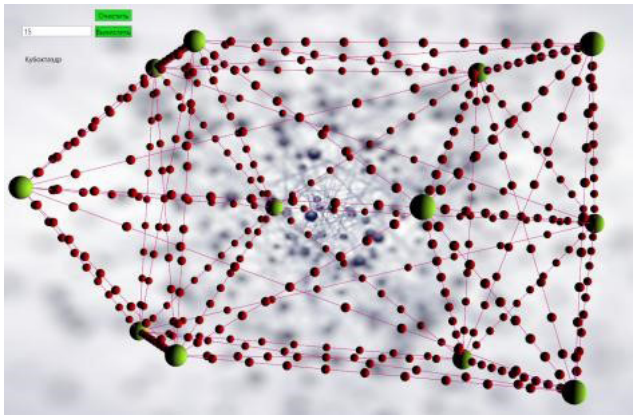


Рис. 15. При $n_i = 15$

— соответствуют отсчитываемым дискретным положением между атомными узлами.

— соответствуют кристаллическим узлам (атомным положениям).

Также существует спектр возможностей для изменения угла обзора и масштабирования координационной сферы, что способствует более детальному анализу и изучению структуры.

В сочетании разработанного программного обеспечения и опубликованных научных результатов наблюдается, что есть совпадения между вычисленными в ПО и экспериментально определёнными значениями для первых 15 координационных сфер. Данные соответствия показывают правильность и корректность реализованного алгоритма. Так же показывает его способность эффективно и результативно моделировать координационные структуры, сферы. Рассмотренные координационные сферы демонстрируют, что визуализация, а также последующий анализ их геометрических свойств (характеристик) могут оказаться надёжными инструментами в области исследования кристаллических материалов.

Кроме того, исследовательские работы программного обеспечения демонстрируют, что применения наложения координационных сфер позволяют гораздо глубже исследовать взаимозависимости между различными геометрическими формами, и их влиянием на физические свойства материалов. Такая функция, как менять угол обзора, а также менять масштабы всё это способствует лучше ориентироваться в сложных структурах. Обнаруживать новые закономерности, которые могут оказаться важными для понимания процессов, связанных с нелинейной супратрансмиссией.

И наконец применение алгоритма к различным кристаллическим структурам, например, включая ОЦК и ГЦК, открывает перспективы для дальнейших исследований. Это может привести к поиску новых материалов с уникальными оптическими свойствами. Также к созданию более эффективных технологий в области фотоники.

Исходя из вышеуказанного, данное исследование не только увеличивает и расширяет теоретические представления и знания о координационных сферах, но также вносит вклад в практическое применение полученных знаний в исследованиях современных материалов.

Выводы

Данная работа представляет подход к визуализации координационных сфер в кубических решётках с их структурой и свойствами. Для более точной визуализации разработанное программного обеспечение выполняет расчёт и отображение трёхмерных моделей на основе индексов узлов. С целью исследования нелинейной супратрансмиссии в модельных кристаллах, изображенные методы и технологии показывают собственную результативность, раскрывая ранее не известные горизонты в области кристаллографии и материаловедения.

Результаты доказали, что точность алгоритмов и возможности наложения координационных сфер, обогащает исследование структур. Огромным шагом в дальнейшем исследовании непростых геометрий кристаллических материалов для удобной визуализации считается манипуляции с углом обзора, что позволяет обнаружить взаимосвязи между структурными параметрами и физическими свойствами веществ.

Данный подход отмечает, что анализ первых 15-ти координационных сфер обнаружил значительное количество совпадений между вычисленными данными и экспериментальными результатами. Что в дальнейшем способствует открытию новых материалов с улучшенными характеристиками и даёт возможность образовать основу для более детальных исследований свойств кристаллических структур. Таким образом, данное исследование, увеличивает основные принципы кристаллографии и практические способности с целью исследования материалов с исключительными оптическими свойствами.

Благодарности

Авторы настоящей статьи выражают особую благодарность научному руководителю Старостенкову М. Д. за оказанную помощь в написании статьи.

Литература

1. *Caputo J.-G., Leon J.* Spire nonlinear energy transmission in the gap // Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 283. – P. 129–135.

2. *Flach S., Willis C. R.* Discrete breathers //Physics reports. – 1998. – Т. 295, № 5. – С. 181–264.

3. *Singh M. [et al.]* Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain // Journal of Nonlinear Science. – 2021. – Vol. 31, No 1. – P. 12.

4. *Chacón R., Palmero F., Cuevas-Maraver J.* Impulse-induced localized control of chaos in starlike networks //Physical Review E. – 2016. – Т. 93, № 6. – С. 062210.

5. *Kamdoum Kuitche A., Togueu Motcheyo A. B., Kanaa T., Tchawoua C.* Supratransmission in transversely connected nonlinear pendulum pairs // Chaos, Solitons and Fractals. – 2022. – Vol. 160. – P. 112196

6. *De Santis D., Guarcello C., Spagnolo B., Carollo A., Valenti D.* Generation of travelling sine-Gordon breathers in noisy long Josephson junctions // Chaos, Solitons and Fractals. – 2022. – Vol. 158. – P. 112039

7. *Cui J.-G., Yang T., Niu M.-Q., Chen L.-Q.* Interaction effects of driving amplitudes and frequencies on transitivity in a granular chain // Journal of Sound and Vibration. – 2022. – Vol. 529. – P. 116966

8. *Мясниченко В. С.* Применение представления о структурных многогранниках заполнения координационных сфер в объемных кристаллах к проблеме поиска устойчивых форм нанокластеров. I / В. С. Мясниченко, М. Д. Старостенков // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2011. – Т. 8, № 2. – С. 49–52. – EDN NUZTJX.

9. *Попов В. А.* Физика конденсированного состояния. Часть I: Учебное пособие. – Барнаул : Алт. госуд. технич. ун-т им. И. И. Ползунова, 2023. – 265 с.

10. *Лощина И. В., Старостенков М. Д.* Правила заполнения координационных сфер в кристаллической решетке алмаза // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 94–100.

11. *Мясниченко В. С.* Применение представления о структурных многогранниках заполнения координационных сфер в объемных кристаллах к проблеме поиска устойчивых форм нанокластеров. II / В. С. Мясниченко, М. Д. Старостенков // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2012. – Т. 9, № 3. – С. 284–288. – EDN PAEEKV.

12. Кристаллогеометрия заполнения координационных сфер в наночастицах сплавов состава ав формирующих сверхструктуру B32 / М. Д. Старостенков, Ч. Ян, Г. Донг [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2024. – Т. 21, № 1. – С. 68–74. – DOI 10.25712/ASTU.1811-1416.2024.01.008. – EDN EIZLHI.

13. *Старостенков М. Д.* Метод расчета заполнения координационных сфер в кристаллах с ГЦК решеткой. Томск, 1986. 27 с. / Деп. в ВИНИТИ, 31.03.86, № 2968-2-В86

14. *Старостенков М. Д.* Пространственное распределение атомов по координационным сферам в кристаллах кубической симметрии // Кристаллография. – 1992. – Т. 37, Вып. 3. – С. 717–723.

15. *Zheng Y.* A piezoelectric metamaterial with bistable circuit shunts for adaptive non-reciprocal elastic wave transmission / Y. Zheng, Z. Wu, X. Zhang, K. W. Wang // Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems: SMASIS 2018. – San Antonio, 2018. – V001T03A003.

16. *Zheng Y.* A piezo-metastructure with bistable circuit shunts for adaptive nonreciprocal wave transmission / Y. Zheng, Z. Wu, X. Zhang, K. W. Wang // Smart Materials and Structures. – 2019. – Vol. 28, No 4. – P. 045005.

17. *Wu Z.* Supratransmission in a metastable modular metastructure for tunable non-reciprocal wave transmission / Z. Wu, K. W. Wang // The International Society for Optical Engineering: Proceedings of SPIE. – Colorado, 2018. – Vol. 10595. – P. 1059514.

18. *Лощина И. В., Старостенков М. Д.* Правило заполнения координационных сфер в кристаллической решетке алмаза // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2006. – Т. 3, № 3. С. 94–100

19. *Старостенков М. Д., Лощина И. В.* Простое правило заполнения координационных сфер кристаллической решетки типа алмаза // В сб. материалов конференции «XVII Петербургские чтения по проблемам прочности». СанктПетербург, 10–12 апреля 2007 г. СПб., 2007. – С. 92–95.

20. *Полетаев, Г. М.* Потенциалы Морзе для ГЦК металлов при учете взаимодействия пяти координационных сфер / Г. М. Полетаев, М. Д. Старостенков, И. В. Зоря // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 70–75. – EDN YGAUFJ.

21. *Starostenkov M, Tabakov P, Romanenko V. [et al.]* Regularities of coordination spheres in the crystal lattice of the cubic symmetry[J]. Procedia IUTAM, 2017. – 23. – P. 167–176.

22. *Starostenkov M. D.* Crystal Filling geometry of coordination spheres in the D03 superstructure / M. D. Starostenkov, Z. Yang, G. Dong // Материалы во внешних полях (МВП–2023) : труды XII Международного онлайн-симпозиума, Новокузнецк, 13–14 марта 2023 года. – Новокузнецк: Сибирский государственный индустриальный университет, 2023. – P. 18–20. – EDN WBXKCC.

23. Кристаллогеометрия заполнения координационных сфер в наночастицах сплава состава а3в, формирующего сверхструктуру D03 / М. Д. Старостенков, Ц. Би, Ч. Ян [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2024. – Т. 21, № 3. – С. 367–378. – DOI 10.25712/ASTU.1811-1416.2024.03.011. – EDN VIUSJV.

УДК 665.455:006.354

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

О. В. Матвиенко[1,2], Н. С. Фирсанова[2], И. С. Черкасов[2]

[1]Томский государственный архитектурно-строительный университет
[2]Томский государственный университет

Аннотация. В работе проведено исследование неустановившегося течения в псевдопластической жидкости Оствальда — де Вейля в цилиндрической трубе. Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения. В периферийной и пристеночной частях течения эффективная вязкость характеризуется низкими значениями. Однако в окрестности оси течения наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. По мере гидродинамической стабилизации течения вязкость потока в приосевой зоне возрастает. Увеличение значений параметра консистенции приводит к росту влияния вязких сил, что способствует более быстрой гидродинамической стабилизации потока. При уменьшении показателя нелинейности скорость течения в ядре потока характеризуется практически однородным профилем, что характерно для пластического течения.
Ключевые слова: реология, вязкость, неньютоновские жидкости, псевдопластичность, вязкость, модель Оствальда — де Вейля, течение, математическое моделирование, битумные вяжущие.

Введение

Модифицирование дорожных битумов полимерами является одним из способов повышения их эксплуатационных свойств, в том числе снижения температуры хрупкости, расширения температурного интервала, повышения деформационной стабильности, долговечности и устойчивости к старению [1, 2].

Известно, что модифицированные битумы обладают сильным неньютоновским поведением, особенно при низких температурах [3]. Неньютоновское поведение характеризуется зависящей от скорости деформации сдвиговой вязкостью и происходит вследствие специфической молекулярной структуры битума [4], содержащего, в частности, асфальтеновые наноагрегаты.

Вязкость битумных дисперсных систем зависит от температуры, соотношения фаз, степени дисперсности и скорости течения и может сильно изменяться в технологическом процессе [3]. В интервале температур от $30°C$ до $70°C$ битумные вяжущие проявляют вязкопластические свойства [3, 4]. При температурах выше $70°C$ битумы становятся псевдопластическими, а при температуре более $100°C$ — ньютоновскими жидкостями.

Подробный обзор исследований, посвященных течениям реологически сложных сред, приведен в монографиях [5–9].

В настоящее время известно несколько десятков, в основном эмпирических, реологических моделей нелинейно-вязких жидкостей. Такое положение обусловлено различной физической природой существующих текущих систем и отсутствием на сегодня теории, которая позволяла бы достаточно строго вычислять характеристики молекулярного переноса и механического поведения среды, исходя из ее внутренней, микроскопической структуры.

Настоящая работа является продолжением исследований закрученного течения неньютоновских сред [10–18]. Целью настоящей работы является исследование структуры течения псевдопластической жидкости в цилиндрической трубе.

Математическая модель

Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения [16]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial \rho v r}{\partial r}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial \rho u v r}{\partial r}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial r\tau_{xr}}{\partial r}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial r\tau_{rr}}{\partial r}-\frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r}, \tag{3}$$

К настоящему времени разработано большое количество реологических моделей, описывающих поведение неньютоновских сред. К числу наиболее простых относится модель Оствальда — де Вейля [6]. Обобщение этой модели на трехмерный случай приводит к реологическому уравнению:

$$\mu_{eff}=kU^{n-1}. \tag{4}$$

Постоянная k называется показателем (индексом) консистенции жидкости; чем меньше ее текучесть, тем больше k. Параметр n характеризует степень неньютоновского поведения материала: чем сильнее n отличается от единицы (в большую или меньшую сторону), тем отчетливее проявляется аномалия вязкости и нелинейность кривой течения.

Значениям $0<n<1$ отвечают псевдопластичные жидкости, эффективная вязкость которых убывает с ростом скоростей сдвига. Ньютоновская жидкость характеризуется параметром $n=1$. Значениям $n>1$ отвечают дилатантные жидкости, у которых эффективная вязкость растет с увеличением скоростей сдвига.

Для степенных жидкостей Оствальда — де Вейля реологические соотношения в случае осесимметричного течения имеют вид:

$$\tau_{xx}=2kU^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \tau_{xr}=kU^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \tau_{rr}=kU^{n-1}\frac{\partial v}{\partial r},\quad \tau_{\varphi\varphi}=2kU^{n-1}\frac{v}{r}, \tag{5}$$

$$U=\sqrt{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{v}{r}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}. \tag{6}$$

На границах расчетной области задавались следующие условия:

$$\begin{aligned}
&x=0: && u=u_{\text{in}}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right), && v=0;\\
&x=L: && \frac{\partial u}{\partial x}=0, && v=0;\\
&r=0: && \frac{\partial u}{\partial r}=0, && v=0;\\
&r=R: && u=0, && v=0;
\end{aligned}$$

Величина u_{in} определяет скорость на оси течения на входе в канал. Для параболического распределения осевой скорости эта величина связана с объёмным расходом жидкости Q соотношением:

$$u_{in}=2\frac{Q}{\pi R^2}. \tag{7}$$

Уравнения (1)–(3) решались численно с использованием метода конечного объема [19].

Анализ результатов

Рассмотрим основные результаты исследования течения дилатантной жидкости в цилиндрическом канале. При моделирования поля течения диапазон изменения параметров был выбран следующим: консистенция жидкости изменялась в пределах $k = 0.05 - 2\ H \times c^n / м^2$, показатель нелинейности — параметром $n = 0.5 - 1$, среднерасходная скорость — $u_{in} = 1 - 10\ м/с$. Радиус канала составлял $R = 0.1\ м$, длина канала — $L = 2\ м$.

Предполагалось, что распределение скоростей на входе в канал подчиняется закону Пуазейля: радиальная и тангенциальная компоненты скорости отсутствует, а для осевой составляющей скорости характерна параболическая зависимость от радиальной координаты. При течении в канале ньютоновской жидкости перестройки профиля течения не происходит, так как пуазейлевский профиль скоростей соответствует установившемуся течению жидкости. С уменьшением показателя нелинейности n происходит перестройка потока на начальном участке течения, тем более заметная, чем больше отклонение свойств жидкости от ньютоновских. В результате этого скорость потока в приосевой области уменьшается, а в пристеночной — увеличивается. Увеличение значений параметра консистенции k приводит к росту влияния вязких сил, что способствует более быстрой гидродинамической стабилизации потока (рис. 1).

Структурирование среды, связанное с уменьшением показателя нелинейности, приводит к тому, что скорость течения в ядре потока характеризуется практически однородным профилем, что характерно для пластического течения.

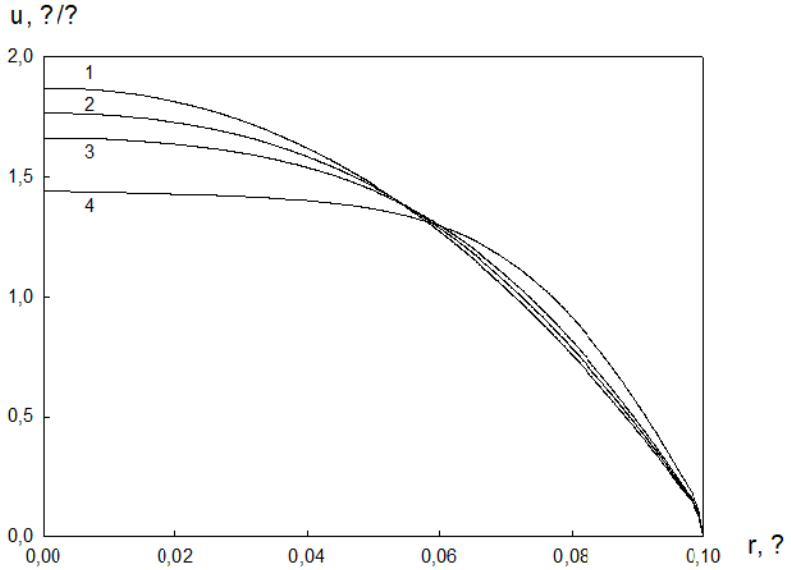


Рис. 1. Радиальное распределение осевой скорости u в трубе постоянного сечения при разных значениях скорости потока на входе: $u_{in} = 1$ м/с на различном удалении от входа в трубу: 1 — $x = 0.16$ м; 2 — $x = 0.36$ м; 3 — $x = 0.56$ м; 4 — $x = 1.56$ м

Рассмотрим особенности распределения эффективной вязкости. Характерной особенностью течения псевдопластических сред является увеличение эффективной вязкости с уменьшением скоростей сдвиговых деформаций. Это объясняется процессами структурирования. С увеличением скорости сдвига структурированность среды нарушается, молекулы ориентируются вдоль направления движения. В результате этого сопротивление среды ослабевает, что означает уменьшение эффективной вязкости. Поэтому при потоке псевдопластической жидкости в трубе в периферийной и пристеночной части канала эффективная вязкость характеризуется низкими значениями. Однако в окрестности оси течения, где градиент скорости име-

ет невысокие значения, наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. После наступления стабилизации потока на оси течения $\mu_{eff} / \mu_{\infty} \to \infty$.

На рис. 2, а показано радиальное распределение эффективной вязкости $\mu_{eff} = kU^{n-1}$ на различном удалении от входа в канал. Как видно из рисунка, в периферийной и пристеночной частях течения эффективная вязкость характеризуется низкими значениями. Однако в окрестности оси течения наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. По мере гидродинамической стабилизации течения вязкость потока в приосевой зоне возрастает.

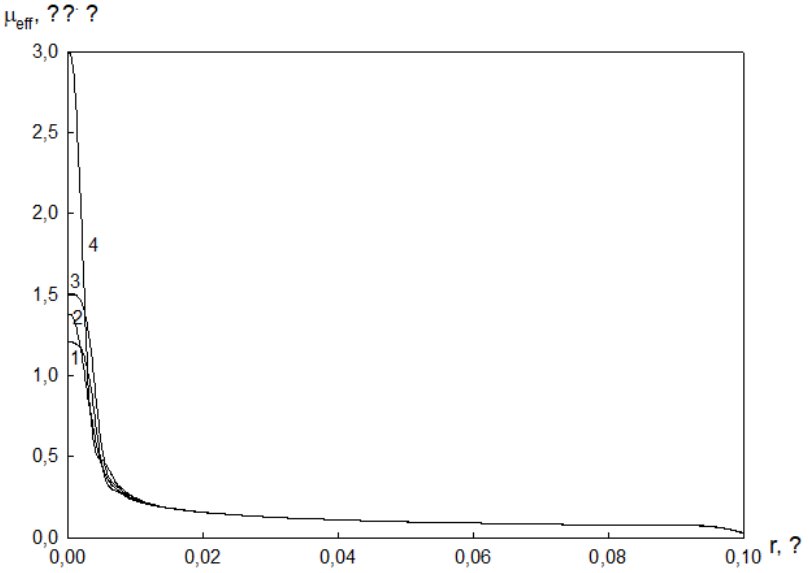


Рис. 2. Радиальное распределение эффективной вязкости в потоке: $u_{in} = 2.5$ *м/с;* $n = 0.5$*;* $k = 0.5$ *Па*$\cdot c^{0.5}$*;* *1 —* $x = 0.2$ *м; 2 —* 0.6*; 3 — 1; 4 —* 1.5

С уменьшением показателя нелинейности вязкость в приосевой зоне течения возрастает, а вне этой зоны — уменьшается (рис. 3).

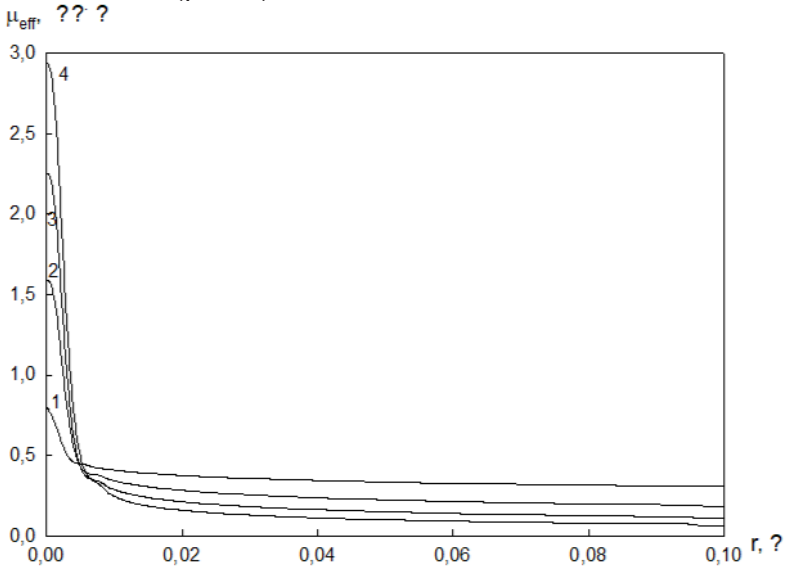


Рис. 3. Влияние показателя гнлинейности на радиальное распределение эффективной вязкости: $u_{in} = 2.5$ *м/с;* $x = 1.5$ *м;* $k = 0.5$ *Па*$\cdot c^{0.5}$*;* *1 —* $n = 0.875$*; 2 —* 0.75*; 3 —* 0.625*; 4 —* 0.5

Влияние значения параметра консистенции на радиальное распределение эффективной вязкости представлено на рис. 4. Как видно из рисунка, с увеличением значений параметра консистенции происходит рост значений эффективной вязкости во всей области течения.

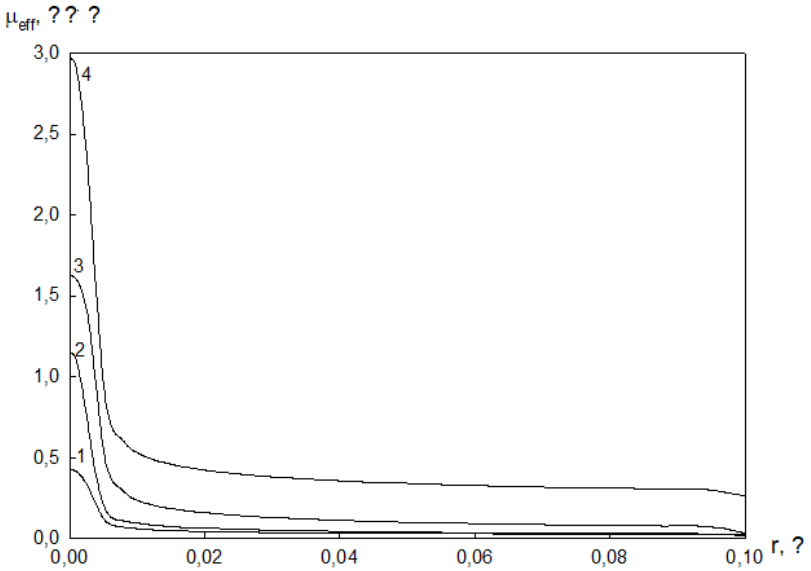


Рис. 4. Влияние параметра консистенции на радиальное распределение эффективной вязкости: $u_{in} = 2.5$ *м/с;* $x = 1.5$ *м; 1 —* $k = 0.2$ *Па*$\cdot c^{0.5}$*; 2 —* 0.3*; 3 —* 0.4*; 4 —* 0.5

Литература

1. *Галдина В. Д.* Модифицированные битумы / В. Д. Галдина. – Омск : СибАДИ, 2009. – 228 с.

2. *Бабак О. Г.* Применение модифицированных вяжущих в дорожном строительстве. Дорожная техника и технологии / О. Г. Бабак, Г. Б. Старков. – 2001. – № 5. – С. 72–75.

3. *Золотарев В. А.* Дорожные битумные вяжущие и асфальтобетоны / В. А. Золотарев. – Харьков : ХНАДУ, 2014. – 180 с.

4. *Матвиенко О. В.* Битумные вяжущие / О. В. Матвиенко. – Томск : ТГАСУ, 2024. – 219 с.

5. *Островский Г. М.* Прикладная механика неоднородных сред / Г. М. Островский. – СПб. : Наука, 2000. – 359 с.

6. *Малкин А. Я.* Реология: концепции, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев. – Профессия, 2007. – 560 с.

7. *Уилкинсон У. Л.* Неньютоновские жидкости / У. Л. Уилкинсон. – Москва : Мир, 1964.

8. *Кутепов А. М.* Химическая гидродинамнка: справочное пособие / А. М. Кутепов, Л. Д. Полянин, З. Д. Запрянов, А. В. Вязьмин, Д. А. Казенин. – Москва : Бюро Квантум, 1996.

9. *Матвиенко О. В.* Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем / О. В. Матвиенко, Ф. Г. Унгер, В. П. Базуев. – Томск : Изд-во ТГАСУ, 2015.

10. *Матвиенко О. В.* Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – Т. 57, № 8-2. – С. 183–189.

11. *Матвиенко О. В.* Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н.К. Дульзон // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 5. – С. 1129–1137.

12. *Матвиенко О. В.* Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости Балкли — Гершеля в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, А. Е. Асеева // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 1. – С. 215–226.

13. *Матвиенко О. В.* Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости Балкли — Гершеля в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, А. Е. Асеева // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 6. – С. 2641–2651.

14. *Матвиенко О. В.* Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н. К. Южанова // Инженерно-Физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 3. – С. 544–547.

15. *Матвиенко О. В.* Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н. К. Южанова // Инженерно-Физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 1. – С. 192–199.

16. *Матвиенко О. В.* Математическое моделирование закрученного потока термовязкой псевдопластической жидкости Сиско в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, А. Е. Асеева // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93, № 4. – С. 857–869.

17. *Матвиенко О. В.* Численное исследование структуры течения и теплообмена при закрученном течении битумно-дисперсных систем в цилиндрических каналах / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н. К. Дульзон, Н. Г. Смирнова, М.В. Агафонова // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2014. – № 2 (43). – С. 80–93.

18. *Матвиенко О. В.* Исследование структуры течения полимерно-битумного вяжущего, описываемого моделью Кросса, в трубе с внезапным расширением / О. В. Матвиенко, А. Е. Литвинова, Н. С. Фирсанова // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2022. – Т. 24, № 5. – С. 151–168.

19. *Матвиенко О. В.* Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе / О. В. Матвиенко // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 55. – С. 99–112.

20. *Патанкар С.* Численные методы решения задач тепломассообмена и динамики жидости / С. М. Патанкар. – Энергоатомиздат, 1983.

УДК 51.07

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ШТЕЙНЕРА НА ГРАНИЦАХ ПОДВИЖНЫХ СРЕД

Е. И. Саввина

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Решается задача нахождения точек Штейнера на подвижных границах жидкой и газовых сред. В качестве физического прототипа задачи выбрана тонкая плёнка жидкости, границы которой с воздухом образованы гибкой нитью конечной длины и включают в себя подвижные узлы — точки Штейнера. Доказана трехосевая симметричность конфигурации плёнки и представлена методика определения координат точек Штейнера. Приведён пример соответствующего числового расчёта. Показано совпадение полученного расчётного результата с результатами натурного эксперимента.
Ключевые слова: граничные явления, подвижные точки Штейнера, поверхностная энергия, граница подвижных сред, физический прототип математической задачи.

Введение

Задача Штейнера заключается в том, чтобы найти такую точку S на плоскости, которая находилась бы на минимальном суммарном расстоянии от заданных точек a, b, c [1–4]. Решение этой задачи может быть получено путём проведения физических аналогий, отражающих свойство систем стремиться к состоянию с минимальной потенциальной энергией [5, 6].

1. Определение параметров физического прототипа решаемой задачи

В настоящей работе в качестве такой аналогии рассмотрена тонкая плёнка жидкости, граница которой с воздухом образована гибкой нитью заданной длины, свободно передвигаемой относительно фиксированных точек опоры (осей скольжения) рис.1.

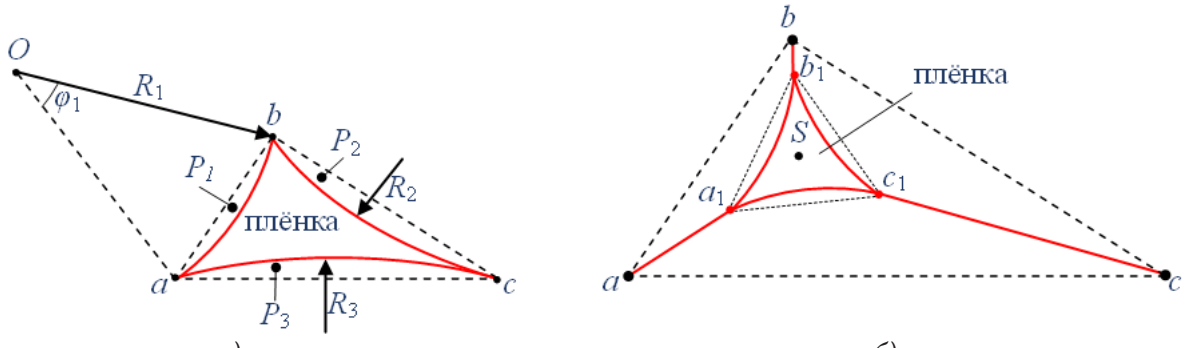


Рис. 1. Графическая иллюстрация задачи: а) образование границ без точек Штейнера; б) появление точек Штейнера a_1, b_1, c_1. Точки a, b, c — неподвижные оси

Поскольку плёнка стремится принять конфигурацию с наименьшей площадью (что соответствует минимуму поверхностной энергии), то при ограниченной длине D нити форма её границ определяется решением классической изопериметрической задачи — дугами окружностей с радиусами R_1, R_2, R_3 [7]. Покажем, что независимо от длины D нити и длин $\ell_a = [a, a_1]$, $\ell_b = [b, b_1]$, $\ell_c = [c, c_1]$ выполняется равенство $R_1 = R_2 = R_3$, то есть радиусы дуг, определяющие границы плёнки, равны.

Для этого сформулируем задачу поиска минимума площади плёнки. Так как конфигурация плёнки ограничена заданным треугольником abc со сторонами ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, из площади кото-

рого вычитаются площади P_1, P_2, P_3 сегментов, построенных на этих сторонах (см. рис. 1а), то минимуму площади плёнки соответствует максимум суммы P площадей этого сегмента, и функция цели решаемой задачи примет вид:

$$P\left(P_1, P_2, P_3\right) = \sum_{i=1}^{3} P_i\left(\cdot\right) \to \max, \tag{1}$$

где

$$P_i\left(\varphi_i, R_i\right) = \frac{\varphi_i R_i^2}{2} - \frac{R_i^2 \sin\varphi_i}{2}, \tag{2}$$

$$R_1\left(\varphi_1\right) = \frac{\ell_a}{2\cdot\sin\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right)};\ \ R_2\left(\varphi_2\right) = \frac{\ell_b}{2\cdot\sin\left(\dfrac{\varphi_2}{2}\right)};\ \ R_3\left(\varphi_3\right) = \frac{\ell_c}{2\cdot\sin\left(\dfrac{\varphi_3}{2}\right)}. \tag{3}$$

Функция ограничения на длину D нити:

$$G\left(\varphi_i\right) = D - \sum_{i=1}^{3} R_i\left(\varphi_i\right)\cdot\varphi_i\ = 0. \tag{4}$$

В результате получаем задачу математического программирования с ограничением равенством:

$$\begin{cases} P\left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\right) \to \max, \\ G\left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\right) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Для решения этой задачи сформируем функцию Лагранжа:

$$L\left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \lambda\right) = P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \lambda\cdot G(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \to \max, \tag{6}$$

и составим необходимое условие существования экстремума:

$$\nabla L\left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \lambda\right) = 0. \tag{7}$$

Решение системы (7) имеет вид:

$$\ell_a\left(\lambda, \varphi_1\right) = \frac{2\lambda + 2\lambda\left(2\cdot\sin\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right)^2 - 1\right) - \lambda\varphi_1\sin\left(\varphi_1\right)}{2\cdot\sin\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right) + \varphi_1\left(2\cdot\sin\left(\dfrac{\varphi_1}{4}\right)^2 - 1\right)}, \tag{8}$$

$\ell_b(\lambda, \varphi_2)$ и $\ell_c(\lambda, \varphi_3)$ отличаются от (8) величинами φ_2 и φ_3 соответственно.

Проверим ограничения

$$G\left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\right) = 0. \tag{9}$$

Подстановка ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c в (4) даёт равенство:

$$\lambda\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3\right) = D, \tag{10}$$

из которого следует, что для любого D найдётся такое значение λ, при котором поставленная задача (5) имеет решение.

После подстановки ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c в (3) получим:

$$R_1\left(\varphi_1\right) = \lambda;\ \ R_2\left(\varphi_2\right) = \lambda;\ \ R_3\left(\varphi_3\right) = \lambda. \tag{11}$$

Таким образом, $R_1 = R_2 = R_3$, то есть радиусы дуг, определяющие границы плёнки, равны.

2. Определение точек Штейнера

С увеличением длины D нити (рис. 1б) часть границ, примыкающих к осям скольжения, смыкается, и образуются новые точки a_1, b_1, c_1 — точки расхождения смежных ветвей гра-

ниц, называемые точками Штейнера, при этом конфигурация плёнки принимает вид равносторонней фигуры с границами, образованными дугами окружностей равного радиуса.

Из геометрических соображений следует, что если увеличивать длину D нити, то фигура a_1, b_1, c_1 будет стремиться к точке S с нулевой потенциальной энергией системы. Точка S является общей точкой Штейнера системы a, b, c из которой пары вершин a,b; b,c и c,a будут видны под углом 120 град.

Поставим задачу.

Для заданной системы неподвижных точек a, b, c и длины D нити найти:

расположение точек Штейнера a_1, b_1, c_1;

расположение общей точки S Штейнера всей системы.

Для решения этой задачи воспользуемся расчётной схемой, показанной на рис. 2.

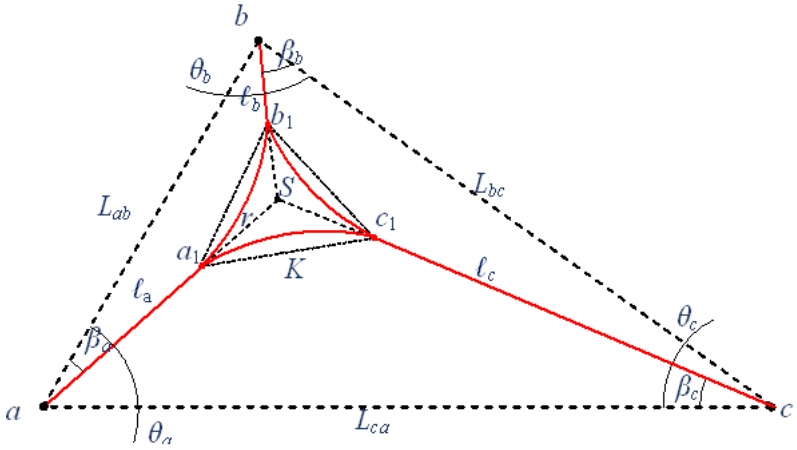


Рис. 2. Расчётная схема решаемой задачи

В представленной расчётной схеме известны: длины L_{ab}, L_{bc}, L_{ca} сторон треугольника abc и его углы θ_a, θ_b, θ_c при вершинах a, b, c соответственно.

Требуется определить:

длины отрезков $\ell_a = [a, a_1]$, $\ell_b = [b, b_1]$, $\ell_c = [c, c_1]$;

длины хорд K;

углы β_a, β_b, β_c.

Для вычисления указанных семи неизвестных составим систему из семи уравнений:

Одно уравнение, определяющее длину D нити:

$$D = 2 \cdot \ell_a + 2 \cdot \ell_b + 2 \cdot \ell_c + 3 \cdot K \cdot \frac{\pi}{3}. \tag{12}$$

Шесть уравнений, связывающие искомые с неизвестными через тригонометрические отношения в треугольниках abS, bcS, caS:

$$L_{ab}{}^2 = (\ell_a + r)^2 + (\ell_b + r)^2 - 2 \cdot (\ell_a + r) \cdot (\ell_b + r) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right); \tag{13}$$

$$L_{bc}{}^2 = (\ell_b + r)^2 + (\ell_c + r)^2 - 2 \cdot (\ell_b + r) \cdot (\ell_c + r) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right); \tag{14}$$

$$L_{ca}{}^2 = (\ell_c + r)^2 + (\ell_a + r)^2 - 2 \cdot (\ell_c + r) \cdot (\ell_a + r) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right); \tag{15}$$

$$(\ell_b + r)^2 = (\ell_a + r)^2 + L_{ab}{}^2 - 2 \cdot (\ell_a + r) \cdot L_{ab} \cdot \cos(\beta_a); \tag{16}$$

$$(\ell_c + r)^2 = (\ell_b + r)^2 + L_{bc}{}^2 - 2 \cdot (\ell_b + r) \cdot L_{bc} \cdot \cos(\beta_b); \tag{17}$$

$$\left(\ell_a + r\right)^2 = \left(\ell_c + r\right)^2 + {L_{ca}}^2 - 2\cdot\left(\ell_c + r\right)\cdot L_{ca}\cdot\cos\left(\beta_c\right), \tag{18}$$

где

$$r = \frac{K}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right). \tag{19}$$

Для числового примера с исходными данными $L_{ab} = 120$ мм, $L_{bc} = 160$ мм, $L_{ca} = 200$ мм, $\theta_b = pi/2$, $D = 525$ мм получено решение:

$\ell_a = 63{,}8$ мм, $\ell_b = 10{,}6$ мм, $\ell_c = 105{,}2$ мм, $K = 52{,}7$ мм, $\beta_a = 17{,}2$ град, $\beta_b = 47{,}2$ град, $\beta_c = 24{,}1$ град.

Полученное решение совпадает с результатом физического эксперимента, показанном на рис. 3.

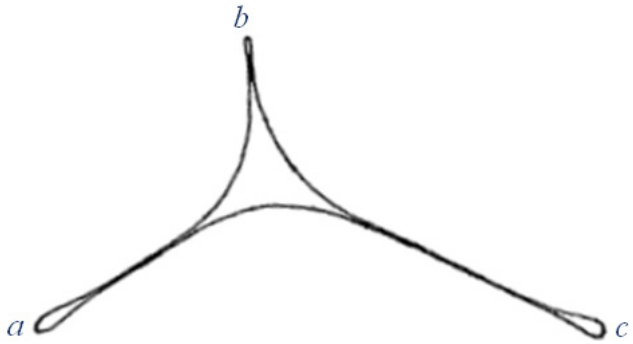


Рис. 3. Фотография конфигурации системы в натурном эксперименте

Отметим, что предлагаемый метод определения точек Штейнера является полностью аналитическим и может быть применён для систем с большим количеством точек.

Заключение

Результаты представленного в работе исследования показали, что ограниченная по длине свободная граница различных сред на плоскости имеет многоосевую симметричную конфигурацию, включающую в себя подвижные точки Штейнера, расположение которых обеспечивает наименьшее значение потенциальной энергии среды с замкнутой областью. Последнее обстоятельство позволяет определить параметры этой конфигурации путём решения задачи Штейнера на основе физических аналогий.

Литература

1. *Карпунин Г. А.* Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера / Г. А. Карпунин // Матем. сб. – 2000. – Т. 191, № 2. – С. 64–90.

2. *Курант Р.* Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. – Москва : МЦНМО, 2019. – 564 с.

3. *Melzak Z. A.* On the problem of Steiner / Z. A. Melzak // Canadian Mathematical Bulletin. – 1961. – No. 4. – P. 143–148.

4. *Uteshev Alexei Yu.* Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem / Alexei Yu. Uteshev // The American Mathematical Monthly. – 2012. – No 121. – P. 318–331.

5. *Reddy J. N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells / J. N. Reddy. – Boca Raton : CRC Press, 2006. – P. 568

6. *Reddy J. N.* An Introduction to Continuum Mechanics with Applications / J. N. Reddy. – New York : Cambridge University Press, 2007. – P. 370.

7. *Протасов В. Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии / В. Ю. Протасов. – Москва : МЦНМО. – 56 с.

УДК 534.26

ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЗВУКА

С. А. Скобельцын, М. В. Окороков

Тульский государственный университет

Аннотация. На основе оптической теоремы разработан интегральный энергетический критерий, предназначенный для оценки точности решения дифракционных задач. В качестве энергетического показателя, баланс которого необходимо проверить согласно данному критерию, предложено использовать средний поток энергии звуковой волны. Применение энергетического критерия продемонстрировано на примере решения задачи о рассеянии плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере. Выполнение энергетического баланса исследовано для различных значений волнового размера сферы и радиуса сферической поверхности, окружающей тело. Показано, что в случае ошибки при расчете одного из искомых коэффициентов использование энергетического критерия позволяет это обнаружить.

Ключевые слова: дифракция звука, энергетический критерий, плоская звуковая волна, абсолютно жесткая неподвижная сфера, идеальная жидкость, средний поток энергии, энергетический баланс, коэффициенты ряда, точность решения, комплексная ошибка.

Введение

В настоящее время результаты решения задач дифракции звука на телах, имеющих различную структуру и конфигурацию, востребованы для многих практических приложений. Они активно используются в дефектоскопии при разработке методов неразрушающего контроля, позволяющих проверить качество изделия без его демонтажа. Изучение явления дифракции играет важную роль в гидроакустике, поскольку способствует решению задач подводной локации. Без исследования рассеяния звуковых волн от тел различной структуры и конфигурации не обходится и разработка современных материалов с требуемыми звукоотражающими и звукопоглощающими характеристиками. Также результаты решения дифракционных задач активно применяются в геофизике, сейсмологии, шумоподавлении и судовой акустике.

Поскольку результаты исследования дифракции звука на различных телах имеют существенную ценность для исследовательской и инженерной практики, важной задачей является проверка их корректности и непротиворечивости. Многие реальные объекты имеют сложную форму, а также неоднородную и анизотропную структуру. Зачастую это приводит к значительному усложнению постановок задач рассеяния звука на этих телах, что, в свою очередь, обусловливает увеличение сложности их точного аналитического решения. В большинстве случаев оно имеет очень громоздкий вид, который серьезно затрудняет анализ полученных результатов. По этой причине поиск приближенных (численных) решений приобретает все большую актуальность. Вследствие активного использования численных решений крайне важной задачей является разработка средств контроля их точности и изучение влияния на нее геометрических и физических параметров постановки задачи, а также используемых для решения методов и алгоритмов.

Во многих классах дифракционных задач искомые акустические величины (например, рассеянные поля) удобно, а часто и необходимо, представить в виде разложений в ряд, содержащий бесконечное число слагаемых. По мнению авторов, на точность и правильность нахождения решения задач такого вида наиболее сильное влияние оказывают два фактора: количество удерживаемых членов ряда и ошибки в расчете коэффициентов ряда. Очевидно, что учет бес-

конечного количества членов ряда невозможен, поэтому для получения решения ограничиваются некоторым конечным числом членов, т.е. от точного аналитического решения переходят к приближенному решению. Естественно, возникает вопрос: сколько слагаемых необходимо оставить в сумме, чтобы обеспечить требуемую точность вычислений? В литературе встречаются различные подходы по определению количества удерживаемых членов ряда, применение которых зависит от направленности и специфики соответствующей дифракционной задачи.

Так, с этой целью в задачах дифракции звука на упругих телах наиболее часто употребляется следующее неравенство, указанное, например, в [1]:

$$n \geq 2[ka],$$

где n — учитываемое количество членов ряда; ka – волновой размер тела; [ ] — целая часть числа.

Е. А. Иванов в [2] для определения необходимого количества слагаемых ряда в задачах, содержащих бесконечные системы уравнений, решаемые методом редукции, предлагает следующий способ. Сначала нужно вычислить невязки между соответствующими членами искомых рядов, полученных при последовательных значениях порядка усечения, а затем, сравнив наибольшую из невязок и заданную наперед точность, сделать вывод о целесообразности продолжения расчетов.

В работе [3] автор приходит к выводу, что при проведении вычислений в дальней от источника звука зоне в бесконечном ряде, описывающем поле в слое с абсолютно отражающими границами, достаточно учитывать столько членов, сколько полуволн укладывается на толщине слоя.

Один из основных факторов, приводящих к тому, что решение дифракционной задачи будет найдено неверно, — это неправильный расчет коэффициентов искомых рядов. Авторам представляется, что наиболее универсальным критерием контроля правильности и точности решения задач дифракции звука на телах различной структуры и конфигурации является так называемый энергетический критерий, основанный на проверке выполнения одного из фундаментальных законов природы — закона сохранения энергии. Использование данного критерия предполагает исследование баланса различных энергетических характеристик падающей и рассеянной звуковых волн. В зависимости от степени расхождения рассчитанных показателей можно судить о правильности и точности решения дифракционной задачи.

В настоящее время известны подходы к анализу баланса энергетических характеристик падающей и рассеянной акустических волн при решении задач дифракции звука на объектах различной формы. В [4] исследован в ближнем поле баланс среднего потока мощности в области, содержащей цилиндрическое тело, и среднего потока мощности в области, не включающей цилиндр. В качестве интегрального критерия оценки точности решения задачи о прохождении звука через область сопряжения плоского и клиновидного волноводов в работе [5] использован закон сохранения энергии. В [6] получено выражение, характеризующее энергетический баланс в установившемся состоянии для одной из подсистем, на которые разбивается исходная структура при проведении статистического энергетического анализа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим применение энергетического критерия для проверки правильности и контроля точности решения задачи о рассеянии плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере радиуса a. Пусть падающая волна распространяется по направлению оси z, а тело находится в идеальной жидкости с плотностью ρ, скорость звука в которой c. Необходимо определить акустическое поле, рассеянное сферой.

Акустическое давление падающей волны в сферической системе координат r, θ, φ с началом в центре сферы определяется следующим образом:

$$p_i = p_0 e^{i(kr\cos\theta - \omega t)}, \tag{1}$$

где p_0 — амплитуда давления; k — волновое число вне тела; ω — круговая частота; t — время.

Записав уравнение Гельмгольца для давления рассеянной волны p_s в сферической системе координат, решив его методом разделения переменных и воспользовавшись граничным условием, заключающимся в равенстве нулю на поверхности сферы нормальной скорости частиц полного акустического поля, а также условием излучения на бесконечности $(\lim_{r\to\infty} p_s = 0)$, получим, что выражение для p_s будет иметь вид:

$$p_s = -p_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \cdot (2n+1) \cdot \frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)} \cdot h_n(kr) \cdot P_n(\cos\theta), \tag{2}$$

где $j_n'(x)$ — 1-я производная сферической функции Бесселя порядка n; $h_n(x)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода порядка n; $h_n'(x)$ — 1-я производная сферической функции Ханкеля первого рода порядка n; $P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

2. Применение энергетического критерия

Проверим правильность полученного выражения для p_s, а именно правильность нахождения коэффициентов

$$A_n = -p_0 i^n (2n+1) \frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)}.$$

Для этого воспользуемся разработанным интегральным энергетическим критерием, полученным на основе оптической теоремы [7] и заключающимся в проверке следующего равенства:

$$\langle W_s \rangle = \langle W_i \rangle, \tag{3}$$

где $\langle W_s \rangle$ — средний за период поток энергии в рассеянной волне; $\langle W_i \rangle = \frac{1}{2\omega\rho} \operatorname{Im} \int_S \left(p_s \frac{\partial p_i^*}{\partial r} + p_i \frac{\partial p_s^*}{\partial r} \right) dS$; S — сферическая поверхность произвольного радиуса, окружающая абсолютно жесткую сферу. Здесь и далее звездочка означает комплексно сопряженную величину.

Вычислим средний поток энергии рассеянной волны через поверхность S по следующей формуле:

$$\langle W_s \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S p_s V_{sn}^* dS,$$

где V_{sn} — нормальная к S составляющая колебательной скорости частиц в рассеянной волне.

Рассмотрим в качестве поверхности S сферу радиуса r_1. Значение r_1 можно выбрать произвольно, т. к. поток энергии сферической волны в отсутствии поглощения имеет одинаковое значение через сферу любого радиуса. Тогда получим:

$$\langle W_s \rangle = \frac{r_1^2}{2} \operatorname{Re} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} p_s V_{sn}^* \sin\theta \partial\theta \partial\varphi.$$

Так как

$$V_{sn}^* = \frac{-ip_0}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \cdot (2n+1) \cdot j_n'(ka) \cdot \frac{(h_n'(kr))^*}{(h_n'(ka))^*} \cdot P_n(\cos\theta),$$

то

$$\langle W_s \rangle = \frac{r_1^2}{2}\mathrm{Re}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ip_0^2}{\rho c}\sum_{n=0}^{\infty} i^n\cdot(2n+1)\cdot\frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)}\cdot h_n(kr_1)\cdot P_n(\cos\theta)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\cdot(2n+1)\cdot j_n'(ka)\cdot\frac{(h_n'(kr_1))^*}{(h_n'(ka))^*}\cdot P_n(\cos\theta)\sin\theta\partial\theta\partial\varphi.$$

Поменяем местами суммирование и интегрирование и воспользуемся свойством ортогональности полиномов Лежандра:

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} 0, & n\neq k \\ \dfrac{2}{2n+1}, & n=k. \end{cases}$$

Получим, что средний за период поток энергии в рассеянной волне равен:

$$\langle W_s \rangle = \frac{2r_1^2p_0^2\pi}{\rho c}\mathrm{Re}\left(i\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\cdot\frac{(j_n'(ka))^2}{|h_n'(ka)|^2}\cdot h_n(kr_1)\cdot(h_n'(kr_1))^*\right). \tag{4}$$

Продифференцировав по r выражения для p_i и p_s, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_i}{\partial r} &= p_0 ik\cos\theta e^{ikr\cos\theta} \\ \frac{\partial p_s}{\partial r} &= -p_0 k\sum_{n=0}^{\infty} i^n\cdot(2n+1)\cdot\frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)}\cdot h_n'(kr)\cdot P_n(\cos\theta).\end{aligned} \tag{5}$$

Применив к обоим выражениям (5) операцию комплексного сопряжения, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_i^*}{\partial r} &= -p_0 ik\cos\theta e^{-ikr\cos\theta} \\ \frac{\partial p_s^*}{\partial r} &= -p_0 k\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\cdot(2n+1)\cdot\frac{j_n'(ka)}{(h_n'(ka))^*}\cdot(h_n'(kr))^*\cdot P_n(\cos\theta).\end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (1), (2), (4) и (6) в (3), получим следующее выражение для проверки энергетического баланса в рассматриваемой задаче:

$$\frac{2r_1^2p_0^2\pi}{\rho c}\mathrm{Re}\left(i\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\cdot\frac{(j_n'(ka))^2}{|h_n'(ka)|^2}\cdot h_n(kr_1)\cdot(h_n'(kr_1))^*\right) =$$

$$= \frac{1}{2\omega\rho}\mathrm{Im}\left(2\pi r_1^2\left(\int_0^{\pi}\left(p_0^2 ik\cos\theta e^{-ikr_1\cos\theta}\sum_{n=0}^{\infty} i^n\cdot(2n+1)\cdot\frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)}\cdot h_n(kr_1)\cdot P_n(\cos\theta)\right)\sin\theta d\theta - \right.\right. \tag{7}$$

$$\left.\left. -\int_0^{\pi}\left(p_0^2 e^{ikr_1\cos\theta}k\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\cdot(2n+1)\cdot\frac{j_n'(ka)}{(h_n'(ka))^*}\cdot(h_n'(kr_1))^*\cdot P_n(\cos\theta)\right)\sin\theta d\theta\right)\right).$$

3. Численные исследования

Воспользовавшись (7), исследуем выполнение энергетического баланса для различных значений k, a и r_1. Полагалось, что сфера находится в воде ($\rho = 1000,\ c = 1500$), $p_0 = 1,\ n = 0..10$. Полученные результаты приведены в табл. 1.

Анализ результатов, представленных в табл. 1, позволяет сделать вывод, что энергетический критерий оценки точности решения для принятого числа учитываемых слагаемых в рядах выполняется с точностью до $7\cdot10^{-7}$ %. Высокая степень точности свидетельствует о том, что коэффициенты A_n определены верно, а значит, и решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере найдено корректно.

Таблица 1

Проверка энергетического баланса для различных значений k, a и r_1

Значения k и a	r_1	Относительная разница: $\dfrac{\left\|\langle W_s\rangle - \langle W_i\rangle\right\|}{\min\left(\langle W_s\rangle, \langle W_i\rangle\right)}\cdot 100\,\%$
$k=1,\ a=1$	2	$2.969\cdot 10^{-8}$ %
	100	$5.938\cdot 10^{-8}$ %
	1000	$2.969\cdot 10^{-8}$ %
$k=3,\ a=1$	2	0 %
	100	0 %
	1000	0 %
$k=1,\ a=3$	2	$6.16\cdot 10^{-7}$ %
	100	0 %
	1000	$5.133\cdot 10^{-8}$ %
$k=2,\ a=1.5$	2	$4.107\cdot 10^{-8}$ %
	100	0 %
	1000	0 %

Далее, «искусственно» введем ошибку в один из коэффициентов A_n и исследуем выполнение энергетического баланса в этом случае.

Пусть $k=3,\ a=1,\ r_1=2$, а $\rho,\ c,\ p_0,\ n$ имеют значения, определенные выше. Предположим, что коэффициент A_5 вычислен с комплексной ошибкой δ, модуль которой равен $\delta_0=\varepsilon\left|A_5\right|$, где ε — числовой коэффициент. Так как A_5 также представляет собой комплексную величину, то для исследования влияния знака действительной и мнимой частей δ, а также вида δ (отсутствие мнимой или действительной части) на значение A_5 рассмотрим следующие формы представления δ:

$$\delta_1=\delta_0,\ \delta_2=\delta_0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$\delta_3=\delta_0 i,\ \delta_4=-\delta_0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$$

$$\delta_5=-\delta_0,\ \delta_6=-\delta_0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$\delta_7=-\delta_0 i,\ \delta_8=\delta_0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Исследуем влияние введенной ошибки на энергетический баланс в рассмотренной выше задаче о рассеянии плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере. С этой целью вычислим $\left\langle W_s^j\right\rangle$ и $\left\langle W_i^j\right\rangle$ — значения $\left\langle W_s\right\rangle$ и $\left\langle W_i\right\rangle$ соответственно в случае, если коэффициент A_5 имеет вид $A_5+\delta_j,\ j=\overline{1,8}$.

Далее, при ошибочно вычисленном значении коэффициента A_5 рассчитаем относительную разницу между величинами энергетических показателей:

$$P(\varepsilon)=\frac{\dfrac{1}{8}\left|\sum\limits_{j=1}^{8}\left\langle W_s^j\right\rangle-\sum\limits_{j=1}^{8}\left\langle W_i^j\right\rangle\right|}{\min\left(\dfrac{1}{8}\sum\limits_{j=1}^{8}\left\langle W_s^j\right\rangle,\dfrac{1}{8}\sum\limits_{j=1}^{8}\left\langle W_i^j\right\rangle\right)}\cdot 100\,\%.$$

Представленная на рис. 1 зависимость P от ε позволяет проанализировать характер воздействия «искусственно» введенной ошибки на энергетический баланс в дифракционной задаче.

Воспользуемся методом наименьших квадратов для поиска многочлена, аппроксимирующего наблюдаемую связь между P и ε. Полученная функциональная зависимость, изображенная на рис. 2 пунктирной линией, будет иметь следующий вид:

$$\tilde{P}(\varepsilon) = 0.02023501582\varepsilon^2 - 4.89865043\cdot 10^{-6}\varepsilon + 1.433918977\cdot 10^{-7}. \quad (8)$$

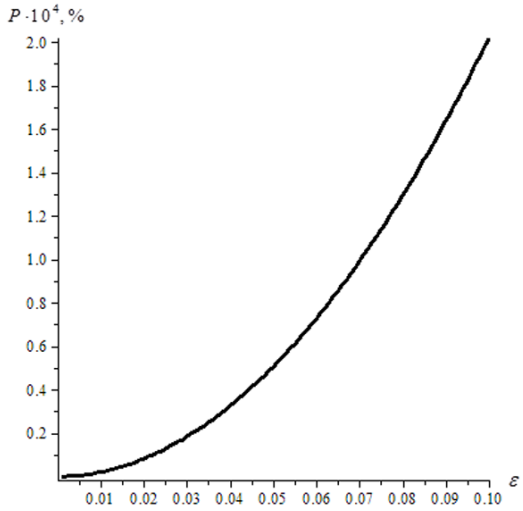


Рис. 1. Зависимость P от ε

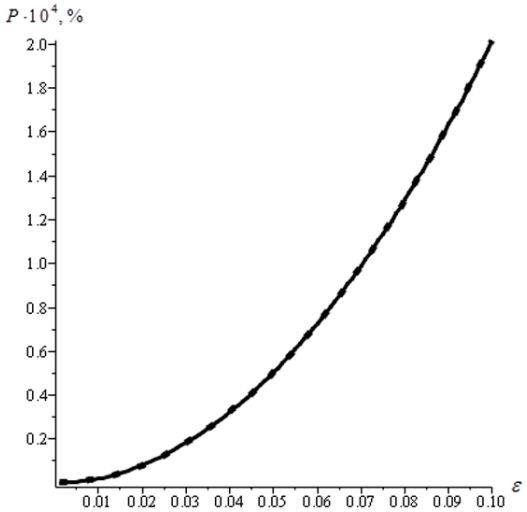


Рис. 2. Аппроксимация зависимости $P(\varepsilon)$ (сплошная линия) многочленом $\tilde{P}(\varepsilon)$ (пунктирная линия)

Для наглядности на рис. 3, 4 приведено взаимное расположение кривых $P(\varepsilon)$ и $\tilde{P}(\varepsilon)$ в случае соответственно малых и больших значений ε из рассматриваемого диапазона от 0.001 до 0.1.

Согласно F-критерию Фишера уравнение (8) адекватно описывает имеющуюся зависимость $P(\varepsilon)$. По T-критерию Стьюдента все коэффициенты многочлена $\tilde{P}(\varepsilon)$ значимы. Модель, описываемая формулой (8), подобрана качественно, о чем свидетельствует близкое к 1 значение коэффициента детерминации ($R^2 = 0.9999975798$).

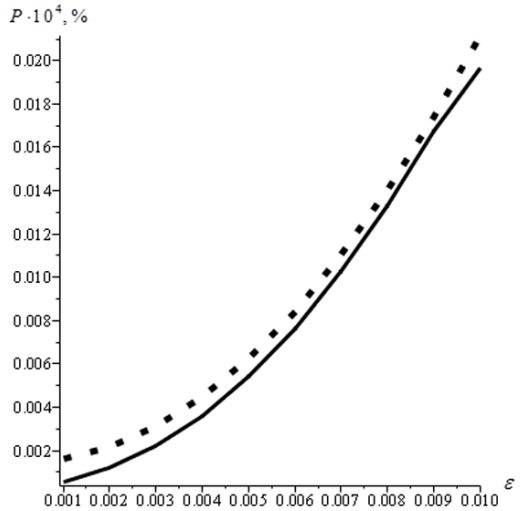


Рис. 3. Взаимное расположение кривых $P(\varepsilon)$ (сплошная линия) и $\tilde{P}(\varepsilon)$ (пунктирная линия) при $\varepsilon = 0.001...0.01$

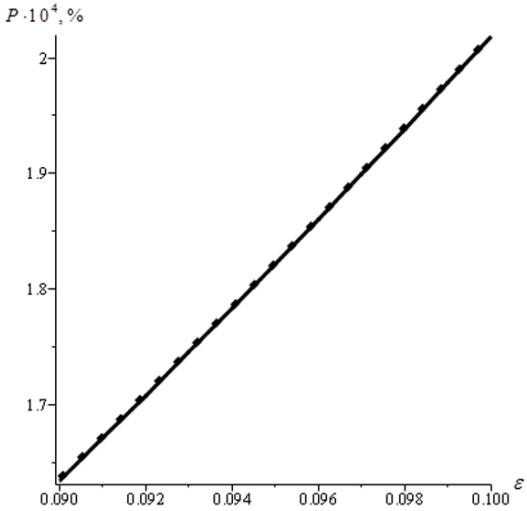


Рис. 4. Взаимное расположение кривых $P(\varepsilon)$ (сплошная линия) и $\tilde{P}(\varepsilon)$ (пунктирная линия) при $\varepsilon = 0.09...0.1$

Обобщив графические результаты, приведенные на рис. 1, можем сделать вывод: чем большее значение имеет ε, тем отчетливее наблюдается расхождение между величинами энергетических показателей, причем в рассматриваемом диапазоне изменения коэффициента ε зависимость $P(\varepsilon)$ может быть аппроксимирована с высокой степенью точности квадратичной функцией. Погрешность в выполнении энергетического баланса свидетельствует о наличии ошибки в решении задачи о дифракции звука на абсолютно жесткой неподвижной сфере.

Заключение

Исходя из вышеперечисленного, можно заключить, что выполнение энергетического баланса с высокой степенью точности является одним из критериев, подтверждающих правильность решения дифракционной задачи. В свою очередь, нарушение энергетического баланса отчетливо указывает на наличие ошибки в полученных результатах. Таким образом, разработанный энергетический критерий может быть использован для проверки правильности и контроля точности решения дифракционных задач.

Литература

1. *Хёнл Х.* Теория дифракции / Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. – Москва: Мир, 1964. – 428 с.
2. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е. А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.
3. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. – Москва : Наука, 1973. – 343 с.
4. *Папкова Ю. И.* Энергетические характеристики звукового поля в неоднородной морской среде с плавающим на поверхности цилиндрическим телом / Ю. И. Папкова, С. О. Папков, А. А. Ярошенко // Морской гидрофизический журнал. – 2006. – № 3. – С. 52–59.
5. *Мацыпура В. Т.* Прохождение звука через область сопряжения плоского и клиновидного волноводов / В. Т. Мацыпура // Акустический вестник. – 1999. – Т. 2. – № 1. – С. 31–41.
6. *Le Bot A.* Validity diagrams of statistical energy analysis / A. Le Bot, V. Cotoni // Journal of Sound and Vibration. – 2010. – V. 329. – № 2. – P. 221–235.
7. *Шендеров Е. Л.* Излучение и рассеяние звука / Е. Л. Шендеров. – Ленинград: Судостроение, 1989. – 304 с.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ВЫСШЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

UDK 519.63+517.977

A METHOD OF SOLVING DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

G. M. Abduolimova, S. T. Sharipova, G. J. Dolimova, R. G. Obidinova

Andijan State University

Annotation. In this research work, solutions to differential-difference equations with a delayed argument are obtained by the Laplace transform.
Keywords: differential-difference equation, Laplace transform, delay quantity, square matrix, first type discontinuity, finite number.

Let the following equation (1) be given:

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h) \quad t > 0 \tag{1}$$

here A, B n-order invariant square matrices [1].

Definition 1. Let $K(t)$ be a unique matrix function with following properties:

a) when $t > 0$, $K(t) = 0$;

b) if there are constant numbers $M > 0, S > 0$ and $\left|K(t)\right| < Me^{st}$;

c) if $K(t)$ is piecewise continuous, that is, if it has a finite number of discontinuities of the first type in a finite interval, then

$$L\left\{K(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-pt} K(t)dt$$

$$\int_0^\infty e^{-pt}\dot{K}(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt} AK(t)dt + \int_0^\infty e^{-pt} BK(t)dt \tag{2}$$

To solve equation (1), we solve equation (2):

$$\int_0^\infty e^{-pt} A\dot{K}(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt} AK(t)dt + \int_0^\infty e^{-pt} BK(t-h)dt$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} A\dot{K}(t)dt = \begin{bmatrix} u = e^{-pt} & dv = \dot{K}(t)dt \\ du = -pe^{-pt} & v = K(t) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-pt}K(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt}K(t)dt = -E + p\int_0^\infty e^{-pt}K(t)dt = -E + pL(K)(p)$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} AK(t)dt = A\int_0^\infty e^{-pt}K(t)dt = AL(K)(p)$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} BK(t-h)dt = \int_0^h e^{-pt} BK(t-h)dt + \int_h^\infty e^{-pt} BK(t-h)dt = \int_{-h}^0 e^{-p(s+h)} BK(s)ds + \int_0^\infty e^{-p(s+h)} BK(s)ds =$$

$$= e^{-ph}\int_{-h}^0 e^{-ps} BK(s)ds + e^{-ph}\int_0^\infty e^{-ps} BK(s)ds = e^{-ph} B\int_{-h}^0 e^{-ps}K(s)ds + e^{-ph} BL(K)(p)$$

$$e^{-ph} B\int_{-h}^0 e^{-ps}ds = Be^{-ph}\left(-\frac{1}{p}e^{-ps}\Big|_{-h}^0\right) = Be^{-ph}\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{ph}\right) = Be^{-ph}\frac{1}{p}\left(e^{ph} - 1\right)\cdot E$$

$$pL(K)(p) - E = AL(K)(p) + Be^{-ph}\cdot\left(L(K)(p) + \frac{1}{p}\left(e^{ph} - 1\right)\cdot E\right)$$

$$\left(pE - A - Be^{-ph}\right)L(K)(p) = E + Be^{-ph}\frac{1}{p}\left(e^{ph} - 1\right)\cdot E$$

$$L(K)(p) = \left(E + \frac{1}{p}\left(1 - e^{-ph}\right)B\right)\cdot\left(pE - A - Be^{-ph}\right)^{-1}$$

$$\left(E + \frac{1}{p}\left(1 - e^{-ph}\right)B\right) = \frac{1}{p}\left(Ep + B - e^{-ph}B\right) = \frac{1}{p}\left(Ep - e^{-ph}B\right) + \frac{1}{p}B + \frac{1}{p}A - \frac{1}{p}A =$$

$$= \frac{1}{p}\left(Ep - A - e^{-ph}B\right) + \frac{1}{p}B + \frac{1}{p}A = \frac{1}{p}\left[\left(Ep - A - e^{-ph}B\right) + \left(A + B\right)\right]$$

$$L(K)(p) = \frac{1}{p}\left[\left(Ep - A - e^{-ph}B\right) + \left(A + B\right)\right]\cdot\left(pE - A - Be^{-ph}\right)^{-1} = \frac{1}{p}E + \frac{1}{p}\left(pE - A - Be^{-ph}\right)^{-1}\left(A + B\right))$$

$$\left(pE - A - Be^{-ph}\right)^{-1} = \frac{1}{pE - A - Be^{-ph}} = \frac{1}{\left(pE - A\right)\left(E - Be^{-ph}\left(pE - A\right)^{-1}\right)} =$$

$$= \left(pE - A\right)^{-1}\left(E - Be^{-ph}\left(pE - A\right)^{-1}\right)^{-1}$$

$$L(K)(p) = \frac{1}{p}E + \frac{1}{p}\left(pE - A\right)^{-1}\left(E - Be^{-ph}\left(pE - A\right)^{-1}\right)^{-1}\left(A + B\right)$$

$$C = Be^{-ph}\left(pE - A\right)^{-1}$$

$$\left(E - C\right)^{-1} = \frac{1}{\left(E - C\right)} = E + C + C^2 + \ldots + C^n + \ldots$$

$$L(K)(p) = p^{-1}I + p^{-1}\left(pE - A\right)^{-1}\left[I + Be^{-ph}\left(pE - A\right)^{-1} +\right.$$

$$\left. + B^2e^{-2ph}\left(pE - A\right)^{-2} + B^3e^{-3ph}\left(pE - A\right)^{-3} + \ldots + B^ne^{-nph}\left(pE - A\right)^{-n} + \ldots\right]\cdot\left(A + B\right)$$

$$L(K)(p) = \frac{1}{p}E + \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}B^ne^{-nph}\left(pE - A\right)^{-(n+1)}\cdot\left(A + B\right)$$

$\frac{1}{p}E$ matrix function $E\ \eta(t)$ gives a prototype response, where $\eta(t)$ is a unit function $\eta(t) = 1$ in $t \geq 0,\ \eta(t) = 0$ in $t < 0$

$f_n(t) = \frac{e^{A(t-nh)}}{n!}(t - nh)^n\,\eta(t - nh)$ — to prototype

$F_n(p) = e^{-nph}\left(pI - A\right)^{-(n+1)}$

the reflection is correct.

$g(t) = E\ \eta(t)$ is prototype, reflection $G(p) = \frac{1}{p}E,$ then the function is based on the theorem

$\varphi_n(t) = \int_0^t f_n(s)\cdot g(t - s)ds$ — to

$$\phi_n(p) = F_n(p)\cdot G(p)\ \text{— reflection corresponds.}$$

That is why,

$$\phi_n(p) = e^{-nph}p^{-1}\left(pI - A\right)^{-(n+1)}B^n\cdot\left(A + B\right)$$

function prototype

$$\varphi_n(t) = \int_0^t e^{A(s-nh)}\frac{\left(s - nh\right)^n}{n!}\eta\left(s - nh\right)\eta\left(t - s\right)B^n\left(A + B\right)ds$$

will be.

In this case, using the properties of the functions $\eta(t-nh)$, $\eta(t-s)$ as $s-nh=\xi$

$$\varphi_n(t)=\int_0^{t-nh} e^{A\xi}\frac{\xi^n}{n!}B^n\left(A+B\right)d\xi$$

based on $e^{A\xi}$:

$$\varphi_n(t)=\int_0^{t-nh}\left[E+\frac{A\xi}{1!}+\frac{A^2\xi^2}{2!}+\ldots+\frac{A^n\xi^n}{n!}+\ldots\right]\cdot\frac{\xi^n}{n!}B^n\left(A+B\right)d\xi=$$

$$=\int_0^{t-nh}\left[E\cdot\xi^n+\frac{A\xi^{n+1}}{1!}+\frac{A^2\xi^{n+2}}{2!}+\ldots+\frac{A^n\xi^{2n}}{n!}+\ldots\right]\cdot\frac{B^n}{n!}\left(A+B\right)d\xi=$$

$$=\left[E\cdot\frac{\xi^{n+1}}{n+1}+\frac{A\xi^{n+2}}{(n+2)1!}+\frac{A^2\xi^{n+3}}{(n+3)2!}+\ldots+\frac{A^n\xi^{2n+1}}{(2n+1)n!}+\ldots\right]\cdot\frac{B^n}{n!}\left(A+B\right)\Bigg|_0^{t-nh}=$$

$$=\left[E\cdot\frac{(t-nh)^{n+1}}{n+1}+\frac{A(t-nh)^{n+2}}{(n+2)1!}+\frac{A^2(t-nh)^{n+3}}{(n+3)2!}+\ldots+\frac{A^n(t-nh)^{2n+1}}{(2n+1)n!}+\ldots\right]\cdot\frac{B^n}{n!}\left(A+B\right)$$

or

$$\varphi_n(t)=\frac{(t-nh)^{n+1}}{n!}\sum_{i=0}^{\infty}A^i\frac{(t-nh)^i}{(n+i+1)i!}B^n(A+B)$$

$$K(t)=E+\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-kh)^{k+1}}{k!}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}A^i\frac{(t-kh)^i}{(k+i+1)i!}B^k(A+B)$$

Conclusion

In this research work, solutions to differential-difference equations with a delayed argument are obtain by the Laplace transform.

References

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений Пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 421 с.

2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциального-разностные уравнения. – М. : Мир, 1967. – 254 с.

3. *Мамадалиев Н. А., Мустапокулов Х. Я., Абдуалимова Г. М.* Метод разрешающих функций для решения задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2023. – Т. 33, Вып. 1. – С. 103–118.

УДК 378

ОБ ИНДИВИДУАЛЬНОМ ПОДХОДЕ В ИЗУЧЕНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

О.В. Боницкая, Ю.В. Дудина

Тульский государственный университет

Аннотация. Рассматривается опыт разбиения групп студентов на обычную и с углубленным изучением фундаментальных предметов для формирования индивидуального подхода к обучающимся.
Ключевые слова: фундаментальные науки, математика, индивидуальный подход.

Успешное освоение фундаментальных дисциплин – это основа для дальнейшего приобретения профессиональных знаний, проведения фундаментальных исследований, необходимых для научно-технического развития страны и обеспечения технологического лидерства. В настоящее время по поручению президента РФ Владимира Владимировича Путина реализуется пилотный проект по повышению престижа преподавания фундаментальны дисциплин и поддержке преподавателей, снижению аудиторной нагрузки.

Ожидаемым эффектом от реализации этих мер является повышения качества преподавания фундаментальной дисциплины и уровня ее освоения студентами.

Рассмотрим подход к преподаванию фундаментальных наук на примере курса математики. Опыт показал, что разбиение студентов на группы и потоки согласно баллам по математике, набранным на ЕГЭ, на обычные и с углубленным изучением фундаментальных предметов в рамках одних и тех же специальностей положительно влияет на усвоение материала, повышает успеваемость, стимулирует обучающихся к приобретению более углубленных знаний. Такое разбиение дает возможность преподавателю в группах со способными студентами охватывать более широкий круг задач, более детально рассматривать аспекты предмета, включать в рассмотрение элементы олимпиадных задач, так как нет необходимости пояснять и вспоминать элементарные понятия. Это активизирует заинтересованность студентов предметом, продвигает олимпиадное движение, является залогом дальнейшей научной деятельности, дает возможность подготовить достойную смену для преподавателей.

Все это создает необходимость разработки дидактических материалов с набором усложненных, а также олимпиадных задач и методических указаний к проведению практических занятий в группах с углубленным изучением математики.

Применение набора качественных задач, которые при знании той или иной теоремы решаются просто, в несколько действий, ведет к лучшему, более глубокому изучению основных положений курса математики. Так как в группе с углубленным изучением фундаментальных предметов теорем и доказательств дается больше, то и набор задач должен быть более широким.

Но и в обычной группе не стоит пренебрегать данной областью задач, учитывая предоставляемый на лекциях материал, включать их в тесты текущего и промежуточного контроля.

При этом не надо считать, что обычная группа – это недоучки. К такой группе нужно применять другие методы обучения: более подробные методические указания, объяснения с упором на практику, использующие большое количество примеров. Для обычных групп лекции должны быть представлены с упором на визуальное представление, с большим использованием графиков, рисунков и структурированных таблиц, с подробным разбором типовых задач.

Использование видеоконтента в образовательном процессе является не новым, но активно развивающимся методом обучения, позволяющим наглядно визуализировать информацию. У современной молодежи сформировался особый подход к восприятию информации, выражающийся в предпочтении кратких, ёмких и насыщенных форматов «быстрого» контента, та-

ких как видеоролики, мемы и аудио фрагменты. Молодые люди быстро переключаются между различными информационными фрагментами, акцентируя внимание на ключевых моментах и игнорируя менее значимые детали [1]. В связи с этим считаем, что разработка видео-лекций не совсем целесообразна, так как большинство современных студентов имеют клиповое мышление, им трудно долго удерживать внимание на видео-лекции, длящейся порядка полутора часов. К тому же предполагается, видеоконтент используется студентами для самостоятельного восполнения пробелов в знаниях. Поэтому авторами было принято решение по созданию коротких видео длительностью 10–15 минут с разборами типовых задач по различным темам математики, например (https://vk.cc/cFdKLz). Уже записанные видеоуроки получили хорошие отзывы студентов. Всегда можно остановить и пересмотреть непонятный момент, прорешать пример вместе с видео.

Также для лучшего понимания предмета нужны лабораторные работы, которые объединяют знания разделов математики, визуализацию изучаемых в рамках курса объектов с применением цифровых математических пакетов [2–5]. При формировании заданий должны учитываться уровни подготовки групп. Применение цифровых технологий приучает студентов широко использовать их в дальнейших научных изысканиях или в профессиональной деятельности.

Таким образом, целостность курса математики для всех видов групп сохраняется, компетенции приобретаются студентами одни и те же, но для более сильной группы материал рассматривается более структурированно, детально.

При этом студенты группы с углубленным изучением всегда имеют возможность перевестись в обычную группу своего направления, если не справляются с нагрузкой. Но и обратный переход осуществим при желании студента.

Разделяя студентов по уровню знаний, учитывая их пожелания, осуществляется индивидуальный подход к обучаемым, с помощью которого можно улучшить подготовку как специалистов в своей профессиональной деятельности для производств, так и научных работников. Сосредоточиться одним студентам на приобретении практических знаний и стандартных умений, а другим накопить багаж знаний для научных прорывов.

Литература

1. *Целищева З. А.* Феномен клипового мышления современной молодежи: проблемы и перспективы / З. А. Целищева, А. С. Ступина // Актуальные вопросы гуманитарных и социальных наук: от теории к практике: Материалы II Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Чебоксары, 24 сентября 2024 года. – Чебоксары : ООО «Издательский дом «Среда», 2024. – С. 70-72. – EDN ABINHT.

2. Внедрение цифровых технологий в образовательный процесс при изучении теории вероятностей и математической статистики / Л. А. Белая, О. В. Боницкая, Ю. В. Дудина, О. В. Инченко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 года / Воронежский государственный университет. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2023. – С. 1282–1285. – EDN EMJNBQ.

3. Применение цифровых технологий при изучении аналитической геометрии / Л. А. Белая, О. В. Боницкая, Ю. В. Дудина, О. В. Инченко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 года / Воронежский государственный университет. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2023. – С. 1286-1290. – EDN FWPUAM.

4. *Боницкая О. В.* Использование библиотек Python при изучении теории вероятностей и математической статистики / О. В. Боницкая, Ю. В. Дудина // Преподавание математики в выс-

шей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : Материалы Международного научно-практического семинара, Могилев, 22 февраля 2024 года. – Могилев: Белорусско-Российский университет, 2024. – С. 15-18. – EDN ZDADMY.

5. *Кузнецова В. А.* Применение математических пакетов для вычисления определенных интегралов / В. А. Кузнецова, О. В. Боницкая, О. В. Инченко // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : Материалы Международного научно-практического семинара, Могилев, 22 февраля 2024 года. – Могилев: Белорусско-Российский университет, 2024. – С. 47-49. – EDN MGJVPW.

УДК 377, 377.6

МАСТЕР-КЛАССЫ НА БАЗЕ ВУЗА КАК ЭЛЕМЕНТ ДОЛГОСРОЧНОЙ ПРОФОРИЕНТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Т. В. Ермакова

Калининградский государственный технический университет

Аннотация. Статья посвящена проблеме ранней профориентационной работы вуза с учащимися средних учебных заведений, с долгосрочной перспективой поступления в вуз на профильные направления подготовки. Рассмотрен один из возможных форматов работы: организация на базе вуза регулярных мастер-классов по дисциплинам, изучаемым на различных направлениях подготовки. Приведен пример организации математического мастер-класса «Цифровой рейд» для учащихся 7–8 классов в техническом вузе.
Ключевые слова: профориентационная работа, мастер-класс, профильные направления подготовки, технический вуз, точные науки, IT-технологии.

Введение

В современном обществе все большую роль играет умение каждой отдельной личности на как можно более раннем жизненном этапе выстроить собственную успешную «траекторию жизни», которая будет определять его положение в социальной структуре этого общества. И здесь на первый план, конечно, выступает осознанный, обоснованный выбор будущей области профессиональной деятельности, которая будет приносить как необходимые средства существования, так и давать возможности максимальной реализации личностного потенциала.

В настоящее время широко развиваются различные способы массового «просвещения» по основам профессиональной деятельности в различных областях для обучающихся практических всех возрастных категорий. Так, в Калининградской области на базе ведущих вузов действует долгосрочная программа организации профильных классов. Например, для создания лучших условий получения технического образования в 2022–23 учебных годах, под эгидой вузов-партнеров БФУ им. Иммануила Канта и Калининградского государственного технического университета (КГТУ), а также Прибалтийского судостроительного техникума в школах №№ 31, 39 и Калининградском морском лицее созданы новые инженерные классы. Кроме того, активно работают в сфере поддержки раннего профессионального самоопределения ведущие центры дополнительного образования — Кванториум, Центр развития одаренных детей, IT-куб.

И тем не менее, не теряют своей актуальности традиционные формы работы с будущими инженерами, программистами, ветеринарами, агрономами и т. д. — приобщение к различным профессиям непосредственно в стенах учебных заведений. В этой связи следует понимать, что проведение традиционных мероприятий формата «Открытых дверей», с ориентацией только на абитуриентов и их родителей, является очень узконаправленным и, как следствие, малорезультативным. Фактически к 10–11 классам существенная часть будущих, так называемых «перспективных» (т. е. мотивированных в получении определенной профессии), студентов уже определилась как с выбором направления своей профессиональной деятельности, так и с вузами (колледжами). Поэтому особую важность приобретает более широкий охват целевой аудитории, с вовлечением учащихся невыпускных классов, причем обязательно на регулярной основе.

1. Направления и возможности для активизации профориентационной работы на базе технического вуза

Залогом успеха в любой деятельности, как известно, является четко продуманный план, в котором каждый пункт является органично встроенным элементом общего целого и при этом имеет свою конкретную цель и ожидаемые результаты. В нашем случае необходимо расширить целевую аудиторию профориентационной работы технического вуза, с общей целью повышения у будущих абитуриентов как качества образования по профильным дисциплинам, так и общей мотивации в приобретении именно технических профессий. Здесь мы рассмотрим данную проблему, и возможные пути ее решения, на базе Института цифровых технологий (ИЦТ), который является подразделением КГТУ.

Можно выделить следующие ***ключевые пункты*** профориентационной работы:

1. Создание первичной заинтересованности/мотивации аудитории.

2. Закрепление интереса к предлагаемым в институте сферам профессиональной деятельности.

3. Формирование/углубление знаний (в том числе и первичных профессиональных), необходимых для последующего успешного обучения в институте.

4. Рейтинг результатов.

Любое мероприятие, которое проводится в поддержку профессионального самоопределения обучающихся, может включать как все эти пункты, так и какую-либо их часть.

Прежде, чем перейти к рассмотрению конкретных примеров работы с будущими абитуриентами, стоит остановиться на таком существенном вопросе, как учет итоговых результатов (пункт 4-й). И здесь представляется целесообразным разработать общую модель учета результатов значимой для института деятельности в рамках различных проектов, не включающих непосредственную учебную работу (оцениваемую другими категориями). Так, автором предлагается создание на базе ИЦТ своего рода «Цифрового клуба», участниками которого могут быть как учащиеся средних учебных заведений, так и студенты вуза/колледжа, а также научно-педагогические работники КГТУ. Соответственно, предполагается три уровня участия. Чтобы стать участником, нужно будет пройти регистрацию по специальной форме и получить виртуальную карту одного из трех уровней: «Школьная», «Студенческая», «Преподавательская». Участие в определенном перечне мероприятий, проводимых ИЦТ (или значимых для ИЦТ) будет приносить участникам определенные баллы. Способы «конвертации» баллов, накапливаемых на карте участника, определяются отдельным Положением. Такая карта участника, например, для школьника может стать отправной точкой выбора будущего направления профессиональной подготовки именно в ИЦТ.

Теперь рассмотрим некоторые конкретные (но не очевидные) возможности, которые предоставляет такое классическое для любого вуза мероприятие, как «День открытых дверей». Одной из популярных форм его проведения является организация небольших (10–15 мин.) стендовых докладов представителей выпускающих кафедр вуза/института, с краткими ответами на вопросы и раздачей информационных листовок. И если «День открытых дверей» предполагает свободное посещение без указания возрастной категории для предполагаемой аудитории, то организованное таким образом мероприятие вряд ли привлечет кого-либо, кроме тех единиц 11-классников, для которых нет принципиальной разницы в выборе будущей профессии. Чтобы обеспечить институт целевой аудиторией на долгосрочную перспективу, необходимо пересмотреть формат работы, с ориентированием на обучающихся уже с 7–8 классов. Здесь, разумеется, важную роль играют временные рамки мероприятия. Например, если в распоряжении организаторов имеется 1 час (и более), то можно организовать флешмоб по тематике ИЦТ, например, математический (цифровой). Для этого можно использовать уже имеющиеся разработки, такие, как ежегодный флешмоб «Mathcat» («Математический кот»)

[1], который проводится на базе (автор проекта) ЧОУ «Лицей-интернат естественных наук» (г. Саратов) и стал уже мероприятием международного масштаба, с охватом более чем 90 регионов РФ и мира. Предлагаемая организаторами возможность участия в флешмобе «Mathcat» как площадки для его проведения также может принести неплохие результаты в первичной заинтересованности целевой аудитории. Однако, если в распоряжении организаторов не более получаса, такой формат работы, конечно, не подходит. Следует использовать более гибкие по временным рамкам варианты, одним из которых может быть мастер-класс. Мастер-класс является достаточно универсальным форматом работы с любой аудиторией, поэтому в его рамках можно предусмотреть как интересы школьников, так и их родителей. Следует подчеркнуть, что мировоззрение родителей, имеющих значительное влияние на формирование взглядов и потребностей своих детей, также заслуживает большого внимания при организации подобных мероприятий.

Итак, подытоживая все вышеизложенное, рассмотрим один из примеров организации мастер-класса, который проводится на базе ИЦТ в рамках перспективной профориентационной работы с младшими школьниками.

2. Пример разработки мастер-класса для учащихся 7–8 классов «Цифровой рейд»

Структура мастер-класса состоит из (3–4)-х блоков, каждый из которых имеет следующую структуру: краткое введение в вопрос, несколько заданий с решениями и, наконец, небольшое (на несколько минут) задание для самостоятельного выполнения. При выборе заданий соблюдаются следующие общие правила: задания не должны требовать каких-то серьезных (на уровне «хорошо» или «отлично») знаний в области математики (т. к. это не олимпиада); задания не должны быть похожи на школьный учебник (т. к. это не урок математики); задания должны вызывать познавательный интерес у любого слушателя (например, различные математические парадоксы/софизмы).

Первый блок мастер-класса

Тема первого блока мастер-класса, который должен «завладеть» вниманием слушателей, выбирается максимально «завлекательной». Например, экстрасенсорные способности всегда вызывают живой интерес у аудитории. Поэтому первым блоком может быть ***«Математик-экстрасенс»***: участникам предлагается выполнить определенную последовательность действий, всегда приводящую к одному и тому же результату, вне зависимости от исходного условия [2].

Задание № 1.

Задумайте любое натуральное число; умножьте его на 10 и прибавьте к результату 15; разделите получившееся число на 5 и вычтите 3; результат разделите на исходное задуманное число; у вас получилось число «2», не так ли? Нетрудно показать, что данная последовательность действий всегда приводит к результату «2», вне зависимости от задуманного числа.

Более сложный вариант — старинная загадка с числом «1089». Если записать любое натуральное трехзначное число с цифрами в порядке убывания (например, 752), затем вычесть из него число, записанное этими же цифрами в обратном порядке ($752 - 257 = 495$); далее к полученному результату нужно добавить число, записанное теми же цифрами в обратном порядке ($495 + 594 = 1089$). В итоге всегда получается число «1089».

Можно предложить участникам придумать свои подобные «магические» задания.

Второй блок мастер-класса

Одним из вариантов тематики второго блока мастер-класса являются простые логические задачи: ***«Эта удивительная логика»***. Здесь можно также разобрать несложные математические парадоксы (или софизмы) [2, 3]. Примеры заданий:

Задание № 1.

Один человек сказал: у меня нет ни брата, ни сестры, но отец этого человека — мой отец. О каком человеке он говорил? (Ответ: он говорил о себе).

Задание № 2.

Вычислите произведение всех данных чисел: $12, 14, 5, 13, 21, 0, 11, 18, 27, 32$

(Ответ: 0, так как среди перемножаемых чисел есть 0).

Задание №3 («Найти ошибку»).

В верном равенстве $48+40-88=54+45-99$ разложим обе части на множители и разделим на общий множитель обеих частей:

$8\cdot(6+5-11)=9\cdot(6+5-11)\Rightarrow$ *делим на* $(6+5-11)\Rightarrow 8=9$?

Где же ошибка? (Ответ: деление на ноль: $6+5-11=0$).

Третий блок мастер-класса

Третий блок можно считать своего рода апогеем всего мастер-класса и предполагает тематику, в которой разумно сочетаются и сложность, и увлекательность. Таковой могут быть, например, шифры: ***«Секретное послание»***. Здесь вводной частью может быть краткий экскурс в общую историю тайнописи, с примерами старинных вариантов простых шифров: написание слова не слева направо, а справа налево, написание слов в зеркальном отражении. Можно упомянуть и литературных героев. Так, в известной детской повести А. Рыбакова «Кортик» главные герои должны были расшифровать послание, написанное литореей.

Задание № 1. Простая литорея, или «тарабарская грамота», представляет собой простой шифр замены, применявшийся еще в Древней Руси, поэтому можно предложить участникам мастер-класса либо зашифровать послание по простой литорее, либо прочитать зашифрованное таким образом послание.

Другим вариантом задания может быть составление участниками собственных шифров и последующий обмен «тайными посланиями».

Четвертый блок мастер-класса

Четвертый блок мастер-класса заключительный, поэтому по большей части это подведение итогов: ***«Цифры+логика =?»***. Здесь основная часть — обратная связь с участниками мастер-класса. Это могут быть как устные вопросы, высказывания и пожелания, так и различные варианты короткого анкетирования. Здесь также можно представить как задания посложнее для самостоятельного решения (домашнее задание), так и несложные задачи с готовыми решениями, которые участники мастер-класса могли бы предложить выполнить своим друзьям или родственникам.

Итог

Итак, мы рассмотрели пример разработки мастер-класса математической направленности для учащихся невыпускных классов в рамках долгосрочной профориентационной работы, с перспективой расширения и повышения качества базовой подготовки будущей базы абитуриентов на профильные направления подготовки Института цифровых технологий КГТУ. Непосредственной целью данного мастер-класса является развитие интереса к математике, и, как следствие, стремления к углублению и расширению своих математических знаний. В дальнейшем это будет способствовать приобретению необходимой подготовки как для успешной сдачи ЕГЭ по профильной математике, так и для последующего освоения уже профильных для ИЦТ дисциплин, подавляющее большинство из которых имеют своей базой именно математику.

Опыт организации подобных мастер-классов на базе ИЦТ показал их эффективность, как для первичного вовлечения младших школьников, так и для формирования устойчивого интереса к образовательным программам института.

Заключение

В настоящей работе затрагивается проблема долгосрочной профориентационной работы вуза, как один из очень важных аспектов организации целостного образовательного процесса «школа-вуз». Как известно, в настоящее время проблема профессионального самоопределения будущих абитуриентов стоит особенно остро, так как стремительное развитие новых сфер профессиональной деятельности предполагает именно перспективное планирование будущей профессии. С учетом активного роста IT-сферы, на первый план выступает ориентация молодежи на углубленное изучение точных наук, среди которых математика – несомненный лидер. В этой связи, раннее привлечение в вуз на регулярной основе школьников сравнительно младших (невыпускных) классов, путем разработки мероприятий, ориентированных именно на такую аудиторию, может в уже в ближайшем будущем дать отличный результат.

Литература

1. Математический флешмоб Mathcat: официальный сайт. – Саратов, 2013 – . URL:https://mathcat.info/ (дата обращения 25.11.24).

2. *Перельман Я. И.* Живая математика. Занимательные задачи для любознательных умов / Я. И. Перельман. – Москва : Центрполиграф, 2017 – 224 с.

3. *Брадис В. М.* Ошибки в математических рассуждениях / В. М. Брадис, В. Л. Минковский, Л. К. Харчева. – Москва : Учпедгиз, 1959. – 176 с.

УДК 372.862

КОМПЛЕКСНОЕ РАЗВИТИЕ ВУЗА В УСЛОВИЯХ НЕПРЕРЫВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

А. Д. Сотников, Г. Р. Катасонова

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Аннотация. Современный ВУЗ сочетает в себе образовательную деятельность, научные исследования и разработку передовых, наукоемких продуктов. Проектная организация работ и стартапы являются признанными формами организации образовательной деятельности, фокусирующимися на научно-технологических аспектах, в которых бизнес-моделирование, бизнес-проектирование, анализ затрат, рисков и инвестиций, оценка экономической эффективности являются неотъемлемой частью успешного стратегического проекта и студенческого стартапа. Эффективная организация и поддержка этого процесса с помощью институциональных ресурсов позволит ВУЗу оставаться конкурентоспособным и стать одной из ведущих платформ для развития инноваций.
Ключевые слова: ВУЗ, модель университета, трансфер технологий, стартап, проект, непрерывное образование.

Введение

В современном мире непрерывное образование, ориентированное на формирование широкого спектра компетенций, играет ключевую роль в развитии личности, приобретении профессиональных навыков, способствует адаптации обучающихся к быстро меняющемуся миру и требованиям современного рынка труда. Интеграция экономико-управленческих знаний в образовательный процесс, таких как изучение экономических моделей, бизнес-моделирование, основ цифрового менеджмента является одной из актуальных трендов высшего образования [1].

Для комплексного развития в условиях непрерывного образования ВУЗам необходимо осуществить поиск баланса между увеличением производительности образовательной системы (внедрение инновационных технологий, оптимизация учебных процессов, повышение квалификации преподавательского состава) и поддержанием высокого качества образования, интегрирования в учебный план базовых актуальных инструментов для критического мышления, анализа и принятия обоснованных решений, формированию мировоззрения, гражданской позиции и ключевых ценностей у студентов. Поэтому, при разработке образовательных программ необходимо акцентировать внимание не только на академических знаниях, но и на формировании критического мышления, способности к решению комплексных проблем и творческому подходу, который включает: 1) интеграцию междисциплинарных курсов; 2) развитие практических навыков через проекты и стажировки; 3) практику командной работы и сотрудничества с представителями реальной предметной области [2]. В конечном итоге, образовательная система университета должна стремиться к созданию обучающей среды, в которой каждый студент чувствует себя уверенным и мотивированным, способным развивать творческие качества, понимать разнообразие точек зрения, готовым внести свой вклад в общество в соответствии с личными и профессиональными ценностями.

Основная часть

Сегодня существует нескольких типов университетов, каждый из которых выполняет уникальную роль в системе высшего образования и профессионального развития обучающихся:

1. ВУЗы, ориентированные на подготовку специалистов для конкретных отраслей, которые предлагают образование, связанное с практической деятельностью и производственными потребностями. Примерами являются европейские технические школы (EPITECH, Fachhochschulen) с идеологией «дуального образования».

2. Корпоративные университеты создаются компаниями для обучения и повышения квалификации своих сотрудников, приоритетом которых является разработка специфических программ для развития важных профессиональных навыков (РЖД, Siemens). Данные образовательные учреждения вполне могут сотрудничать с классическими университетами для обмена опытом, знаниями и информационными ресурсами.

3. Интеграцию образования, бизнеса и инновационного развития предлагают предпринимательские университеты, ориентированные на подготовку будущих специалистов, обладающих не только профессиональными знаниями, но и навыками предпринимательского мышления, что является важным фактором для успешной адаптации в быстро меняющемся мире (рис. 1). Данный тип университета формирует экосистему предпринимательства внутри ВУЗа и вокруг него, создаёт условия для развития предпринимательской деятельности студентов и сотрудников, привлекает к сотрудничеству представителей бизнеса, инвесторов и других заинтересованных лиц. Кроме этого, даёт знания и развивает навыки, способствующие развитию предпринимательского мышления, несёт ценности предпринимательства, предпринимательского типа деятельности и образа мышления, формирует экосистему предпринимательства, включая кадры, форматы, инфраструктуру, потоки событий.

Основными характеристиками предпринимательского университета в условиях непрерывного образования является: 1) обеспечение студентов знаниями и навыками, способствующих развитию предпринимательского мышления; 2) внедрение в образовательные программы ценностей предпринимательства и инновационного подхода; 3) развитие у студентов способности к креативному мышлению и решению нестандартных задач; 4) формирование благоприятной среды для развития предпринимательства внутри и вокруг университета; 5) создание сетей партнерств с предприятиями, государственными учреждениями и другими организациями; 6) развитие инфраструктуры, способствующей предпринимательской деятельности: бизнес-инкубаторы, акселераторы и другие платформы для стартапов; 7) взаимодействие с бизнес-сообществом для передачи результатов научных исследований в практическую плоскость; 8) стимулирование инновационного предпринимательства через проведение совместных научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ; 9) поддержка запуска и развития инновационных проектов, основанных на научных разработках; 10) изменение управленческих и кадровых практик с акцентом на поддержку инновационных и предпринимательских инициатив; 11) учёт предпринимательского аспекта в разработке образовательных программ и стратегий научной деятельности; 12) активное привлечение преподавателей и экспертов из бизнес-среды для обогащения образовательного процесса; 13) активное вовлечение обучающихся в создание экономической и социальной ценностей в условиях трансформации экономики через предпринимательскую деятельность.

Предпринимательский университет играет важную роль в развитии экономики страны и региона, так как он готовит специалистов, которые способны создавать новые предприятия, внедрять инновации и развивать бизнес.

4. Сетевой университет — это модель, которая объединяет образовательные ресурсы нескольких образовательных учреждений в электронно-сетевом формате (рис. 2). Представлен как на национальном, так и на международном уровне, например, университет Шанхайской организации сотрудничества (УШОС), Сетевой университет Содружества независимых государств (СУ СНГ), Сетевой университет БРИКС (СУ БРИКС). Непосредственно к идее сетевого университета примыкают концепции «цифровой университет» и проекты, подобные инициативе Интуит, Лекториум, Coursera и многообразные альтернативные реализации «on-line образования».

Рис. 1. Предпринимательский университет

Рис. 2. Сетевой университет

Для достижения гармоничного сочетания научных исследований, образовательной деятельности и создания наукоемких разработок и продуктов в рамках сетевого университета, необходимо рассмотреть ряд преобразований и изменений, это: 1) интеграция образовательных ресурсов — создание платформы для обмена и совместного использования обучающимися материалов между различными учреждениями, что позволяет студентам и преподавателям получить доступ к более широкому спектру ресурсов и курсов; 2) развитие цифровой инфраструктуры — обеспечение устойчивой, быстрой интернет-связи, разработка удобных, функциональных платформ для онлайн-обучения и взаимодействия между студентами и преподавателями; 3) партнерство и кооперация — развитие устойчивых партнерств между университетами и научно-исследовательскими организациями как на национальном, так и на международном уровнях, что будет способствовать обмену опытом и совместному проведению научных исследований; 4) акцент на научных исследованиях — стимулирование разработок инновационных проектов, финансовая поддержка исследовательской деятельности и системы грантов; 5) кадровое развитие и обучение — непрерывное профессиональное развитие преподавателей и исследователей, в том числе через курсы повышения квалификации и обмен опытом с коллегами из других ВУЗов и с представителями сектора реального бизнеса; 6) гибкость и адаптивность образовательных программ под меняющиеся требования рынка труда и технологические достижения с возможностью изменения в учебных планах и методах преподавания; 7) поддержка междисциплинарных подходов — поощрение междисциплинарных исследований и проектов, что может привести к созданию новых знаний и технологий на

пересечении различных областей науки; 8) масштабируемость и доступность — стремление к повышению доступности образования, использование сетевой модели для привлечения студентов из разных регионов и стран.

Благодаря этим шагам, сетевые университеты смогут успешно конкурировать с традиционными вузами, предлагая более гибкие и адаптивные подходы к обучению и научной деятельности.

Очевидно, что «идеальный» университет должен гармонично сочетать научные исследования, образовательную деятельность и создание наукоемких разработок и продуктов (рис. 3), внедряя концепцию «стратегический проект», который будучи реализуем университетом в партнерстве с отраслевыми лидерами как локомотив «вытащит» университет на новый уровень реализации стратегически важных задач, окажет прорывное или, как минимум, серьезное положительное влияние на отрасль или регион.

Основными аспектами «идеализированного» университета являются: 1) развитие научных исследований — привлечение талантливых исследователей и создание площадок для взаимодействия с индустрией; 2) обновление образовательных программ; 3) создание инновационной инфраструктуры — развитие технопарков, бизнес-инкубаторов и центров трансфера технологий способствующих разработке новых продуктов и технологий; 4) сотрудничество с бизнесом и промышленностью — разработка совместных проектов с компаниями могут способствовать развитию новых технологий и повышению конкурентоспособности; 5) привлечение талантливых студентов и преподавателей за счет внедрения системы грантов и стипендий; 6) использование современных методов обучения, онлайн-курсов, дистанционного и проектного обучения [3]; 6) поддержка молодых учёных – создание возможностей для исследований, публикаций, грантов; 7) развитие международного сотрудничества с участием в международных проектах и обмена студентами [4].

Стратегический проект, поддерживаемый государственными структурами, гарантирует финансовое обеспечение университета и потенциал его дальнейшего развития. Результатом стратегического проекта может быть, как продукт — созданные в результате реализации проекта материальные ценности, оказанные услуги, так и эффект — ощутимые в социуме последствия деятельности (в том числе социально-значимые изменения), достигнутые в ходе реализации проекта. Деятельность в рамках модели стратегического проекта или предпринимательского университета, будь то крупный проект или студенческий стартап требуют решения общих задач. Для реализации такого проекта требуется тщательное планирование, эффективное управление и координация между университетами, партнерами из индустрии и государственными структурами, включая определение стратегических целей, распределение ресурсов, разработку практических решений и механизмов оценки результатов. Это поможет укрепить связи между образованием и экономикой региона, будет способствовать развитию исследований и инноваций, решит социально-экономические проблемы и поднимет общее качество жизни в сообществе.

Детализируя и уточняя программу работ, осуществляется подход к задаче организационно-экономического, маркетингового и юридического сопровождения деятельности как одной из обязательных задач наряду с задачами научно-технологическими и проектно-конструкторскими.

Наряду со стратегическим проектом, особую роль в современном предпринимательском университете играют стартапы — коммерческие проекты, основанные на некоторой идее или имеющемся заделе, требующие финансирования. Современные стартапы, выступающие важной частью предпринимательского университета, часто сталкиваются с высоким уровнем рисков, что подтверждается статистическими данными: лишь 1% таких проектов достигают успеха и обеспечивают возврат инвестиций. Основные причины неудач включают недостаточную экономическую проработку, отсутствие риск-анализа и надлежащее бизнес-оформление.

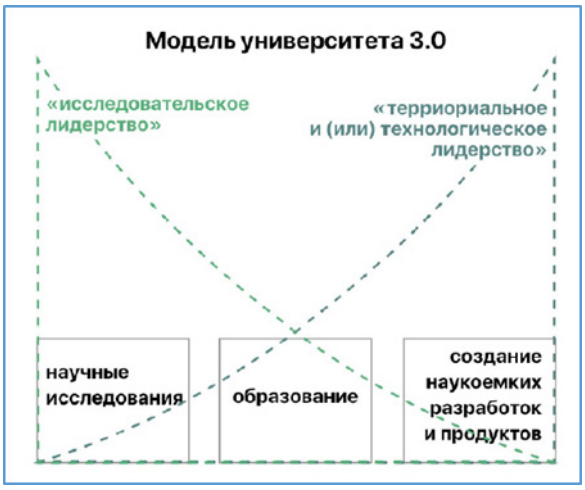


Рис. 3. Идеализированная модель университета 3.0

Создание университетского технологического стартапа в форме нового юридического лица для реализации стратегии выведения на рынок инновационной технологической продукции, в основе создания которой лежит внедрение результатов интеллектуальной деятельности как обучающихся, так и сотрудников университета, является результатом и конечной целью сложного «сквозного» процесса, состоящего из последовательно-параллельных подпроцессов.

Таким образом, для успешного продвижения стратегических проектов и стартапов необходимо обеспечить комплексное сопровождение, включающее все важные аспекты: от организационно-экономических до юридических и маркетинговых, наряду с тщательной проработкой бизнес-стратегий и технологических решений. Важно понимать, что стартапы требуют не только технического и научного подхода, но также глубокого внимания к организационно-экономическим, маркетинговым и юридическим вопросам. Это комплексная деятельность, где каждая составляющая играет ключевую роль в достижении успеха.

Задачи, которые стоит выделить в процессе детальной проработки стартапа, включают: 1) анализ рисков и стратегии минимизации, для чего необходимо проведение SWOT-анализа и оценку потенциальных угроз; 2) экономическую проработку и анализ рынка для понимания потребительских потребностей и конкурентной среды; 3) разработку и оформление бизнес-плана как основу для привлечения инвесторов и реализации проекта; 4) привлечение квалифицированных специалистов/экспертов в ключевых сферах, таких как финансы, маркетинг, техническая поддержка и юридическое сопровождение; 5) анализ опыта успешных стартапов во избежание типичных ошибок; 6) сотрудничество с венчурными фондами, частными инвесторами для расширения деловых связей; 7) мониторинг и корректировку стратегии для эффективной адаптации к изменяющейся бизнес-среде; 8) развитие навыков команды при подготовке проектов. Эти меры помогут укрепить позиции стартапов в рамках университетской среды и существенно повысить вероятность их успешного развития.

Создание университетского технологического стартапа — это сложный и многоэтапный процесс, включающий обозначение идеи стартапа, исследование рынка, разработку бизнес-плана, регистрацию, привлечение инвестиций, формирование команды, разработку и тестирование продукта, запуск маркетинговой кампании, организацию продаж и обслуживание клиентов. В целом, успех стартапа во многом зависит от ясного видения, гибкости в реагировании на изменения и способности команды реализовать намеченный план. Университетская среда, как правило, богата талантами и ресурсами, которые могут быть использованы для достижения успеха.

На рис. 4 показано взаимодействие между функциональными блоками (образование, наука, трансфер технологий и проектная деятельность), основными элементами которых являются разнообразные подпроцессы, которые реализуются через соответствующие подразделения и

координируются проректорами или руководителями. Для обеспечения эффективного управления между всеми этими процессами, ВУЗ должен полагаться на четкое распределение задач и обязанностей между различными функциональными блоками, что обеспечит реализацию образовательных программ и проектов, моделей учебных программ для задач оптимизации индивидуальных образовательных траекторий, что обеспечит высокое качество образования и адаптацию программ под современные требования рынка труда [5].

Необходимо поддерживать взаимодействие между университетскими разработками и индустрией, включая лицензирование и патентование инноваций и стимулировать предпринимательство среди студентов и сотрудников, предоставляя им ресурсы для разработки и продвижения собственных проектов. Партнерство с промышленными предприятиями обеспечит университету доступ к ресурсам, технологиям и возможность внедрения разработок в реальный сектор.

Создание специализированного центра, который будет обеспечивать поддержку и сопровождение стартапов, позволит усилить интеграцию бизнес-ориентированных методов и технологий в образовательный процесс. Такой центр станет катализатором для студенческих инициатив, позволяя им превращать свои идеи в коммерческие успешные проекты и будет играть ключевую роль не только в образовательной, но и в коммерческой деятельности университета, поддерживая как внутренние инициативы, так и внешние заказы.

Заключение

В СПбГУТ предполагается участие студентов экономических направлений (38.03.02, 38.03.05, 38.04.05) в подготовке и сопровождении технологических стартапов-проектов (документ, содержащий обоснование целесообразности создания нового хозяйственного общества для коммерциализации РИД) формируемыми для этих целей смешанными (межфакультетскими и разноуровневыми) командами студентов в процессе их обучения на модульной проектно-ориентированной образовательной программе «Академия стартапов», согласно которой, сформированные межфакультетские команды студентов подготавливают стартап-проекты. Важным направлением работы Центра является предоставление возможности студентам прохождения технологической и преддипломной практик на основе участия в работе по созданию стартапа с последующей защитой проекта в качестве диплома. Центр может также осуществлять профильную деятельность для сторонних организаций на коммерческих условиях по рыночным ценам, становясь источником прибыли для университета.

Для современного университета, претендующего на лидерские позиции в отрасли и использующего современные организационно-управленческие технологии в условиях непрерывного образования внимание не должно фокусироваться только на инженерно-технических компонентах развития. Экономические и бизнес-ориентированные компоненты существенным образом влияют на успешность результатов работы, особенно в проектных форматах, ориентированных на отраслевой и более широкий рынок продуктов и сервисов. Трансфер экономических и бизнес-ориентированных методов, технологий и решений должен стать обязательным элементом в деятельности университета, а его реализация поддерживаться функционированием соответствующего центра — лаборатории экономико-управленческих технологий поддержки научной, внедренческой инновационной деятельности – подразделения, обладающего необходимыми компетенциями на базе имеющихся ресурсов университета.

Концепция стратегического проекта является мощным инструментом для трансформации ВУЗов и их активного участия в решении актуальных задач общества и экономики. Комплексное развитие вуза в области стартапов и инноваций требует сосредоточения внимания на всех аспектах процесса — от первоначальной идеи и её проработки до практической реализации и коммерциализации.

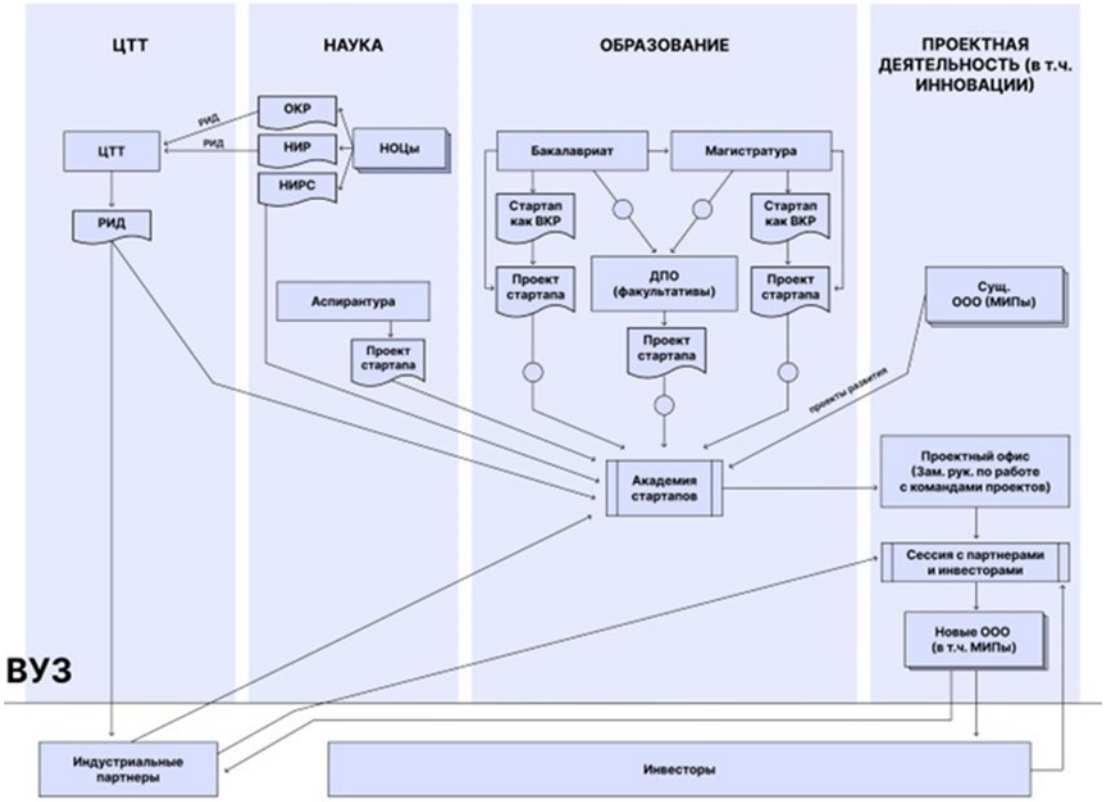


Рис. 4. Создание университетского технологического стартапа

Литература

1. *Боуэн У. Г.* Высшее образование в цифровую эпоху. – Издательство Высшая школа экономики Мин. науки, выс. школы и технич. политики РФ. – 2018. – 223 с.

2. *Катасонова Г. Р.* Проектная деятельность студентов медицинского вуза в условиях развития цифровых образовательных технологий / Г. Р. Катасонова, А. С. Шкрум // Конструктивные педагогические заметки. – 2021. – № 9-1 (15). – С. 144–164.

3. *Катасонова Г. Р.* Модель информационных процессов в виртуальных средах / Г. Р. Катасонова, Ю. С. Соломко, А. Д. Сотников, Е. В. Стригина // В сборнике: Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании (АПИНО 2022). Сборник научных трудов XI Международной научно-технической и научно-методической конференции. В 4-х томах. Под. редакцией А.В. Шестакова, сост. В. С. Елагин, Е. А. Аникевич. Санкт-Петербург, 2022. – С. 589–593.

4. *Катасонова Г. Р.* Организация коммуникаций между студентами и преподавателями в условиях нарастания цифровизации общественного пространства / Г. Р. Катасонова, А. С. Шкрум // В сборнике: Культура, образование и искусство: традиции и инновации. Сборник статей по материалам IV Всероссийской научно-практической конференции ученых-исследователей, специалистов, преподавателей вузов, колледжей, школ, учреждений дополнительного образования, руководителей образовательных учреждений, аспирантов, студентов научно-практической конференции, посвященной 110-летию нижегородского государственного педагогического университета имени Козьмы Минина. Нижний Новгород, 2021. – С. 140–145.

5. *Арзуманян Ю. В.* Модели учебных программ для задач оптимизации при конструировании индивидуальных образовательных траекторий / Ю. В. Арзуманян, М. Б. Вольфсон, А. А. Захаров, Г. Р. Катасонова, А. Д. Сотников // В сборнике: Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании. сборник научных статей: в 4х томах. Санкт-Петербург, 2021. – С. 330–335.

УДК 372.851

СОПРОВОЖДЕНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ПРОЕКТОВ ШКОЛЬНИКОВ

Е. В. Сухорукова

Балашовский институт (филиал) Саратовского государственного университета

Аннотация. В статье рассмотрена одна из форм организации проектной деятельности обучающихся в формате участия во Всероссийском конкурсе исследовательских работ, проводимым электронно-библиотечной системой «Библиошкола» и Издательским домом «Директ-Медиа». Описано сопровождение исследовательской деятельности школьников на различных этапах проекта. Показана работа организаторов, экспертов и команд при проведении исследований. Приведены примеры проектов по направлению «Математика, физика».

Ключевые слова: исследовательский проект, конкурс, организационное, методическое и экспертное сопровождение, сетевое взаимодействие,этапы проекта, продукт проекта, электронно-библиотечная система, математика, физика, защита результатов исследований.

Современное образование с каждым днем становится все более динамичным. Постоянно возрастают и требования, направленные на повышение качества образования. Одно из важных требований к результатам обучения это преобразование полученного нового знания для применения в проектной деятельности, что требует формирования проектного мышления школьников и практических навыков и умений, а так же наличие опыта выполнения проектной деятельности. А современный учитель сегодня не мыслим без хорошего владения способами и приемами методического сопровождения организации проектной деятельности.

Ранее нами были рассмотрен вопросы формирования готовности будущих учителей к руководству индивидуальными проектами обучающихся [1], технологии организации внутреннего взаимодействия участников сетевого проекта [2], воспитательного аспекта освоения обучающимися методологии научного исследования [3].

Одной из форм организации проектной деятельности учащихся является участие в конкурсах различного уровня. В настоящее время существует достаточно большое количество конкурсов разного уровня, которые позволяют школьникам провести исследовательские проекты и презентировать их результаты. Такая исследовательская деятельность способствует как познавательной активности школьников, учит их находить новое для себя знание, мыслить, делать самостоятельные выводы и умозаключения, так и практической реализации творческих задумок и идей в виде продукта проекта. Важной составляющей проведения исследования являются и вопросы организации коммуникации как внутри проектной команды, так и с другими участниками конкурса, экспертами, организаторами конкурса.

Рассмотрим подробнее вопросы сопровождения исследовательских проектов школьников на примере Всероссийского конкурса исследовательских работ [4].

Всероссийский конкурс исследовательских работ был организован в 2024 году электронно-библиотечной системой «Библиошкола» (biblioschool.ru) и Издательским домом «Директ-Медиа» (directmedia.ru) для школьных команд.

Цель проекта: развитие проектной исследовательской деятельности школьников на основе применения навыков работы с научной информацией.

Школьные команды проводят научное исследование, с публикацией отчета или статьи о результатах исследования.

Регистрация команд проводилась с помощью сервиса для организации событий Timepad (https://timepad.ru/).

Для организации исследовательской работы с научной теорией был обеспечен бесплатный доступ школьным командам к научной литературе и другим ресурсам электронной библиотеки «Библиошкола».

Для обеспечения оперативного сетевого взаимодействия участников проекта использовался телеграм канал Библиошкола (https://t.me/biblioschool_ru). В нем публиковались новости проекта, обсуждалась тематика планируемых исследований, публиковались даты обучающих лекций и мастер-классов, совместных видеоконференций, видеоконсультаций команд с экспертами, итоговые конференции. В сетевом сообществе участников проекта проходили и консультации для команд.

Часть команд приглашала экспертов конкурса для совместной работы по своему исследованию в группу команды в социальной сети ВКонтакте.

Командой организаторов конкурса было организовано и проведено обучение школьных команд методологии научного исследования и работе с источниками научной информации. Нами были прочитаны обучающие лекции:

• «Эмпирические методы научного исследования». Были рассмотрены методы работы с научной литературой, документами и результатами деятельности, наблюдение, измерение, опрос (устный и письменный), экспертные оценки, тестирование.

• «Теоретические методы научного исследования». Рассматривались теоретические методы научного исследования: анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, конкретизация, обобщение, формализация, индукция, дедукция, идеализация, аналогия, моделирование и др.

Видеоконференции проводились с помощью сервиса Яндекс Телемост (https://telemost.yandex.ru/)

Экспертное сопровождение исследовательских проектов школьных команд осуществлялось на протяжении всего конкурса.

Конкурс включал в себя следующие этапы:

• Поисковый этап. Участники посещали онлайн-лекции, мастер-классы и консультации экспертов проекта; знакомились с ресурсами электронной библиотеки «Библиошкола»; выбирали собственные направления исследований.

Результат поиского этапа — команды определили тематическое поле и тему проекта, провели поиск и анализ проблемы, сформулировали цель исследования, научный аппарат исследования, подготовили программу исследования.

• Этап проведения исследований школьными командами.

Команды работали совместно с экспертами и другими участниками проекта над реализацией собственных исследований.

В ходе проведения исследований команды:

1. подбирают необходимые ресурсы;
2. реализуют намеченный план исследования;
3. проводят мониторинг текущих работ и состояния исследования;
4. систематизируют полученные данные;
5. используют элементы математического моделирования;
6. интерпретируют результаты исследования;
7. определяет параметры и критерии успешности реализации проекта;
8. описывают полученные результаты;
9. формируют презентационные материалы для представления результатов исследования.

Результат проведения исследований — исследование завершено, подготовлена презентация результатов исследования.

• Этап экспертизы и презентирования лучших исследовательских проектов школьных команд.

Результат этапа — команды представили результаты исследовательской деятельности, получили экспертную оценку своим проектам, приняли участие в итоговой конференции конкурса. Лучшие проекты конкурса готовятся к публикации в научном сборнике издательства «Директ-медиа».

Приведем примеры некоторых исследовательских работа по направлению «Математика, физика».

• Тема «Комбинаторные задачи по истории города Кирова»

Проект приурочен к празднованию юбилея — 650-летия города Кирова. Продукт проекта: на основе проведенного исследования самостоятельно составлен сборник комбинаторных задач о Кирове. Материал для задач брали из жизни города, сообщений в социальных сетях, афиш, объявлений о мероприятиях в городе, готовящемся к юбилею.

Примеры задач:

Задача 1. В Кировской области стартовали открытые голосования за идею логотипа, слогана и талисмана 650-летия Кирова. Для голосования за логотип предложено 10 вариантов, за слоган — 13 вариантов и за талисман — 6 вариантов. В каждом голосовании будет определен один победитель. Сколькими способами можно выбрать комбинацию логотип-слоган-талисман?

Задача 2. В апреле 2024 года в рамках гастролей Нижегородского театра «КОМЕДiЯ» в Кировском Драматическом театре пройдут спектакли «Женитьба», «Аленький цветочек», «Дурочка» и «Укрощение строптивой». Если я хочу посмотреть любые два спектакля, то сколько у меня вариантов?

• Тема «Математика и культовые сооружения города Пскова»

В исследовании выявлена связь золотого сечения с архитектурой города Пскова на примерах Псковских храмов и их фундаментов.

Продукт проекта: чертежи храмов г. Пскова с вычисленными отношения различных высот, значения которых приближенно равны золотому сечению, сводная таблица пропорций высот 10 церквей г. Пскова, находящихся под охраной ЮНЕСКО.

• Тема «Альтернативные источники энергии и возможность их использования

Было проведено исследование зависимости продолжительности работы (объема зарядки) солнечной лампы от интенсивности излучения и продолжительности светового дня.

Продукт проекта: создать модель генератора, работающего на альтернативных источниках энергии.

Результаты этого проекта могут пригодиться муниципальном службам при анализе выгоды использования альтернативных источников энергии для организации освещения улиц и пешеходных переходов.

В заключении отметим, что школьники, принимающие активное участие в исследовательских проектах, занимающиеся научно-исследовательской деятельностью, находятся в постоянном поиске, в процессе развития личности, совершенствования своих навыков, компетенций, способностей. Обучение в таком формате, открытие нового для себя знания, освоение научных методов, творческие озарения в ходе исследования, делают школьную жизнь интересной, яркой, насыщенной. А грамотное, постоянное сопровождение проектной деятельности со стороны педагогов помогает выстроить интересный проект и показать варианты его внедрения в практическую деятельность. Таким образом создаются условия для формирования готовности обучающихся становиться лидерами, центрами инициирования научной исследовательской активностей. Организуя взаимодействие участников конкурса содействуем научному сотрудничеству, работе в команде. Формируя вариативность получения новых знаний обеспечивая обучающимся современный уровень развития, который позволит ему быть успешным в течение всей жизни.

Литература

1. *Сухорукова Е. В.* Формирование готовности будущих учителей к руководству индивидуальными проектами обучающихся / Е. В. Сухорукова // Образование в современном мире : Сборник научных статей. Том Выпуск 14. – Саратов : Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 2019. – С. 172–177. – EDN AVZHXF.

2. *Сухорукова Е. В.* Технология организации внутреннего взаимодействия участников сетевого проекта / Е. В. Сухорукова // Актуальные проблемы модернизации математического и естественно-научного образования : Сборник научных трудов по материалам Всероссийской научно-методической конференции, Балашов, 15 мая 2020 года. – Балашов: Издательство «Саратовский источник», 2020. – С. 127–132. – EDN TSSAJZ.

3. *Сухорукова Е. В.* Воспитательный аспект освоения обучающимися методологии научного исследования в рамках проекта «Региональные особенности русской речи» / Е. В. Сухорукова // Воспитание в современных условиях: региональный аспект : сборник статей по материалам III Всероссийской научно-практической конференции, Пенза, 30 октября 2020 года. – Пенза: Пензенский государственный университет, 2020. – С. 177-184. – EDN SGRRUK.

4. Всероссийский конкурс исследовательских работ. //Библиошкола: [сайт]. – 2024. – URL: https://biblioschool.ru/index.php?page=static&id=206&common=resources (дата обращения 11.11.2021)

УДК 681.3.06

ОЛИМПИАДА 2024 ГОДА ПО ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЮ ПЕРВОКУРСНИКОВ ВУЗОВ ЧЕРНОЗЕМЬЯ. ОСНОВНЫЕ ИТОГИ

О. Ф. Ускова[1], А. А. Азнаурьянц[2], С. Н. Медведев[1], А. С. Сырых[1], Д. Г. Усков[1], Н. А. Каплиева[2]

[1]Воронежский государственный университет
[2]ООО «ДИДЖИТАЛ»

Аннотация. Рассмотрена организация и проведение олимпиады первокурсников по информатике и программированию в юбилейном для факультета ПММ ВГУ 2024 году. Приведены результаты олимпиады.
Ключевые слова: студенческие соревнования, призеры олимпиады, участники соревнований, проводимых в рамках Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики».

Студенческие олимпиады по информатике и программированию стали традицией на нашем факультете прикладной математики, информатики и механики (ПММ ВГУ), составной частью обучения и платформой для профессионального воспитания специалистов.

В юбилейном издании «Факультет прикладной математики, информатики и механики. 55 лет» опубликована статья «От факультетских до Всесоюзных соревнований студентов по информатике и программированию» [1]. Она содержит информацию о 31 студенческом соревновании, организованном нашим факультетом с 2000 до 2023 года.

Соревнования первокурсников 2024 года, как и все предыдущие, были проведены в рамках Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики».

Соревнования первокурсников вузов Черноземья проведены 17 ноября 2024 г. Дата и условия проведения олимпиады выставлены на сайте факультета ПММ ВГУ 8 ноября 2024 г. Кроме того эта дата (17 ноября 2024 г) сообщена по телефонам преподавателям информатики воронежских вузов, студенты которых участвовали в олимпиадах предшествующих годов.

Для участия в олимпиаде нынешнего 2024 года каждый первокурсник должен был зарегистрироваться, заполнив до 17 ноября (включительно) на сайте факультета ПММ анкету следующего содержания:

Фамилия, имя, отчество участника

Название ВУЗа и факультета

Курс, группа

Фамилия, имя, отчество научного руководителя

Адрес электронной почты (для получения заданий олимпиады)

Сама олимпиада (письменное решение заданий) проходила в воскресенье, 17 ноября, с 11 часов 30 мин до 13 часов в удаленном режиме. Выполненные работы первокурсники должны были отправить по адресу электронной почты олимпиады.

Из 184 заявок на участие в олимпиаде были присланы ответы на олимпиадные задания и обработаны только 100, среди них: количество юношей 78, количество девушек 22.

Вузы, первокурсники которых прислали не только заявки, но и решения олимпиадных заданий:

Воронежский государственный университет (ВГУ);

Воронежский государственный университет инженерных технологий (ВГУИТ);

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени проф. Н.Е. Жуковского т Ю.А. Гагарина (ВУНЦ ВВС «ВВА»);

Воронежский институт высоких технологий (ВИВТ);

Тамбовский государственный технический университет (ТГТУ).

Вузы, первокурсники которых активно участвовали в соревнованиях:

ВУЗ	Количество
ВГУ	72
ВГУИТ	15
ВУНЦ ВВС «ВВА»	7
ТГТУ	4
ВИВТ	2

Факультеты ВГУ, первокурсники которых приняли участие в олимпиаде:

- факультет прикладной математики, информатики и механики;
- факультет компьютерных наук;
- математический факультет.

Максимальный балл первокурсников вузов-участников олимпиады 2024 года:

ПММ ВГУ	33,24
ФКН ВГУ	34,1
Матфак ВГУ	28,86
ВУНЦ ВВС ВВА	31,98
ВГУИТ	31,9
ТГТУ	26,24

Победители олимпиады

Место	Фамилия имя	ВУЗ	Балл
1 место	Дубовицкая Елена	ВГУ, ФКН	34,10
2 место	Недиков Михаил	ВГУ, ПММ	33,25
	Лазарева Валерия	ВГУ, ПММ	33,24
3 место	Федечкин Евгений	ВГУ, ПММ	33,20
	Сальников Алексей	ВГУ, ПММ	33,19
	Мурзинцев Богдан	ВГУ, ПММ	33,07
	Цветков Николай	ВГУ, ПММ	32,9
4 место	Федосов Валентин	ВГУ, ПММ	32,8
	Наумов Никита	ВГУ, ФКН	32,62
	Перегудова Виктория	ВГУ, ПММ	32,57
	Якубович Егор	ВГУ, ПММ	32,52
5 место	Мельник Владимир	ВГУ, ФКН	32,19
	Мостовой Иван	ВГУ, ПММ	32,15
	Воскобойников Артем	ВГУ, ПММ	32
	Ибрагимов Руслан	ВУНЦ ВВС «ВВА»	31,98
	Морозова Яна	ВГУИТ	31,91

Все 16 победителей награждены корпорацией Digital Soft (директор которой Азнаурьянц Александр Александрович является выпускником математического факультета ВГУ) денежными премиями.

Студенты и преподаватели факультета ПММ ВГУ благодарны корпорации Digital Soft за спонсорскую поддержку олимпиады первокурсников, которая проводится ежегодно, начиная с 2016 года.

Нельзя не отметить следующую информацию. Третий тур Всероссийской студенческой олимпиады по информатике 2004 г на основании приказа министерства образования и науки № 404 от 03.05.2004 года «Об организации Всероссийской студенческой олимпиады» проводился факультетом ПММ ВГУ. Одним из спонсоров этих соревнований было Центрально-Черноземное представительство корпорации «Парус». Генеральный директор корпорации «Парус» Александр Владимирович Азнаурьянц и главный бухгалтер Ольга Михайловна Азнаурьянц — родители Александра Александровича Азнаурьянц, директора корпорации Digital Soft, спонсора нынешней олимпиады первокурсников Черноземья [2].

Как показывает многолетний опыт проведения студенческих олимпиад (ежегодно, начиная с 2000 года) они способствуют развитию важнейших качеств личности: инициативности, способности творчески мыслить, находить нестандартные решения.

Литература

1. *Ускова О. Ф.* От факультетских до Всероссийских соревнований студентов по информатике и программированию / О. Ф. Ускова, А. И. Шашкин, С. Н. Медведев, Н. А. Каплиева // Факультет прикладной математики, информатики и механики: 55 лет. – Воронеж, 2024. – С. 12–21.

2. *Ускова О. Ф.* Олимпиада по информатике и программированию первокурсников Воронежских вузов в рамках года науки и технологий / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, А. И. Шашкин, Д. Г. Усков, А. С. Сырых // Информатика: проблемы, методы, технологии : материалы 22-й Международной научно-практической конференции, Воронеж, 10–12 февраля 2022 г. Воронеж, 2022. – С. 1324–1330.

УДК 681.3.06

ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И СТАНОВЛЕНИЯ ИНФОРМАТИКИ

О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена истории возникновения и становления информатики от изобретения первых вычислительных аппаратов в 17–18 вв. до первых российских ЭВМ, вкладу воронежских ученых и педагогов в развитие вычислительной техники и изучение информационных технологий.
Ключевые слова: информатика, первые вычислительные аппараты, ЭВМ, Российская информатика, вычислительный центр ВГУ, прикладная компьютерная программа.

Информатика — наука, изучающая структуру и общие свойства информации, законы и методы сбора, хранения, обработки, поиска, передачи и использования информации в различных областях человеческой деятельности (экономика, биология, медицина, лингвистика, математика, физика, химия, геология, педагогика, искусствоведение, радиотехника).

Информатика — французское слово, образованное из двух слов:

information (информация),
automatique (автоматика).

Точный перевод: информационная автоматика.

Под информацией понимают любую совокупность сигналов, воздействий, сведений, которые та или иная система воспринимает от окружающей среды (входная информация), хранит в себе (внутренняя информация) или выдает в окружающую среду (внешняя информация).

Возникла информация в связи с первыми попытками механизации и автоматизации умственной деятельности человека.

Одним из изобретателей первых вычислительных аппаратов — арифмометров были:

Блез Паскаль (19.04.1623 – 19.08.1662), французский физик, математик и философ;

Готфрид Вильгельм Лейбниц (01.07.1646 – 14.11.1716), немецкий физик, математик и философ.

Блез Паскаль в 1642 году сконструировал счетную машину для двух арифметических действий (сложение и вычитание), чтобы облегчить труд своего отца — сборщика налогов.

Машина Готфрида Лейбница помимо сложения (+) и вычитания (–), выполняла умножение (*), деление (/), возведение в степень В течение 40 лет Лейбниц усовершенствовал свое изобретение. Кроме того, он писал о машинах, которые будут пригодны для работы не только с числовой информацией, но и с группами символов, изображающих формулы и тексты. По мнению Готфрида Лейбница машины смогут выполнять действия логического характера (вывод формул). В начале 18 века взгляды Готфрида Лейбница были осмеяны Дж. Свифтом в его романе «Путешествие Гулливера».

Чарльз Бэббидж (26.12.1792 – 18.10.1871), английский математик, который занимался составлением таблиц для навигации, разработал проект вычислительной машины, которую назвал аналитической машиной. Впервые был сформулирован принцип программного управления. Новаторская мысль Чарльза Бэббиджа была подхвачена и развита его ученицей, дочерью английского поэта Дж. Байрона, Адой Лавлейс. Практическая реализация идеи Бэббиджа была невозможна, так как существенно опережала технические возможности своего века.

С ЭВМ связаны первые эффективные применения информатики. ЭВМ — это электронное устройство, способное автоматически принимать, перерабатывать, хранить, накапливать и выдавать информацию. В мире первой действующей ЭВМ была ЭНИАК, изготовленная в

США в конце 1945 г. Она использовалась для расчета полета баллистических снарядов. Конструкторами ЭНИАК считаются Дж. Эккерт и Дж. Моучли. Память ЭНИАК состояла из 20 десятичных чисел, площадь 135 м^2, вес 30 тонн.

Днем рождения Российской информатики считается 4 декабря 1948 года. В этот день Государственный комитет Совета министров СССР по внедрению передовой техники в народное хозяйство и вузы выдал члену-корреспонденту академии наук Бруку И. С. и молодому инженеру Рамееву Б. И. авторское свидетельство на изобретение цифровой вычислительной машины с приоритетом [1].

Первая цифровая вычислительная машина М-1, сконструированная и собранная в СССР под руководством Исаака Семеновича Брука выпускниками и студентами вузов, зарегистрирована 15 декабря 1951 года.

Большой вклад в развитие электронной вычислительной техники внес Сергей Алексеевич Лебедев, известный конструктор серии компьютеров БЭСМ. Самая знаменитая ЭВМ этой серии БЭСМ-6 с быстродействием миллион операций в секунду. Благодаря надежности, простоте в эксплуатации, малому расходу энергии, экономичности, развитому программному обеспечению БЭСМ-6 выпускалась в течение 17 лет, что является абсолютным мировым рекордом.

Большую работу по изучению информационных технологий студентами проделал вычислительный центр Воронежского государственного университета, образованный в соответствии с постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР № 256-с от 21 января 1959 года.

Успешно руководили работой сотрудников начальники ВЦ ВГУ:

Мартынов Анатолий Васильевич,

Сивков Анатолий Сергеевич,

Белобродский Андрей Викторович,

Ландсберг Сергей Евгеньевич.

Материально-техническую базу ВЦ ВГУ первых лет составляли [2]:

– одноадресная ЭВМ Урал-1 (быстродействие — 100 операций в секунду, занимаемая площадь 80 м^2, емкость накопительной памяти на МЛ до 40 000 30-ти разрядных двоичных кодов и скорость последовательной выборки 75 кодов в секунду).

– трехадресная ЭВМ БЭСМ-4 (быстродействие 20 000 операций в секунду, занимаемая площадь 65 м^2, внешняя память 8 блоков на магнитных лентах, по 2 миллиона 45-ти разрядных двоичных слов).

В числе первых разработчиков прикладной компьютерной программы для решения дифференциальной краевой задачи второго порядка (1951 г.) были Селим Григорьевич Крейн (совместно с С. А. Авраменко и С. А. Богомолец).

Селим Григорьевич Крейн, выдающийся ученый и педагог, математик с мировым именем, профессор, успешно работал в Воронежском государственном университете в 60–70 годы заведующим кафедрой уравнений в частных производных, воспитал несколько поколений математиков-профессионалов [3]. Им опубликовано 175 статей и 18 монографий. Под его руководством успешно защищено 81 диссертация, 24 его ученика стали докторами наук [2, 5].

Ежегодно на факультете ПММ ВГУ проводятся олимпиады первокурсников воронежских вузов по информатике и программированию [3]. Одна из таких олимпиад была посвящена 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна [4].

Литература

1. *Ускова О. Ф.* Из истории Российской информатики / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, О. Д. Горбенко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.). – Воронеж, 2019. – С. 269–271.

2. *Ускова О. Ф.* Юбилей Российской информатики / О. Ф. Ускова, В. К. Селивёрстов // Информационные процессы вуза и школы : материалы XIII Всероссийской научно-практической конференции. – Воронеж, 2019. – С. 179–182.

3. *Шашкин А. И.* 50 лет факультету прикладной математики, информатики и механики / А. И. Шашкин, О. Ф. Ускова, Т. Г. Богомолова. – Воронеж : Научная книга, 2019. – 21 с.

4. *Ускова О. Ф.* Ключ к тайнам компьютеров... / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, Н. Б. Ускова // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна, 13–19 ноября 2017 г. : сборник материалов. – Воронеж, 2017. – С. 133–136.

5. Столетию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна посвящается / И. А. Бойченко, К. Е. Селезнев, В. М. Мельников, О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, А. И. Шашкин // Информатика : проблемы, методология, технологии. Информатика в образовании : материалы 18-й Международной школы-конференции, Воронеж, 8–9 февраля 2018 г. : в 7 т. Воронеж, 2018. – Т. 7. – С. 13–17.

УДК 519.8

О ПРИМЕНЕНИИ БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

В. В. Ухлова[1], Н. А. Чернядьева[2]

[1]Воронежский государственный университет
[2]МБОУ СОШ № 19

Аннотация. Статья посвящена разработке модели оценки контрольно-измерительных материалов, используемых в балльно-рейтинговой системе оценивания знаний, умений и навыков в средней и высшей школе. Предлагаемая модель основана на применении метода многокритериальной оптимизации — методе анализа иерархий. Такой выбор позволяет работать как с количественными, так и качественными характеристиками, в которых обычно описываются критерии оценивания. Модель учитывает специфику материалов оценивания для математических дисциплин.
Ключевые слова: математические дисциплины, оценивание результатов, компетенции, бально-рейтинговая система.

Введение

Использование большого количества контрольно-измерительных материалов (КИМ) при преподавании математических дисциплин существенно усложняет процесс оценивания получаемых обучающимся знаний, умений и навыков. Применяемая балльно-рейтинговая система позволяет дифференцировано подходить к различным видам КИМ, однако не учитывает специфики преподавания отдельных дисциплин, как, например, математических, которые характеризуются различными методиками преподавания. В данной работе рассмотрен один из подходов учета специфики применения разных методик преподавания и оценивания знаний (умений и навыков), который позволит более объективно использовать в образовательном процессе балльно-рейтинговую систему.

Постановка задачи

Использование балльно-рейтинговой системы оценивания результатов обучения в средней и высшей школе получило широкое распространение. Она заключается в формировании накопительной (интегральной) оценки успешности освоения дисциплины на основании совокупности использования контрольно-измерительных материалов (1):

$$Q_{итог} = K_{теор}Q_{теор} + K_{прз}Q_{прз}, \quad (1)$$

где $K_{теор}$, $K_{прз}$ — коэффициенты (веса) значимости теоретического обучения и практических занятий, соответственно;

$Q_{теор}, Q_{прз}$ — оценка, полученная за теоретическую и практическую работу, соответственно.

Каждый контрольно-измерительный материал (КИМ) используется для оценки знаний, умений и навыков по конкретной компетенции. Согласно алгоритму применения балльно-рейтинговой системы по результатам проверки знаний (умений, навыков) работа получает некоторый балл. При этом количество элементов оценивания и вес каждого определяется преподавателем индивидуально. По совокупности всех работ баллы суммируются. Далее рассчитывается итоговая оценка. Для этого применяется шкала для перевода полученных баллов в 4-х балльную шкалу («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно») или 2-х балльную («зачтено» «не зачтено»). Среди достоинств такой системы следует отметить

простоту и «прозрачность» оценивания. Однако система не учитывает важность в рамках той или иной дисциплины теоретических или практических знаний, что закладывается в методике преподавания дисциплины. Боле того, значимость КИМ не учитывается, например, в случае использования разных по уровню сложности заданий. При этом они могут иметь разный уровень значимости в освоении дисциплины, что также зависит от методики преподавания и индивидуальном подходе к обучающемуся.

Ставится задача, сформировать шкалу расчета весовых коэффициентов КИМ для применения балльно-рейтинговой системы при преподавании математических дисциплин.

Модель оценки значимости КИМ

Формирование шкалы весовых коэффициентов для балльно-рейтинговой системы заключается в оценке значимости каждого из КИМов в формировании интегральной оценки. Соответственно, ставится задача разработать модель оценивания значимости КИМ с учетом форм и видов учебных занятий, проводимых, согласно образовательной программы. Предлагаемое решение основано на применении метода анализа иерархии (МАИ). Он позволяет при формировании модели оценки учесть несколько факторов одновременно, при этом использовать как количественные, так и качественные оценки. Согласно подходу МАИ, строится иерархия элементов оценивания, далее по ней формируется мнение эксперта, и на основе полученных весов значимости рассчитываются коэффициенты элементов каждого уровня.

Для формирования иерархии все КИМ разделяются на те, что относятся к теоретическим и к практическим занятиям. В рамках групп теоретических занятий и практических занятий выделяются группы «Устный опрос», «Письменная работа», «Посещение», «Проектная работа». Соответственно, иерархия имеет вид, представленный на рис. 1. Кроме того, предлагается для отдельных видов работ ввести дополнительное разделение (градации) значимости (рис. 2). Например, это рекомендуется сделать для элемента «Посещение», указав уровень посещения занятий (по количеству посещенных занятий), «Контрольная работа» - по уровню сложности заданий.

Синтез этих двух иерархий (рис. 1 и 2) позволяет получить итоговую модель оценки для формирования шкалы весовых коэффициентов КИМ, используемых при расчете интегральной оценки (1). Итоговая модель учитывает форму занятий, их вид, средства измерений уровня достижимости компетенций дисциплины и вариант используемого КИМ.

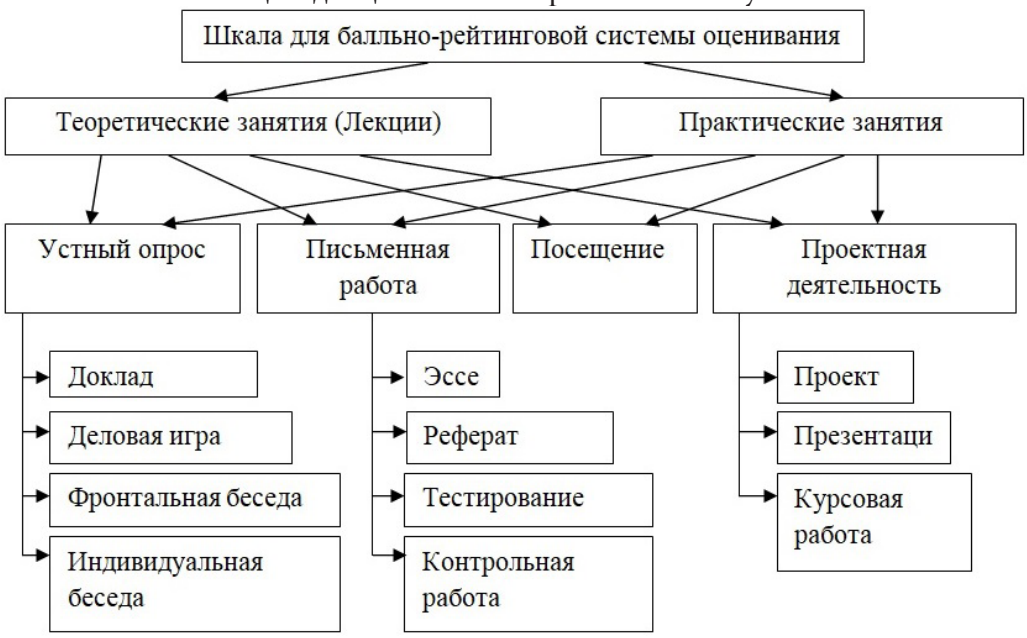


Рис. 1. Иерархия форм и видов занятий учебного процесса

Рис. 2. Градации элемента

Алгоритм расчета коэффициентов значимости КИМ

На основе полученной модели формируется «видение» эксперта относительно значимости КИМ. Эксперт оценивает значимость элементов модели по уровням, начиная с самого верхнего. Оценка может трактоваться как приоритет и быть, например, 1, 2, 3 и т. д. или возможно назначение каждому элементу веса в общем наборе, например, в процентном соотношении. Особенностью применения метода МАИ является то, что эксперт при присвоении веса значимости может сравнивать элементы иерархии попарно. Например, что значимее лекции или практические занятия, контрольная работа уровня значимости 1 или 2.

По полученным вычисляются локальные веса элементов иерархии (значимости элементов на одном уровне), а затем глобальные (с учетом веса элемента вышележащего уровня). Полученное множество значений глобальных весов самого нижнего уровня и представляет собой шкалу коэффициентов (весов) значимости КИМ. Она и используется в качестве шкалы весовых коэффициентов для интегральной оценки балльно-рейтинговой системы. Данная модель оценки может применяться и в случае, где в наборе КИМ присутствуют не все элементы иерархии. В этом случае они имеют вес равный 0.

Заключение

Предложенная модель позволяет преподавателю объективно оценить значимость каждого из КИМ, и в случае необходимости сокращения спектра их использования, подбирать комплект КИМ, позволяющий наиболее объективно оценить уровень освоения дисциплины. Полученная модель учитывает все основные виды и формы занятий, используемые в образовательном процессе по математическим дисциплинам.

Литература

1. *Азарнова Т. В.* Модели и методы принятия решений / Составители: Т. В. Азарнова, Ю. В. Бондаренко, Н. Б. Баева, Е. С. Дашкова, В. В. Ухлова; Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. – 310 с.

2. *Азарнова Т. В.* Метод анализа иерархий как средство поддержки принятия решений в стратегическом аналитическом планировании / Т. В. Азарнова, О. Ю. Пономарева, В. В. Ухлова // Экономическое прогнозирование: модели и методы: сб. тр. IX международной науч.-практ. конф. (Воронеж, 26 апреля 2013 г.). – Воронеж, 2013. – С. 9–12.

3. *Макаров И. М.* Теория выбора и принятия решений / И. М. Макаров [и др.] – Москва : Наука. 1982. – 330 с.

4. *Палкина С. А.* Адаптация метода анализа иерархий к задаче оценки достижений учащихся / С. А. Палкина // Математические модели современных экономических процессов, методы анализа и синтеза экономических механизмов; Актуальные проблемы и перспективы менеджмента организаций в России: [сб. ст.] XIII Всерос. науч.-практ. конф. / Ин-т проблем упр. им. В. А. Трапезникова Рос. Акад. Наук, Самар. нац. исслед. ун-т им. С. П. Королева; гл. ред. Д. А. Новиков. – Самара : Изд-во СамНЦ РАН, 2020. – С. 81–87.

5. *Палкина С. А.* Формирование шкалы коэффициентов значимости средств измерений для оценивания уровня освоения учебных дисциплин в высших учебных заведения / С. А. Палкина, В. В. Ухлова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 7-9 декабря 2020 г. – Воронеж, 2021. – С. 1022–1026.

6. *Саати Т.* Принятие решений : Метод анализа иерархий / Т. Саати; пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. – Москва : Радио и связь, 1993. – 314 с.

УДК 372.851, 519.644.2

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НЬЮТОНА — КОТЕСА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ»

А. И. Эгамов[1], В. Л. Тростин[2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
[2]Институт пищевых технологий и дизайна, Нижний Новгород

Аннотация. При изучении дисциплины «Вычислительные методы» особое внимание необходимо уделять оценке погрешностей различных методов. При изучении каждой темы методика оценки, с одной стороны, должна быть применима для любых формул, соответствующих тематике, с другой стороны, желательно, чтобы она не опиралась на изучение дополнительных формул и методов, трудоемких вычислений и была бы «прозрачной» по своей сути студенту со стандартными компетенциями. В то же время обоснование доказательства той или иной оценки должно быть полным и четким, без принятия на веру каких-либо промежуточных результатов. В данной статье, приводится метод оценки погрешностей квадратурных формул Ньютона — Котеса, содержащий только интуитивно понятные математические действия, базирующиеся на аппарате математического анализа первого семестра. Приведен пример его практической реализации на примере «формулы 3/8». Представленный метод рекомендуется преподавателям при изучении темы «Численное интегрирование».
Ключевые слова: численное интегрирование, формулы Ньютона — Котеса, оценка погрешности, «формула 3/8».

Введение

В большинстве учебников по численным методам погрешность «формулы 3/8» приводится без доказательства. В [1–4], например, доказательство оценки погрешности формул Ньютона — Котеса дается сразу для всех n ($n+1$ — число слагаемых в формуле) с помощью остаточного члена формулы Тейлора в интегральной форме и различных интегральных преобразований. Для каждого частного случая необходимо сделать по представленным формулам подсчет соответствующих интегралов. Такое доказательство является нелегким испытанием для большинства студентов. Ниже представлены метод оценки погрешности формул Ньютона — Котеса закрытого типа [5] и доказательство этим методом оценки для «формулы 3/8», который с точки зрения авторов статьи является более понятным для студенческого восприятия.

1. Формулы Ньютона – Котеса

Как правило, под численным интегрированием понимается подсчет приближенного значения определенного интеграла по квадратурным формулам вида

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i). \qquad (1)$$

Формулами Ньютона — Котеса закрытого типа называются квадратурные формулы интерполяционного типа (1), построенные на равномерной сетке, то есть, когда $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$, $i = \overline{1,n}$ [2]. Константы c_i для любого натурального n могут быть найдены либо методом неопределенных коэффициентов, последовательно интегрируя мономы [2, 3], либо интегрируя базисные полиномы Лагранжа [1, 3]. В любом учебнике по численным методам в разделах, посвященных численному интегрированию, представлены константы c_i для $n \le 4$ и соответствующие этим формулам погрешности для достаточно гладкой функции $f(x)$,

а в [1] они даны для любого $n \le 11$. При $n = 4$ такая формула носит название «формула 3/8» (или «формула Симпсона 3/8»). Однако, непосредственное доказательство оценки ее погрешности во всех известных авторам учебных изданиях не приводится.

Целое неотрицательное число v называется алгебраической степенью квадратурной формулы, если квадратурная формула точна для любого многочлена степени не выше v и не точна для многочлена степени $v+1$. Для квадратурных формул Ньютона — Котеса закрытого типа при $n \ge 2$

$$v = \begin{cases} n, & \text{если } n - \text{нечетно}, \\ n-1, & \text{если } n - \text{четно}. \end{cases}$$

2. Предлагаемый метод оценки погрешности

Предлагаемый метод для изучения студентами оценки погрешностей формул Ньютона — Котеса заключается в следующем.

1. Записать разность определенного интеграла и численного подсчета в виде функции $R(h)$ — погрешности метода, от переменной $h = \dfrac{b-a}{2}$.

2. Продифференцировать функцию $R(h)$ необходимое число раз до тех пор, пока очередная производная функции $R(h)$ не примет вид: $R^{(p)}(h) = mh^s$, где $p = v$ или $p = v+1$; $p + s = v + 2$, m — некоторая константа, состоящая из линейной комбинации производных $(v+1)$-го порядка функции $f(x)$. На последних этапах необходимо применить теорему Лагранжа [6] (как правило, ее приходится использовать несколько раз). Кроме того, на каждом шаге необходима проверка, что $R(0) = R'_h(0) = R^{(p-1)}(0) = 0$.

3. Интегрируя p раз функцию $R^{(p)}(h)$, получим $R(h)$. Оценивая константу m через максимум модуля $f^{(v+1)}(x)$ на отрезке $[a,b]$, получим искомый результат.

Доказательство оценки погрешности для формулы Симпсона этим методом см. [5].

3. Оценка погрешности «формулы 3/8»

В качестве примера рассмотрим квадратурную формулу «три восьмых».

$$I = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right). \tag{2}$$

Для удобства выкладок определим константы $\theta = \dfrac{a+b}{2}$ и $h = \dfrac{b-a}{2}$ и будем их использовать вместо констант a и b. Тогда формула (2) запишется в виде

$$\tilde{I}(h) = \frac{2h}{8}(f(\theta - h) + 3f(\theta - \frac{h}{3}) + 3f(\theta + \frac{h}{3}) + f(\theta + h)).$$

Здесь $f(x) \in C^4[a,b]$. Погрешность «формулы 3/8» запишется в виде

$$R(h) = \int_a^b f(x)dx - I = \int_{-h}^{h} f(\theta + t)dt - \tilde{I}(h),$$

где $x = \theta + t$. Очевидно, $R(0) = 0$. Обозначим первообразную функции $f(x)$ — $F(x)$..

$$R(h) = \int_{-h}^{h} f(x)dx - \frac{2h}{8}(f(\theta - h) + 3f(\theta - \frac{1}{3}h) + 3f(\theta + \frac{1}{3}h) + f(\theta + h)) =$$

$$= F(\theta + h) - F(\theta - h) - \frac{2h}{8}(f(\theta - h) + f(\theta + h) + 3f(\theta - \frac{1}{3}h) + 3f(\theta + \frac{1}{3}h)).$$

$$R'_h(h) = f(\theta+h) + f(\theta-h) - \frac{1}{4}(f(\theta-h) + f(\theta+h) + 3f(\theta-\frac{1}{3}h) + 3f(\theta+\frac{1}{3}h)) -$$
$$-\frac{h}{4}(-f'_h(\theta-h) + f'_h(\theta+h) - f'_h(\theta-\frac{1}{3}h) + f'_h(\theta+\frac{1}{3}h)) = \frac{3}{4}\times(f(\theta+h) + f(\theta-h) -$$
$$-f(\theta-\frac{h}{3}) - f(\theta+\frac{h}{3})) + \frac{h}{4}(f'_h(\theta-h) - f'_h(\theta+h) + f'_h(\theta-\frac{h}{3}) - f'_h(\theta+\frac{h}{3}),$$

причем $R'_h(0) = 0.$

$$R''_{hh}(h) = \frac{3}{4}(f'_h(\theta+h) - f'_h(\theta-h) + \frac{1}{3}f'_h(\theta-\frac{1}{3}h) - \frac{1}{3}f'_h(\theta+\frac{1}{3}h)) + \frac{1}{4}(f'_h(\theta-h) - f'_h(\theta+h) +$$
$$+f'_h(\theta-\frac{1}{3}h) - f'_h(\theta+\frac{1}{3}h)) + \frac{h}{4}(f''_{hh}(\theta-h) - f''_{hh}(\theta+h) + \frac{1}{3}f''_{hh}(\theta-\frac{h}{3}t) - \frac{1}{3}f''_{hh}(\theta+\frac{h}{3})) =$$
$$= \frac{1}{2}(f'_h(\theta+h) - f'_h(\theta-h) + f'_h(\theta-\frac{h}{3}) - f'_h(\theta+\frac{h}{3})) -$$
$$-\frac{h}{4}(f''_{hh}(\theta-h) + f''_{hh}(\theta+h) + \frac{1}{3}f''_{hh}(\theta-\frac{h}{3}) + \frac{1}{3}f''_{hh}(\theta+\frac{h}{3})),$$

причем $R''_{hh}(0) = 0.$

$$R'''_{hhh}(h) = \frac{1}{2}(f''_{hh}(\theta+h) + f''_{hh}(\theta-h) - \frac{1}{3}f''_{hh}(\theta-\frac{1}{3}h) - \frac{1}{3}f''_{hh}(\theta+\frac{1}{3}h)) + \frac{1}{4}(-f''_{hh}(\theta-h) - f''_{hh}(\theta+h) +$$
$$-\frac{1}{3}f''_{hh}(\theta-\frac{1}{3}h) - f''_{hh}(\theta+\frac{1}{3}h)) - \frac{h}{4}(-f'''_{hhh}(\theta-h) + f'''_{hhh}(\theta+h) - \frac{1}{9}f'''_{hhh}(\theta-\frac{h}{3}) + \frac{1}{9}f'''_{hhh}(\theta+\frac{h}{3}))$$
$$= \frac{1}{4}(f''_{hh}(\theta+h) + f''_{hh}(\theta-h) - f''_{hh}(\theta-\frac{h}{3}) - f''_{hh}(\theta+\frac{h}{3})) -$$
$$-\frac{h}{4}(-f'''_{hhh}(\theta-h) + f'''_{hhh}(\theta+h) - \frac{1}{9}f'''_{hhh}(\theta-\frac{h}{3}) + \frac{1}{9}f'''_{hhh}(\theta+\frac{h}{3})),$$

причем $R'''_{hhh}(0) = 0.$

$$R^{(IV)}_{hhhh}(h) = \frac{1}{4}(f'''_{hhh}(\theta+h) - f'''_{hhh}(\theta-h) + \frac{1}{3}f'''_{hhh}(\theta-\frac{h}{3}) - \frac{1}{3}f'''_{hhh}(\theta+\frac{h}{3}))$$
$$-\frac{1}{4}(f'''_{hhh}(\theta+h) - f'''_{hhh}(\theta-h) + \frac{1}{9}(f'''_{hhh}(\theta+\frac{h}{3}) - f'''_{hhh}(\theta-\frac{h}{3}))) - \frac{h}{4}\cdot\frac{d}{dh}(f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_1)2h + \frac{1}{9}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_2)\frac{2h}{3}).$$

Здесь два раза применена теорема Лагранжа, $\xi_1 \in [a,b]$, $\xi_2 \in \left[\theta-\frac{h}{3}, \theta+\frac{h}{3}\right]$. Преобразуя $R^{(IV)}_{hhhh}$ далее, еще раз применяя теорему Лагранжа ($\xi_0 \in \left[\theta-\frac{h}{3}, \theta+\frac{h}{3}\right]$), имеем

$$R^{(IV)}_{hhhh}(h) = \frac{1}{9}(f'''_{hhh}(\theta-\frac{h}{3}) - f'''_{hhh}(\theta+\frac{h}{3})) - \frac{h}{4}\cdot\frac{d}{dh}(f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_1)2h + \frac{1}{9}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_2)\frac{2h}{3}) =$$
$$= \frac{1}{9}(f'''_{hhh}(\theta-\frac{h}{3}) - f'''_{hhh}(\theta+\frac{h}{3})) - (\frac{1}{2}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_1) + \frac{1}{54}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_2))h =$$
$$= (-\frac{2}{27}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_0) - \frac{1}{2}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_1) - \frac{1}{54}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_2))h = mh,$$

где константа $m = -\frac{2}{27}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_0) - \frac{1}{2}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_1) - \frac{1}{54}f^{(IV)}_{hhhh}(\xi_2),$ то есть

$$R^{(IV)}_{hhhh}(h) = mh. \qquad (3)$$

Последовательно четырежды интегрируя формулу (3) и при этом учитывая равенства $R(0) = R'_h(0) = R''_{hh}(0) = R'''_{hhh}(0) = 0,$ получим $R(h) = \frac{mh^5}{5!}$. И, наконец,

$$|R(h)|\le\left(\frac{2}{27}+\frac{1}{2}+\frac{1}{54}\right)\frac{mh^5}{5!}\max_{x\in[a,b]}|f^{(IV)}_{hhhh}(x)|=\frac{32}{54}\max_{x\in[a,b]}|f^{(IV)}_{hhhh}(x)|\frac{h^5}{120}.$$

Учитывая, что $h=\frac{b-a}{2}$, окончательно $|R(h)|\le\max_{x\in[a,b]}|f^{(IV)}_{hhhh}(x)|\frac{(b-a)^5}{6480}$.

Заключение

В заключении авторы статьи подчеркивают, что не претендуют на авторство представленного метода. Описанный метод оценки погрешности квадратурных формул предъявлен в настоящей статье исключительно с педагогической точки зрения. Он интересен, так как является интуитивно понятным и нетрудоемким, по крайней мере, для основных формул Ньютона — Котеса. Опирается только на умения правильно брать производную и интегрировать мономы, а также на грамотное применение теоремы Лагранжа. Рекомендуется преподавателям дисциплин «Вычислительные методы» и «Численные методы» для направлений «Прикладная математика», «Прикладная информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и других подобных направлений.

Литература

1. *Березин И. С.* Методы вычислений. Изд. 2-е / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – Москва : Физматлит, 1962. Т.1. – 464 с.

2. *Самарский А. А.* Численные методы: Учебное пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва: Наука, 1989. – 432 с.

3. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. Изд. 5-е., стер. / А. А. Самарский. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 288с.

4. *Милн В. Э.* Численный анализ / В. Э. Милн. – Москва : Изд-во иностранной литературы, 1951. – 292 с.

5. *Шахов Ю. Н.* Численные методы: учебное пособие. Изд. 3-е / Ю. Н. Шахов, Е. И. Деза. – Москва : Книжный дом «Либроком», 2012. – 248 с.

6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Учебник для вузов. Изд. 18-е, стер. / Г. М. Фихтенгольц. – Санкт-Петербург : Лань, 2024. – 608 с.

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

УДК 004.9

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ДАННЫМИ В МЕТОДОЛОГИИ VB-MAPP

С. Ю. Балашева, И. А. Демидова, Д. В. Кучеренко

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье на примере работы компании «АутМама» рассматривается VB-MAPP — метод тестирования детей с расстройствами аутистического спектра. Особое внимание уделяется оптимизации процесса записи, хранения и поиска результатов тестирования, что позволяет повысить скорость работы пользователей с данными и их анализа. В статье также предлагается внедрение в структуру базы данных дополнительных сущностей, например, участников тестирования и индивидуальных медицинских особенностей, которые могут улучшить качество диагностики и обеспечить более полное понимание возможностей и потребностей каждого ребенка.
Ключевые слова: VB-MAPP, методологии тестирования, аутизм, РАС, ABA, оценка навыков, изучение особенностей, оптимизация структуры.

Введение

Тестирование детей с расстройствами аутистического спектра (РАС) представляет собой важную область исследования и практики, направленную на выявление и понимание особенностей их развития и учебных потребностей. По данным ВОЗ, ежегодно число детей с аутизмом увеличивается на 13 % в мире [1] и на 12–18 % (по данным Министерства Просвещения РФ) в России [2]. Увеличение числа таких детей указывает на необходимость разработки и внедрения более качественных и точных инструментов для их диагностики и сопровождения.

Одним из эффективных инструментов для оценки навыков и поведения детей с РАС является метод тестирования Вербально-Бихевиорального Программирования VB-MAPP (Verbal Behavior Milestones Assessment and Placement Program). Этот метод разработан для анализа вербальных и социальных навыков у детей, позволяя специалистам получить детальное представление о текущем уровне развития и межличностных способностях.

VB-MAPP основан на методах прикладного анализа поведения и учитывает аспекты, которые особенно важны для успешной интеграции детей с РАС в общество. Статья направлена на изучение особенностей применения этого метода в процессе тестирования, на анализ его эффективности и практического применения в различных образовательных и терапевтических целях, а также на совершенствование данной системы для более результативного и структурированного использования.

1. Описание методологии VB-MAPP

VB-MAPP — это программа оценки навыков речи и социального взаимодействия для детей с аутизмом и другими нарушениями, а также это неотъемлемый инструмент в прикладном анализе поведения, который помогает как оценивать, так и разрабатывать поведенческие программы вмешательства, является частью образовательной программы ABA (Applied Behavior Analysis).

Программа была разработана в 2008 году Марком Сандбергом, и она основана на анализе речевого поведения Б.Ф. Скиннера, этапах развития ребенка и исследованиях в области анализа поведения [3].

Если проводить оценку VB-MAPP по всем правилам, тщательно тестируя каждый навык, то процесс проведения тестирования будет очень трудоемким и продолжительным. Проведе-

ние оценки уровня навыков 1-го уровня занимает от 2 до 3-х часов, тщательное тестирование навыков второго уровня — от 4-х до 6 часов, а навыков третьего уровня — 10–12 часов. Следовательно, если ребенок, которому специалист проводит оценку навыков, не говорит на данный момент, и демонстрирует, в общем, невысокий уровень навыков — проведение оценки навыков для такого ребенка может проводиться в течение одного занятия (2–3 часа). Но, если у ребенка уже сформированы некоторые речевые навыки, он неплохо понимает речь, то на проведение оценки навыков для такого ребенка потребуется 2–3 занятия, иногда больше. Если же у ребенка хорошо развиты речевые навыки, ребенок много и часто коммуницирует, то проведение оценки навыков для такого ребенка может занять довольно много занятий (6–10 занятий) [4].

Следовательно, обращаясь к специалисту, необходимо обратить внимание, насколько качественно проведена оценка навыков. К примеру, если специалист отчитывается о проведенной оценке навыков и отдает родителям разработанную программу после первого же занятия, то это может навести на подозрение о недобросовестных действиях специалиста.

По данным сайта «ФРЦ Аутизм» программа тестирования VB-MAPP включает в себя такие разделы:

1. «Вехи развития», содержащий 170 вех (навыков) развития трех возрастных уровней типично развивающихся детей (1 уровень — 0–18 месяцев, 2 уровень — 18–30 месяцев, 3 уровень — 30–48 месяцев). Предназначен для определения имеющихся у ребенка вербальных и социальных навыков.

2. «Барьеры», где специалист определяет преграды, мешающие обучению ребенка и темы, в которых у ребенка могут возникать проблемы. Под барьерами понимаются проблемы с поведением, контролем, зависимостью, самостимуляцией, неспособностью к обобщению, слабой мотивацией, сенсорной чувствительностью, дефектами в вербальных реакциях, социальных навыках, зрительном восприятии, имитации и артикуляции.

3. «Самопомощь», где прописаны 18 областей развития и их оценки, показывающие готовность ребенка к обучению в естественной среде.

4. Раздел «Анализ заданий и мониторинг приобретения навыков», дополняющий раздел «Вехи развития». Представляет собой перечень дробных преднавыков более раннего уровня, необходимых для достижения цели.

5. Также есть еще один компонент, содержащий в себе индивидуальные планы и цели обучения. Эта часть помогает сбалансировать программу вмешательства и обеспечить включение всех необходимых для конкретного ребенка задач.

2. Построение моделей

Как было сказано ранее, тестирование по методике VB-MAPP состоит из четырех основных частей, на основе которых формируется пятая — индивидуальный план развития ребенка. Несмотря на то, что мы не являемся педагогами и не обладаем квалификацией для непосредственного проведения программы VB-MAPP, в нашей работе мы опираемся на опыт и практические наработки компании «АутМама». Используя их подход как основу, мы стремимся адаптировать методологию VB-MAPP к специфическим потребностям сотрудников данной организации, чтобы сделать процесс тестирования более понятным и структурированным.

В ходе исследования существующей системы было выявлено, что ее текущая структура неудобна для практического использования. Система содержит множество разрозненных таблиц, затрудняющих хранение информации и поиск конкретных тестов для ребенка.

Предполагается разработка информационной базы на платформе «1С:Предприятие 8», благодаря ее широким возможностям для автоматизации бизнес-процессов и гибкой настройке под конкретные потребности.

Более детальное описание объектов, а также полное раскрытие теоретических и практических аспектов внедрения системы будут представлены в соответствующих дипломных работах. Это позволит углубленно рассмотреть методологию и реализацию, а также продемонстрировать преимущества использования информационной базы на платформе «1С:Предприятие 8» для оптимизации процесса диагностики и сопровождения детей с РАС.

Для удобства понимания основные и некоторые дополнительные сущности рассмотрены на конкретных примерах.

Для начала была разработана таблица вех (табл. 1). В этой таблице каждая веха представляет собой определенную группу навыков, например, «Социальные навыки». Для каждой вехи предусмотрены уровни развития, которые отражают прогресс ребенка, начиная с минимального уровня и заканчивая более высоким.

Каждый уровень характеризуется балльной оценкой, позволяющей количественно измерить достижения ребенка, а также описанием, которое детализирует поведенческие особенности и навыки, проявляемые на данном уровне. Например, в рамках социальных навыков минимальный уровень (1) соответствует начальным проявлениям общения, тогда как более высокий уровень предполагает активное взаимодействие, например, частые ответы на просьбы.

Такой формат позволяет специалистам легко отслеживать динамику развития ребенка и адаптировать индивидуальный план на основе прогресса, что делает систему более структурированной и удобной для использования.

Таблица 1

Пример заполнения вех развития

Веха	Уровень	Баллы	Описание
Социальные навыки	1	0,5	Минимально общается
		1	Иногда инициирует общение
		1,5	Часто отвечает на просьбы
		2	Инициирует общение при необходимости, редко реагирует на просьбы
	2	2,5	Относительно свободно отвечает на просьбы
		3	Общение может инициировать по просьбе, спонтанно или при необходимости
…	…	…	…

Кроме вех развития, были выделены барьеры (табл. 2), которые могут препятствовать достижению определенных навыков. Для каждой вехи предусмотрены уровни барьера, описывающие степень сложности, с которой ребенок может сталкиваться, например, от «слабо выражен» до «крайне трудна». Такая структура позволяет учесть индивидуальные трудности ребенка и скорректировать подход к обучению с учетом его потребностей.

Навыки самопомощи представлены в табл. 3. Они состоят из основных групп, такие как «Одежда» и «Прием пищи», а каждая группа содержит перечень конкретных навыков, необходимых для выполнения базовых действий. В столбце «Наличие» отмечено, освоен ли данный навык, что позволяет быстро оценить уровень самостоятельности ребенка в повседневной жизни и определить области, требующие дополнительной поддержки.

Анализ заданий служит дополнением к основной системе вех, позволяя более детально оценить навыки ребенка (табл. 4). Если ребенок пока не соответствует требованиям определенного уровня, например, второго, специалисты могут отметить, какие конкретные дополнительные задания из предыдущих этапов ему уже удалось освоить.

В таблице для каждой вехи представлены уровни и подуровни, обозначенные буквами, например, 1а, 1б и т. д. Для уровня 1 в категории «Социальные навыки» определены навыки, та-

Таблица 2

Пример заполнения барьеров

Веха	Уровень барьера	Описание
Социальные навыки	1	Слабо выражен
	2	Имеет трудности
	3	Имеет значительные трудности
	4	Эта тема крайне трудна для ребенка
ТАКТ	1	Слабо выражен
	2	Имеет трудности
…	…	…

Таблица 3

Пример заполнения тестирования «Самопомощь»

Группа	Навык	Наличие
Одевание	Снимает одежду	Да
	Обувается	Нет
	Надевает одежду	Да
Прием пищи	Ест ложкой без помощи	Нет
…	…	…

Таблица 4

Пример заполнения «Анализа заданий»

Веха	Уровень	Баллы	Описание
Социальные навыки	1	1а	Смотрит, когда к нему обращаются
		1б	Может спонтанно ответить
		1в	Иногда спонтанно инициирует общение
		1г	Иногда спонтанно отвечает и говорит
	2	2а	Редко отвечает, когда спрашивают
		2б	Отвечает, когда спрашивают
…	…	…	…

кие как способность смотреть на собеседника, реагировать на обращение и иногда инициировать общение. Эта структура позволяет более гибко оценивать навыки, фиксируя достижения ребенка, даже если он еще не достиг следующего уровня, и при необходимости адаптировать учебный план под его текущие возможности.

В рамках данной системы также были введены дополнительные сущности для учета информации о сотрудниках, детях и родителях. Эти данные позволяют более эффективно организовать процесс взаимодействия всех участников.

Также предлагается возможность дополнить систему функцией составления расписания занятий, что упростит кураторам ориентирование по занятиям и обеспечит планирование работы с детьми.

Расписание составляется вручную путем записи ребенка на занятия в доступное на данный момент время. Предполагается, что сформированное расписание может просматриваться в виде таблиц, аналогичных табл. 5.

Все описанные выше схемы и объекты имеют удобную структуру, могут быть созданы в конфигурации, разрабатываемой на платформе «1С:Предприятие 8».

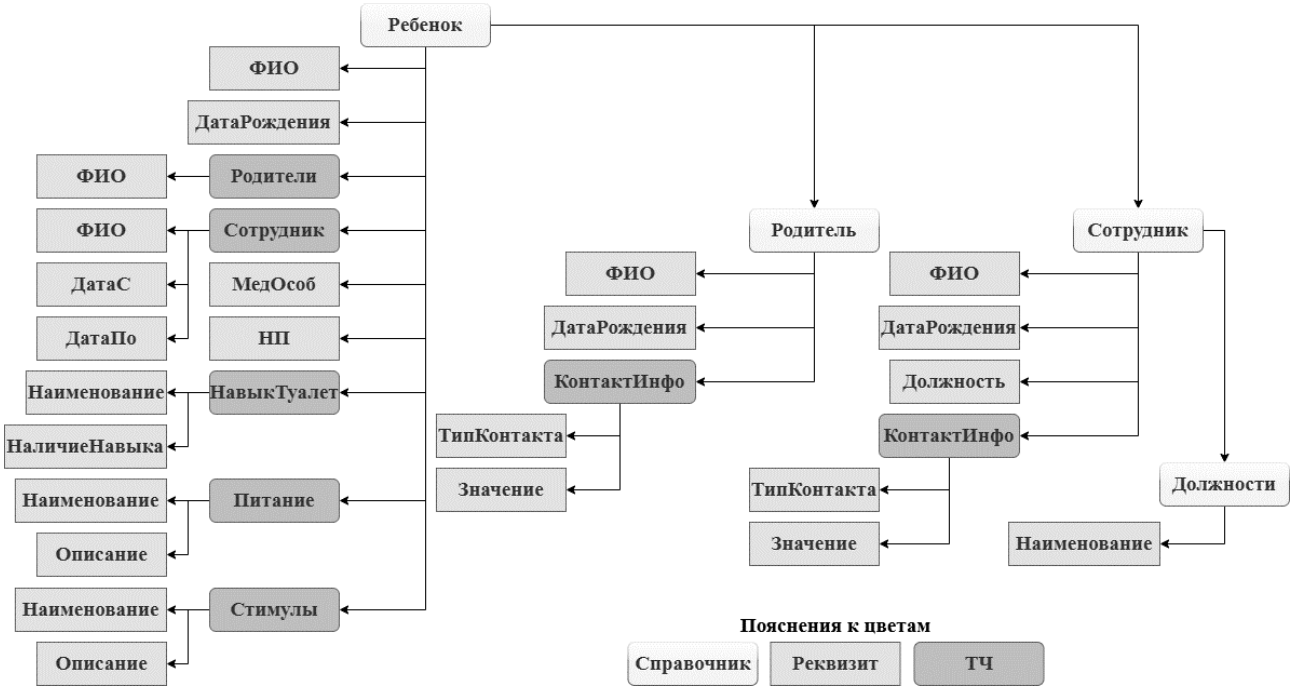


Рис. 1. Схема взаимоотношений дополнительных сущностей

Таблица 5

Шаблон для расписания

Дата в формате «День недели + ДД.ММ.ГГГГ»		
Время в формате «ЧЧ:ММ»	ФИО Ребенка 1	ФИО Сотрудника 1
Время в формате «ЧЧ:ММ»	ФИО Ребенка 2	ФИО Сотрудника 1
…	…	…

Такой подход обеспечивает централизованное хранение данных и упрощает доступ к информации, что делает процесс тестирования и сопровождения детей с РАС более эффективным и удобным для практического применения.

Заключение

Проведенное исследование подтвердило важность структурированного подхода к оценке навыков и развития детей с РАС, что позволяет более точно выявлять их сильные стороны и зоны, требующие поддержки. Методология VB-MAPP, адаптированная с учетом опыта компании «АутМама», показала свою эффективность в упрощении процесса тестирования и создании индивидуального плана для каждого ребенка.

Описанные схемы вех, барьеров, анализа заданий и навыков самопомощи обеспечивают комплексный подход к диагностике, позволяя фиксировать динамику развития ребенка и учитывать его индивидуальные особенности. Структурированное представление информации в таблицах также облегчает специалистам работу с данными, а разработка данной системы в виде информационной базы на платформе «1С Предприятие» открывает возможности для автоматизации процессов записи, хранения и анализа данных.

Литература

1. Всемирный день распространения информации о проблеме аутизма // Риа Новости: [сайт]. – 2022. – URL: https://ria.ru/20240402/autizm-1937186744.html (дата обращения: 28.10.2024).

2. Аналитическая справка о состоянии образования обучающихся с расстройствами аутистического спектра в субъектах Российской Федерации в 2022 году // ФРЦ Аутизм: [сайт]. – 2022. – URL: https://autism-frc.ru/ckeditor_assets/attachments/4263/analiticheskaya_spravka_monitoring_ras_2022_29_12_2022.pdf (дата обращения: 26.10.2024).

3. Программа оценки навыков речи и социального взаимодействия для детей с аутизмом и другими нарушениями (VB-MAPP) // ФРЦ Аутизм: [сайт]. – 2024. – URL: https://autism-frc.ru/early-help/metody/1420 (дата обращения: 25.10.2024).

4. *Эрц Ю. М.* VB-MAPP на русском языке — 5 наиболее распространенных «недочетов» при использовании / Ю. М. Эрц // Аутизм | ABA-терапия: [сайт]. – 2024. – URL: https://autism-aba.blogspot.com/2017/02/5-false-actions-in-using-vb-mapp.html (дата обращения: 28.10.2024).

УДК 004.415

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР НЕКОТОРЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ

Д. М. Башлыков

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются технологии мануального и автоматизированного тестирования одного из компонентов программного продукта. Целью данной статьи является раскрытие основных возможностей функционального тестирования, демонстрация примера проведения тестирования программного модуля ручными и автоматизированными средствами.

Ключевые слова: функциональное тестирование, шаблон бизнес-объектов, автоматизация тестирования, мануальное тестирование, позитивное тестирование, тест-кейс, Selenium, TestNg, Allure.

Введение

Рассматривается проблема проверки функциональности одного из модулей программного продукта «Горно-геологическая информационная система», именуемого как Реестр шаблонов бизнес-объектов.

1. Основные принципы и понятия функционального тестирования

Функциональное тестирование — вид тестирования, включающий в себя процесс проверки функциональности системы, работы системных компонентов на соответствие заявленным требованиям и ожиданиям пользователей.

Тестируются компоненты, доступные пользователю, такие как вход в систему, основные навигации по программному продукту, важнейшие бизнес-требования, а также работа с базой данных, взаимодействие клиента с сервером и другие.

Принято выделять жизненно-важные принципы функционального тестирования:

– проверка ожидаемого поведения;
– полнота тестов;
– использование реальных данных;
– документирование тестов;
– автоматизация и ручное тестирование.

2. Описание пользовательского интерфейса реестра шаблонов бизнес-объектов

Реестр представляет собой многофункциональную форму, на которой пользователь может создавать, удалять, редактировать любой из шаблонов как через правую панель (выезжающее справа меню), так и через табличное представление бизнес-объектов (рис. 1).

Каждый шаблон наделен своим собственным списком атрибутов. Атрибуты могут быть системными и пользовательскими.

Системные атрибуты обязательны к заполнению и являются основными характеристиками шаблона. Пользовательские атрибуты необязательны, и их создание — опционально.

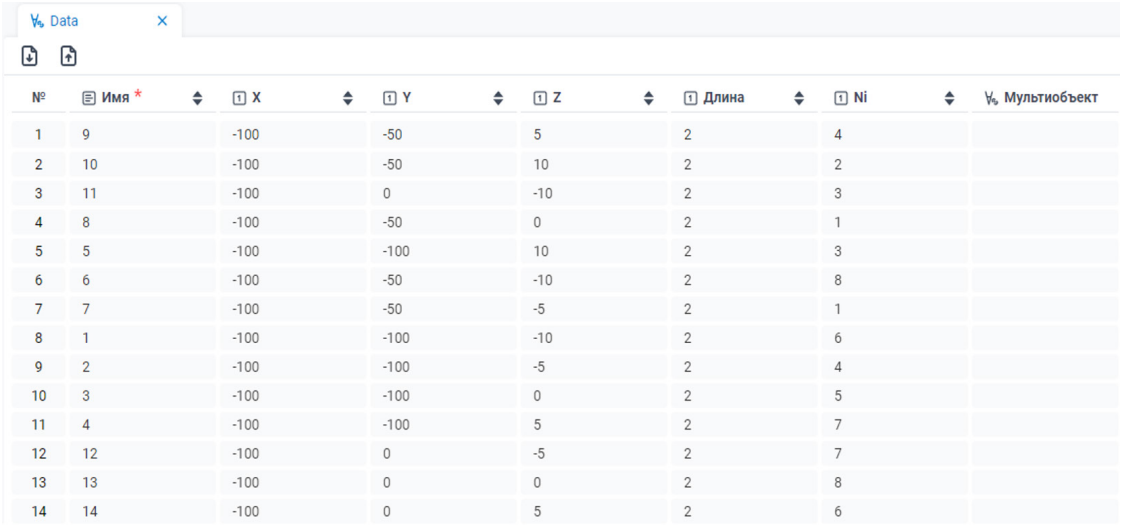


Рис. 1. Табличное представление шаблона

3. Мануальная проверка на создание шаблона бизнес-объектов

Также одним из важных критериев корректной работы табличного представления бизнес-объектов является создание нового шаблона прямо из вида в таблице (рис. 2).

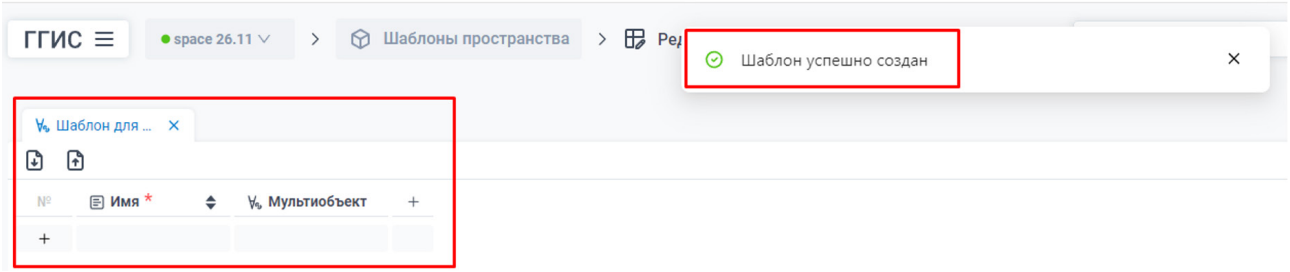


Рис. 2. Создание шаблона бизнес-объектов на стороне клиента

4. Проверка создания шаблона бизнес-объектов через API

При создании нового шаблона через табличное представление от клиента на сервер уходит Post-запрос на создание ресурса (рис. 3).

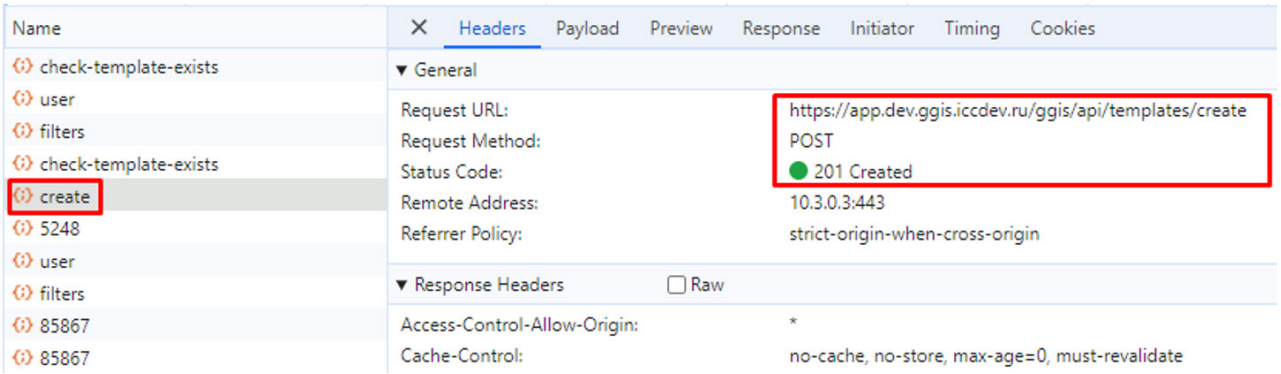


Рис. 3. Проверка корректности запроса на сервер о создание шаблона

Из запроса видно, что ресурс был успешно создан (получен статус ответа 201). Однако необходимо также проверить корректность ответа от сервера (response) со всеми его составляющими (статус-код, тело ответа в виде json-файла, время ответа и т. д.)

Для этого используется десктопное приложение Postman, которое служит помощником в тестирование прикладного программного интерфейса (API).

Сформировав запрос к тому же сервису, что и через пользовательский интерфейс приложения, заполнив все необходимые поля в теле запроса, передав токен аутентификации и отправив запрос, можно получить ответ от сервера (рис. 4).

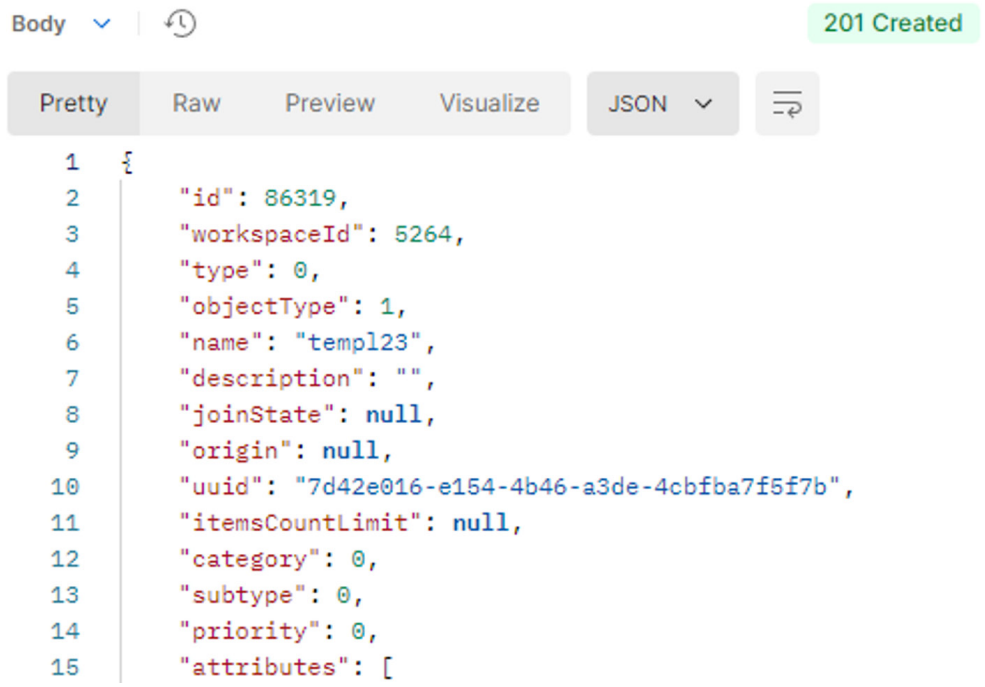


Рис. 4. Ответ от сервера в Postman

5. Проверка создания шаблона в базе данных

Для полноты проверки корректности работы данного компонента системы, а именно — создания шаблона бизнес объектов, необходимо проверить, что ресурс действительно появился на backend части приложения, в базе данных.

По исполнении следующего запроса SQL результирующая таблица будет состоять из шаблона бизнес объекта, созданного под учетной записью с логином ‘d.bashlykov’ в пространстве с id = 5248 и типом = 0 (т.е. пользовательский шаблон, а не шаблон по умолчанию) (рис. 5).

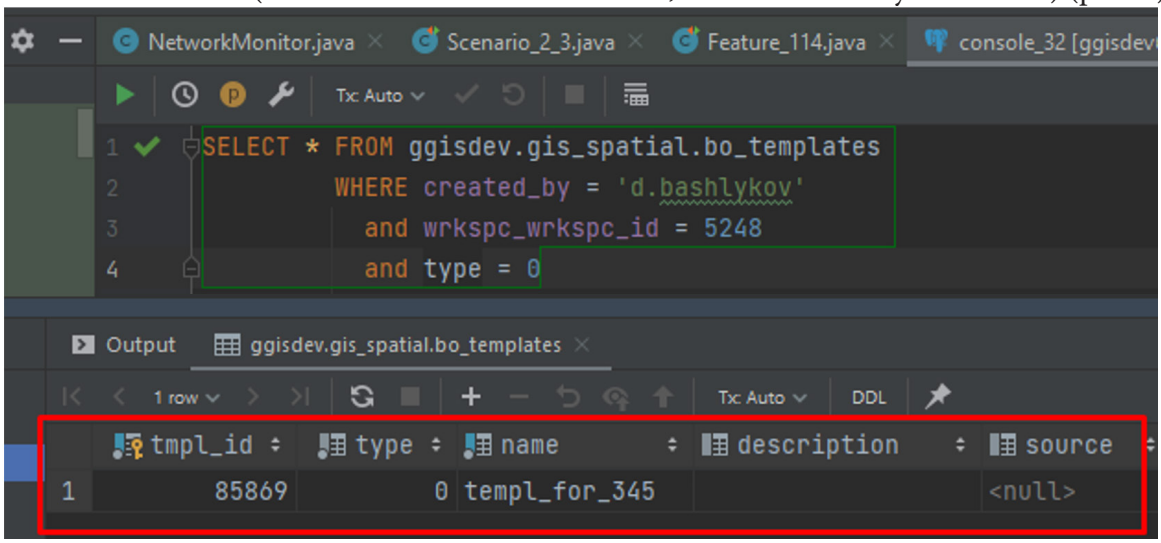


Рис. 5. Проверка существования шаблона в базе данных

6. Автоматизация тестирования на создание шаблона бизнес объектов

Проект по автоматизации тестирования как правило представляет собой слаженную, хорошо структурированную иерархию папок и пакетов с файлами. Чаще всего применяется объектная модель страницы для более гибкого подхода к автотестам.

Кейс на проверку создания нового шаблона бизнес-объектов подойдет для того, чтобы его автоматизировать. Для автоматизации тестирования в случае рассматриваемой задачи можно использовать библиотеку 'Selenium' вкупе с тестовым модулем 'TestNg'. Программный код реализован на языке программирования Java.

Результатом прогона данного сценария является отчет о результатах тестирования в среде Allure report (рис. 6).

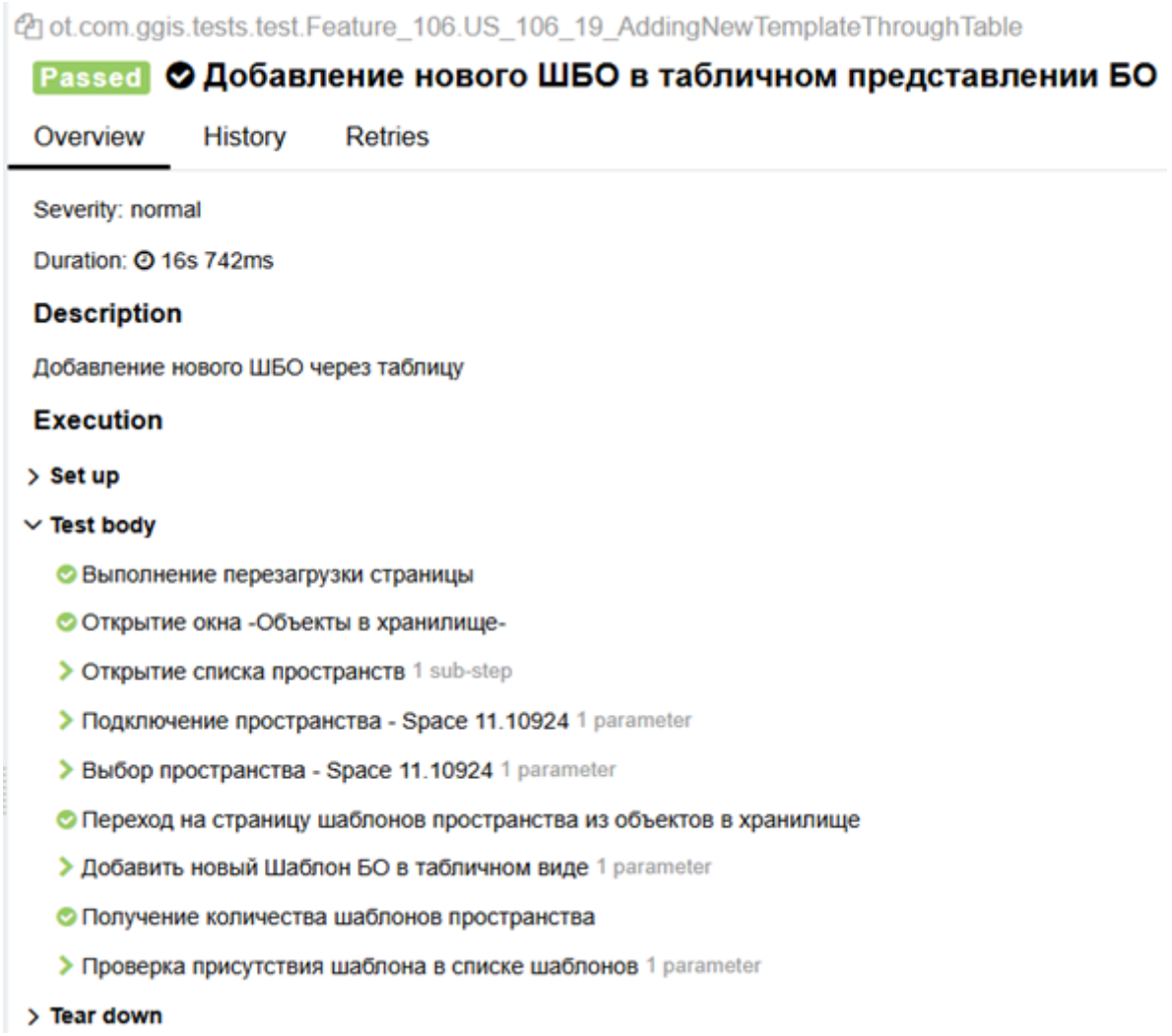


Рис. 6. Отчет в системе Allure

Заключение

Рассмотрена проблема тестирования одного из компонентов модуля системы и различные подходы к проверке части функциональности. Выявлены требования, проведены позитивные тестовые сценарии при применении мануального и автоматизированного способов тестирования. Анализ технологий тестирования показал, какими методами можно проводить проверку реализации каких-либо компонентов. Автоматизация тестирования способна покрывать

множество различных сценариев, что облегчает процесс проверки корректности функциональных возможностей программного продукта.

Литература

1. *Савин Р.* Тестирование Дот Ком, или Пособие по жестокому обращению с багами в интернет-стартапах. – М. : Дело, 2007. – 312 с.

2. *Куликов С. С.* Тестирование программного обеспечения. Базовый курс. – 3-е изд. – Минск : Четыре четверти, 2020. – 312 с.

УДК 004.657

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ИНДЕКСИРОВАНИЯ В ДВИЖКАХ MYISAM И INNODB В СУБД MYSQL

А. Э. Бурков

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье представлен анализ реализации B-tree индексов в MySQL на примере движков MyISAM и InnoDB. Рассматривается различие в структуре хранения данных: в MyISAM первичные и вторичные индексы идентичны, с хранением значений ключей и ссылок на строки данных в листьях, что позволяет таблицам существовать без первичного ключа. В InnoDB используется кластерный индекс, где строки данных размещаются непосредственно в листьях первичного индекса, а вторичные индексы содержат ссылки на первичный ключ. Такой подход ускоряет доступ к данным и обеспечивает их согласованность при обновлениях. Приведенные результаты показывают, что использование кластерного индекса в InnoDB значительно повышает эффективность работы с индексами по сравнению с MyISAM.

Ключевые слова: индексация данных, сбалансированное дерево поиска, производительность СУБД, таблица, движок хранения данных, база данных, кластеризация, ключ, строка.

Введение

Работа представляет собой сравнительный анализ устройства и возможностей использования индекса, основанного на сбалансированном дереве поиска (далее — B-tree).

В MySQL реализовано несколько типов индексов. Выбор типа индекса основывается на специфике задачи. Например, хэш индекс применяется для хранения данных в виде ключ-значение в оперативной памяти, FULLTEXT индекс используется для полнотекстового поиска данных, SPATIAL — для геоданных. Но в большинстве случаев применяется B-tree индекс, благодаря своей универсальности и эффективности. Данная структура обеспечивает логарифмическое время выполнения операций поиска.

MySQL предоставляет два основных движка хранения данных для таблиц: MyISAM и InnoDB. Первый использовался по умолчанию до версии 5.6, после чего основным стал InnoDB [1]. Оба движка предоставляют возможность создавать индексы для таблиц, но до версии 5.6.4 возможность полнотекстовой индексации была только у MyISAM, что делало его приоритетным, если такой тип индекса был необходим.

1. Организация индекса

1.1. Структура индекса в MyISAM

Схематично B-tree индекс для MyISAM представлен на рис. 1 [2].

В данной таблице индекс построен по числовому полю “ID”. В таком случае получается, что в узловых элементах находятся значения индекса и ссылки на более нижний узел или лист. В листовых элементах тоже находятся значения индекса, но они уже ссылаются на сами данные из таблицы.

Особенность MyISAM заключается в том, что для существования таблицы ей не нужен первичный ключ, для MyISAM нет разницы между первичным и вторичным индексами. Учитывая эту особенность, можно представить схематично данные индексы таким образом (рис. 2.):

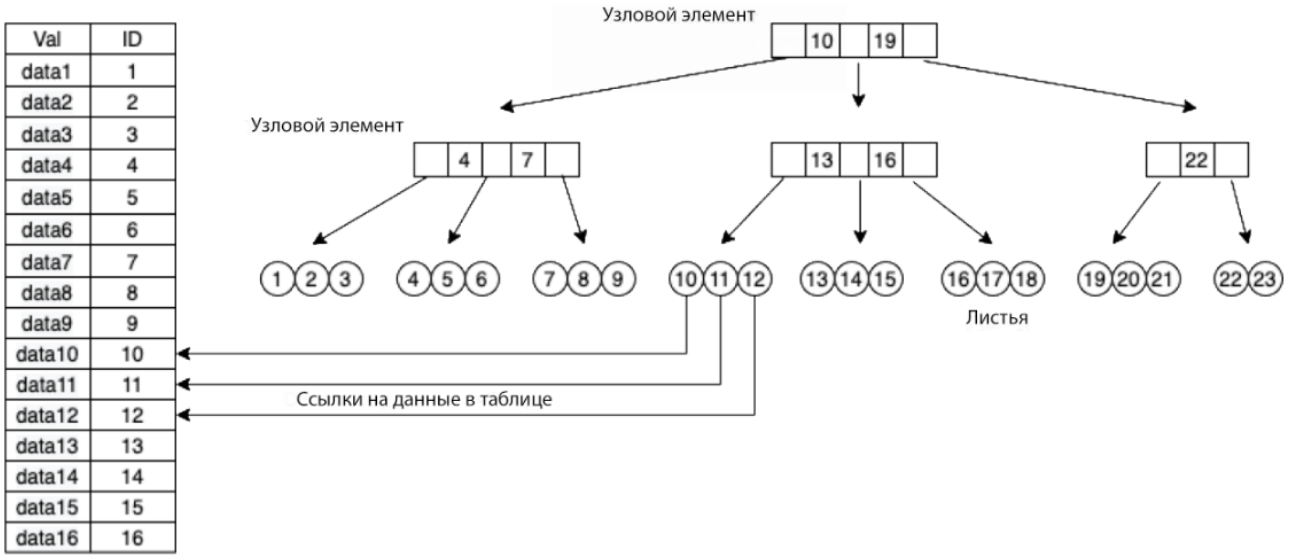


Рис. 1. Устройство B-tree индекса MyISAM

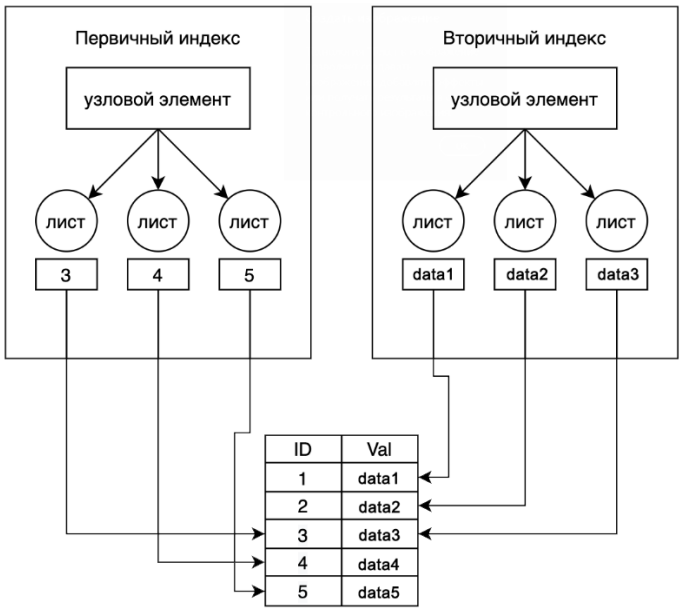


Рис. 2. Первичный и вторичный индексы MyISAM

На рисунке видно, что структура индексов одинаковая: первичный индекс построен по полю “ID”, а вторичный по полю “Val”. В обоих случаях в листьях расположены значения и ссылки на строки в таблице.

1.2. Структура индекса в InnoDB

InnoDB это более современный движок хранения данных, и в нем присутствуют различия в структуре между первичным и вторичным индексами. Таблица по-прежнему может существовать без первичного ключа, но в этом случае первичный ключ будет выбран автоматически по полю, по которому его можно создать. Это называется «суррогатный» первичный ключ. Если ни одно поле не подходит для создания первичного ключа, то InnoDB создаст новое числовое поле, которое будет скрыто.

В случае InnoDB используется концепция кластерного индекса [3]. Это означает, что индекс содержит не ссылки, а сами строки данных в листовых узлах. Схематично это можно представить на рис. 3.

Val2	Val	ID
v1	data1	1
v2	data2	2
v3	data3	3
v4	data4	4
v5	data5	5
v6	data6	6
v7	data7	7
v8	data8	8
v9	data9	9
v10	data10	10
v11	data11	11
v12	data12	12
v13	data13	13
v14	data14	14
v15	data15	15
v16	data16	16

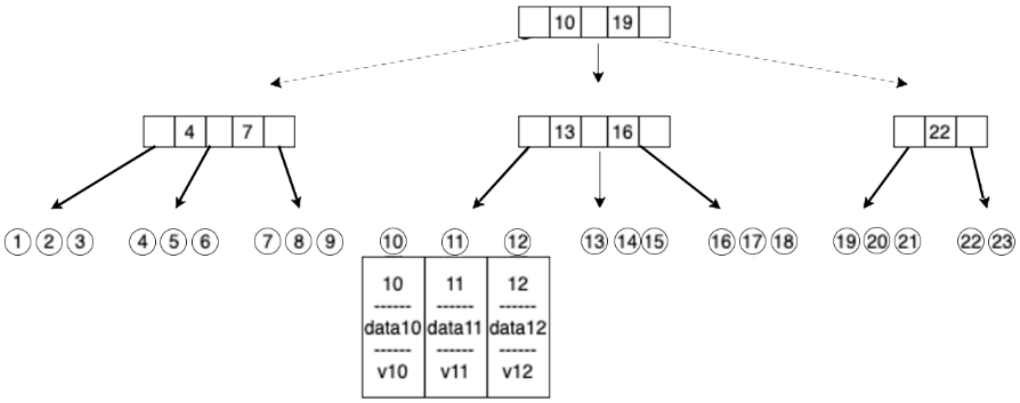
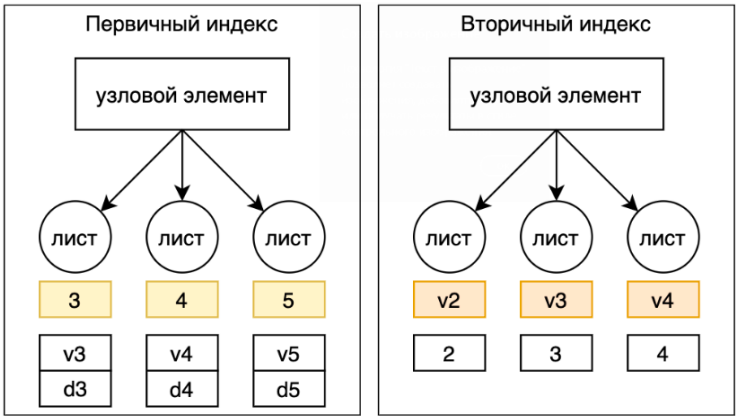


Рис. 3. Устройство B-tree индекса InnoDB

Как и в случае MyISAM индекс построен по числовому полю “ID”, но в данном устройстве индекса все данные строк хранятся в самом индексе. Это эффективно, так как позволяет избежать дополнительного чтения с диска при переходе от листа на данные в строке.

Так как у InnoDB первичный индекс отличается от вторичного, то их устройство также будут отличаться. На рис. 4 представлено схематичное устройство данных индексов.



ID	Val	Data
1	v1	d1
2	v2	d2
3	v3	d3
4	v4	d4
5	v5	d5

Рис. 4. Первичный и вторичный индексы InnoDB

Как и в случае MyISAM первичный индекс построен по полю “ID”, а вторичный по полю “Val”. По рисунку видно, что все данные хранятся в первичном индексе, во вторичном индексе, в листьях находятся значения индекса и первичный ключ. Это удобно для обеспечения согласованности данных. Если строка была перемещена или обновлена, связи между индексами остаются корректными, так как во вторичном индексе хранится первичный ключ.

2. Создание тестовой базы банных

Для демонстрации работы B-tree индекса на MyISAM и InnoDB подготовлена тестовая база данных авиаперевозок с данными, близкими к настоящим [4]. Размер полученной базы дан-

ных составляет 1.7 Гб для MyISAM и 2.4 Гб для InnoDB. Таблица, для которой будут использоваться индексы содержит более 30 миллионов записей.

Особенностью InnoDB при загрузке большого объема данных является то, что он не хранит точное количество строк в таблице. Вместо этого количество строк определяется приблизительно через статистику, собранную движком (рис. 5), в отличие от MyISAM, который поддерживает точное количество строк в таблице в метаданных, что позволяет быстро получить это число без необходимости полного сканирования таблицы (рис. 6).

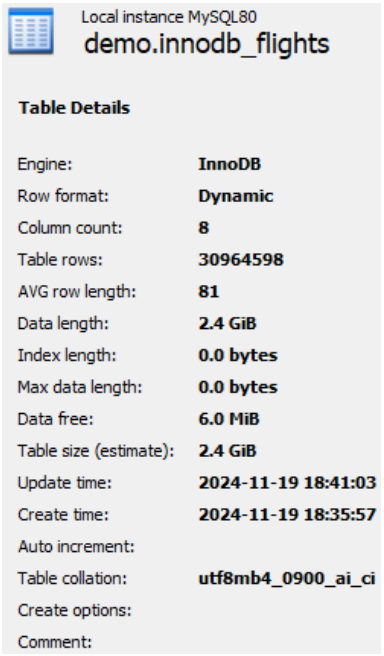


Рис. 5. Анализ таблицы на движке InnoDB

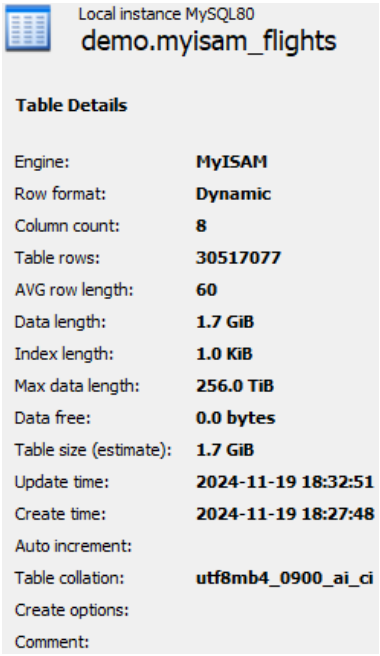


Рис. 6. Анализ таблицы на движке MyISAM

3. Сравнение эффективности B-tree индекса

Для сравнения эффективности скорости выполнения запроса построим индекс на одном и том же поле “passenger_name”. Создание индекса одинаково для обоих движков, например для MyISAM:

```
CREATE INDEX btree_index ON demo.myisam_flights (passenger_name) USING BTREE;
```

Проанализируем SELECT запрос по точному значению, поле которого покрыто индексом:

```
EXPLAIN ANALYZE
SELECT * FROM demo.innodb_flights
WHERE passenger_name = 'VITALIY MATVEEV';
```

Для сравнения эффективности были выбраны несколько показателей: время создания индекса, занимаемое место на диске, скорость выполнения. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты анализа запроса

Параметр	MyISAM	InnoDB
Время создания индекса	300 с	42 с
Занимаемое пространство	183 МБ	740 МБ
Время выполнения SELECT запроса	0.673 с	0.0291 с

InnoDB значительно быстрее MyISAM при создании индексов. Это указывает на более эффективную реализацию построения индексов в InnoDB [5]. MyISAM потребляет гораздо меньше места для хранения индекса, в то время как InnoDB занимает почти в 4 раза больше

памяти. В InnoDB используется кластеризация индексов, где дополнительно хранятся сами данные. InnoDB показывает значительно более быстрое время выполнения запросов, что объясняется оптимизированной обработкой данных благодаря кластерным индексам.

Для проверки скорости выполнения операций записи выполним UPDATE запрос, который затрагивает около 600000 записей по проиндексированному полю, чтобы сравнить скорость обновления:

```
UPDATE demo.myisam_flights
SET passenger_name = 'SERGEY TARASOV'
WHERE passenger_name like 'SERGEY%';
```

Также сравним скорость INSERT запроса. Для теста была создана хранимая процедура, которая в цикле генерирует 100000 записей. Общие результаты для операций записи представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты анализа запросов операции записи

Параметр	MyISAM	InnoDB
Время выполнения UPDATE запроса	34 с	306 с
Время выполнения INSERT запроса	53 с	106 с

В случае InnoDB время выполнения обоих операций записи оказался больше, это связано с тем, что MyISAM использует более простую структуру индекса и не поддерживает транзакции, поэтому не тратит дополнительное время на запись данных в журнал изменений. Однако это может быть опасно, если операция записи прервется. Также MyISAM при записи блокирует всю таблицу, до тех пор, пока операция не завершится, в то время как InnoDB блокирует только изменяемую строку, позволяя другим транзакциям параллельно обрабатывать другие.

Когда новая запись вставляется в таблицу InnoDB, то движок старается оставить 1/16 страницы свободной для последующих вставок и обновлений индекса. Если записи в индексе вставляются в последовательном порядке, то результирующие страницы индекса заполняюстя примерно на 15/16. Если записи вставляются в случайном порядке, страницы заполняются от 1/2 до 15/16 [6]. Когда нужная страница обнаружена, то сначала происходит вставка записи в кластерный индекс, а затем для вторичных индексов InnoDB также ищет соответствующие узлы и обновляет их, ссылаясь на кластерный индекс.

Если происходит обновление строк с изменением значений в индексированных столбцах, то InnoDB находит строку для обновления через кластерный индекс, удаляет эту запись из индекса, а затем вставляет её аналогично процессу INSERT.

Заключение

По результатам анализа можно сделать вывод, что движок InnoDB является более подходящим для задач, требующих высокой скорости выполнения запросов чтения, благодаря использованию кластерных индексов и оптимизированной обработке данных. Однако это достигается за счет большего объема занимаемого пространства. Также InnoDB обеспечивает большую надежность благодаря поддержке транзакций и скорость операций записи при параллельной обработке, так как блокирует только изменяемые строки.

С другой стороны, MyISAM демонстрирует себя как более экономичный в плане объема хранимых данных, что делает его предпочтительным для сценариев, где скорость индексации не играет ключевой роли, а минимизация места хранения является приоритетом. В том числе обеспечивает более высокую скорость операций записи из-за отсутствия транзакций. Также это исключает возможность взаимоблокировок.

Таким образом, выбор движка следует осуществлять исходя из конкретных требований и ограничений системы.

Литература

1. Отличия движков InnoDB от MyISAM в MySQL. – URL: https://docs.rbsoft.ru/otlichiya-dvizhkov-innodb-ot-myisam-v-mysql. – (Дата обращения: 18.11.2024).

2. Различия индексов MySql. – URL: https://habr.com/ru/articles/556440. – (Дата обращения: 18.11.2024).

3. Документация MySQL. – URL: https://dev.mysql.com/doc. – (Дата обращения: 18.11.2024).

4. Демонстрационная база данных. – URL: https://postgrespro.ru/education/demodb. – (Дата обращения: 18.11.2024).

5. *Шварц Б.* MySQL по максимуму / Б. Шварц, В. Ткаченко, П. Зайцев. – Санкт-Петербург : Питер, 2020. – 864 с. – ISBN 978-5-4461-0696-7.

6. The Physical Structure of an InnoDB Index. – URL: https://dev.mysql.com/doc/refman/8.4/en/innodb-physical-structure.html. – (Дата обращения: 26.11.2024)

УДК 004.77

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЁННОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ В СЕТИ WI-FI

В. Е. Глушаков

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж

Аннотация. Рассматривается математическая модель оценки времени передачи данных в сети Wi-Fi, позволяющая оценивать время доставки пакета в зависимости от разных параметров, и методика оценки загруженности сети на основе данной модели.
Ключевые слова: время доставки пакетов, беспроводная сеть, пропускная способность.

Введение

В связи с быстрым развитием беспроводных сетей актуальным является оценка и оптимизация времени доставки информации, которое во многом зависит от задержек и помех. В данной статье рассматривается математическая модель, позволяющая оценивать время доставки одного пакета одной станцией в зависимости от различных параметров: размера пакетов, коэффициента неудачной отправки, задержек и т. д., показана невозможность использования среднего времени доставки из-за очень большого разброса временных значений и необходимость разработки нового подхода для оценки загруженности сети, описана новая методика такой оценки.

Методы и принципы исследования

Для построения математической модели были использованы схемы передачи данных для стандарта 802.11, представленные на рис. 1, и описанные в [1, 2].

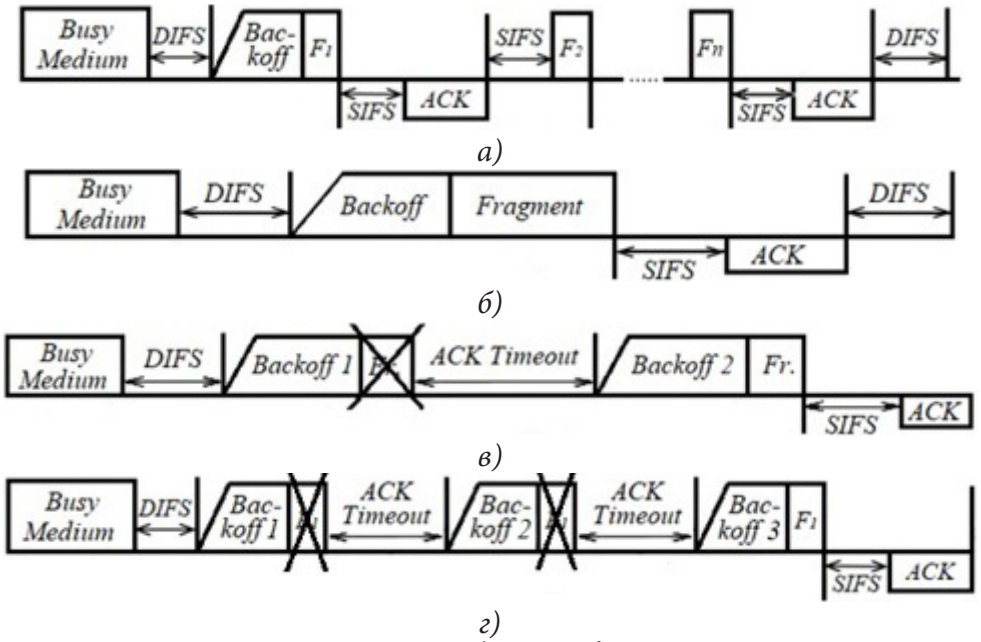


Рис. 1. Основные режимы передачи информации в сети Wi-Fi:
а) ускоренная передача n пакетов в режиме Bursting, б) успешная передача одного пакета, в) неудачная передача пакета с 1-й попытки, г) неудачная передача пакета со 2-й попытки

Математическое моделирование процесса передачи данных

Процесс обмена пакетами будем считать однородным марковским с дискретными состояниями и непрерывным временем. Для нахождения предельных вероятностей состояний системы и закона распределения времени передачи информации, с учётом схемы передачи данных на рис. 1, построим размеченный граф состояний, представленный на рис. 2.

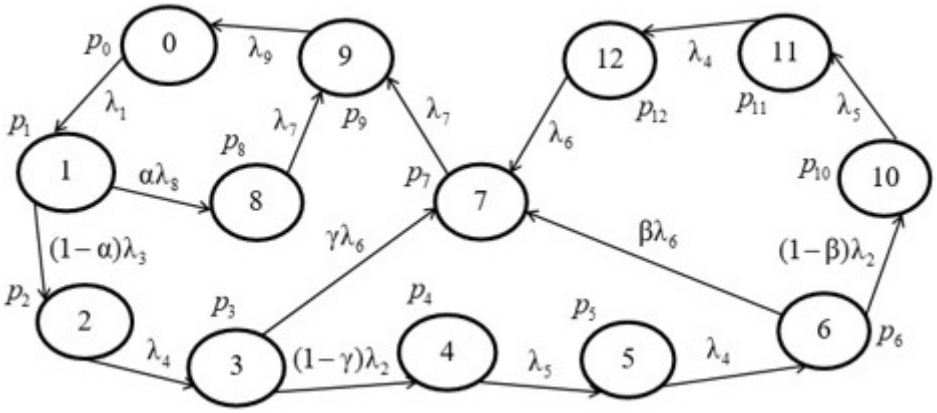


Рис. 2. Граф состояний для передачи информации

Опишем состояния, представленные на рис. 2.

- p_0 — первоначальное состояние (пакеты для отправки отсутствуют);
- p_1 — передающее устройство генерирует пакеты для отправки;
- p_2 — регламентная пауза *DIFS+ Backoff Time_1*;
- p_3, p_6, p_{12} — отправка пакета с задержкой с 1-го, 2-го и 3-го раза соответственно;
- p_4, p_{10} — передающее устройство осуществляет неудачную передачу части пакетов соответственно с 1-го и 2-го раза;
- p_5 — регламентная пауза *ACK_Timeout+ Backoff Time_2*;
- p_7 — регламентная пауза *SIFS*;
- p_8 — отправка пакета с задержкой в режиме Bursting, передающее устройство ждет время *SIFS*;
- p_9 — принимающее устройство передает пакет подтверждения ACK с задержкой (пакет доставлен);
- p_{11} — регламентная пауза *ACK_Timeout+Backoff Time_2*.

Здесь λ_i $(i=1,\ldots,9)$ — интенсивности передачи данных, зависящие от различных параметров функционирования сети; значения α, β и γ выбираются в зависимости от режимов функционирования сети, представленных на рис. 1.

Соответствующая система уравнений Колмогорова примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = \lambda_9 p_9 - \lambda_1 p_0 \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda_1 p_0 - \alpha\lambda_8 p_1 - (1-\alpha)\lambda_3 p_1 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = (1-\alpha)\lambda_3 p_1 - \lambda_4 p_2 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_4 p_2 - \gamma\lambda_6 p_3 - (1-\gamma)\lambda_2 p_3 \\ \dfrac{dp_4}{dt} = (1-\gamma)\lambda_2 p_3 - \lambda_5 p_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp_5}{dt} = \lambda_5 p_4 - \lambda_4 p_5 \\ \dfrac{dp_6}{dt} = \lambda_4 p_5 - \beta\lambda_6 p_6 - (1-\beta)\lambda_2 p_6 \\ \dfrac{dp_7}{dt} = \beta\lambda_6 p_6 + \gamma\lambda_6 p_3 + \lambda_6 p_{12} - \lambda_7 p_7 \\ \dfrac{dp_8}{dt} = \alpha\lambda_8 p_1 - \lambda_7 p_8 \\ \dfrac{dp_9}{dt} = \lambda_7 p_7 + \lambda_7 p_8 - \lambda_9 p_9 \\ \dfrac{dp_{10}}{dt} = (1-\beta)\lambda_2 p_6 - \lambda_5 p_{10} \\ \dfrac{dp_{11}}{dt} = \lambda_5 p_{10} - \lambda_4 p_{11} \\ \dfrac{dp_{12}}{dt} = \lambda_4 p_{11} - \lambda_6 p_{12} \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} p_0(0) = 1 \\ p_i(0) = 0 \quad (i = 1,\ldots,12). \end{cases} \quad (2)$$

С учётом схем на рис. 1 были рассмотрены следующие режимы работы сети Wi-Fi:

1) ускоренная передача нескольких пакетов $(\alpha = 1)$ — путь 0–1–8–9;

2) успешная передача пакета с 1-й попытки $(\alpha = 0,\ \gamma = 1)$ — путь 0–1–2–3–7–9;

3) успешная передача пакета со 2-й попытки $(\alpha = 0,\ \gamma = 0,\ \beta = 1)$ — путь 0–1–2–3–4–5–6–7–9;

4) успешная передача пакета с третьей попытки $(\alpha = 0,\ \gamma = 0,\ \beta = 0)$ — путь 1–2–3–4–5–6–10–11–12–7–9.

Для численного решения системы (1)–(2) были использованы значения параметров из стандарта IEEE 802.11b/g [3, 4]: $t_{SIFS} = 10$ *мкс*, $t_{SLOT_TIMER} = 20$ *мкс*, $t_{DIFS} = t_{SIFS} + 2t_{SLOT_TIMER} = 50$ *мкс*, $t_{ASK_Timeout} = 10$ *мкс*, размер фрейма ACK — 14 байт. Система решалась приближённо неявным одношаговым методом Розенброка с использованием программного пакета Maple 17.

Анализ результатов

Полученные результаты сравнивались с результатами натурного эксперимента, проведённого в лаборатории факультета ПММ с использованием экспериментальной установки, представленной на рис. 3 и подробно описанной в [5, 6] (клиенты — ноутбуки, серверы — компьютеры).

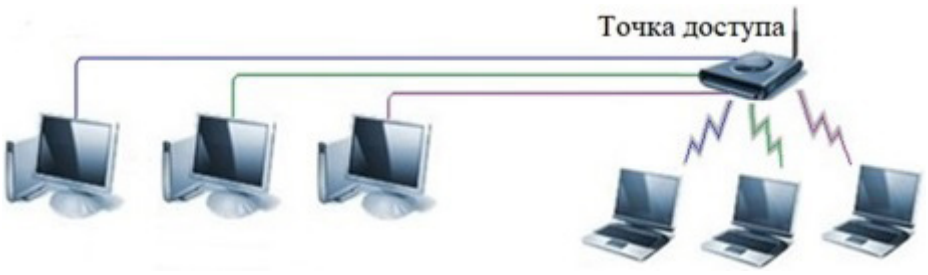


Рис. 3. Схема экспериментальных исследований

В результате проведения пяти измерений для пакетов разного размера с различной скоростью отправки были построены графики (рис. 4), показавшие несостоятельность использования среднего времени для оценки загрузки сети в связи с очень большим разбросом временных значений.

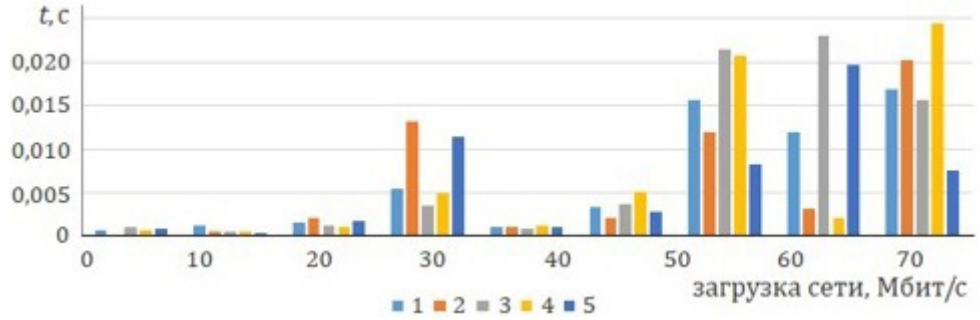


Рис.4. Среднее время доставки пакетов для различных серий экспериментов в зависимости от загруженности сети

В связи с этим в [6] была предложена следующая методика.

Для каждого из описанных выше режимов 1–4 была решена система (1)–(2), построены графики плотностей вероятности времени доставки пакетов, найдены точки их пересечения. Эти точки являются границами диапазонов, на которые разбивается всё время доставки пакета (рис. 5).

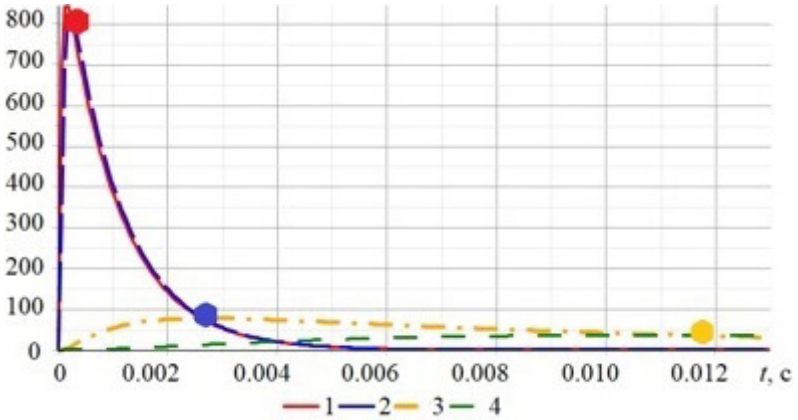


Рис. 5. Плотности вероятностей времени доставки фрагментов для выделенных режимов функционирования информационной системы

Для каждого диапазона найден процент пакетов, в него попадающий, построены линейные аппроксимации (рис. 6), посчитаны величина достоверности аппроксимации (R^2) и коэффициент линейной корреляции.

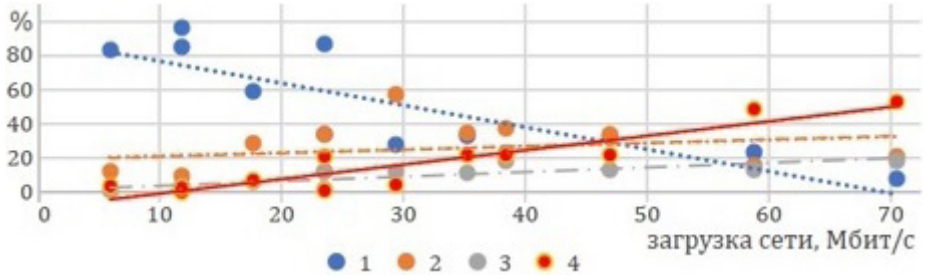


Рис. 6. Процент пакетов, время доставки которых попадает соответственно в каждый из четырех диапазонов, в зависимости от загрузки сети, и линейные аппроксимации данных зависимостей

Из рис. 6 видно, что наиболее предпочтительным является 4-й диапазон.

Для полученных значений натурного эксперимента были построены гистограммы. Экспериментальные данные, представленные на гистограмме, показали хорошее соответствие расчётам по модели (рис. 7).

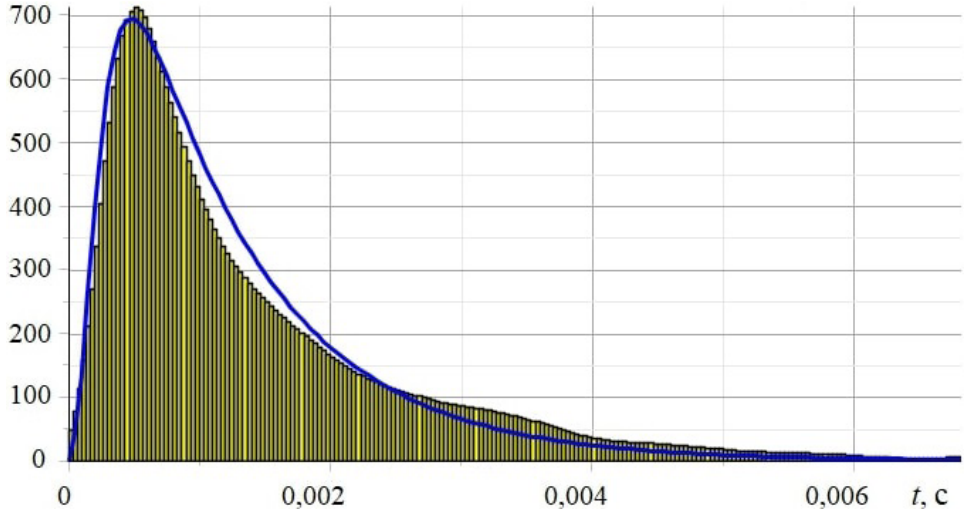


Рис. 7. Гистограмма и плотность вероятностей времени доставки для пакета размером 1400 байт, скорости отправки 100 Мбит/с, 0-й задержке и $\alpha = 0.09, \beta = 1, \gamma = 0.1$

Выводы

Данная математическая модель позволяет оценивать влияние различных параметров на время отправки пакета, использовать методику оценки загруженности канала.

Литература

1. Методы увеличения производительности в беспроводных сетях Wi-Fi, часть первая: Bursting, Compression, Fast Frames, Concatenation. – URL: https://www.ixbt.com/comm/tech-80211g-super_1.shtml (дата обращения: 20.04.2023).

2. Раздел 7. Локальные беспроводные сети WiFi. Лекции по стандартам. – URL: http://docplayer.ru/33818454-Razdel-7-lokalnye-besprovodnye-seti-wifi-lekcii-po-standartam.html (дата обращения 03.03.18г.). – Заглавие с экрана.

3. Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications: Higher-Speed Physical Layer Extension in the 2.4 GHz Band. IEEE Standard 802.11b-1999.

4. Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications Amendment 4: Further Higher Data Rate Extension in the 2.4 GHz Band. IEEE Standard 802.11g-2003.

5. *Абрамов Г. В.* Анализ времени передачи данных в распределенных сетях с конкурирующим доступом / Г. В. Абрамов, А. Е. Емельянов, К. Ч. Колбая // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 61–67.

6. *Абрамов Г. В.* Разработка системы мониторинга загруженности гибридных сетей / Г. В. Абрамов, В. Е. Глушаков, Р. В. Данилов // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2024. – № 7. – С. 29–35.

УДК 004.45

РАЗРАБОТКА УПРОЩЕННОЙ ВЕРСИИ ОС LINUX, ИСПОЛЬЗУЕМОЙ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

Р. С. Долгих, М. К. Чернышов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются основные этапы и принципы создания упрощенной версии операционной системы Linux, предназначенной для использования в образовательных целях. Такого рода операционная система может быть ориентирована на начинающих пользователей, изучающих основы работы с операционными системами (ОС) на примере ОС семейства Linux. Основное внимание уделяется упрощению интерфейса, снижению системных требований и предоставлению обучающего контента, включая документацию, встроенные упражнения и инструменты для изучения базовых команд ОС. Описываются методология разработки, выбор программных компонентов и подходы к интеграции обучающих функций.
Ключевые слова: операционная система Linux, образовательные технологии, ядро операционной системы, интерфейс пользователя, легковесные системы.

Введение

Благодаря гибкости, надежности и открытой модели разработки, Linux является одной из наиболее популярных операционных систем в мире. Однако для начинающих пользователей и студентов, только начинающих изучать основы работы с операционными системами, Linux может казаться сложной и неподъемной операционной системой из-за большого количества настроек, команд и разнообразия дистрибутивов.

Целью задачи, рассматриваемой в данной работе, является создание упрощенного дистрибутива Linux, который будет служить образовательной платформой для обучения основам работы с данной операционной системой. Такой дистрибутив должен предоставлять доступный интерфейс, минимальный набор предустановленных программ, встроенные обучающие модули и руководство, что позволит учащимся сосредоточиться на изучении ключевых концепций.

Работа направлена на разработку инструмента, способного снизить барьер входа для пользователей, заинтересованных в освоении Linux, а также повысить интерес к этой операционной системе как к объекту исследования и практического применения.

1. Проектирование образовательной операционной системы

В процессе проектирования операционной системы необходимо учесть несколько ключевых аспектов:

• Упрощение интерфейса: интерфейс должен быть интуитивно понятным для начинающих пользователей. Это важно, чтобы студенты и школьники могли сосредоточиться на изучении принципов работы с ОС, а не тратить время на освоение сложных интерфейсов.

• Интерактивное обучение: система должна предлагать задания, которые помогают учащимся освоить основные команды Linux, такие как работа с файловой системой, процессами, сетью и правами доступа. Элементы геймификации, например, выполненные задания с автоматической проверкой, могут стимулировать обучение.

• Минимизация системных требований: операционная система должна быть достаточно легковесной, чтобы работать на старых и маломощных устройствах, которые могут быть до-

ступны в образовательных учреждениях. Это также позволяет использовать систему на виртуальных машинах, что облегчает массовое развертывание.

• Встроенные образовательные материалы: важным элементом является наличие встроенных инструкций и учебных пособий, доступных прямо из системы. Эти материалы могут включать как текстовые, так и видеоуроки, примеры заданий и пошаговые инструкции.

Целевая аудитория для этой системы — это в первую очередь новички в мире Linux, среди которых можно выделить несколько категорий:

• Школьники и студенты: ученики старших классов и студенты, которые начинают знакомиться с операционными системами и командной строкой. Часто они не имеют глубоких знаний в области ИТ и нуждаются в системе, которая будет не только простой, но и доступной для учебных целей.

• Преподаватели учебных заведенияй для учителей и преподавателей учебных заведений эта ОС должна стать инструментом, который легко разворачивается на компьютерах и предоставляет учащимся готовые для обучения материалы и задания. Преподаватели могут использовать систему для проведения лекций, лабораторных работ и семинаров.

• Самообучающиеся пользователи: те, кто хочет изучить Linux, но не имеет доступа к специализированным учебным курсам, могут использовать эту систему для самостоятельного изучения с пошаговыми инструкциями.

Выбор разработки образовательной ОС с нуля, начиная с ядра Linux, имеет несколько важных преимуществ:

• Полный контроль над системой: при создании ОС с нуля, разработчик имеет полный контроль над всеми компонентами, начиная от выбора пакетов и настройки ядра до оптимизации пользовательского интерфейса. Это позволяет исключить лишние и ненужные компоненты, минимизируя систему и делая её максимально легкой и удобной для обучающихся.

• Гибкость в обучении: ОС, разработанная с нуля, может быть адаптирована под специфические образовательные цели. Например, можно интегрировать в систему функции, ориентированные на определенную дисциплину, такие как командный интерфейс, скрипты и другие технологии, применимые в курсе Linux.

• Инновации и уникальность: в отличие от использования существующих дистрибутивов, создание с нуля позволяет внедрять новые методы обучения, такие как интерактивные модули и поддержка нестандартных форматов материалов. Это делает ОС уникальной и адаптированной под нужды конкретной аудитории.

• Масштабируемость и оптимизация: при разработке с нуля можно настраивать систему для работы даже на самых старых и слабых компьютерах, что идеально подходит для учебных заведений с ограниченными ресурсами. При этом можно исключить ненужные сервисы и приложения, обеспечив оптимальную производительность системы.

Основным результатом разработки ОС с нуля является создание системы, которая будет не только облегчать процесс обучения основам Linux, но и мотивировать пользователей к дальнейшему ее изучению. Ожидаемые результаты включают в себя:

• Увеличение вовлеченности учащихся: наличие интерактивных уроков и задач, которые активно вовлекают пользователей в процесс обучения, повышает уровень вовлеченности и интерес к Linux.

• Повышение доступности образования: возможность использовать систему на старых или менее мощных устройствах позволяет сделать обучение доступным для широкой аудитории, особенно в странах с ограниченными ресурсами.

• Рост навыков в области Linux: предоставление учащимся практических навыков работы с системой и командной строкой помогает им развивать важные IT-компетенции, которые могут быть полезны как в учебе, так и в дальнейшей карьере.

2. Сборка ядра и базовой системы

Сборка ядра и создание базовой системы — важный этап разработки образовательной операционной системы на базе Linux. На этом этапе формируется основа, на которой будет построена вся дальнейшая функциональность, включая пользовательский интерфейс, образовательные материалы и дополнительные инструменты. Основные задачи этого этапа включают настройку ядра, создание минимальной операционной системы, а также повышение суммарной производительности.

Для начала необходимо выбрать подходящее ядро Linux. Это наиболее важно, поскольку версия ядра будет определять совместимость с различным оборудованием, производительность системы и доступность нужных драйверов. Для образовательной ОС желательно использовать стабильную версию ядра, которая поддерживает как современные, так и старые устройства. Важно, чтобы ядро обеспечивало все необходимые функциональные возможности для базовой работы системы, но при этом не включало лишних модулей. Например, если система не будет работать с определенными устройствами, их драйверы можно исключить на этапе сборки.

Настройка ядра Linux требует внимательного подхода к выбору и оптимизации различных параметров. Важно отключить все ненужные модули и драйверы, чтобы не перегружать систему лишними процессами, что особенно важно для слабых и устаревших устройств. Кроме того, настройка ядра должна обеспечивать стабильную работу всех критически важных функций системы, таких как файловая система, сетевые соединения и базовые устройства ввода/вывода.

После сборки ядра следует разработать минимальный набор компонентов, входящих в состав операционной системы. В первую очередь необходимо выбрать и настроить систему инициализации системы — компонента, который управляет запуском всех процессов при старте системы. Для легковесной образовательной ОС рекомендуется использовать более простые и быстрые решения, такие как **OpenRC** или **runit**, которые потребляют меньше ресурсов по сравнению с более тяжелыми альтернативами, такими как **systemd**.

Затем необходимо собрать минимальный набор утилит, составляющих основу будущей операционной системы. Данный набор может включать такие программы, как **busybox** (программу, которая объединяет множество утилит в одном файле) и **coreutils** (утилиту, предназначенную для работы с файлами и каталогами). Эти утилиты обеспечат базовую функциональность для взаимодействия с системой, позволяя пользователю выполнять основные операции, такие как создание и копирование файлов, управление процессами и другие действия, необходимые для работы с Linux.

Также на этом этапе важно создать базовую файловую структуру, которая будет включать все необходимые каталоги, такие как, в частности, **/bin** (для утилит), **/etc** (для конфигурационных файлов), **/home** (для домашних каталогов пользователей). Эта структура должна быть простой и понятной, чтобы пользователи могли легко ориентироваться в системе.

Подключение драйверов и настройка сетевых утилит также являются важными этапами. Для минималистичной образовательной системы важно оставить только те драйверы и утилиты, которые реально необходимы для базовой работы, чтобы система оставалась легковесной и не перегружалась лишними компонентами.

Когда базовый набор компонент операционной системы будет установлен и настроен, следующим шагом будет создание минимального установщика, который позволит развернуть операционную систему на целевых устройствах. Установщик должен быть максимально простым и автоматизированным, чтобы пользователи могли без проблем установить систему на компьютерах. Важно, чтобы установщик автоматически определял настройки устройства и минимизировал количество действий, требующих вмешательства пользователя.

После сборки и настройки базовой системы необходимо провести тестирование ее работоспособности. Оно включает в себя проверку функциональности всех основных утилит и компонентов системы, а также тестирование уровня ее производительности для того, чтобы убедиться, что система работает эффективно, даже на слабых устройствах. Тестирование на реальных устройствах поможет выявить возможные проблемы и недостатки, которые могут возникнуть при использовании системы в учебных заведениях.

3. Интеграция пользовательского интерфейса и образовательного контента

На данном этапе разработки образовательной операционной системы основное внимание уделяется созданию удобного и интуитивно понятного интерфейса, а также интеграции образовательных материалов и инструментов. Система должна быть не только функциональной, но и доступной для новичков, что предполагает особое внимание к пользовательскому интерфейсу и обучающим компонентам. Важной задачей является обеспечение доступности и легкости восприятия интерфейса пользователем. При этом сам процесс работы с операционной системой не должен вызывать трудностей.

Прежде всего необходимо определить, будет ли система использовать графический интерфейс или ограничится консольным режимом работы. Для образовательной ОС на базе Linux предпочтительным вариантом является легковесный графический интерфейс, поскольку это значительно упрощает взаимодействие с системой, особенно для новичков. В качестве оконного менеджера можно использовать такие решения, как **Openbox**, **Fluxbox** или **i3**, которые требуют минимальных системных ресурсов и могут быть настроены для упрощенной навигации. Эти менеджеры окон позволяют создать чистый, ненагруженный интерфейс с необходимыми функциями и большими возможностями для кастомизации.

Кроме того, можно рассмотреть вариант текстового режима с простыми подсказками, который будет хорош для обучения командной строке. Такая система будет включать только базовые текстовые инструменты и редакторы, такие как **nano** или **vim**, что позволит пользователям сосредоточиться на изучении команд и основ работы с терминалом.

Важной частью этого этапа является создание удобной навигации по системе. Интерфейс должен быть простым, с минимальным количеством окон и кнопок, чтобы новички могли быстро ориентироваться в том, что необходимо для выполнения заданий. Меню и панели инструментов должны быть максимально упрощены. Каждый элемент интерфейса должен быть выполнен в строгом соответствии с принципами удобства и простоты. К примеру, можно добавить визуальные подсказки или всплывающие окна с краткими инструкциями по выполнению задач.

Образовательный контент — основная ценность операционной системы, и его интеграция в систему требует тщательного подхода. Система должна включать базовые учебные материалы, такие как пошаговые инструкции по работе с командной строкой, примеры использования команд Linux, а также упражнения и задания для практического освоения. Можно интегрировать интерактивные курсы, которые помогут пользователям освоить основные концепции Linux в игровой форме, например, с выполнением задач и получением обратной связи о правильности выполнения.

Для этого можно использовать сценарии и интерактивные уроки, которые будут встроены в систему. Каждый пользователь при запуске системы мог бы пройти начальное ознакомление с интерфейсом, а затем постепенно переходить к более сложным заданиям, которые проверяют усвоение материала. Важно, чтобы уроки были интерактивными, с элементами обратной связи. Например, задания могут проверять, выполнил ли пользователь команду правильно, а в случае ошибки предлагать подсказки или рекомендации.

Не менее важным является создание встроенной справочной системы, которая должна быть всегда доступна, предоставляя пользователям справочную информацию по ключевым

аспектам системы. Это могут быть локальные мануалы для базовых команд Linux, примеры использования утилит, а также объяснения по базовым принципам работы с операционной системой. Для новичков важно, чтобы эти материалы были четкими и краткими, сфокусированными на практическое использование, а не на теоретические концепции. Например, можно интегрировать man-страницы с простыми примерами команд, которые пользователь может немедленно протестировать в терминале.

Для улучшения понимания можно добавить визуальные элементы, такие как схемы или инфографика, объясняющие, как работает файловая система Linux, что такое процессы и как управлять ими с помощью команд. Эти элементы могут быть встроены прямо в систему или представлены как отдельные файлы, которые могут быть открыты пользователем по запросу.

Помимо текстовых и графических материалов, полезным дополнением будут видеоуроки и демонстрации, которые могут быть интегрированы в систему как локальные файлы. Это особенно важно для визуалов, которые воспринимают информацию через демонстрации и примеры. Например, видео может показывать, как установить программы через пакетный менеджер, или объяснять, как работать с текстовыми редакторами.

Таким образом, система должна включать не только основную функциональность операционной системы, но и компоненты, направленные на развитие навыков пользователей. Главное здесь — сделать обучение доступным, интересным и максимально вовлекающим. Интерактивность и простота интерфейса помогут новичкам уверенно осваивать Linux и использовать операционную систему для решения практических задач, а интеграция образовательных материалов сделает процесс обучения эффективным и увлекательным.

4. Тестирование, оптимизация и внедрение

Тестирование, оптимизация и внедрение являются заключительными этапами разработки образовательной операционной системы. Эти процессы направлены на обеспечение стабильной работы системы, улучшение её производительности и подготовку к запуску на реальных устройствах.

Тестирование начинается с функциональных проверок всех ключевых компонентов системы, включая загрузку, установку программ, работу с файлами и каталогами. Особое внимание следует уделить проверке интерфейса пользователя, чтобы он был интуитивно понятным для новичков. Важно протестировать систему на различных устройствах и в условиях ограниченных ресурсов, чтобы выявить возможные проблемы совместимости. Также необходимо провести тестирование безопасности, чтобы гарантировать защиту данных пользователей от возможных угроз.

Внедрение системы в образовательные учреждения должно быть максимально простым и доступным. Для этого разрабатывается автоматизированный установщик, который легко устанавливает ОС на различные устройства. Важно обеспечить доступ к подробной документации и инструкциям, а также создать систему поддержки пользователей, чтобы они могли обращаться за помощью в случае возникновения проблем. После внедрения нужно продолжать собирать отзывы и обновлять систему, чтобы она оставалась актуальной и безопасной.

Тестирование, оптимизация и внедрение являются ключевыми этапами, которые обеспечивают стабильность, безопасность и удобство использования операционной системы в образовательной среде.

Заключение

Разработка упрощенной операционной системы Linux для образовательных целей включает в себя несколько ключевых этапов: постановку целей, проектирование, сборку ядра, ин-

теграцию интерфейса и тестирование системы. Каждый из этих этапов ориентирован на создание стабильной, производительной и безопасной системы, которая легко воспринимается пользователями с разным уровнем подготовки.

Создание такой системы должно способствовать эффективному обучению пользователей современным технологиям.

Литература

1. *Матвеев М. Д.* Ядро Linux. Сборка, настройка, управление. – М. : Вертекс, 2023. – 352 с.

2. *Лав Р.* Операционные системы: описание процесса разработки ядра Linux. –М. : Диалектика, 2018. – 416 с.

3. *Таненбаум А. С., Бос Х.* Современные операционные системы. 4-е изд. – М. : Вильямс, 2014. – 976 с.

4. *Керрис М.* Программирование в Linux. – СПб. : Питер, 2010. – 736 с.

5. *Стадник С. В.* Администрирование Linux. Подробное руководство. – М. : БХВ-Петербург, 2017. – 560 с.

6. «Linux From Scratch». Linux From Scratch – Руководство по сборке системы с нуля. – URL: https://www.linuxfromscratch.org/ (дата обращения: 26.11.2024).

УДК 004.056.5

ПРОЦЕССНАЯ МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖОБЪЕКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА УРОВНЕ СУБЪЕКТА КРИТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

С. С. Долженков

МИРЭА — Российский технологический университет

Аннотация. Исследование посвящено актуальным вопросам по взаимодействию субъектов критической информационной инфраструктуры посредством принадлежащих им объектов критической информационной инфраструктуры — межобъектное взаимодействие на уровне субъектов. Автор отмечает важность развития защитных мероприятий по предотвращению инцидентов в области информационной безопасности на субъектах критической информационной инфраструктуры, уделяет внимание потенциальным угрозам от образовавшихся уязвимостей на уровне программного обеспечения субъектов критической информационной инфраструктуры.
Ключевые слова: информационные процессы, информационные потоки, информационная безопасность, критическая информационная инфраструктура, субъект критической информационной инфраструктуры, объект критической информационной инфраструктуры, программное обеспечение, уязвимость, инцидент.

Введение

Основа любого успешно развивающегося государства в период цифровой трансформации 21 века — это грамотное, хорошо спланированное и прогнозируемое движение в сторону повсеместного внедрения информационных технологий: во все сферы жизни общества с целью автоматизации повседневных и емких задач, для упрощения аналитики протекающих процессов и сбора данных, а также для централизации контроля разного рода и уровня. Однако в условиях ограниченности ресурсов постоянно будет выбор их рационального использования. Сфера информационных технологий исключением не является: каким отраслям автоматизации жизни общества отдать большее предпочтение остается открытым вопросом ежедневно, но существуют особые направления развития информационных технологий, которым необходимо особое и отдельное внимание, например, критическая информационная инфраструктура, которой и будет посвящено данное исследование.

Критическая информационная инфраструктура (КИИ) — информационные системы, информационно-телекоммуникационные сети, автоматизированные системы управления субъектов КИИ, а также сети электросвязи, используемые для организации взаимодействия таких объектов. Из определения КИИ следует вывод, что КИИ состоит из одного или нескольких субъектов КИИ (СКИИ), которым принадлежат объекты КИИ, работающие в отраслях, признанных критической информационной инфраструктурой. Примером КИИ может служить юридическое лицо, занятое в сфере здравоохранения, которое использует в своей деятельности медицинские информационные системы медицинских организаций, где СКИИ будет служить сама медицинская компания, а объектами КИИ являться ее информационные системы, информационные-телекоммуникационные сети и автоматизированные системы управления медицинским оборудованием [1].

Государству крайне важно прилагать достаточное количество усилий в плане контроля и безопасности сферы КИИ, для устойчивой и безотказной работы СКИИ. Во многом от состояния КИИ зависит безопасность и стабильность государства: в случае значительных нарушений и проблем в сфере КИИ последствия могут затронуть все сферы жизни общества.

1. Межобъектное взаимодействие на уровне субъекта критической информационной инфраструктуры

Исследуя безопасность СКИИ, следует принимать во внимание организацию межобъектного взаимодействия с целью сохранения целостности объекта защиты, а также стремление к эффективному выполнению всех процессов путем межобъектного взаимодействия на уровне СКИИ.

Для организации и исследования процессной модели и межобъектного взаимодействия на уровне СКИИ обратимся к определению и требованиям разрабатываемых моделей: модель — физический или абстрактный объект, адекватно отражающий исследуемую систему.

Ко всем разрабатываемым моделям предъявляются два противоречивых требования:

1. Простота модели. Требование простоты модели обусловлено необходимостью построения модели, которая может быть рассчитана доступными методами.

Степень сложности (простоты) модели определяется уровнем ее детализации, зависящим от принятых предположений и допущений.

2. Адекватность исследуемой системы. Соответствие моделей оригиналу, характеризуемое степенью близости свойств модели свойствам исследуемой системы [2].

Межобъектное взаимодействие на уровне СКИИ представляет собой совокупность взаимосвязанных информационных систем — комплексов. Подобные системы, в свою очередь, являются совокупностью взаимосвязанных элементов, объединенных в одно целое для достижения некоторой цели, определяемой назначением системы. В таких условиях минимально неделимым объектом, рассматриваемым как единое целое будет приниматься элемент [3].

Проецируя вышеописанное на межобъектное взаимодействие на уровне СКИИ, объект — это комплекс, которым является информационная система (ИС), составом информационной системы служат компоненты ИС (К), состоящие из минимально неделимой величины – элементов (Э), которые обеспечивают нормальное функционирование процессов обратимся к рис. 1 для описания взаимодействия, выразив межобъектное взаимодействие на уровне СКИИ.

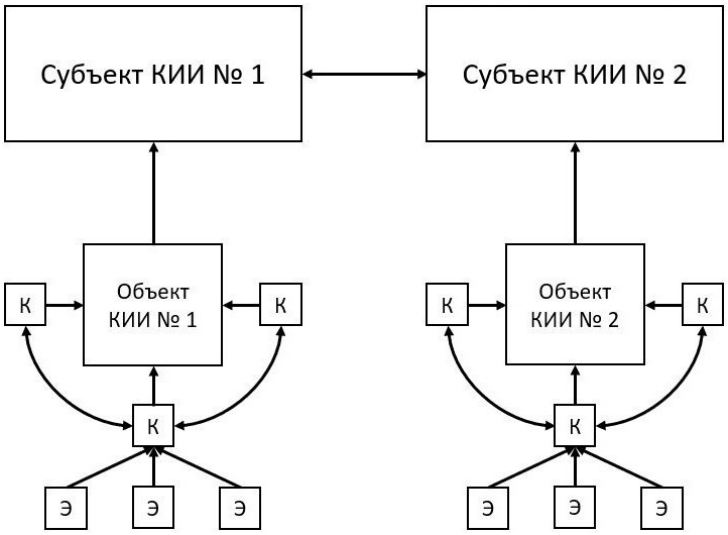


Рис. 1. Межобъектное взаимодействие на уровне СКИИ

Процессная модель организации межобъектного взаимодействия на уровне СКИИ также может быть представлена на основе системы массового обслуживания, но с учетом возможных уязвимостей в программном обеспечении объектов КИИ — рис. 2 [4].

Система массового обслуживания (СМО) — математический (абстрактный) объект, содержащий один или несколько приборов П (каналов), обслуживающих заявки, поступающие

в систему, и накопитель Н, в котором находятся заявки, образующие очередь и ожидающие обслуживания.

Подробное представление работы СМО описаны в трудах [2].

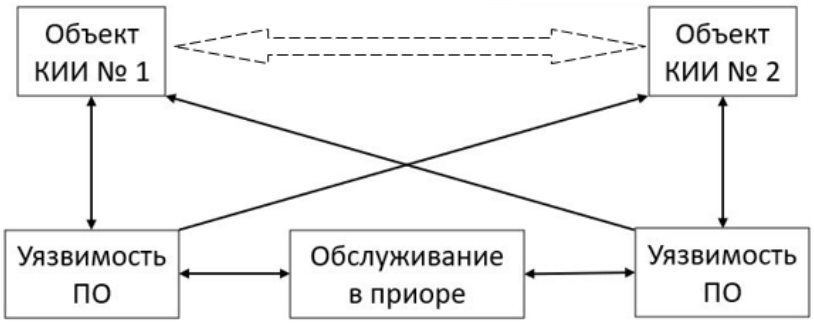


Рис. 2. Межобъектное взаимодействие объектов КИИ в контексте теории массового обслуживания

Таким образом, процессную модель организации межобъектного взаимодействия на уровне СКИИ с учётом возможных уязвимостей можно охарактеризовать следующим образом:

Информационная заявка, в виде информационного сообщения или информационного запроса, должна быть доставлена от объекта КИИ № 1 к объекту КИИ № 2 с последующим обратным взаимодействием: от объекта КИИ № 2 к объекту КИИ № 1 посредством обслуживания в приборе — серверу. С учетом потенциальных уязвимостей на объектах КИИ на уровне программного обеспечения (ПО), необходимо учитывать риск искажения информации, для всех поступающих заявок в систему [5].

Исходящая заявка от объекта КИИ № 1 к объекту КИИ № 2 потенциально может быть искажена уязвимостью в ПО на этапе до обслуживания в приборе и на этапе после обслуживания в приборе. В момент попадания заявки в информационную инфраструктуру объекта КИИ № 2, которая потенциально аналогично объекту КИИ № 1 также подвержена уязвимостям на уровне ПО. Следовательно, заявка, попадающая в объект КИИ № 2, дополнительно может подвергаться искажению своего исходного содержания [6].

Заключение

Таким образом, при рассмотрении вопросов организации межобъектного взаимодействия, дополнительно требуется исследование воздействий уязвимостей объектов КИИ на их взаимодействие и деятельность самого объекта КИИ, подвергшегося воздействию уязвимости другого объекта КИИ, а также изучение потенциальных возможностей от взаимодействия уникальных уязвимостей от двух объектов КИИ: их слияние, нарастающую угрозу и влияние на работу систем и выдаваемых ими результатов.

Литература

1. Федеральный закон от 26.07.2017 г. № 187-ФЗ «О безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации»

2. *Алиев Т. И.* Основы моделирования дискретных систем / Т. И. Алиев; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики. – Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2009. – 363 с. – EDN WCWMBZ.

3. *Долженков С. С.* Оптимизация системы менеджмента информационной безопасности объектов критической информационной инфраструктуры / С. С. Долженков // Студенческая

наука для развития информационного общества : Материалы XУ Всероссийской научно-технической конференции с приглашением зарубежных ученых, Ставрополь, 28 ноября 2023 г. – Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2024. – С. 124–130. – EDN EYGAVD.

4. *Максимова Е. А.* Межсубъектное взаимодействие как источник деструктивных воздействий на субъекте критической информационной инфраструктуры / Е. А. Максимова, Н. П. Садовникова // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. – 2021. – № 2(54). – С. 71–80. – DOI 10.21672/2074-1707.2021.53.1.071-0800. – EDN MJJRWJ.

5. *Гончаренко М. Д.* Безопасность критической информационной инфраструктуры / М. Д. Гончаренко, К. С. Холкина // Научное и техническое творчество молодежи : Материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Новосибирск, 19–20 апреля 2023 года / Под редакцией А.В. Ефимова, Т.И. Монастырской. Том Часть 5 (дополнительная). – Новосибирскn: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. – С. 200–208. – EDN JGPDIW.

6. *Ерохин С. Д.* Многоуровневая политика безопасности сети передачи данных / С. Д. Ерохин, П. Л. Пилюгин // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. – 2022. – Т. 12, № 2. – С. 13-22. – EDN RBLNMD.

УДК 510.52, 004.423.25

О ЗАДАЧЕ ТОТАЛЬНОЙ ВЫВОДИМОСТИ ПУСТОГО СЛОВА В КОНТЕКСТНО-СВОБОДНОЙ ГРАММАТИКЕ

С. М. Дудаков

Тверской государственный университет,
НИУ Высшая школа экономики

Аннотация. Мы изучаем задачу тотальной выводимости пустого слова в контекстно-свободной грамматике. Б. Н. Карловым показано, что если тотальность задавать произвольным множеством правил, то такая задача будет *NP*-полной. Наш же результат показывает, что при классическом понимании тотального вывода, то есть применении всех правил грамматики, ответ может быть получен за полиномиальное время. Для этого мы предлагаем алгоритм, который по *КС*-грамматике строит мультиграф, затем — его конденсацию, а дальше проверяет некоторые свойства путей в этой конденсации, что можно сделать классическими алгоритмами за полиномиальное время.
Ключевые слова: контекстно-свободная грамматика, нетерминал, тотальная выводимость, пустое слово, полиномиальный алгоритм, мультиграф, компонента сильной связности, конденсация графа, путь.

Введение

Мы рассматриваем задачу тотальной выводимости пустого слова в контекстно-свободной грамматике.

Вывод в грамматике называется тотальным, если каждое правило грамматики применяется в нём хотя бы один раз. Это понятие было введено в работе [1] и использовалось для построения множества аксиом для некоторого варианта исчисления Ламбека.

Ранее в [1] было показано, что в общем случае задача тотальной выводимости для произвольной грамматики и произвольного слова является NP-полной.

Недавно Б. Н. Карловым было доказано, что NP-полным является следующий вариант задачи: для произвольной контекстно-свободной грамматики $G = (\sum, N, P, S)$ и под(мульти) множества $R \subseteq P$ правил вывода выяснить, выводимо ли пустое слово так, что каждое правило из R применяется хотя бы один раз. Такой вариант задачи называется R-тотальной выводимостью.

С. Л. Кузнецовым был поставлен вопрос о том, можно ли ослабить условие последней задачи до просто тотальной выводимости, то есть можно ли для NP-полноты задачи требовать, чтобы каждое правило P использовалось при выводе пустого слова не менее одного раза.

Мы отвечаем на этот вопрос и показываем, что ответ является отрицательным (в предположении $PTIME \neq NP$, разумеется). Для этого мы в явном виде приводим алгоритм, требующий полиномиального времени и позволяющий ответить на вопрос о тотальной выводимости пустого слова.

Заметим, что задача тотальной выводимости пустого слова может иметь и вполне значимую практическую интерпретацию. Будем рассматривать нетерминалы как события (сигналы, триггеры, реагирующие на эти события/сигналы), а каждое правило грамматики — как возможные реакции на события. Иными словами, правило $A \to B_1 B_2 \ldots B_k$ можно рассматривать как указание того, что в ответ на событие A будут последовательно возбуждены события $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Тогда вопрос о тотальной выводимости пустого слова эквивалентен вопросу о том, может ли начальное событие последовательно привести в действие все возможные реакции.

1. Основные определения

Напомним, что **контекстно-свободная грамматика** (далее — ***KC*-грамматика**) — это четвёрка вида $G = (\sum, N, P, S)$, в которой $\sum$ — множество **терминалов**, N — множество **нетерминалов**, P — множество **правил вывода**, а $S \in N$ — **начальный нетерминал**. Каждое правило вывода имеет вид $A \to x_1 \ldots x_n$, где $A \in N$, $x_1 \ldots x_n \in \sum \cup N$. **Вывод** слова w в KC-грамматике G — это последовательность слов $(w_0, \ldots, w_k)$ в алфавите $\sum \cup N$, в которой $w_0 = S$, $w_k = w$, и для каждого $i = 1, \ldots, n$ слово w_i получено из слова w_{i-1} применением одного из правил вывода. Иначе говоря, существуют слова α и β такие, что $w_i = \alpha u \beta, w_{i-1} = \alpha A \beta$, и в P есть правило $A \to u$. Вывод $(w_0, \ldots, w_k)$ называется **тотальным**, а слово w — **тотально выводимым**, если в выводе каждое правило P применяется хотя бы один раз.

Прежде всего сделаем несколько замечаний. Очевидно, что для задачи тотальной выводимости пустого слова множество $\sum$ терминальных символов грамматики, можно считать, является пустым, так как при наличии хотя бы одного правила $A \to u$, в котором слово u содержит хотя бы один терминал никакой тотальный вывод пустого слова не породит. Поэтому даже если терминалы формально и входят в состав грамматики, то ни в одном правиле они встречаться не могут.

Далее, мы можем считать, грамматика не содержит **бесполезных** нетерминалов: пустых и недостижимых. Напомним, что **пустым** называется нетерминал, из которого нельзя вывести никакого терминального слова, в нашем случае — пустого. Если нетерминал A является пустым и имеется правило $A \to u$, то оно не может быть использовано в тотальном выводе, так как для его использования необходимо получить A, а после этого пустого слова мы не получим.

Недостижимым называется нетерминал, который нельзя получить из начального нетерминала A. И снова, если в грамматике есть правило $A \to u$ для недостижимого нетерминала A, то оно никогда не может быть применено, поскольку сам A не может быть получен.

Итак, имеется грамматика $G = (\sum, N, P, S)$, не содержащая терминальных символов и бесполезных нетерминалов. Построим по этой грамматике размеченный ориентированный мультиграф M_G следующим образом. Напомним, что **мультиграф**, в отличие от просто графа, позволяет иметь несколько рёбер из вершины V в вершину U. Такие рёбра называются **кратными**.

Вершины мультиграфа M_G будут помечены нетерминалами из N или пустыми словами ε. При этом для каждого нетерминала A из N должна быть в точности одна вершина, помеченная A, а для каждого пустого правила $A \to \varepsilon$ из P имеется «своя» вершина, помеченная ε, будем её обозначать ε_A.

Если в P есть правило $A \to B_1 B_2 \ldots B_k$, то имеются рёбра из вершины A в вершины $B_1, B_2, \ldots, B_k$, где $B_1, B_2, \ldots, B_k$ — нетерминалы. Для правила $A \to \varepsilon$ из A имеется ребро в вершину ε_A. В любом случае рёбра помечены тем правилом, с помощью которого они построены. Если среди нетерминалов $B_1, B_2, \ldots, B_k$ есть одинаковые, то в мультиграфе M_G будет соответствующее количество кратных рёбер.

Напомним, что **компонентой сильной связности** (КСС) в (мульти)графе называется максимальное множество попарно взаимно достижимых вершин, то есть таких, которые входят в один и тот же цикл. КСС являются классами эквивалентности на множестве вершин по отношению взаимной достижимости, поэтому КСС разбивают всё множество вершин на непересекающиеся подмножества. В дальнейшем с помощью A^* для вершины A обозначаем (единственную) КСС, которой она принадлежит.

Далее, для (мульти)графа M можно построить новый граф M^* — **конденсацию**. Её вершинами являются КСС старого (мульти)графа M, а каждое ребро (мульти)графа M с меткой D, ведущее из вершины A в вершину B, индуцирует ребро с такой же меткой в M^*, ведущее из A^* в B^*, при условии, что A и B принадлежат разным КСС. Петли, которые возникли бы

в случае $A^* = B^*$, мы в конденсацию не включаем. Таким образом, конденсация M^* — это ациклический граф. Заметим, что поскольку мы рассматриваем именно мультиграфы, то у нас не возникнет проблема с кратными рёбрами, которые будет содержать конденсация.

Итак, для построенного по KC-грамматике G мультиграфа M_G найдём КСС и построим конденсацию M_G^*. Введём для этой конденсации M_G некоторую терминологию. Если в графе M_G из A исходят не менее двух рёбер с одним и тем же правилом, которые снова ведут в вершины КСС A^*, то будем называть такую КСС A^* **мультипликативной**. Если в графе M_G из A исходят не менее двух рёбер с одним и тем же правилом, хотя бы одно из которых снова ведёт в вершину КСС A^*, а другое — в вершину B из другой КСС, то будем говорить, что соответствующее ребро конденсации, ведущее из A^* в B^*, является **мультипликативным**. Остальные КСС и рёбра конденсации называем **цепными**.

2. Главный результат

Критерий, который мы предлагаем для тотальной выводимости пустого слова, заключается в следующем.

Теорема. *В KC-грамматике G тотально выводимо пустое слово тогда и только тогда, когда выполнено следующее: в конденсации M_G^* для любой цепной КСС K, из которой выходят хотя бы два цепных ребра, помеченных разными правилами, существует путь из начальной КСС S^* в K, проходящий хотя бы через одну мультипликативную КСС L или хотя бы по одному мультипликативному ребру E.*

Заметим, что критерий, приведённый в теореме, может быть **проверен за полиномиальное время**. Нахождение КСС и конденсации — это классическая задача теории графов, для решения которой существует много эффективных алгоритмов. Определение типов КСС и рёбер конденсации выполняется даже непосредственной проверкой определения за как максимум квадратичное время. Ну и, наконец, само условие из теоремы проверяется так: перебираем все КСС K и L, а также — рёбра E, о которых идёт речь. Далее проверяем, что есть пути из S^* в L и из L в K, либо же пути из S^* в L_1 и из L_2 в K, если ребро E ведёт из L_1 в L_2. Поиск пути в графе из одной вершины в другую может быть выполнен за полиномиальное время. Поэтому даже простой перебор указанных объектов тоже даст полиномиальную оценку времени.

Что касается самого **доказательства** теоремы, то его грубый набросок заключается в следующем. Если предположить, что критерий выполнен, то возьмём любой вывод пустого слова и постепенно дополним его до тотального. Для этого выберем нетерминал A и правило $A \to u$, которое не используется в выводе и для которого КСС A^* является минимально возможной для отношения достижимости в конденсации M_G^*. Тогда вершины из всех КСС меньших или равных A^* при выводе достигнуты. В частности, достигнута какая-то вершина B из КСС A^*.

Если правило $A \to u$ не соответствует цепному ребру конденсации M_G^*, то в КСС A^* существует цикл, который начинается и кончается в B и проходит по каждому из рёбер внутри A^* хотя бы раз. Тогда в выводе, получив нетерминал B, мы можем последовательно применить правила, соответствующие рёбрам цикла, и снова получить B. В результате мы сможем в наш вывод вставить применение правила $A \to u$, сохранив применение всех имеющихся.

Если правило $A \to u$ соответствует цепному ребру, исходящему из A^*, и оно является единственным таковым, то правило $A \to u$ должно быть применено, так как это — единственный способ избавиться от нетерминалов из КСС A^*, а они, напомним, в выводе присутствуют.

Наконец, если кроме цепного ребра $A \to u$ из A^* исходят цепные рёбра, помеченные иными правилами, то по условию существует путь из S^* в A^*, проходящий через мультипликативную КСС L или по мультипликативному ребру E, ведущему из L_1 в L_2. Напомним, что мы выбрали A, который является минимальным, поэтому какие-то вершины из L или, соот-

ветственно, L_1 были достигнуты в ходе нашего вывода. Тогда мы можем в КСС L или, соответственно, L_1 обнаружить цикл и, используя правила, соответствующие рёбрам этого цикла, породить в конечном итоге нужное количество нетерминалов из КСС A^*, чтобы их хватило для применения всех правил вида $A \to u$, соответствующих цепным рёбрам.

Пусть теперь, наоборот, критерий не выполнен, то есть имеется цепная КСС, из которой исходят хотя бы два цепных ребра, соответствующих правилам $A \to u$ и $A \to v$ и никакой путь из S^* в КСС $A^* = B^*$ не проходит через мультипликативную КСС или по мультипликативному ребру. Без ограничения общности считаем, что такая КСС $A^* = B^*$ выбрана минимальной для отношения достижимости в конденсации M_G^*. Иными словами, все меньшие $A^* = B^*$ КСС $K_1, K_2, \ldots, K_n$ являются цепными и из каждой из них в направлении КСС $A^* = B^*$ исходит по одному ребру, необходимо цепному. Тогда в любом выводе в каждом его слове присутствует не более одного нетерминала из множества $K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n \cup A^*$. Но тогда никакой вывод не может одновременно содержать применение правил $A \to u$ и $A \to v$, то есть не является тотальным.

Заключение

Мы показали разрешимость задачи тотальной выводимости пустого слова в произвольной KC-грамматике за полиномиальное время. Естественным обобщением будет вопрос о существовании полиномиального алгоритма для решения следующей задачи: для заданного фиксированного (терминального) слова w и произвольной KC-грамматики G определить, является ли слово w тотально выводимым в грамматике G.

Литература

1. Сложность исчислений Ламбека с модальностями и тотальной выводимости в грамматиках / С. М. Дудаков, Б. Н. Карлов, С. Л. Кузнецов, Е. М. Фофанова // Алгебра и логика. – 2021. – Т. 60, № 5. – С. 471–496. – DOI 10.33048/alglog.2021.60.502. – EDN SOVAEC.

УДК 519.7

ОБ ИДЕАЛЬНОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ ЧЕТВЕРТИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. А. Едемский, Р. А. Вахитов

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

Аннотация. Исследована арифметическая автокорреляция четвертичных последовательностей, синтезируемых регистром сдвига с обратной связью с переносом. Показано, что не существует семейства таких последовательностей, в котором каждая последовательность имеет идеальную арифметическую автокорреляцию. Для изучения арифметической автокорреляции рассматривается распределение четвертичных вычетов по простому модулю и его связь с суммами характеров Дирихле.
Ключевые слова: регистр сдвига с обратной связью с переносом, четвертичные последовательности, арифметическая автокорреляция, характеры Дирихле.

Введение

Различные регистры сдвига широко применяются для получения псевдослучайных последовательностей, обладающих свойствами, важными для их разнообразных практических применений. В частности, с этой целью используется регистр сдвига с обратной связью с переносом (feedback with carry shift register), предложенный в [1]. Его свойства подробно описаны в [2]. Последовательности, синтезируемые этим регистром, обычно называют FCSR-последовательностями.

Арифметическая корреляция или корреляция с переносом является аналогом классической корреляции и является важной характеристикой последовательностей [1]. Имеется множество статей посвященных исследованию арифметической корреляции различных последовательностей [2–6]. Но, для N-ичных последовательностей известны только результаты о арифметической автокорреляции l-последовательностей, период которых равен значению функции Эйлера от числа связи регистра. В этой статье рассмотрим арифметическую автокорреляцию четвертичных FCSR-последовательностей. Четвертичные последовательности наиболее часто применяемый вид последовательностей после бинарных.

1. Основные определения

Прежде всего, напомним основные определения из [2]. Пусть s^∞ — N-ичная FCSR-последовательность с периодом T и числом связи q. Тогда, согласно теореме 4.8.1 из [2], члены последовательности s^∞ могут быть найдены по следующей формуле:

$$s_n = A(f 4^{-n} \bmod q) \bmod N \tag{1}$$

для $n = 0,1,2,...$, где $A = -q^{-1} \bmod N$. Здесь через $x \bmod q$ обозначаем наименьший неотрицательный вычет x по модулю q.

Любой N-ичной последовательности s^∞ с периодом T можно поставить в соответствие N-адическое $s_0 + s_1 \cdot N + \ldots + s_n \cdot N^n + \ldots$ и рациональное число

$$-\frac{f}{q} = \frac{\sum_{j=0}^{T-1} s_j N^j}{1 - N^T}, \gcd(f,q) = 1.$$

Несбалансированность N-ичной последовательности и соответствующего N-адического числа определяется как

$$Z(s) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \xi^j, \tag{2}$$

где a_j — число появлений j на одном периоде последовательности s^∞ для $j = 0,1,\ldots,N-1$ и $\xi = \exp(2\pi \cdot i / N)$ — комплексный корень N-й степени из единицы, $i = \sqrt{-1}$.

Пусть последовательность s_τ^∞ получается посредством циклического сдвига посследовательности s^∞ на $\tau : 0 < \tau < T$. Обобзначим через α и α_τ N-адические числа, соответствующие последовательностям s^∞ и s_τ^∞, и рассмотрим последовательность, определяемую N-адическим числом $\alpha - \alpha_\tau$. Она является почти периодической с периодом, делящим T. Её несбалансированность на периоде T называется арифметической автокорреляцией последовательности s^∞ при сдвиге τ и обозначается $\mathcal{A}_s^A(\tau)$ [2]. Согласно [2], имеем

$$\mathcal{A}_s^A(\tau) = Z\left(\frac{f(N^{-\tau}-1) \bmod q}{q}\right) \tag{3}$$

для $\tau = 1,2,\ldots,T-1$.

Если $\mathcal{A}_s^A(\tau) = 0$ для всех $\tau = 1,2\ldots,T-1$, то s^∞ называется последовательностью с идеальной арифметической автокорреляцией. В этой статье покажем, что при любом q семейство четвертичных FCSR-последовательностей не может обладать идеальной автокорреляцией. Ясно, что в силу формулы (3) это достаточно доказать для случая, когда $q = p$, где p — простое число.

2. Вспомогательные леммы

В этом разделе докажем насколько вспомогательных утверждений, необходимых для дальнейшего. Пусть $q = p$, где p — простое число, и четвертичная последовательность s^∞ с периодом T определена по (1), тогда значение T равно порядку 4 по модулю p. Согласно (1), $A = 3$, если $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $A = 1$, если $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$.

Обозначим через $\mathbb{Z}_p^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{Z}_p$ порядка p. Хорошо известно, что $\mathbb{Z}_p^*$ — циклическая группа. Пусть $H_0 = \{4^{-n} \bmod p, n = 0,1,\ldots,T-1\}$. Тогда H_0 — подгруппа $\mathbb{Z}_p^*$ и фактор-группа $\mathbb{Z}_p^* / H_0$ также является циклической, то есть существует элемент g такой, что классы смежности $H_0, gH_0, \ldots, g^{(p-1)/T-1}H_0$ образуют разбиение $\mathbb{Z}_p^*$. Обозначим $g^k H_0$ через H_k. Определим несбалансированность $Z(H_k)$ множества H_k как для последовательности, расматривая его элементы по модулю 4.

Лемма 1. *Пусть s определена по (1) с числом связи p. Последовательность s имеет идеальную арифметическую автокорреляцию для каждого $f = 1,2,\ldots,p-1$ тогда и только тогда, когда $Z(H_k) = 0$ для $k = 0,1,\ldots,(p-1)/T$.*

Доказательство. Предположим, что s имеет идеальную арифметическую автокорреляцию для каждого $f = 1,2,\ldots,p-1$. Тогда $Z\left(\frac{f(4^{-\tau}-1) \bmod p}{p}\right) = 0$ для $\tau = 1,2,\ldots,T-1$. Пусть $a = f(4^{-\tau}-1) \bmod p$ для некоторого τ. Рассмотрим последовательность u^∞ с $Z(u) = 0$, соответствующую рациональному числу a/p. Тогда $u_n = A(a4^{-n} \bmod p) \bmod 4$, $n = 0,1,\ldots,T-1$. Пусть $D = \{a4^{-n} \bmod p,\ n = 0,1,\ldots,T-1\}$. Как отмечено выше, $A \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, следовательно, $Z(D) = 0$. Множество D совпадает с одним из классов смежности H_0. Так как $f = 1,2,\ldots,p-1$, то таким образом получаем все различные классы смежности H_0, то есть $Z(H_k) = 0$ для $k = 0,1,\ldots,(p-1)/T$.

Пусть $Z(H_k) = 0$ для $k = 0,1,\ldots,(p-1)/T$. Тогда множества $\{\pm a4^{-n} \bmod 4,\ n = 0,1,\ldots,T-1\}$ сбалансированы для всех значений $a = 1,2,\ldots,p-1$. Следовательно, по (3)

$Z\left(\frac{f(N^{-\tau}-1) \bmod p}{p}\right)=0$ для каждого $\tau=1,2,\ldots,T-1$ и $\mathcal{A}_s^A(\tau)=0$ для каждого $\tau=1,2\ldots,T-1$.

Согласно (2), для четвертичной последовательности

$$Z(s)=a_0+a_1\cdot i-a_2-a_3\cdot i.$$

Следовательно, если $Z(s)=0,$ то

$$a_0=a_2,\, a_1=a_3. \tag{4}$$

Определим $I_k=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,[kp/4]\le a<[(k+1)p/4],\, k=0,1,2,3,$ где $[x]$ — целая часть числа x.

Лемма 2. *Пусть s определена по (1) с числом связи p и $D=\{f4^{-n} \bmod p, n=0,1,\ldots,T-1\}$. Тогда:*

1) $a_k=|I_k\cap D|,\ k=0,1,2,3$, если $p\equiv 3(\bmod 4)$;

2) $a_0=|I_0\cap D|,\ a_k=|I_{4-k}\cap D|,\ k=1,2,3$, когда $p\equiv 1(\bmod 4)$.

Доказательство. Докажем данную лемму для $p\equiv 3(\bmod 4)$. В этом случае $Z(s)=Z(D)$, где $D=\{f4^{-n} \bmod p, n=0,1,\ldots,T-1\}$. Пусть $a\in D$ и $a\in I_k$. По определению D имеем, что $4a \bmod p\in D$. Рассмотрим четыре случая.

1) Пусть $k=0$. Тогда $4a \bmod p=4a$ и $(4a \bmod p) \bmod 4=0$;

2) Если $k=1$, то $a=(p-3)/4+b$, где b — целое и $1\le b<(p+1)/4$. Значит $4a=p-3+4b$, $4a \bmod p=-3+4b$ и $(4a \bmod p) \bmod 4=1$;

3) Пусть $k=2$, тогда $a=(p-1)/2+b$. Тогда $4a=2p-2+4b$, $4a \bmod p=-2+4b$ и $(4a \bmod p) \bmod 4=2$;

4) Наконец, если $k=3$, то $a=(3p-1)/4+b$. Значит, $4a=3p-1+4b$, $4a \bmod p=-1+4b$ и $(4a \bmod p) \bmod 4=3$. Таким образом, $a_k=|I_k\cap D|$.

Если же $p\equiv 1(\bmod 4)$, то $D=\{-(f4^{-n} \bmod p), n=0,1,\ldots,T-1\}$ и второе утверждение этой леммы может быть показано тем же самым способом, что и первое.

Лемма 3. *Пусть четвертичная последовательность s определена по (1) с числом связи p и $D=\{f4^{-n} \bmod p, n=0,1,\ldots,T-1\}$. Тогда $|D\cap(0,p/2)|=T/2$, более того, если $-1\in H_0$, то $|D\cap(0,p/4)|=T/4$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидным образом следует из (4) и предыдущей леммы. Если $-1\in H_0$, то $(p-a)\in D$ для любого $a\in D$. Следовательно, $a_0=a_1$ или $a_0=a_3$ для $p\equiv\pm 1(\bmod 4)$. Использование формул (4), завершает доказательство.

3. Арифметическая автокорреляция

Определим характер χ из $\mathbb{Z}_p^*$ в множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ следующим образом

$$\chi(a)=\xi^k,\ \textit{если}\ a\in H_k, \tag{5}$$

где ξ — первообразный комплексный корень степени $(p-1)/T$ из 1.

Характер χ можно распространить на множество целых чисел и рассматривать его как характер Дирихле по модулю p считая, что $\chi(a)=0$, когда $НОД(a,p)\ne 1$, и $\chi(a)=\chi(a \bmod p)$ в противном случае.

Теорема 4. *FCSR-последовательности не могут иметь идеальную арифметическую автокорреляцию при каждом $f=1,2,\ldots,p-1$.*

Доказательство. Будем доказывать теорему от противного. Пусть для любого $f=1,2,\ldots,p-1$ последовательности имеют идеальную арифметическую автокорреляцию.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $-1\notin H_0$. Тогда χ — нечетный характер и по лемме 1 получаем, что

$$\sum_{1\le a<p/2}\chi(a)=\sum_{k=0}^{(p-1)/T-1}\ \sum_{a\in(I_0\cup I_1)\cap H_k}\chi(a)=\frac{T}{2}\sum_{j=0}^{T/N-1}\xi^j=0. \tag{6}$$

С другой стороны, так как χ — нечетный, притмитивный и нетривиальный, то по теореме 3.2 из [7] имеем, что

$$\sum_{1\le a<p/2}\chi(a)=\frac{G}{2\pi i}\big(2-\chi(2)\big)L\Big(1,\overline{\chi}\Big),$$

где $i=\sqrt{-1}$, G — гауссова сумма и $L(1,\overline{\chi})=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\chi(n)}n^{-1}$ — Дирихле L-функция. Так как значения гауссовой суммы и Дирихле L-функции не равны нулю, получаем противоречие с (6).

2. Пусть $-1\in H_0$. Значит, здесь существует m такое, что $4^m\equiv -1(\mathrm{mod}\ p)$ или $2^{2m}\equiv -1(\mathrm{mod}\ p)$. Следовательно, 4 делит $p-1$ и $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$. Тогда, как и в первом случае по лемме 1 получаем, что

$$\sum_{1\le a<p/4}\chi(a)=0, \tag{7}$$

в этом случае χ — четный характер. Тогда по теореме 3.7 из [7] имеем, что

$$\sum_{1\le a<p/4}\chi(a)=\frac{G}{\pi}L\Big(1,\overline{\chi}_{4p}\Big).$$

Снова получаем противоречие.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена арифметическая автокорреляция семейства четвертичных последовательностей, синтезируемых регистром сдвига с обратной связью с переносом. Показано, что в отличии то двоичных последовательностей здесь не существует семейств с идеальной арифметической автокорреляцией каждой последовательности.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24–21–00442

Литература

1. *Goresky M.* Arithmetic crosscorrelations of feedback with carry shift register sequences / M. Goresky, A. Klapper // IEEE Trans. Inf. Theory Hofer R., Winterhof A. – 1997. – V. 43. – C. 1342–1345.

2. *Goresky M.* Algebraic Shift Register Sequences / M. Goresky, A. Klapper. – Cambridge University Press, 2012.

3. *Klapper A.* Feedback shift registers, 2-adic span and combiners with memory / A. Klapper, M. Goresky // J. Cryptol. – 1997.– V. 10. – C. 111–147.

4. *Chen Z.* Arithmetic autocorrelation of binary m-sequences / Z. Chen, Z. Niu, Y. Sang, C. Wu // Cryptologia.–2023. – V. 47. C. 449–458.

5. *Chen Z.* Arithmetic crosscorrelation of pseudorandom binary sequences of coprime periods / Z. Chen, Z. Niu, A. Winterhof // IEEE Trans. Inf. Theory. – 2022. –V. 68. – C. 7538–7544.

6. *Chen Z.* Arithmetic correlation of binary half-l-sequences / Z. Chen, V. Edemskiy, Z. Niu, Y. Sang // IET Inf. Secur. – 2023. – V. 17. – C. 289–293.

7. *Berndt B.* Classical theorems on quadratic residues / B. Berndt // Enseignement Math. – 1976. – V. 22. – C. 261–304.

УДК 004

ИНТЕГРАЦИЯ УМНЫХ ПОМОЩНИКОВ В ОРГАНИЗАЦИЮ КАК СЛЕДУЮЩИЙ ШАГ РАЗВИТИЯ ПРОГРАММНОЙ РОБОТИЗАЦИИ

А. В. Калач[1], Т. Е. Смоленцева[2], Я. А. Акатьев[2]

[1]Воронежский институт ФСИН России
[2]МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В работе рассмотрены особенности развития технологии программной роботизации и выделен обособленный вид — умный помощник. Представлена внутренняя структура умного помощника и типовой функционал. Представлено обоснование внедрения умного помощника в структуру управления организацией, а также особенности интеграции в организацию. Представлены результаты внедрения умного помощника в Институт информационных технологий РТУ МИРЭА. Делается вывод о необходимости дополнительной классификации термина «программная роботизация» на «интеллектуальные» и «автоматизированные».
Ключевые слова: умный помощник, RPA, структура управления, IT-архитектура, нейронные сети, работа с данными, принятие решений, чат-бот, виртуальный ассистент, внутренняя структура, корпоративные информационные системы.

Введение

Программные роботы активно используются для автоматизации рутинных задач, связанных с выполнением бизнес-процессов в организациях. Их внедрение способствует значительной оптимизации работы: выполнение типовых задач становится более быстрым и менее затратным в плане человеческих ресурсов. Это позволяет организациям улучшить производительность, минимизировать ошибки, характерные для ручного труда, и оптимально перераспределять рабочую нагрузку. Благодаря этому сотрудники могут быть перенаправлены на более сложные, аналитические или стратегически важные задачи, требующие высокого уровня квалификации и творческого подхода. Таким образом, программные роботы играют ключевую роль в повышении эффективности бизнес-процессов, а также в достижении более высокой адаптивности организаций к изменяющимся условиям рынка.

Рынок программных роботов в Российской Федерации находится в стадии активного роста. Данный рост обусловлен множеством факторов, включая необходимость импортозамещения и усиление внутренней технологической независимости после ухода ряда иностранных компаний с российского рынка в 2022 году. В ответ на это на рынке появляются новые отечественные решения и разработки в сфере роботизации процессов. Отечественные компании стремятся удовлетворить потребности в автоматизации бизнес-процессов и предлагают новые подходы и технологии, адаптированные к особенностям российского рынка и требованиям локальных организаций.

Рассмотренный процесс способствует созданию более конкурентной среды на рынке программных роботов в России. Повышение конкуренции стимулирует разработчиков к созданию совершенных, надежных и функциональных решений, что, в свою очередь, обеспечивает организациям доступ к широкому спектру инструментов для оптимизации их бизнес-процессов.

Ключевые Российские компании в области RPA – ElectroNeek, Robin, TensorFlow RPA, RPA. PRO, TsuruRobotics, RAZR Technology. Эти компании предоставляют локализованные продукты, которые соответствуют требованиям российских предприятий и адаптированы под отечественные регуляторные нормы (рис. 1).

Рис. 1. Рынок RPA в Российской Федерации

Большинство организаций используют роботов для следующего набора задач (табл. 1).

Таблица 1

Класс задач умных помощников

Класс задач	Описание
Работа с данными	Роботы могут работать сразу с несколькими программными решениями и базами данных, необходим только написанный алгоритм
Принятие решений	Роботы могут самостоятельно принимать решения, основанные на заранее заложенном в них алгоритме. Принятие решения сопровождается строгим набором правил, а в случае возникновения исключения робот может уведомлять об этом сотрудника организации эскалируя решение возникшей проблемы
Проверка данных	Проверка данных в документах или генерация документов по типовым шаблонам на основе данных
Сбор данных	Работа с неструктурированным объемом информации либо сбор данных в полуавтономном режиме.

Сфера применения программных роботов непрерывно расширяется. Ведущие компании, стремящиеся сохранить лидирующие позиции на рынке цифровых решений, активно исследуют новые направления для применения программных роботов в различных предметных областях, а также работают над расширением их функциональных возможностей и анализом перспектив их дальнейшего развития.

Исходя из этого возникла потребность в формализации и классификации таких программных компонентов. Авторами предлагается использование терминологии «Умный помощник».

Интеллектуальный помощник обладает рядом функциональных особенностей, которые определяются его внутренней структурой и предназначены для обеспечения высокой адаптивности и эффективности в выполнении различных задач. Эти особенности можно выделить по следующим основным направлениям:

Автоматизируемые бизнес-процессы. Умный помощник охватывает широкий спектр бизнес-процессов, которые могут быть автоматизированы без привязки к конкретной предметной области. Такой подход позволяет умному помощнику решать разнообразные задачи, универсально применимые в разных сферах деятельности организации. Данный фактор обеспечивает возможность его использования для поддержки как фронтальных, так и бэк-офисных процессов, независимо от их функциональной направленности.

Интеграция с корпоративными информационными системами (КИС). Важной характеристикой умного помощника является его интеграция с развернутыми в организации информационными системами, такими как системы управления взаимоотношениями с клиентами (CRM), системы управления ресурсами предприятия (ERP), и другие. Такая интеграция позволяет помощнику эффективно взаимодействовать с данными и процессами в рамках единой IT-архитектуры, повышая оперативность и качество взаимодействия с пользователями и снижая нагрузку на другие ИТ-системы организации (рис. 2).

Рис. 2. Улучшение бизнес-операция с помощью умных помощников

Роль в организационной структуре. Умный помощник занимает определенное место в организационной структуре компании, выполняя функции как для клиентов, так и для сотрудников. С точки зрения клиентов, помощник может стать интерфейсом для взаимодействия с компанией, обеспечивая поддержку пользователей и обработку запросов. С точки зрения сотрудников, умный помощник выступает в роли инструмента, облегчающего выполнение рутинных и повторяющихся задач, позволяя специалистам сосредоточиться на более сложных и стратегических аспектах своей работы. Такой подход способствует улучшению клиентского опыта и повышению производительности труда (рис. 3).

Функциональные возможности. Умный помощник обладает широким спектром функциональных возможностей, которые включают в себя автоматизацию рутинных задач, анализ данных, поддержку в принятии решений и другие виды поддержки. Данные возможности могут быть адаптированы под потребности конкретного подразделения или бизнес-процесса, что делает помощника гибким инструментом, способным решать задачи различной сложности.

Кроме того, модель принятия решений является ключевым модулем умного помощника, обобщающим его функциональность с учетом технологий искусственного интеллекта. Модель

Рис. 3. Роли умного помощника

опирается на генеративные нейронные сети, а также методы, основанные на разметке данных, что позволяет интеллектуальному помощнику эффективно обучаться и адаптироваться к новым условиям и задачам. Модель принятия решений позволяет помощнику обрабатывать более сложные запросы, которые требуют не только автоматизации, но и элементарного уровня рассуждений и адаптивности.

В общем виде предлагаемое решение представляет собой информационную систему, взаимодействие с которой осуществляется через обмен сообщениями в социальных сетях. Примером такого взаимодействия может служить чат-бот, с которым сотрудники организации могут взаимодействовать для выполнения задач. В этом случае, вместо непосредственного отчёта перед руководителями, сотрудники могут взаимодействовать с умным помощником, который получает и передаёт данные в систему управления, ориентированную на контроль и координацию поставленных задач.

Таким образом, умный помощник или чат-бот становится частью системы управления организацией, занимая определённое место в её иерархии. Независимо от структуры управления, умный помощник выполняет задачи уровня низшего менеджмента, обеспечивая выполнение определённых управленческих функций и поддержку рабочих процессов.

Внедрение умного помощника в организацию существенно упрощает множество процессов управления организацией. Достигается это в том числе применением асинхронности процесса. Менеджер среднего звена избавлен от необходимости ожидания отклика сотрудника на поставленное задание, так как оно автоматически интегрируется в его календарный план. Сотрудник, в свою очередь, может оперативно получать справочную информацию без запроса согласований или подтверждений от вышестоящих подразделений, обращаясь напрямую к системе умного помощника.

Для оценки практической значимости концепции интеграции умного помощника в структуру управления приведён пример. В Институте информационных технологий РТУ МИРЭА обучается более шести тысяч студентов и работает несколько сотен преподавателей.

В данном случае частичная замена или дополнение функций нижнего управленческого звена умным помощником позволяет эффективно решить перечисленные задачи. В данной предметной области виртуальный ассистент может взять на себя часть обязанностей старосты и куратора студенческой группы из состава преподавателей.

Подробное описание интеграции представлено в более ранних работах.

Заключение

Развитие концепции непрямого управления через умного помощника требует разработки классификации программных роботов на «интеллектуальные» и «автоматизированные», что станет предметом дальнейших научных исследований.

Литература

1. *Гурлев И. В.* Цифровизация экономики России и проблемы роботизации / И. В. Гурлев // Вестник евразийской науки. – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 36.

2. *Лобачева А. С.* Этика применения искусственного интеллекта в управлении персоналом / А. С. Лобачева, О. В. Соболь // E-Management. – 2021. – Т. 4, № 1. – С. 20–28.

3. *Сидоров А. В.* Роботизация бизнес-процессов как инструмент повышения производительности труда сотрудников компании / А. В. Сидоров // Хроноэкономика. – 2019. – № 4(17). – С. 64–68.

4. *Шермухамедов Б. А.* Системы искусственного интеллекта в банковской сфере / Б. А. Шермухамедов // Россия: тенденции и перспективы развития : Ежегодник, Курск, 04–05 июня 2021 г. Том Выпуск 16. Часть 2. – Москва: Институт научной информации по общественным наукам РАН, 2021. – С. 523–525.

5. *Смоленцева Т. Е.* Концепция применения умных помощников в управлении организацией на примере института информационных технологий РТУ МИРЭА / Т. Е. Смоленцева, Я. А. Акатьев // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – 2023. – Т. 1. – С. 344–347.

УДК 510.52, 519.766.23

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ТОТАЛЬНОЙ ВЫВОДИМОСТИ В НЕУКОРАЧИВАЮЩИХ ГРАММАТИКАХ

Б. Н. Карлов

Тверской государственный университет

Аннотация. В работе изучается проблема тотальной выводимости в неукорачивающих и контекстно-зависимых грамматиках. Проблема состоит в том, чтобы по грамматике и терминальному слову определить, существует ли вывод этого слова, в котором каждое правило используется не менее некоторого заданного числа раз. Доказывается, что эта проблема является NP-полной для любого фиксированного слова длины не менее 2, а также что она разрешима за полиномиальное время для слов длины 1. Аналогичные результаты получены и для варианта проблемы тотальной выводимости с ограничением на число использований нетерминалов в выводе.

Ключевые слова: неукорачивающая грамматика, контекстно-зависимая грамматика, тотальная выводимость, вычислительная сложность, NP-полная проблема.

Введение

Одной из основных алгоритмических проблем в теории формальных языков является проблема принадлежности. В этой задаче на вход подаётся некоторое описание языка (грамматика или автомат) и слово. Алгоритм должен определить, принадлежит ли слово языку. Известно, что эта проблема неразрешима в классе всех порождающих грамматик (см. [5]) и является PSPACE-полной в классе всех контекстно-зависимых грамматик (см. [3]). Для контекстно-свободных грамматик существуют более эффективные алгоритмы анализа. Так, алгоритмы Кока — Янгера — Касами и Эрли (см. [5]) решают проблему принадлежности за время $O(n^3)$, где n — длина входного слова, а алгоритм Валианта (см. [6]) — за время $O(M(n))$, где $M(n)$ — время умножения двух булевых матриц размера $n \times n$.

В статье [4] в связи с исследованием некоторых вариантов исчисления Ламбека было введено понятие тотальной выводимости слова в грамматике. В этом определении требуется, чтобы каждое правило грамматики применялось в выводе не менее некоторого указанного числа раз. В этой же статье была исследована вычислительная сложность проблемы тотальной выводимости для некоторых классов порождающих грамматик. В частности, было доказано, что она является m-полной для произвольных порождающих грамматик, PSPACE-полной для неукорачивающих и контекстно-зависимых грамматик, NP-полной для контекстно-свободных грамматик. При этом рассматривался наиболее общий вариант проблемы, когда на вход алгоритму подаётся как грамматика, так и слово.

В настоящей работе мы изучаем вариант проблемы тотальной выводимости, когда слово фиксировано, а на вход алгоритму подаётся только неукорачивающая или контекстно-зависимая грамматика. Кроме того, мы определяем другой вариант тотальной выводимости, в котором накладываются ограничения не на количество применений правил, а на количество вхождений нетерминалов в вывод. Мы доказываем, что такие варианты проблемы тотальной принадлежности являются NP-полными для слов длины не менее 2. Если же длина слова равна 1, то обе проблемы разрешимы за полиномиальное время.

1. Основные определения

Напомним определения основных понятий, которые будут использоваться в дальнейшем. *Алфавитом* называется конечное множество символов, а *словом* — конечная последовательность символов. Через Σ^* обозначается множество всех слов в алфавите Σ. *Длиной* слова называется число символов в нём. *Порождающая грамматика* — это четвёрка $G = (N, \Sigma, P, S)$, где N — алфавит *нетерминалов*, Σ — алфавит *терминалов*, при этом $N \cap \Sigma = \varnothing$, P — множество *правил вывода*, $S \in N$ — *начальный* нетерминал. Правила вывода имеют вид $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$, при этом α содержит хотя бы один нетерминал. Слово y выводимо из слова x за один шаг в грамматике G (обозначается $x \Rightarrow_G y$), если $x = u\alpha v$, $y = u\beta v$ для некоторых $u, v \in (N \cup \Sigma)^*$, $\alpha \to \beta \in P$. Если грамматика G ясна из контекста, то мы будем опускать индекс и писать просто $\Rightarrow$. Через $\Rightarrow^*_G$ обозначается рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow_G$, а через $\Rightarrow^+_G$ — его транзитивное замыкание. Слово x *выводимо* из слова y в грамматике G, если $x \Rightarrow^*_G y$. Язык, *порождаемый* грамматикой G, — это множество всех слов в алфавите Σ, выводимых из начального нетерминала S. Порождающая грамматика называется *неукорачивающей*, если для любого правила $\alpha \to \beta$ выполняется неравенство $|\alpha| \le |\beta|$. Порождающая грамматика называется *контекстно-зависимой*, если все её правила имеют вид $\alpha A \beta \to \alpha\gamma\beta$, где $A \in N$, $\alpha, \beta, \gamma \in (N \cup \Sigma)^*$, при этом γ непусто.

Мультимножество — это произвольная совокупность элементов, в которой каждый элемент может встречаться произвольное количество раз (в этом состоит отличие от множества). Число вхождений элемента x в мультимножество A называется его *кратностью*. *Суммой* мультимножеств A и B называется мультимножество $A \uplus B$, в котором кратность каждого элемента равна сумме его кратностей в A и B. Запись $A \subseteq B$ означает, что кратность каждого элемента мультимножества A не превосходит его кратности в B. Мы будем использовать также *обобщённые* мультимножества, где элементы могут иметь кратность ∞. При этом $\infty \ge n$ и $\infty + n = \infty$ для любого числа n. При реализации алгоритмов ∞ представляется булевым флагом. В определении R-тотальной выводимости, однако, R будет мультимножеством без элементов кратности ∞.

Определение 1. Пусть R — некоторое мультимножество правил грамматики G. Вывод в грамматике называется *R-тотальным*, если каждое правило используется в нём не меньшее число раз, чем кратность этого правила в R.

Определение 2. Пусть M — некоторое мультимножество нетерминалов грамматики G. Вывод в грамматике называется *M-тотальным*, если каждый нетерминал встречается в нём не меньшее число раз, чем кратность этого нетерминала в M.

Через P (соответственно NP) обозначается класс всех алгоритмических проблем, разрешимых детерминированными (соответственно недетерминированными) алгоритмами за полиномиальное время (точные определения этих понятий можно найти в [3]). Алгоритмическая проблема A *полиномиально сводится* к проблеме B (обозначается $A \le_p B$), если существует функция f, вычислимая детерминированным алгоритмом за полиномиальное время и такая, что для любого входа x справедлива следующая эквивалентность: $x \in A$ тогда и только тогда, когда $f(x) \in B$. Проблема A называется *NP-трудной*, если $B \le_p A$ для любой проблемы $B \in \mathrm{NP}$. Проблема A называется *NP-полной*, если $A \in \mathrm{NP}$ и A NP-трудна. Для доказательства NP-трудности используется следующее свойство (см. [3]).

Лемма 1. *Если $A \le_p B$ и проблема A является NP-трудной, то проблема B тоже NP-трудна.*

Для доказательства результатов об NP-полноте мы будем использовать задачу *о вершинном покрытии*. Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф. Множество вершин $V' \subseteq V$ называется вершинным покрытием, если для любого ребра из E хотя бы один из его концов принадлежит V': из $(u, v) \in E$ следует, что $u \in V'$ или $v \in V'$. Задача о вершинном покрытии состоит в

следующем: по неориентированному графу $G=(V,E)$ и натуральному числу $k \le |V|$ нужно определить, существует ли в G вершинное покрытие мощности не более k. Известно, что задача о вершинном покрытии является NP-полной (см. [3]).

2. Алгоритмы проверки тотальной выводимости слова в неукорачивающих грамматиках

Сначала мы опишем недетерминированный алгоритм для проверки R-тотальной выводимости слова в неукорачивающей грамматике для мультимножества правил R.

Теорема 1. *Пусть $G=(N,\Sigma,P,S)$ — неукорачивающая грамматика, $w \in \Sigma^*$ — терминальное слово, R — мультимножество правил. Пусть $|w|=n$, $|\Sigma|=k$, $|N|=m$, $|P|=p$. Тогда R-тотальную выводимость слова w в грамматике G можно проверить недетерминированным алгоритмом за время $O(n(k+m)^n((k+m)^n+p))$.*

Доказательство. Будем называть правило $\alpha \to \beta$ удлиняющим, если $|\alpha| < |\beta|$. Применение удлиняющего правила увеличивает длину слова по меньшей мере на 1. Так как начальное слово уже содержит один символ S, то вывод слова w длины n не может содержать больше $n-1$ применения удлиняющих правил. Если общее число удлиняющих правил в R с учётом кратности больше $n-1$, то R-тотального вывода не существует. Далее мы будем считать, что число удлиняющих правил в R не превосходит $n-1$.

Пусть $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_l$ — произвольный вывод (не обязательно R-тотальный). Будем называть его ациклическим, если $\alpha_i \ne \alpha_j$ при $i \ne j$. Вывод называется циклом, если $\alpha_1 = \alpha_l$. Если при этом $\alpha_i \ne \alpha_j$ при $1 \le i < j < l$, то цикл называется простым. Задача R-тотальной выводимости решается приведённым ниже недетерминированным алгоритмом. В этом алгоритме A и Z — мультимножества, а W — множество.

1. Угадать ациклический вывод $\pi : \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_l$, где $\alpha_1 = S$, $\alpha_l = w$.
2. Поместить в мультимножество A номера всех правил, встретившихся в π, с учётом кратности.
3. Положить $W = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$.
4. Угадать число q и последовательность непустых попарно различных слов $U = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ в алфавите $N \cup \Sigma$ длины не более n.
5. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, q$ выполнить пункты 6–8.
6. Угадать слово $\beta \in W$ и простой цикл $\pi' : \beta \Rightarrow^+ \beta_i \Rightarrow^+ \beta$.
7. Добавить в W все слова, встретившиеся в π'.
8. Добавить в A номера всех правил, встретившихся в π', с учётом кратности.
9. Положить $Z = \varnothing$.
10. Для каждого правила $\rho \in P$ выполнить шаги 11–12.
11. Либо перейти к следующему правилу, либо угадать слово $\gamma \in W$ и простой цикл $\pi'' : \gamma \Rightarrow^+ \gamma$, в котором применяется правило ρ.
12. Добавить в Z номера всех правил, встретившихся в выводе π'', с кратностью ∞.
13. Если $R \subseteq A \uplus Z$, то вернуть «да», иначе вернуть «нет».

Докажем, что алгоритм возвращает «да» тогда и только тогда, когда существует R-тотальный вывод $S \Rightarrow^* w$.

Пусть некоторое вычисление алгоритма возвращает «да». Это значит, что на шаге 1 алгоритм успешно угадал ациклический вывод $S \Rightarrow^+ w$, а далее на шагах 5–8 и 10–12 расширил его циклами. При этом кратности всех правил, использованных до шага 10, были непосредственно учтены в мультимножестве A. Поскольку все правила из Z находятся в циклах, то их можно применить сколь угодно много раз, повторяя эти циклы. Из включения $R \subseteq A \uplus Z$ следует, что такой расширенный вывод является R-тотальным.

Теперь предположим, что существует R-тотальный вывод $\pi : S \Rightarrow^+ w$. Если он ациклический, то алгоритм просто угадывает его в строке 1, пропускает расширение вывода циклами и возвращает «да»» в строке 13. Предположим, что в выводе есть циклы. Удалим их все и получим новый вывод π', который уже является ациклическим. В строке 1 алгоритм угадывает π', а в строке 4 он угадывает слова, которые встречаются в π, но не в π'. В строках 5–8 алгоритм угадывает циклы, которые позволяют получить слова β_i, и добавляет в A все использованные при этом правила. В результате получается вывод, который ещё не обязательно является R-тотальным, но который уже содержит все слова, встречающиеся в π. Если кратности некоторых правил всё ещё меньше их кратностей в R, то в строках 9–12 алгоритм угадывает циклы, в которых применяются эти правила, и добавляет их в Z с бесконечной кратностью. Для получившегося вывода имеет место включение $R \subseteq A \uplus Z$, так как ациклическая часть вывода была угадана непосредственно. Поэтому в строке 13 алгоритм возвращает «да».

Теперь оценим время работы алгоритма. Мы будем предполагать, что в качестве модели вычислений выбраны машины с произвольным доступом к памяти (см. [2]). Общее число непустых слов длины не больше n в алфавите $N \cup \Sigma$ равно

$$r = (k+m) + (k+m)^2 + \ldots + (k+m)^n = (k+m)\frac{(k+m)^n - 1}{k+m-1} = O((k+m)^n).$$

Поэтому сумма длин всех таких слов составляет $O(nr) = O(n(k+m)^n)$. Следовательно, шаги 1–4 алгоритма могут быть выполнены за время $O(nr)$. Аналогично одна итерация цикла в строках 5–8 выполняется за время $O(nr)$. Так как число итераций не превосходит r, то весь цикл выполняется за время $O(nr^2)$. Одна итерация цикла в строках 10–12 также требует $O(nr)$ времени, а число итераций равно p, поэтому цикл выполняется за время $O(nrp)$. Проверка включения $R \subseteq A \uplus Z$ выполняется за время $O(p)$. Значит, общее время работы алгоритма составляет $O(nr + nr^2 + rnp + p) = O(nr(r+p)) = O(n(k+m)^n((k+m)^n + p))$. □

Аналогичный результат справедлив и для проблемы M-тотальной выводимости.

Теорема 2. *Пусть $G = (N, \Sigma, P, S)$ — неукорачивающая грамматика, $w \in \Sigma^*$ — терминальное слово, M — мультимножество нетерминалов. Пусть $|w| = n$, $|\Sigma| = k$, $|N| = m$. Тогда M-тотальную выводимость слова w в грамматике G можно проверить недетерминированным алгоритмом за время $O(n(k+m)^{2n})$.*

Доказательство. Задача решается аналогичным алгоритмом. Мультимножества A и Z хранят нетерминалы, встретившиеся в выводе. Цикл в строках 10–12 перебирает не правила, а нетерминалы, поэтому p в оценке времени заменяется на m. □

Следствие 1. *Проблемы R-тотальной и M-тотальной выводимости фиксированного слова w в данной неукорачивающей грамматике G для данного мультимножества правил R или данного мультимножества нетерминалов M принадлежат классу NP.*

В следующем разделе мы покажем, что если слово w фиксировано и содержит хотя бы два символа, то обе проблемы тотальной выводимости оказываются NP-полными. Для слов длины 1 справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Проблемы R-тотальной и M-тотальной выводимости данного слова w длины 1 в данной неукорачивающей грамматике G для данного мультимножества правил R или данного мультимножества нетерминалов M принадлежат классу P.*

Доказательство. Поскольку длина w равна 1, а грамматика неукорачивающая, то в выводе могут использоваться только цепные правила, то есть правила вида $A \to B$, где A и B — нетерминалы, а также одно правило вида $A \to w$. Если грамматика содержит хотя бы одно другое правило, то тотального вывода не существует. Рассмотрим грамматику $G = (N, \Sigma, P, S)$ без «лишних» правил и построим по ней ориентированный граф $G' = (V, E)$ следующим образом. Вершинами графа являются нетерминалы грамматики и слово w: $V = N \cup \{w\}$. Рёбра графа соответствуют правилам: $(u, v) \in E$ тогда и только тогда, когда $u \to v \in P$. Непосредственно из

определения графа G' следует, что существование R-тотального вывода эквивалентно существованию пути из S в w, который проходит через каждое ребро по меньшей мере столько раз, какова кратность соответствующего правила в R. Чтобы найти такой путь, выделим в графе сильно связные компоненты и построим его граф компонент $G^K = (V^K, E^K)$. Эта задача решается стандартным алгоритмом за время $O(|V| + |E|)$ (см. [1]). Отметим в графе G^K все вершины, содержащие хотя бы одно ребро графа G, для которого соответствующее правило имеет ненулевую кратность, а также отметим все рёбра, соответствующие правилам ненулевой кратности. Пусть K_S — компонента, содержащая S, и пусть $K_w = \{w\}$. Если путь попал в некоторую компоненту, то он может посетить каждое её ребро сколь угодно много раз, поскольку все вершины взаимно достижимы. Поэтому нужно найти путь из K_S в K_w, содержащий все отмеченные вершины и рёбра. Если приписать каждому отмеченному элементу стоимость 1, а всем остальным — стоимость 0, то задача сведётся к поиску самого длинного пути в ациклическом графе. Эта задача также решается стандартным алгоритмом за время $O(|V| + |E|)$ (см. [1]). Поэтому общее время работы составляет $O(|V| + |E|) = O(m + p)$, где, как и ранее, $m = |N|$, $p = |P|$.

Задача M -тотальной выводимости решается аналогичным методом, но единичные стоимости приписываются тем сильно связным компонентам, которые содержат хотя бы один нетерминал с ненулевой кратностью. □

3. NP-полнота проблемы тотальной выводимости

Теперь исследуем нижнюю границу сложности тотальной выводимости. Сначала докажем, что проблема M -тотальной выводимости фиксированного слова является NP-полной, даже если $M = N$.

Теорема 4. *Пусть Σ — произвольный алфавит, и пусть $w \in \Sigma^*$ — произвольное фиксированное слово длины не меньше 2. Проблема N-тотальной выводимости слова w в данной неукорачивающей грамматике $G = (N, \Sigma, P, S)$ является NP-полной.*

Доказательство. В силу следствия 1 нужно доказать только NP-трудность.

Мы сведём задачу о вершинном покрытии к задаче тотальной выводимости. Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф с n вершинами $v_1, \ldots, v_n$ и m рёбрами $e_1, \ldots, e_m$. Обозначим через r_i количество соседей вершины v_i, а через $e_{i,j}$ — ребро, соединяющее вершину v_i с её j-м соседом в порядке увеличения номеров вершин, так что $e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,r_i}$ — все рёбра, выходящие из v_i. Построим по графу G неукорачивающую грамматику $G' = (N, \Sigma, P, S)$. Множество нетерминалов определяется как

$$N = \{S, B\} \cup \{A_{i,j} : 1 \le i \le n, 1 \le j \le k\} \cup \{E_i : 1 \le i \le m\}.$$

Для нетерминалов E_i мы сохраним те же обозначения, что и для рёбер. Например, если $e_i = e_{j,k}$, то есть i-е ребро соединяет вершину v_j с её k-м соседом, то мы будем также считать, что $E_i = E_{j,k}$. Множество P содержит следующие правила:

$$\begin{aligned}
&S \to E_{i,1} A_{i,1}, && 1 \le i \le n,\\
&E_{i,j} A_{i,l} \to E_{i,j+1} A_{i,l}, && 1 \le i \le n, 1 \le j \le r_i - 1, 1 \le l \le k,\\
&E_{i,r_i} A_{i,l} \to E_{j,1} A_{j,l+1}, && 1 \le i \le n-1, i+1 \le j \le n, 1 \le l \le k-1,\\
&E_{i,r_i} A_{i,k} \to A_{1,1} B, && 1 \le i \le n,\\
&A_{i,j} B \to A_{i,j+1} B, && 1 \le i \le n, 1 \le j \le k-1,\\
&A_{i,k} B \to A_{i+1,1} B, && 1 \le i \le n-1,\\
&A_{n,k} B \to w.
\end{aligned}$$

Множество N содержит $nk+m+2$ нетерминала, в число правил равно

$$n+k\sum_{i=1}^{n}(r_i-1)+(k-1)\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)+n+n(k-1)+(n-1)+1=3n+2km-kn+\frac{1}{2}(k-1)n(n+1),$$

поэтому построение грамматики может быть выполнено за полиномиальное время.

В нетерминалах $A_{i,j}$ первый индекс соответствует номеру вершины, а второй — количеству найденных вершин покрытия. Вывод слова w состоит из двух частей. Первая часть начинается с применения правила вида $S\to E_{i,1}A_{i,1}$. Дальше в выводе перебираются нетерминалы $E_{i,1},\ldots,E_{i,r_i}$, которые соответствуют рёбрам, выходящим из v_i. После посещения последнего такого нетерминала грамматика порождает строку вида $E_{i',1}A_{i',2}$ и посещает нетерминалы, которые соответствуют рёбрам, выходящим из вершины $v_{i'}$. Процесс продолжается до тех пор, пока не получится нетерминал вида $A_{i,k}$ со вторым индексом k. После этого начинается вторая часть вывода. Грамматика порождает слово $A_{1,1}B$, перебирает все нетерминалы $A_{i,j}$ и завершает вывод, порождая w. Если в первой части вывода были использованы нетерминалы $A_{i_1,1},\ldots,A_{i_k,k}$, то вывод посещает в точности те нетерминалы $E_{p,q}$, которые соответствуют рёбрам, инцидентным вершинам с номерами $i_1,\ldots,i_k$. Это и значит, что в графе G существует вершинное покрытие мощности не более k тогда и только тогда, когда существует N-тотальный вывод слова w в грамматике G'. □

Теперь мы докажем, что проблема R-тотальной выводимости фиксированного слова для множества правил R также является NP-полной.

Теорема 5. *Пусть Σ — произвольный алфавит, и пусть $w\in\Sigma^*$ — произвольное фиксированное слово длины не меньше 2. Проблема R-тотальной выводимости слова w в данной неукорачивающей грамматике G для данного множества правил R является NP-полной.*

Доказательство. Сводимость аналогична сводимости из теоремы 4. Построим по графу $G=(V,E)$ неукорачивающую грамматику $G'=(N,\Sigma,P,S)$. Множество нетерминалов определяется как

$$N=\{S\}\cup\{A_{i,j}:1\le i\le n,1\le j\le k\}\cup\{E_i,F_i:1\le i\le m\},$$

а множество P содержит следующие правила:

$$\begin{aligned}
&S\to E_{i,1}A_{i,1}, && 1\le i\le n,\\
&E_i\to F_i, && 1\le i\le m,\\
&F_{i,j}A_{i,l}\to E_{i,j+1}A_{i,l}, && 1\le i\le n,1\le j\le r_i-1,1\le l\le k,\\
&F_{i,r_i}A_{i,l}\to E_{j,1}A_{j,l+1}, && 1\le i\le n-1,i+1\le j\le n,1\le l\le k-1,\\
&F_{i,r_i}A_{i,k}\to w, && 1\le i\le n.
\end{aligned}$$

В качестве множества R мы возьмём $R=\{E_i\to F_i:1\le i\le m\}$.

В отличие от грамматики из теоремы 4, новая грамматика не содержит правил с B для посещения всех нетерминалов, поэтому вывод слова w завершается применением правила вида $F_{i,r_i}A_{i,k}\to w$. Другое отличие состоит в том, что применение одного правила $E_{i,j}A_{i,l}\to E_{i,j+1}A_{i,l}$ заменяется на участок из двух правил $E_{i,j}A_{i,l}\Rightarrow F_{i,j}A_{i,l}\Rightarrow E_{i,j+1}A_{i,l}$. Как и в доказательстве теоремы 4 устанавливается, что в графе G существует вершинное покрытие мощности не больше k тогда и только тогда, когда существует вывод слова w, содержащий все нетерминалы E_i. Но после получения слова с нетерминалом E_i обязательно должно применяться правило $E_i\to F_i$, поскольку другие правила не содержат E_i в левых частях. Следовательно, в графе G существует вершинное покрытие мощности не более k тогда и только тогда, когда существует R-тотальный вывод слова w. □

Несколько усложнив конструкцию, можно доказать аналогичные результаты и для контекстно-зависимых грамматик.

Теорема 6. *Проблемы R-тотальной и N-тотальной выводимости фиксированного слова w длины не меньше 2 в данной контекстно-зависимой грамматике G для данного множества правил R являются NP-полными.*

Доказательство. Нужно стандартным способом перестроить неукорачивающие грамматики в контекстно-зависимые (см. [5]). Для этого нужно заменить каждое правило вида $AB \to CD$ на правила $AB \to AB'$, $AB' \to CB'$, $CB' \to CD$, где B' — новый нетерминал, уникальный для каждого правила. Аналогично, если $w = av$, где $a \in \Sigma$, то правило вида $AB \to w$ заменяется на правила $AB \to aB$, $aB \to av$. Поскольку это преобразование не затрагивает правила вида $E_i \to F_i$, то доказательство теоремы 5 полностью сохраняется. Однако некоторые из новых нетерминалов могут не встречаться в выводе, который соответствует выводу, содержащему все нетерминалы исходной грамматики. Пусть $X_1,\ldots,X_p$ — все новые нетерминалы. Чтобы учесть их, мы заменим в доказательстве теоремы 4 правило $A_{n,k}B \to w$ на $A_{n_k}B \to X_1B$, а также добавим правила

$$X_iB \to X_{i+1}B, \quad 1 \le i \le p-1,$$
$$X_pB \to aB,$$
$$aB \to av.$$

Эти правила добавляются в конец любого вывода слова w и обеспечивают использование новых нетерминалов. □

В теоремах 4–6 установлена NP полнота проблемы тотальной выводимости для частного случая, когда мультимножество правил является обычным множеством, а мультимножество нетерминалов совпадает с множеством N. Поскольку по следствию 1 эти проблемы принадлежат классу NP и в том случае, когда R и M являются мультимножествами, то мы получаем следующий результат.

Следствие 2. *Проблемы R-тотальной и M-тотальной выводимости фиксированного слова w длины не меньше 2 в данной неукорачивающей или контекстно-зависимой грамматике G для данного мультимножества правил R или данного мультимножества нетерминалов M являются NP-полными.*

Заключение

В работе была исследована проблема тотальной выводимости фиксированного слова в неукорачивающих и контекстно-зависимых грамматиках для мультимножества правил или нетерминалов. Было установлено, что оба варианта проблемы являются NP-полными для любого слова длины не менее 2, а также что они полиномиально разрешимы для слов длины 1. Дальнейшие исследования могут включать поиск широких классов грамматик, для которых проблема тотальной выводимости разрешима за полиномиальное время.

Литература

1. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн. – 2-е изд. – М. : Вильямс, 2011. – 1296 с.

2. *Ахо А.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М. : Мир, 1979. – 536 с.

3. *Гэри М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 416 с.

4. Сложность исчислений Ламбека с модальностями и тотальной выводимости в грамматиках / С. М. Дудаков, Б. Н. Карлов, С. Л. Кузнецов, Е. М. Фофанова // Алгебра и логика. – 2021. – Т. 60, №5. – С. 471–496.

5. *Shallit J.* A second course in formal languages and automata theory / J. Shallit. – Cambridge : Cambridge University Press, 2008. – XII, 240 p.

6. *Valiant L. G.* General context-free recognition in less than cubic time / L. G. Valiant // Journal of Computer and System Sciences. – 1975. – Vol. 10. – P. 308–315.

УДК 517.977

ПРОБЛЕМЫ ПОСТАВОК И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКТУЮЩИХ ДЛЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Ю. А. Клименко, А. П. Преображенский, Ю. П. Преображенский

Воронежский институт высоких технологий

Аннотация. В статье затронута проблема работы механизма снабжения авторизированных центров запасными частями электротехнического оборудования потребителей. Это зависит от четкой работы складской сети по определенному алгоритму с учетом спецификации товаров. Нами поведен анализ поставщиков России по выполнению заказов интернет-сервисами. Выявлены основные недостатки системы снабжения и рассмотрены различные стратегии по управлению резервами запасных частей. Предложена система разделения параметров товаров на отдельные группы. Определены пути выхода из ситуации определения наименований товаров при неисправности электротехнического оборудования.

Ключевые слова: система, снабжение, неисправность, спецификация, склад, запас, стратегия, параметр, группа, наименование, оборудование, электротехнический.

Введение

На сегодняшний день в Центрально-Европейской части России, надежно работает механизм обеспечения авторизованных сервисных центров (АСЦ) запасными частями. Целью этой системы — обеспечение пользователей/потребителей электротехнического оборудования запасными частями и аксессуарами через сеть региональных складов. Внедрение в рыночную систему проходило с использованием накопленного зарубежного опыта, и сейчас эта система получила большое сходство с Европейскими системами сервиса. На рынке электротехнического оборудования появились представители всемирно известных брендов, которые обеспечили поставку комплектующих и запасных частей по схеме, удобной производителю с учетом специфики Российской экономики.

Складские сети стали более требовательны к поддержанию имиджа торговой марки, а так же переориентировались на максимальное удовлетворение потребностей клиентов.

1. Анализ ситуации на рынке снабжения по обеспечению запасными частями

На сегодняшний момент, перемещение запасных частей в складских сетях, как у нас, так и за рубежом, происходит следующим образом: фирма-производитель электротехнического оборудования и запасных частей имеет центральный склад хранения, на котором хранится основное количество ассортимента запасных частей (до 85 %). Это количество обеспечивает потребность всего парка обслуживаемых электроустановок. Производитель поддерживает сеть региональных складов, на которых хранится значительное количество запасных частей, при этом по каждой запасной части создается запас, необходимый для бесперебойного функционирования сервис-партнеров региона в течение двух недель. Размер регионального склада зависит от размера региона и парка электроустановок, находящихся в эксплуатации.

Эти склады обеспечивают АСЦ, а также более мелкие организации — сервисные центры (СЦ), осуществляющие сервис и пусковую наладку оборудования электроустановок.

Все они имеют официальный статус сервис-партнера (СП) предприятия-изготовителя.

При отсутствии на региональном складе необходимой запчасти, осуществляется ее заказ с федерального склада. Применение интернет-сервисов позволяет получить информацию о

наличии этой запчасти на федеральном складе. В случае отсутствия запчасти на федеральном складе она заказывается с центрального склада фирмы-изготовителя.

Если запасной части нет на центральном складе, она изготавливается фирмой-производителем.

Такой уровень взаимодействия возможен только при заказе оригинальных запасных частей. Оригинальной считается такая запасная часть, которая произведена фирмой-изготовителем отопительного оборудования или произведена другим предприятием, которое имеет законное право производства модулей, элементов, деталей под торговой маркой фирмы-изготовителя электротехнического оборудования.

Недостатками такой системы снабжения АСЦ являются:

1. Достаточно длительные сроки поставки заказа запасных частей с центрального склада (от 2-х до 12 недель).

2. Производство запасных частей кустарным способом. Неоригинальные запчасти имеют более низкую стоимость, и как следствие, более низкое качество.

3. Далеко не дешёвая оригинальная продукция (производитель оставляет за собой право неразглашения ценообразования).

4. Не всем АСЦ и СЦ удобен график работы федеральных и региональных складов.

Работа СП в большинстве случаев зависит от региональных складов. Официальные сервисные центры обязаны осуществлять заказ только у партнеров производителя. Использование оригинальных запчастей регламентировано договором сервисного обслуживания производителя и СЦ.

Сервисные центры, осуществляющие ремонт электротехнического оборудования и склады всех уровней, стараются отладить методику прогнозирования товарных запасов. Цель методики состоит в анализе товарооборота, расчета оптимальных запасов, прогнозировании движения запасных частей и оборудования и т.д.

Как правило, специалисты решают задачи, которые касаются двух аспектов логистики: если заказывать, то сколько и когда заказывать?

Крупные АСЦ и СЦ в рабочем процессе составляют и реализуют множество заказов. Всё это учитывается при формировании заказа на склад, а точнее, для его пополнения.

Чтобы максимально развернуто отобразить «картину» взаимодействия системы, нужно определить наиболее важные технико-экономические показатели. Эти показатели могут быть следующими:

- Общее количество запасных частей на складе.
- Детали, которые часто выходят из строя.
- Условия эксплуатации оборудования.
- Интенсивность использования оборудования.
- Не стоит забывать про человеческий фактор.

Нужно держать на вооружении, что имеют место быть сезонные «падения» и «взлеты» спроса на запасные части. Решить эти проблемы позволит создание научно обоснованной системы управления запасами запасных частей на станции технического обслуживания.

Таким образом, исследования, направленные на повышение уровня материально-технического снабжения являются актуальными.

Широко применяемые на практике стратегии управления запасами приведены ниже:

- стратегия с критическим уровнем. При ее использовании, когда запасы снижаются до критического уровня n — производится пополнение.
- периодическая стратегия. При ее применении пополнение запасов происходит в заранее заданные промежутки.

В текущих стратегиях запас восстанавливается до постоянного объема V, или до максимального N. В итоге формируются последующие комбинации, определяющие стратегии управления запасами:

• $< T, N >$ — периодическая до максимального на данном этапе производственной программы по ремонту и техническому обслуживанию.

• $< T, V >$ — периодическая до постоянного объема;

• $< n, N >$ — критическая до максимального уровня;

• $< n, V >$ — критическая до постоянного объема;

Стратегия $< T, N >$ является наиболее гибкой. Она требует от поставщиков гарантий, но при этом предоставляет возможность оперативно реагировать на динамику спроса. Стратегия $< T, V >$ весьма работоспособна в условиях стабильного спроса и гарантированного снабжения. Процесс управления запасами в этой ситуации считается стационарным. Он более продуктивен в реализации массовых производственных работ по ТО и ремонту отопительного оборудования для крупных стабильно работающих предприятий. Для стратегии $< n, N >$ и $< n, V >$ требуется оперативный контроль наличия гарантированных, в текущее время, источников поставки всей номенклатуры запчастей и постоянный учет расхода запасов. По приведенным причинам, данные стратегии в практическом применении являются достаточно сложными и трудоемкими.

2. Имитационная модель системы управления снабжением запасными частями

Под имитационной моделью (ИМ) понимается некая система, целью которой является управление запасными деталями отопительного оборудования, при этом выполняя задачи формирования последовательности тех или иных событий в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_N$, для каждого из которых задается преобразование состояния модели $Y_i \to Y_{i+1}$, $i = 1, 2, ..., N-1$, где $Y_i = (y_1^i, y_1^i, ..., y_n^i)$ — является вектором состояния модели. Большим преимуществом данной модели является то, что она включает в себя учет внешних факторов $X_i = (x_1^i, x_1^i, ..., x_n^i)$, влияющих на потребность покупателей в тех или иных деталях, также в модель включен вектор управления $U_i = (u_1^i, u_1^i, ..., u_n^i)$.

Определить преобразование в рекуррентной форме может только оператор, указав задание F:

$$Y_{i+1} = F\left(Y_i, X_{x+1}, U_{x+1}\right), \quad i = 1, 2, ..., N-1. \tag{1}$$

Стоит отметить, что рекуррентная схема имитационного алгоритма может быть расширена, при необходимости учета в нем латентных параметров, которые является в свою очередь неконтролируемыми $E_i = (e_1^i, e_2^i, ..., e_q^i)$.

$$Y_{i+1} = F^*\left(Y_i, X_{x+1}, U_{x+1}, E_{i+1}\right), \quad i = 1, 2, ..., N-1. \tag{2}$$

Основными компонентами при проведении эксперимента и разработки модели являются датчики случайных чисел и модель управляемого объекта и др.

Рассмотренные компоненты подразумевают под собой:

• количество поступающих заказов на деталь;

• необходимые характеристики для качественного размещения полученных деталей от разных поставщиков, так же включает;

• стратегию по эффективному управлению запасами на складе и другими компонентами.

Для удобства разобьем все необходимые параметры на группы:

• 1-я группа — $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_k)$ включает входные параметры, которые не подлежат контролю;

• 2-я группа — $U = (U_1, U_2, ..., U_k)$ включает входные параметры подлежащие контролю;

• 3-я группа — $V = (V_1, V_2, ..., V_k)$ включает входные параметры, подлежащие как управлению, так и контролю;

• 4-я группа — $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_k)$ включает выходные параметры.

Отметим, что в рамках проведения эксперимента, с целью анализа поведения модели, входные параметры, которые подлежат контролю, имеют одну общую совокупность $X = (V, U)$. Что касается схемы проведения эксперимента, то она имеет вид Z и Y — которые являются стохастическими величинами, а $Y = \varphi(X, Z)$ является детерминированной функцией $M(X|M) = \int \varphi(X, Z)\omega(Z|X)dz$, в отношении которой $\omega(Z|X)$ является плотностью случайного вектора Z при заданных величинах вектора X.

Из всего выше сказанного, можно сделать вывод о том, что для построения имитационной модели необходимо иметь формальные алгоритмы и модели:

1. Количество заказов на определенную деталь с учетом характеристик, и возможностей изменения ситуации внешней среды, которая может повлиять на поток заказов. Эти параметры являются — контролируемыми неуправляемыми.

2. Стратегия для эффективного управления запасами деталей на складе, с учетом их параметризации по количественным показателям, обладающими определенными методами управления решением, и выражены определенной спецификой. Эти параметры являются — контролируемыми управляемыми.

3. Несвоевременные поставки заказов от поставщиков, а так же резкое изменение ценовой политики от поставщиков на необходимые запасные детали. Эти параметры являются — неконтролируемыми.

4. Критерии оценки эффективности деятельности склада (как в целом, так и отдельно) по управлению запасными частями, выраженных в интегральных и локальных характеристиках. Эти параметры являются — выходными.

Далее разобьем номенклатуру на отдельные группы, это необходимо для проведения более детального анализа по расходу деталей на складе, деление номенклатуры будет проводиться на основании некой взаимосвязи между запасными деталями, т. е. в случаи замены одной детали необходимо будет провести замену и других, связанных с ней.

Для этого возьмем группу деталей для замены с учетом статистики наиболее частых неисправностей силовых трансформаторных подстанций и последующих действий по оформления документов после проведения ремонтных работ.

Например, при выходе из рабочего состояния силового понижающего трансформатора комплектной трансформаторной подстанции 10/0,4 кВ часто происходит «отгорание» шпилек крепления электрических соединений входных (10 кВ) и выходных (0,4 кВ) токопроводящих шин. Чтобы устранить неисправность необходимо: произвести замену шпилек соединительных токопроводящих контактных соединений токопроводящих элементов. При этом, также, необходимо провести замену резиновых изолирующих и герметизирующих прокладок крышки емкости силового трансформатора и изоляторов крепления входных и выходных токоведущих шин, что повлечет за собой, в последствии, при окончании ремонтных работ проведение электрических испытаний трансформаторного масла силового трансформатора и электрических испытаний параметров самого силового трансформатора.

Получаем цепь последствий замены деталей при ремонте электрооборудования: изолирующие прокладки крышки емкости силового трансформатора $\Rightarrow$ герметизирующие прокладки крышки емкости силового трансформатора $\Rightarrow$ изолирующие прокладки изоляторов крепления входных и выходных токоведущих шин $\Rightarrow$ герметизирующие прокладки изоляторов крепления входных и выходных токоведущих шин $\Rightarrow$ шпильки крепления электрических соединений входных (10 кВ) и выходных (0,4 кВ) токопроводящих шин $\Rightarrow$ электрические испытания трансформаторного масла силового трансформатора $\Rightarrow$ электрические испытания параметров силового трансформатора $\Rightarrow$ оформление актов проведения электрических испытаний силового трансформатора электротехнической лабораторией $\Rightarrow$ ввод в эксплуатацию трансформаторной подстанции после ремонта.

Заключение

В результате проведенного анализа проработана формальная модель оптимизации отдельных управляемых параметров для описания и оценки влияния различных факторов на своевременную поставку запасных частей к электротехническому оборудованию.

Литература

1. *Тухватуллин Б. Т., Левченко Д. В., Стебайлов М. Ю.* Формирование структурно-энергетических параметров рабочих поверхностей высокоточных деталей при эксплуатации автомобильного транспорта // International Journal of Advanced Studies. – 2019. – Т. 9, № 3. – С. 64–70.

2. *Лысанов Д. М., Пономаренко Н. А.* Количественная оценка уровня качества оборудования // International Journal of Advanced Studies. – 2018. – Т. 8, № 4–2. – С. 56–61.

3. *Лысанов Д. М., Бикмухаметова Л. Т.* Анализ показателей качества и конкурентоспособности оборудования // International Journal of Advanced Studies. – 2018. – Т. 8, № 4–2. – С. 50–55.

4. *Гуськова Л. Б.* О построении автоматизированного рабочего места менеджера // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 6. – С. 106.

5. *Самойлова У. А.* О некоторых характеристиках управления предприятием // Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2014. – № 12. – С. 176–179.

6. *Пеньков П. В.* Экспертные методы улучшения систем управления // Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2012. – № 9. – С. 108–110.

7. *Максимов И. Б.* Принципы формирования автоматизированных рабочих мест // Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2014. – № 12. – С. 130–135.

8. *Максимов И. Б.* Классификация автоматизированных рабочих мест // Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2014. – № 12. – С. 127–129.

УДК 004.054

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ЦЕЛОСТНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ИНФРАСТРУКТУРЫ

П. М. Курчавов

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. Произведена аналитика необходимая для практической реализации программного прототипа, в основе которого лежит многокритериальная методика анализа элементов КИИ. Рассмотрена архитектура программного комплекса для произведения расчета и прогнозирования инфраструктурной целостности систем взаимодействующих объектов. Приведены первые результаты работы программного средства и анализ их точности.
Ключевые слова: целостность, информационная безопасность, субъект, критическая информационная инфраструктура, многокритериальный анализ, инфраструктурный деструктивизм, сверточные нейронные сети, python.

Вступление

Проблематика инфраструктурного деструктивизма, на сегодняшний день является актуальной. Исходя из 187 федеральному закону [1], следует, что предприятия, которые официально являются объектами критической информационной инфраструктуры (далее КИИ) функционируют в огромном количестве сфер, таких как — здравоохранение, наука, транспорт, связь, энергетика, банковская сфера и т. п. Такие предприятия должны функционировать бесперебойно и с минимальными потерями данных, в виду чего остро встает вопрос об обеспечении их стабильной работы.

При нарушении инфраструктурной целостности у системы может понизиться уровень безопасности, причем как отдельного элемента системы, так и всей системы [2]. Данная ситуация, в свою очередь будет увеличивать шансы развития инфраструктурного деструктивизма, который является фактом саморазрушение инфраструктуры субъекта [3]. В рамках обозначенной выше проблемы необходима анализ существующих проблем на объектах КИИ, формализация методик и их реализация для применения в существующих системах.

1. Проектирование программного комплекса для расчёта и прогнозирования инфраструктурной целостности систем взаимодействующих объектов

Для решения поставленной цели была проведена аналитика необходимая для практической реализации программного прототипа, в основе которого будет лежать методика, рассмотренная в предыдущем разделе. Предполагается, что программный комплекс должен быть представлен в виде следующей архитектуры (рис. 1), представленном на верхнем уровне декомпозиции.

На рис. 1 представлены основные составляющие программного комплекса.

• Модуль многокритериального анализа SAW основанный на методике использования метода SAW для оценки инфраструктурной целостности объекта КИИ [4]. Данный модуль представлен в виде декомпозированного элемента. Данный модель представляет собой набор скриптов, реализующих математические операции, описанные ранее в третьем разделе, а так же автоматически формирующий отчет в виде csv файла, для просмотра пользователем, и числовой ряд представляющий собой показатели целостности. Данный числовой ряд необходим для дальнейшей постобработки и прогнозирования ситуации в системе взаимодействующих объектов;

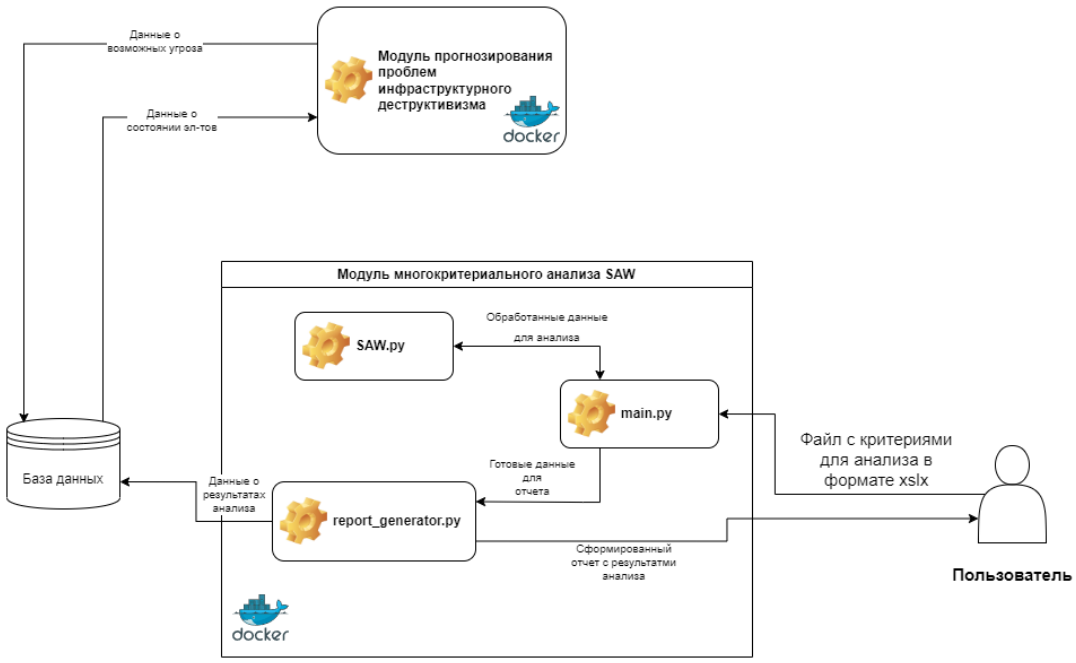


Рис. 1. Архитектура программного комплекса для расчёта и прогнозирования инфраструктурной целостности систем взаимодействующих объектов

• База данных, представляет собой реляционное хранилище данных для долгосрочного содержания промежуточных результатов работы модуля многокритериального анализа, для ведения дальнейшей статистики;

• Модуль прогнозирования проблем инфраструктурного деструктивизма — это экспериментальный модуль, в рамках которого предполагается использование нейронной сети, для прогнозирования движения числового ряда в положительную или отрицательную сторону в будущем исходя из входной выборки, сформированной и подготовленной заранее с помощью ранее описанных модулей.

2. Анализ практик и реализация программных прототипов

В рамках исследования, был разработан первый прототип Модуля многокритериального анализа SAW. Она представляет собой программу для ЭВМ — программная реализация метода многокритериального анализа SAW (с дополнениями в рамках тематики). Область применения программного продукта — анализ целостности субъектов критической информационной инфраструктуры. В соответствии с функциональным назначением включает следующие компоненты: основной модуль (main.py), необходимый для получения входных и промежуточных данных, модуль автоматизированного расчета по методу многокритериального анализа SAW, модуль генерации выходного файла с результатами расчетов.

Описанный выше модуль был реализован на языке python и предназначен в первую очередь для произведения итоговой оценки целостности на основании заранее подготовленных данных. В своей основе данное программное средство работает по схеме приведенной ниже (рис. 2).

В соответствии со всем вышеописанным, возникла идея использования моделей сверхточных нейронных сетей для прогнозирования временных рядов, состоящих из просчитанных, в рамках вышеописанной методики, усредненных оценок целостности объекта КИИ. В соответствии с чем, можно обозначить конкретную цель – исследование возможности использования моделей сверточных нейронных сетей, для решения выше обозначенного вопроса.

Рис. 2. Схема использования метода SAW для оценки инфраструктурной целостности объекта КИИ

Временной ряд — это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов времени. В соответствии с чем, можно сделать вывод, что последовательность из значений усредненных оценок целостности объекта КИИ.

В рамках исследования было выявлено несколько типов нейронных сетей, которые могли бы подойти для решения поставленной цели, а именно прогнозирования временных рядов.

1. Рекуррентная нейронная сеть без сохранения состояния — это тип рекуррентной нейронной сети, в которой окна с данными передаются смешанно и могут пересекаться друг с другом. В конце каждого окна будет образовываться вектор состояния, который будет сброшен и не получит дальнейшего применения. Из-за данной особенности будет проблематично заставить рекуррентную нейронную сеть без сохранения состояния запомнить длительные паттерны временного ряда (максимум — на несколько дюжин временных шагов) [5].

2. В рекуррентной нейронной сети с сохранением состояния окна с данными должны передаваться упорядоченно и не пересекаться. На выходе одного окна будет образовываться вектор состояния, который не будет сброшен сразу. Он будет передан следующей итерации и будет сброшен в конце эпохи. Это позволит сети получить имеющий смысл вектор состояний в начале каждой итерации и запомнить более долгие паттерны. Она сложнее в реализации и обучение проходит намного дольше. [5]

3. Long Short-Term Memory — техника для предоставления возможности рекуррентной нейросети запоминать долгосрочные паттерны. LSTM нейросеть имеет более долгую память — способна запомнить паттерны, длиной более 100 временных шагов. Тем не менее, с более долгими паттернами справиться ей будет сложно [6].

4. Сверточные нейронные сети (CNN) могут быть крайне эффективны для решения задач на подобии классификации изображений, но также они эффективны при работе с последовательностями. В данных нейросетях происходит сдвиг фильтра по временному ряду, получая взвешенную сумму и применяя к ней функцию активации. Сверточные нейросети не обладают памятью, однако при составлении многих слоев получается, что верхние слои видят большую часть последовательности, поэтому сверточные нейросети могут охватывать длительные паттерны [5].

Исходя из вышеприведенных характеристик, было решено остановиться, в рамках данного исследования, на сверточной нейронной сети (далее CNN), т. к. она более всего удовлетворяет поставленной цели, а именно из-за их способности охватывать длительные паттерны, что, потенциально, и нужно для реализации прогнозирования временных рядов, состоящих из просчитанных с помощью многокритериального анализа усредненных оценок целостности объекта КИИ. Это обосновывается тем, что мониторинг объектов КИИ будет происходить в реальном времени, а значит ряд может получится достаточно объемным.

Реализацию необходимо разделить на два этапа:

1. Подготовка данных для сверточной нейронной сети;

2. Использование модели CNN для решения задачи прогнозирования временного ряда.

Было принято решение, формировать обучающую выборку, с помощью случайно сгенерированного множества, в которое будет входить с одна сотня значений, где каждое значения будет равно числу от 0 до 100, с округлением до одного знака после запятой (именно в таком виде представлены усредненные оценки целостности объекта КИИ).

Ниже представлен кода, генерирующий обучающую выборку:

```
import random
from numpy import array
from keras.models import Sequential
from keras.layers import Dense
from keras.layers import Flatten
from keras.layers.convolutional import Conv1D
from keras.layers.convolutional import MaxPooling1D

def prepare_dataset(sequence, n_steps):
    X, y = list(), list()
    for i in range(len(sequence)):
        # find the end of this pattern
        end_ix = i + n_steps
        # check if we are beyond the sequence
        if end_ix > len(sequence)-1:
            break
        # gather input and output parts of the pattern
        seq_x, seq_y = sequence[i:end_ix], sequence[end_ix]
        X.append(seq_x)
        y.append(seq_y)
    return array(X), array(y)

raw_seq_test = []
n = 0
while n < 100:
    raw_seq_test.append(round(random.uniform(0, 100), 3))
    n += 1

raw_seq_high = sorted(raw_seq_test)
raw_seq_low = sorted(raw_seq_test, reverse=True)
raw_seq_random = raw_seq_test

a = 0
start_arrays = [raw_seq_high, raw_seq_low, raw_seq_random]

n_steps = 10

for raw_seq in start_arrays:
    a += 1
    X, y = prepare_dataset(raw_seq, n_steps)
```

В рамках исследования предполагается проверить CNN на трех вариантах датасета. В первом случае, временной ряд формируется по возрастанию, во втором случае по убыванию, а в третьем, разброс величин по ряду будет случайным (что наиболее соответствует реальности),

для этого и было прописано три массива, которые представляют собой 3 разных варианта представления данных.

В результате работы скрипта, будет сформирована обучающая выборка для модели CNN. Пример результата представлен ниже (рис. 3).

```
 [0.944  2.236  2.847  3.084  4.247  4.877  5.901  6.284  6.535  6.842]  9.224
 [2.236  2.847  3.084  4.247  4.877  5.901  6.284  6.535  6.842  9.224] 10.059
 [2.847  3.084  4.247  4.877  5.901  6.284  6.535  6.842  9.224 10.059] 11.311
 [3.084  4.247  4.877  5.901  6.284  6.535  6.842  9.224 10.059 11.311] 15.001
 [4.247  4.877  5.901  6.284  6.535  6.842  9.224 10.059 11.311 15.001] 15.146
 [4.877  5.901  6.284  6.535  6.842  9.224 10.059 11.311 15.001 15.146] 17.126
 [5.901  6.284  6.535  6.842  9.224 10.059 11.311 15.001 15.146 17.126] 17.191
 [6.284  6.535  6.842  9.224 10.059 11.311 15.001 15.146 17.126 17.191]  17.35
 [6.535  6.842  9.224 10.059 11.311 15.001 15.146 17.126 17.191  17.35]  21.22
 [6.842  9.224 10.059 11.311 15.001 15.146 17.126 17.191  17.35  21.22] 21.561
 [9.224 10.059 11.311 15.001 15.146 17.126 17.191  17.35  21.22 21.561] 21.911
[10.059 11.311 15.001 15.146 17.126 17.191  17.35  21.22 21.561 21.911] 22.654
[11.311 15.001 15.146 17.126 17.191  17.35  21.22 21.561 21.911 22.654] 22.721
[15.001 15.146 17.126 17.191  17.35  21.22 21.561 21.911 22.654 22.721]  23.21
[15.146 17.126 17.191  17.35  21.22 21.561 21.911 22.654 22.721  23.21] 23.342
[17.126 17.191  17.35  21.22 21.561 21.911 22.654 22.721  23.21 23.342] 23.476
[17.191  17.35  21.22 21.561 21.911 22.654 22.721  23.21 23.342 23.476] 23.843
 [17.35  21.22 21.561 21.911 22.654 22.721  23.21 23.342 23.476 23.843] 24.486
 [21.22 21.561 21.911 22.654 22.721  23.21 23.342 23.476 23.843 24.486] 26.021
[21.561 21.911 22.654 22.721  23.21 23.342 23.476 23.843 24.486 26.021] 26.205
[21.911 22.654 22.721  23.21 23.342 23.476 23.843 24.486 26.021 26.205] 26.961
[22.654 22.721  23.21 23.342 23.476 23.843 24.486 26.021 26.205 26.961] 28.611
[22.721  23.21 23.342 23.476 23.843 24.486 26.021 26.205 26.961 28.611] 29.328
```

Рис. 3. Пример сгенерированной обучающей выборки

После того, как была сформированна обучающая выборка можно переходить непосредственно к построению модели. В рамках работы используется одномерный CNN - это модель CNN, которая имеет сверточный скрытый слой, который работает над одномерной последовательностью. За этим следует, возможно, второй сверточный слой в некоторых случаях, например, очень длинные входные последовательности, и затем объединяющий слой, задача которого состоит в том, чтобы перевести вывод сверточного слоя в наиболее заметные элементы.

За сверточным и объединяющим слоями следует плотный полностью связанный слой, который интерпретирует особенности, извлекаемые сверточной частью модели. Сглаженный слой используется между сверточными слоями и плотным слоем, чтобы свести карты объектов к одному одномерному вектору.

Одномерная модель CNN для одномерного прогнозирования временных рядов определяется следующим образом (рис. 4).

В модели используется оптимизатор «Адам версия стохастического градиентного спуска» с использованием среднеквадратичной ошибки, или «MSELoss» [7]. Последняя строка из участка листинга выше, используется для того, чтобы обучить модель, воспользовавшись обучающей выборкой сформированной ранее.

После всего вышеописанного можно начинать тестировать модель. Входными данными станет также случайно сгенерированный временной ряд, который сформирован по тем же принципам, что и данные для формирования обучающей выборки.

Результаты ее работы представлены на рис. 5.

```
model = Sequential()
model.add(Conv1D(filters=64, kernel size=2, activation='relu'
input shape=(n_steps, n_features)))
model.add(MaxPoolinglD(pool_size=2))
model.add(Flatten())
model.add(Dense(50, activation='relu'))
model.add(Dense(l))
model.compile(optimizer='adam', loss='mse')
model.fit(X, y, epochs=1000, verbose=0)
```

Рис. 4. Одномерная модель CNN для одномерного прогнозирования временных рядов

```
======== HIGH ========
[5.571, 9.667, 16.619, 23.981, 56.459, 57.507, 79.016, 82.161, 90.418, 90.658]
[[78.11318]]
========= LOW ========
[80.959, 79.419, 77.269, 73.947, 71.399, 58.075, 51.571, 17.926, 9.797, 3.633]
[[8.136717]]
======= RANDOM =======
[21.407, 29.036, 6.525, 58.278, 84.074, 94.56, 12.652, 86.141, 72.467, 29.767]
[[52.352158]]
```

Рис. 5. Результат работы CNN для работы с тремя представлениям временных рядов

Заключение

В общем и целом, можно сделать вывод, что CNN достаточно интересна для проработки прогнозирования временных рядов. Однако в ходе исследования были выявлены явные недостатки, которые, возможно будут исправлены, если более детально проработать модель.

1.Модель не всегда очевидно прогнозирует продолжение временного ряда, что может стать большой проблемой, в рамках поставленной цели, а именно оценки инфраструктурной целостности субъекта КИИ;

2.При обработке временного ряда с неотсортированными данными, порой модель прогнозировала числа, которые, в рамках поставленной цели, являются нереалистичными (пример 112,323 или –37,456), однако это недостаток явно связан с тем, что модель нужно более детально проработать.

Однако в общем, данная модель достаточно хорошо подходит для использования в контексте исследований на предмет анализа инфраструктурной целостности субъекта КИИ. В целом использование механизма для прогнозирования результатов, звучит очень многообещающе и полезно. Впрочем, достаточно важным фактором является отсутствие реальных данных для обучающей выборке, что негативным образом влияет на все исследование.

Литература

1. О безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации // Федеральный закон от 26.07.2017 N 187-ФЗ;

2. Основы информационной безопасности. Часть 1: Виды угроз [Электронный ресурс]: Хабр URL: https://habr.com/ru/company/vps_house/blog/343110/;

3. *Максимова Е. А.* Инфраструктурный деструктивизм субъектов критической информационной инфраструктуры [монография] / Е. А. Максимова // Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, МИРЭА-Российский технологический университет. – Москва : Издательство Волгоградского государственного университета. – 2021. – С. 170–180.

4. *Курчавов П. М., Максимова Е. А.* Многокритериальная оценка целостности субъекта критической информационной инфраструктуры // Прикаспийский журнал: Управление и высокие технологии. Учредители: Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева.

5. *Дауб И. С.* Обзор методов прогнозирования временных рядов с помощью искусственных нейронных сетей // StudNet. – 2020. – № 10. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obzor-metodov-prognozirovaniya-vremennyh-ryadov-s-pomoschyu-iskusstvennyh-neyronnyh-setey (дата обращения: 27.11.2024).;

6. LSTM – сети долгой краткосрочной памяти [Электронный ресурс]: Habr URL: https://habr.com/ru/companies/wunderfund/articles/331310/;

7. Стохастический градиентный спуск. Часть 3 [Электронный ресурс]: dmitrymakarov.ru URL: https://www.dmitrymakarov.ru/opt/sgd-03/;

8. Рекомендации по оценке показателей критериев экономической значимости объектов КИИ от ФСТЭК [Электронный ресурс]: SecurityLab.ru. URL: https://www.securitylab.ru/blog/personal/valerykomarov/350276.php

9. Логические операции и их свойства [Электронный ресурс]: Справочник Автор24 URL: https://spravochnick.ru/informatika/algebra_logiki_logika_kak_nauka/logicheskie_operacii_i_ih_svoystva/

10. КИИ: обзор нормативной базы ФСТЭК России [Электронный ресурс]: Kaspersky ICS CERT URL: https://ics-cert.kaspersky.ru/publications/reports/2018/06/25/obzor-normativnoy-bazy-fstek-rossii/

УДК 002:001(470)

ОНТОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В. И. Меденников

ФИЦ «Информатика и управление» РАН

Аннотация. Целью работы является разработка научно-обоснованного онтологического описания логистической деятельности в стране, актуальность которого проявилась как следствие сформированных основных принципов зрелой цифровой трансформации мирового развития. Указанные принципы вызвали разработку механизмов интеграции информационных ресурсов и систем не только внутри одной отрасли, но и большинства смежных отраслей, для чего должно быть осуществлено онтологическое моделирование их предметных пространств, понятийное описание которых за многие годы существенно стало разниться. Особенно это касается логистики, создающей цепочки добавленной стоимости из значительного числа участников, включая многочисленных производителей комплектующих, поставщиков ресурсов и услуг, потребителей изделий и самих логистических компаний.

Ключевые слова: логистическая деятельность, онтологическое моделирование, цифровая платформа управления, интеграция информационных ресурсов, цифровые стандарты.

Введение

Глобализация мировой экономики привела к ситуации, когда в производстве значительного числа товаров принимает участие все большее количество компаний из различных стран. В результате даже возник термин «Цепочки добавленной стоимости». Технологии такого дробления бизнеса выдвигают все более жесткие требования информационной и алгоритмической совместимости используемого потока данных по всей цепочке. Однако недостаточный уровень состояния интеграционных технологий применяемых информационных систем организаций, участвующих в конкретных цепях поставок, неупорядоченное, хаотичное освоение новых возможностей Интернет-технологий вынуждает всех участников ориентироваться на самые отсталые из них, присущие некоторым из них. Можно сказать, что в цепочке проявляется своеобразный принцип Либиха, или закон ограничивающего фактора, открытый ещё в 1840г. немецким учёным Юстусом фон Либихом, правда, в области сельского хозяйства. Данный принцип гласит, что для любого организма (системы) критически значим тот фактор, который находится в минимальном значении. В результате проявления его в логистике возникает большое число посредников во всей цепочке создания добавленной стоимости.

Одним из инструментов интеграционных технологий является метод построения онтологического пространства знаний [1]. Онтологическое моделирование применяется для описания и интеграции знаний о предметных областях. Онтология — это способ описания исследуемой предметной области в форме концептуальной модели, позволяющей однозначно трактовать применяемые при этом понятия с четким выстраиванием иерархических отношений между ними, а также со структуризацией и осмыслением знаний о предметной области.

Учитывая масштаб затрат на цифровую трансформацию экономики в мире, растущую вовлеченность многих компаний в глобальные цепочки поставок, актуальными становятся исследования по формированию эффективного онтологического механизма функционирования логистической деятельности, то есть единого понятийного пространства знания для всех участников ее. В некоторых исследованиях приводятся даже числовые оценки влияния отсутствия интеграции данных и алгоритмов на эффективность цифровой экономики в размере 62 % [2].

1. Эволюция интеграционных технологий в мировой логистической деятельности

Начиная с 1980-х происходило стремительное развитие логистики в индустриальных государствах, потребовавшего теоретического осмысления и комплекса возникших при этом междисциплинарных и междисциплинарных проблем эффективной интеграции данных и алгоритмов, онтологического механизма их реализации. Для этого проанализируем эволюционные уровни интеграции логистических систем в свете подготовки к переходу на единую цифровую логистическую платформу. Принцип управления логистикой в настоящее время состоит в формировании комплексной системы взаимодействия компаний и организаций на основе механизмов промышленного аутсорсинга. Такой механизм включает в себя организацию кооперационных взаимоотношений с интеграцией управляющих воздействий на все звенья цепочки поставок, формирование единого информационного пространства для координации и коммуникации также всех участников их. Аутсорсинг же подразумевает передачу некоторых логистических функций сторонним компаниям. По некоторым оценкам общий объем подобной логистики на мировом рынке составляет немногим более 172 миллиарда евро. Наиболее востребован аутсорсинг следующих услуг: складирование, экспедирование, возврат грузов, консолидация их, перегрузочные услуги, управление транспортными потоками и автопарком, услуги по поддержке покупателей и ряд других.

В результате совершенствования ИКТ, интернета и на их основе аутсорсинга постепенно сложились следующие уровни интеграции и координации логистической деятельности [3].

1.1. Субконтрактинговая сеть поставок (ССП) — это объединение на основе договоров юридически независимых компаний, взаимосвязанно действующих по реализации индивидуальных этапов общего процесса перемещения продукции, начиная от владельцев сырьевых ресурсов, кончая конечным потребителем. ССП характеризуются в основном лишь процессами складирования (хранения) и транспортировки с исключением производства продукции. Поскольку ССП основаны на достаточно длительных, существующих устойчивых хозяйственных связях, предприятия-участники которых связаны долгосрочными договорами, то это снижает отрицательное влияние на них случайных природных и рыночных факторов с уменьшением степени неопределенности и уменьшением трансакционных издержек.

1.2. Информационная СС (ИСС) — это более развитое, чем ССП, объединение с включением производственного блока по оказанию услуг или изготовлению конечного продукта. В этом случае участники ИСС формируют общие базы данных (БД), включающие информацию об участниках, их производственных возможностях с описанием технологических операций. Поскольку в последнее время БД носят облачный характер с размещением на разработанном для этого специальном вэб-сайте, то уже любой желающий, а не только участники ИСС могут самостоятельно войти на сайт и найти поставщика, производственный заказ, а также разместить и свой заказ. Основной целью ИСС является быстрое нахождение поставщика продукции (услуг) или, наоборот, заказчика для себя. Над участниками не довлеет никакой организатор ИСС, поэтому они добровольно и самостоятельно устанавливают договорные отношения между собой.

1.3. Производственно-логистическая сеть (ПЛС) уже использует функции ССП и ИСС и на настоящий момент является вершиной развития интеграционных возможностей логистической деятельности. В концепции ПЛС заложена разработка единой организационно-технологической среды и информационного пространства с возможностями объединения ресурсов на некоторое время различных автономных субъектов для повышения функциональной эффективности их и повышения конкурентоспособности. Если в ИСС облачная БД используется в пассивном режиме в виде некоторой доски объявлений, то в ПЛС она активно используется для планирования и управления реализацией договорных обязательств. Тогда помимо общей БД, в которую заносятся данные по всем совершенным логистическим операциям, классифи-

каторы, справочники, общие для всех участников ПЛС, имеется подобие базы знаний (функциональное ядро) с заданными алгоритмами оперативного управления.

1.4. Единая цифровая логистическая платформа (ЕЦЛП) на базе единой цифровой платформы управления (ЦПУ) экономикой страны [4, 5]. Если при формировании ПЛС в единое информационное пространство (ЕИП) которой по определению включено лишь незначительное число компаний опять же с ограниченным массивом информации и ограниченным функциональным набором, то в концепции единой ЦПУ участниками ее становятся все предприятия и организации страны с созданием единой системы сбора, хранения и анализа первичной учетной, статистической, технологической информации, интегрированной как между собой, так и с единой системой классификаторов, справочников, нормативов, представляющих реестры практически всех материальных, интеллектуальных и человеческих ресурсов страны на основе онтологического моделирования данных видов информационных ресурсов (ИР). Так, на рис. 1 показан цифровой стандарт сбора и хранения первичной учетной информации по единому формату.

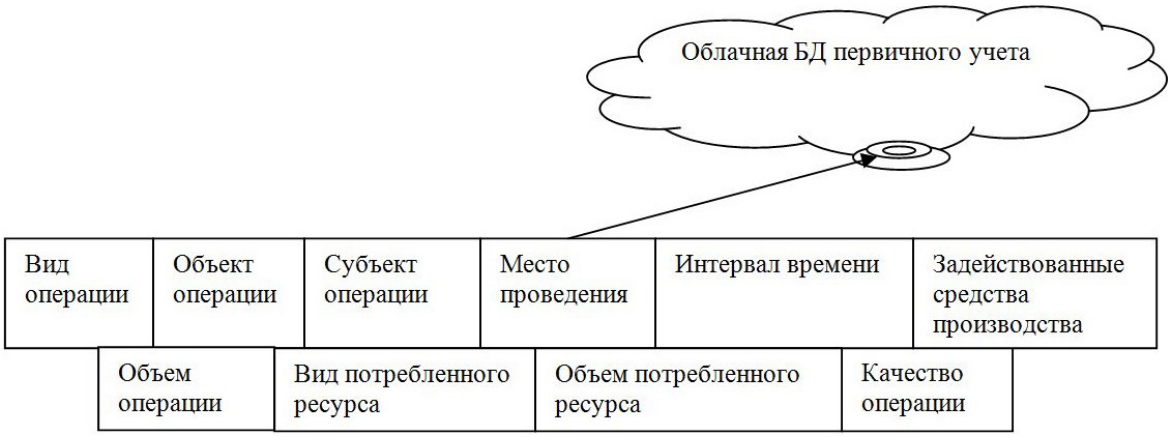


Рис. 1. Цифровой стандарт сбора и хранения первичной учетной информации

ЕЦЛП, основанная на представленной облачной структуре единой ЦПУ, позволит планировать и поддерживать логистические цепочки произвольной конфигурации с участием уже большинства предприятий страны, если не всех. Внедрение ЕЦЛП потенциально дает шанс отслеживания грузов в режиме реального времени, сокращения времени выполнения технологических операций логистических процессов со значительным повышением их прозрачности. Согласно ВТО, устранение барьеров в международных логистических поставках товаров сможет увеличить мировой ВВП на 5 % с общим объёмом перевозок на 15 %.

2. Онтологическое моделирование логистической деятельности

Поскольку в единой ЦПУ ключевым понятием служит операция, то и в ЕЦПЛ значение понимания операции как элементарного действия либо как совокупности действий не снижает своей актуальности. Классификация их должна являться базой для создания нормативов и регламентов планирования и управления логистикой, которой должны следовать как участники цепочек в виде производственных компаний, так и посредники, предприятия сферы услуг и торговли. Хранение информации в облаке о совершенных логистических операциях всех участников ЕЦПЛ, технологии по обработке ее обеспечат оперативный учет и анализ затрат на их реализацию всех видов ресурсов: финансовых, трудовых, материальных и информационных. В связи с важностью данной процедуры в мире неоднократно предпринимались попытки сформировать онтологическую модель в логистике, что завершилось разработкой неких подобий на стандарты относительно терминологии, одобренной многими ведущими мировы-

ми логистическими компаниями. Одной из версий подобного подхода является SCOR-модель (Рекомендуемая модель операций в цепях поставок), разработанная международным Советом по цепям поставок [6].

Указанная модель состоит из четырехуровневой пирамиды онтологического описания взаимосвязей участников логистической цепи в виде иерархии, где метрики верхнего уровня интегрируют метрики более нижнего уровня.

Рассмотрим более подробней элементы пирамиды по уровням.

К метрике 1-го уровня относят пять базисных бизнес-процессов:

Make («делать») — действия, характеризующие непосредственно производство изделия или услуги.

Source («снабжать») — действия, характеризующие факты снабжения различными ресурсами самого производства либо продажу товара.

Deliver («доставлять») — действия, характеризующие перемещение изделия потребителям.

Return («возвращать») — действия, характеризующие возврат бракованных изделий, тары, утилизацию брака и т.п.

Plan «Планирование» — действия, интегрирующие и координирующие предыдущие четыре.

К метрике 2-го уровня относят логистические процессы, под которыми понимается некоторым определенным образом спланированная по времени очередность исполнения логистических операций (функций), обеспечивающая достижимость заданных целевых показателей логистической деятельности. Всего выделено 26 базовых логистических процессов, являющихся пересечением пяти базисных бизнес-процессов метрики 1-го уровня со следующими участниками цепей поставок: поставщики поставщиков со следующими классами — начальный поставщик, поставщик 2-го круга, поставщик 1-го круга; поставщик; фокусная компания; потребитель; потребитель потребителей также со следующими классами — потребитель 1-го круга, потребитель 2-го круга, конечный потребитель.

К метрике 3-го уровня относят логистические функции [7], которые трактуются как ряд операций, обеспечивающих достижимость заданных целевых показателей при управлении потоками материальных ресурсов. К данной метрике относят такие функции логистики: закупочная, производственная, распределительная, транспортная, формирования запасов, складирования, сервиса, информационная.

К метрике 4-го уровня относят логистические операции [7], которые трактуются как любое действие, не подлежащее большему квантованию в рамках стоящих перед логистикой управленческих задач и необходимое при изменениях или модификации основных либо сопутствующих потоков товаров. Необходимость классификации таких операций в каждом бизнес-процессе определяется практикой реализации цепочек с потребностью ведения учета различных экономических и бухгалтерских показателей: финансовых и временных затрат, трудоемкостью и производительностью операций и пр. В настоящее время из-за неудачи по унификации логистических операций для всех возможных цепочек, считается, что набор их является уникальным для каждой компании. В результате такого положения зачастую наблюдается неудовлетворенность пользователями стандартным программным обеспечением (ПО) в сфере логистики, поскольку требует процедуры кастомизации его под потребности их. А это может оказаться очень непростой процедурой. В целом логистические операции с материальными поставками (товарами) можно определить как: погрузку, разгрузку, перегрузку с одного транспортного средства на другой их, экспедирование, распределение по складу, перевозку, приёмку на склад и отпуск со склада, хранение и сортировку, комплектацию и маркировку их.

Заключение

В работе на основе анализа эволюции интеграционных технологий в мировой логистической деятельности, а также формирующихся принципах цифровой трансформации производственной экономики рассмотрено онтологическое моделирование логистики, создающей цепочки добавленной стоимости из значительного числа участников, включая многочисленных производителей комплектующих, поставщиков ресурсов и услуг, потребителей изделий и самих логистических компаний.

Литература

1. *Кульба В. В., Микрин Е. А., Павлов Б. В., Платонов В. Н.* Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов. – М. : Наука, 2006.

2. *Амелин С. В., Щетинина И. В.* Организация производства в условиях цифровой экономики // Организатор производства. – 2018. – Т. 26, № 4. – С. 7–18.

3. *Меденников В. И.* Трансформация технологий управления производственно-логистической цепочкой продукции при формировании единой цифровой платформы управления экономикой России // Цифровая экономика. – 2022. – 1(17). – С. 15–31.

4. *Алексеева Н. А., Осипов А. К., Меденников В. И. [и др.].* Экономические и управленческие проблемы землеустройства и землепользования в регионе. – Ижевск : ООО «Издательство «Шелест», 2022. – 225 с.

5. *Меденников В. И.* Математическая модель формирования цифровых платформ управления экономикой страны // Цифровая экономика. – 2019. – №1(5). – С. 25–35.

6. Supply Chain Operations Reference (SCOR) model. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Supply_chain_operations_reference (дата обращения: 01.10.2024).

7. *Толуев Ю. И., Планковский С. И.* Моделирование и симуляция логистических систем. – Киев : Миллениум, 2009. – 85 с.

УДК 004.75

МАСШТАБИРУЕМАЯ БЛОКЧЕЙН-АРХИТЕКТУРА ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДАННЫМИ В IOT С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛЕГКОВЕСНОГО КОНСЕНСУСА

М. О. Мельников

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Аннотация. Недавние исследования сосредоточены на применении технологии блокчейн для решения проблем безопасности в сетях Интернета вещей (IoT). Однако присущие блокчейну проблемы масштабируемости становятся очевидными при наличии большого количества IoT-устройств и значительных объемов данных, генерируемых этими сетями. В данной работе предлагается масштабируемая блокчейн-основа для управления данными IoT, способная обслуживать большое число устройств. Для решения указанных проблем используется легковесный алгоритм консенсуса — Делегированное Доказательство Доли Владения (Delegated Proof of Stake, DPoS), обеспечивающий высокую производительность и эффективность в условиях ограниченных ресурсов IoT-сетей. DPoS, как легковесный алгоритм, опирается на ограниченное число избранных делегатов для валидации и подтверждения транзакций, что позволяет уменьшить деградацию производительности и эффективности в блокчейн-сетях, связанных с IoT. В рамках исследования был реализован Межпланетный файловый обмен (IPFS) (контентно-адресуемый, одноранговый гипермедийный протокол связи) для распределенного хранения данных, а также использовался Docker для оценки производительности сети по таким параметрам, как пропускная способность, задержка и использование ресурсов. Анализ был разделен на четыре части: задержка, пропускная способность, использование ресурсов и время загрузки файлов, а также скорость оценки в распределенном хранилище.
Ключевые слова: блокчейн, консунсус-алгоритмы, IoT, интернет вещей, DPoS, PoW, PoS, EOSIO, распределённые системы.

Введение

Блокчейн-ориентированные сети Интернета вещей (IoT) обеспечивают безопасное и надежное соединение, а также обмен информацией между физическими или виртуальными объектами, оснащенными сенсорами, через Интернет [1]. Число устройств IoT демонстрирует устойчивый и значительный рост, увеличиваясь с каждым годом. По прогнозам, это число может достичь 29,42 миллиарда к 2030 году [2]. Распространение IoT-устройств с ограниченными ресурсами, которые являются доступными по цене и экономически эффективными, а также развитие современной информационно-коммуникационной инфраструктуры способствовали широкому использованию IoT-сетей в различных приложениях, таких как здравоохранение, промышленность, умные дома, интеллектуальные электросети, безопасность, видеонаблюдение и другие. Традиционно IoT-сети строились с использованием централизованной инфраструктуры и технологий, при этом данные с IoT-устройств собирались и обрабатывались через центральный сервер. Однако такой подход подвержен уязвимостям, связанным с безопасностью и конфиденциальностью данных, из-за киберугроз и физических атак [5]. Чтобы устранить эти проблемы, технология блокчейн рассматривается как один из основных кандидатов для создания защищенных реализаций IoT-сетей [7].

Современное состояние блокчейна имеет ряд проблем, при которых увеличение числа IoT-узлов в сети приводит к ухудшению производительности и эффективности [10]. Более того, согласование состояния блокчейна и верификация транзакций в сети узлов сложны и не способны справиться с большим числом транзакций одновременно в большинстве случаев,

таких как PoW, PoS [5]. Эти проблемы решаются с помощью алгоритмов консенсуса, таких как Делегированное Доказательство Доли Владения (DPoS). DPoS — это легковесный алгоритм консенсуса, который помогает устранить некоторые проблемы, связанные с PoW и PoS [3]. Процесс сохраняет безопасность, проверяя все легитимные транзакции, при этом DPoS использует выбранное число избранных делегатов.

Данная статья включает в себя следующее:

1. В работе предлагается четырехуровневая архитектурная модель для прозрачного и безопасного обмена данными IoT. Дизайн основан на двойной топологии блокчейна, включающей легковесный блокчейн (локальный блокчейн) и публичный блокчейн. Кроме того, в рамках предложенной модели используется IPFS, позволяющий хранить большие объемы данных в распределенной одноранговой системе хранения.

2. Статья затрагивает масштабируемость блокчейн-ориентированных IoT-сетей путем внедрения легковесного алгоритма консенсуса, что особенно важно для развертываний IoT с участием большого числа устройств.

3. В работе вводится некоторый уровень централизации, предусматривающий назначение небольшого числа избранных делегатов для валидации транзакций. Тем не менее, этот компромисс может быть приемлемым для некоторых случаев использования IoT, где важнее эффективность и масштабируемость, чем абсолютная децентрализация.

4. Для повышения эффективности сети в работе предлагается классификация устройств IoT на устройства с достаточным энергопотреблением и устройства с ограниченными ресурсами, в зависимости от их характеристик.

1. Используемые технологии

В данном разделе приводится краткое описание блокчейн-технологии, лежащей в основе предлагаемого решения, а также рассказывается о блокчейн-фреймворке, который лег в основу данного исследования.

Предложенная нами блокчейн-сеть использует подход к консенсусу, известный как Делегированное Доказательство Доли Владения (DPoS). На рис. 1 представлено сравнение ведущих блокчейн-систем. Кроме того, проблемы масштабируемости решаются за счет использования различных хэш-алгоритмов [4].

Features	Bitcoin	Ethereum 2.0	Hyperledger-Fabric	IoTA	EOSIO
Consensus	POW	POS	PBFT	Tangle	DPOS
Consensus finality	×	×	✓	×	✓
Run Smart Contract	×	✓	✓	×	✓
Interchain	×	×	×	×	✓
Feeless	×	×		✓	✓
Scalable	×	✓	×	✓	✓
Energy efficient	×	×	×	✓	✓
TX throughput (TPS)	7	100+	1,000	7-12	4000+

Рис. 1. Сравнение блокчейн-систем

PoS предлагается как альтернатива PoW [1]. Он основан на принципе, что участники, обладающие долей в сети, могут участвовать в процессе консенсуса, способствуя расширению блокчейна и проверке транзакций. В отличие от PoW, который требует от майнеров выполнения вычислительно сложных хэш-алгоритмов для подтверждения транзакций, PoS требует

от пользователей демонстрации владения определенным количеством средств, также известным как их доля в сети. Однако в DPoS вместо того, чтобы каждый узел напрямую участвовал в проверке и подтверждении транзакций, как это происходит в PoW и PoS, используется меньший круг избранных делегатов для верификации транзакций и добавления новых блоков. DPoS ускоряет процесс принятия решений, вовлекая меньшее количество участников — от 21 до 101 делегата. Участники могут присоединяться, не нуждаясь в обширных вычислительных ресурсах, передавая свои полномочия на голосование делегатам, которым они доверяют [3]. Эти характеристики делают DPoS легковесным, масштабируемым и эффективным алгоритмом консенсуса для блокчейн-ориентированных IoT-сетей.

Помимо известных Bitcoin и Ethereum, существует множество других блокчейн-фреймворков с различными особенностями. В данной работе исследуется полезность блокчейна EOSIO [6]. EOSIO обладает несколькими привлекательными качествами, такими как гибкость, признанный статус, наличие множества инструментов для разработчиков и мощный набор средств для разработки контрактов (CDT). Кроме того, в EOSIO возможно программировать блокчейн, используя смарт-контракты (СК), написанные на языке C++, которые могут храниться в блокчейне без ограничений по размеру.

EOSIO [6] представляет собой блокчейн-систему для криптовалюты, называемой enterprise operating system (EOS). Подобно Bitcoin и Ethereum, EOSIO является децентрализованной, разрешенной блокчейн-сетью. Однако между ними существуют существенные различия в целях и возможностях. В отличие от Bitcoin и Ethereum, EOSIO использует алгоритм консенсуса DPoS (Delegated Proof of Stake), который предполагает назначение ограниченного числа делегатов, известных как производители блоков (Block Producers, BPs). В сети EOSIO процесс голосования определяет 21 BP, которым доверено принятие решений по включению вновь созданных блоков в существующую цепь. Использование DPoS позволяет EOSIO значительно повысить скорость обработки транзакций. Основные компоненты блокчейна EOSIO включают Nodeos, Cleos и Keosd. Nodeos отвечает за валидацию и синхронизацию блоков в сети, Cleos предоставляет интерфейс командной строки для взаимодействия с блокчейном, а Keosd хранит приватные ключи на локальных компьютерах.

В EOSIO использование ресурсов требуется для каждой транзакции и выполнения смарт-контрактов. Эти ресурсы подразделяются на вычислительную мощность CPU, пропускную способность сети NET и оперативную память RAM. Для выполнения смарт-контракта пользователю необходимо обладать достаточными ресурсами, чтобы покрыть затраты на потребление ресурсов. Поэтому платформа требует от SCP и пользователей покупки RAM или «стейкинга» CPU и NET. «Стейкинг» подразумевает выделение определенного количества токенов (EOS) для резервирования ресурсов BP.

2. Платформа распределенного хранения данных IoT на основе блокчейна

В данном разделе представлена четырехуровневая архитектурная конструкция для прозрачной и безопасной системы обмена данными в Интернете вещей (IoT), как показано на рис. 2.

Все уровни функционируют автономно и децентрализованно для управления вычислениями и хранением данных. Основная цель этой архитектуры — обеспечить масштабируемость блокчейна в плане пропускной способности и задержки транзакций. Главная задача состоит в том, чтобы снизить нагрузку на блокчейн, вызванную миллионами локальных транзакций в IoT-сетях.

Уровень сети IoT

На этом уровне устройства разделены на две группы. Первая группа включает ограниченные IoT-устройства с ограниченными вычислительными возможностями, памятью и сете-

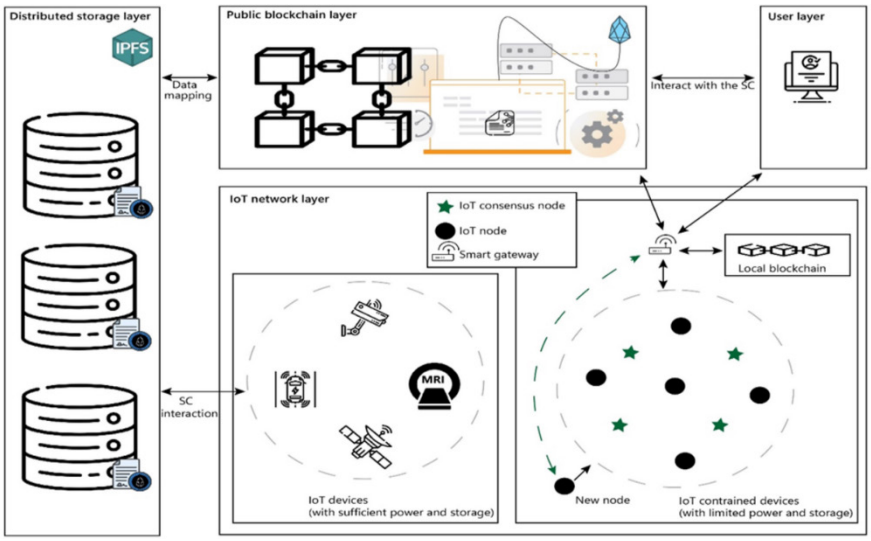


Рис. 2. Архитектура предложенного блокчейна

выми ресурсами. Вторая группа состоит из устройств потоковой передачи данных IoT с достаточной вычислительной мощностью, объемом памяти и сетевыми возможностями. Как показано на рис. 1, устройства потоковой передачи данных могут напрямую взаимодействовать с смарт-контрактами (СК) и загружать данные в хранилище без необходимости в дополнительных устройствах для упрощения взаимодействия. Они также могут напрямую связываться с компонентами хранилища. В то же время ограниченные устройства IoT используют умные шлюзы для взаимодействия с блокчейном, что позволяет преодолеть их ограниченные возможности в работе с СК. Уровень также включает узлы консенсуса и узлы IoT. Узлы IoT собирают данные из окружающей среды и отправляют их в локальный блокчейн через заданные интервалы. Узлы консенсуса, помимо сбора данных, также выполняют консенсусные алгоритмы, такие как DPoS (Delegated Proof of Stake).

Уровень публичного блокчейна

Публичный блокчейн представляет собой децентрализованную сеть, состоящую из блокчейн-хранилищ, каждое из которых имеет полную копию всей системы. Это обеспечивает устойчивость системы в случае выхода из строя большого числа узлов сети и потери данных. Систему можно восстановить с помощью одного узла, который хранит полную копию блокчейна. Смарт-контракты реализуются на уровне публичного блокчейна, и их функции специально разработаны для IoT, такие как регистрация новых узлов и обеспечение взаимодействия между публичным блокчейном и шлюзом. Смарт-контракты автоматизируют и обеспечивают безопасность процесса взаимодействия.

Уровень распределенного хранения

Совмещение конфиденциальности и прозрачности на блокчейне вызывает трудности [8]. Хранение исходных данных на блокчейне ведет к проблемам приватности и масштабируемости. Для решения этой задачи применяется сочетание внешнего хранения данных и проверки на блокчейне. Основная ответственность за хранение данных возложена на внешнее хранилище, реализованное с использованием протокола IPFS (Inter-Planetary File System), который объединяет вычислительные устройства в единую файловую систему, устраняя единые точки отказа. Устройства потоковой передачи данных могут напрямую загружать данные в IPFS, который предлагает преимущества, такие как отсутствие единых точек отказа и обеспечение глобального распределенного хранения.

Пользовательский уровень

Пользователи могут взаимодействовать со шлюзом, чтобы получить необходимые данные IoT, поскольку шлюз также сохраняет данные локального блокчейна. Однако, если пользова-

тель получает данные от устройств потоковой передачи, их объем может быть значительным. Поток данных IoT разбивается на части в соответствии с интервалами выборки и передается для хранения вне блокчейна, а на блокчейне фиксируются только детали, такие как номер фрагмента, временная метка и хэш. Таким образом, можно определить различные требования для получения данных из блокчейна.

3. Анализ производительности

В данной секции приводятся результаты оценки производительности, выполненной на ноутбуке с операционной системой Ubuntu 22.04 LTS, оснащенном процессором Intel Core i3, 8 ГБ ОЗУ и жестким диском объемом 1 ТБ. В рамках эксперимента была установлена EOSIO (v2.2), включающая такие компоненты, как Nodeos, Cleos и Keosd. Также использовался инструмент EOSIO Contract Development Tool (v1.8.1) для компиляции смарт-контрактов, а системные контракты (v1.6.0) предоставляли базовые функциональные возможности для блокчейна EOSIO. В качестве части настройки применялся Docker для инициализации локального узла EOSIO.

Данный раздел представляет результаты оценки производительности, включая сравнительный анализ консенсусных алгоритмов PoS и DPoS. Основная цель этой оценки — определить потенциал масштабируемости в контексте IoT-сетей. Исследуется способность системы подключать повседневные устройства к Интернету и оценивать ее возможности обработки все большего количества устройств со временем, даже с ограниченными вычислительными ресурсами. В начальной версии рассматриваемой IoT-архитектуры отсутствовали механизмы интеграции протокола связи внутри IoT-сети. Обычно смарт-шлюз требует подключения к сети, которое может быть установлено как проводным, так и беспроводным способом. Однако в рамках данной работы было смоделировано использование протокола связи LoRaWAN. Как показано в [29], один шлюз LoRaWAN способен управлять до 100,000 узлов-датчиков, передающих пакеты данных размером 50 байт каждый час. Важно отметить, что рассматриваемая архитектура ориентирована на создание масштабируемой системы, где блокчейн обеспечивает безопасность вне зависимости от используемого протокола связи. Мы провели сравнение с недавними подходами, описанными в литературе, такими как подход на базе PoS для «умных сообществ» [1]. В дальнейших экспериментах производительность архитектуры оценивается по таким метрикам, как пропускная способность, задержка, использование ресурсов (NET-пропускная способность и время CPU), а также требования к хранению данных.

Оценка производительности IoT-архитектуры с учетом алгоритма консенсуса DPoS в первую очередь предполагает измерение задержки и пропускной способности. Этот процесс включает несколько этапов, таких как валидация, добавление данных в блок и измерение пропускной способности транзакций. Задержка — это метрика, показывающая время, затраченное на то, чтобы пакет данных достиг шлюза и стал частью блокчейна. Более высокие значения задержки указывают на большую сложность добавления пакетов данных в блоки и усложнение масштабирования IoT-блокчейна. Вторая метрика — это пропускная способность, измеряемая количеством успешных транзакций с момента первой до последней транзакции в цепочке. Пропускная способность демонстрирует, как система справляется с ростом числа узлов блокчейна IoT на один шлюз. Для оценки масштабируемости были проведены тесты, в которых число узлов блокчейна IoT варьировалось от 500 до примерно 20,000. Размер блока, содержащего пакеты данных, составлял 1 МБ, а размер нагрузки — 50 байт.

На рис. 3 показаны тенденции изменения задержки при добавлении пакета данных. В случае использования алгоритма PoS задержка для добавления пакета данных увеличивается. Например, при 500 узлах задержка составляет 55.4 мс для PoS, тогда как для DPoS — всего 0.976 мс. Это связано с тем, что при DPoS небольшое количество делегатов подтверждает транзакции, а при PoS процесс валидации занимает больше времени из-за отсутствия мгновенного

выполнения и большего количества валидаторов. В результате пакеты данных в PoS ставятся в очередь на валидацию, что увеличивает время обработки.

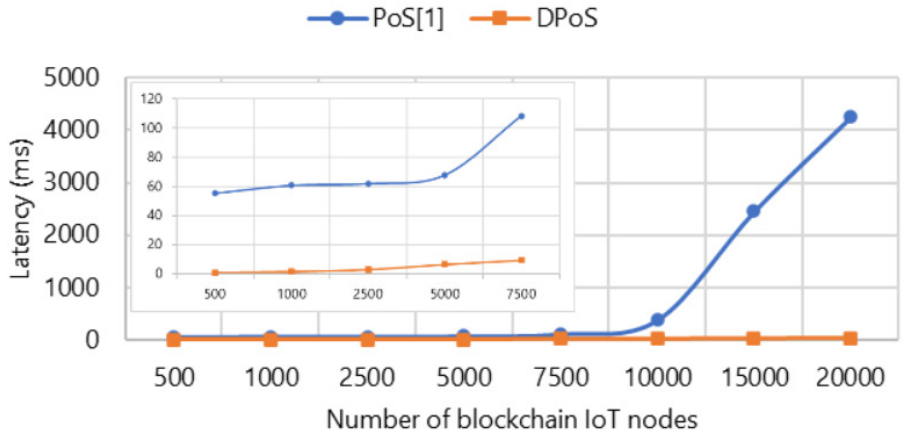


Рис. 3. Тенденции изменения задержки при добавлении пакета данных

Результаты второй метрики — пропускной способности — представлены на рис. 4. Очевидно, что алгоритм DPoS превосходит PoS в эффективности обработки транзакций. Например, при 20,000 узлов пропускная способность достигает максимума в DPoS, поскольку система справляется с ростом числа узлов, в то время как PoS насыщается при достижении 16,006.73 транзакций, что ограничивает его производительность.

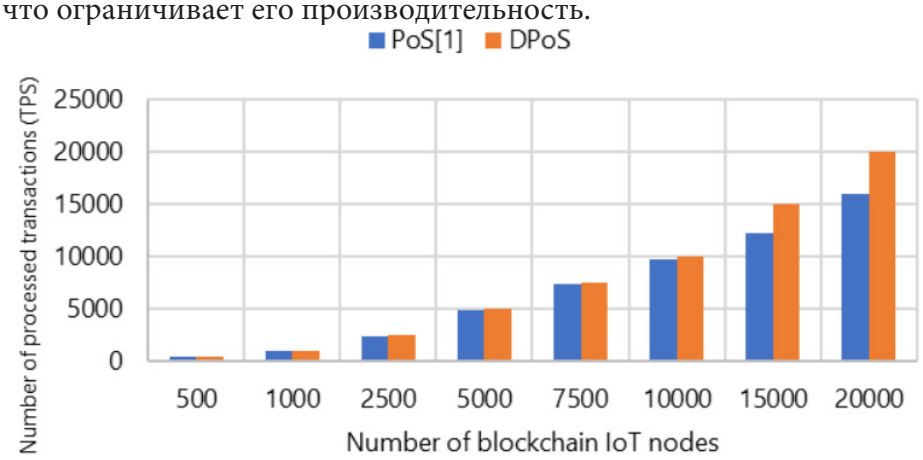


Рис. 4. Динамика пропускной способности

Узлы, участвующие в DPoS, существенно влияют на общие энергозатраты. Поэтому делегаты не только снижают потребление энергии, но и ускоряют обработку транзакций. В отличие от этого, подход на базе PoS требует от устройств IoT взаимодействия с большим числом валидаторов, что повышает энергопотребление. Таким образом, подход DPoS превосходит PoS по энергоэффективности.

Результаты, представленные на рис. 5, демонстрируют влияние на использование ресурсов NET и CPU. В эксперименте варьировалось число узлов от 500 до 20,000 для оценки влияния на NET/CPU. На рис. 5 видно, что при 500 узлах время CPU составляет 1.136 мс, а при 20,000 узлах — почти 27.326 мс. NET-пропускная способность остаётся стабильной на уровне 104, что объясняется небольшим размером пакета данных.

Результаты анализа на рис. 3–5 показывают, что при увеличении числа узлов блокчейна в PoS наблюдается линейный рост задержки, тогда как в DPoS наблюдается хорошая линейная масштабируемость пропускной способности при увеличении числа узлов. Например, при 500 узлах DPoS достигает пропускной способности 500 TPS, а PoS — 496.31 TPS, что демонстрирует превосходство DPoS при увеличении числа узлов.

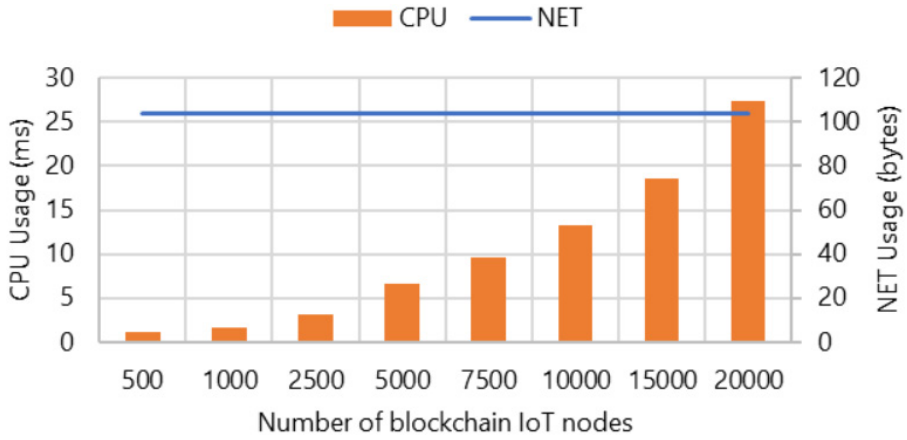


Рис. 5. Влияние на использование ресурсов NET и CPU

В рамках оценки производительности в публичной сети проводился анализ времени загрузки и скорости IPFS. Конфигурация системы включала 8 ГБ ОЗУ, 2 ядра и полосу пропускания 8 МБ. На рисунке 6 показано, что скорость загрузки составляла примерно 7 МБ/с. На рис. 6 видно, что хэш файла был загружен и извлечен из блокчейна. Время загрузки оказалось больше времени извлечения, так как при загрузке сохраняется идентификатор контента на блокчейне.

Test	File size	Upload time	Upload speed
1	50MB	6.12s	7.85 MB/s
2	100MB	15.03s	6.74 MB/s
3	500MB	117.12s	6.53 MB/s
4	1GB	236.63s	7.28 MB/s

Рис. 6. Результаты сравнения в рамках скорости загрузки

Заключение

В данной работе предлагается масштабируемая блокчейн-архитектура для управления данными в сетях Интернета вещей (IoT) с ограниченными ресурсами, основанная на использовании алгоритма консенсуса DPoS (Delegated Proof of Stake) для обеспечения сквозной безопасности. DPoS обеспечивает такую безопасность через механизмы верификации и валидации, которые выполняются ограниченным числом выбранных делегатов, что позволяет уменьшить влияние деградации производительности устройств IoT. Основные исследуемые метрики включают задержку, пропускную способность и использование ресурсов в диапазоне от 500 до 20,000 узлов сети. Алгоритм консенсуса DPoS был реализован на платформе EOSIO, распределенное хранение данных организовано с помощью IPFS, а Docker использовался для оценки производительности сети по показателям пропускной способности, задержки и использования ресурсов устройств IoT. Анализ был разделен на четыре части: задержка, пропускная способность, использование ресурсов и время загрузки файлов с оценкой скорости в распределенной системе хранения. Экспериментальные результаты показали, что DPoS превосходит PoS по пропускной способности, задержке и эффективности использования ресурсов в устройствах IoT. Кроме того, было продемонстрировано, что подход DPoS эффективен в IoT-приложениях, где требуется низкая задержка или высокая энергоэффективность.

Литература

1. *Maftei A., Petrariu P., Popa V.* Massive Data Storage Solution for IoT Devices Using Blockchain Technologies // Sensors. – 2023. – 23(3). – P. 1570.

2. *Asif Y., Rochester M., Ousat B., Ghaderi M.* Throughput, Coverage and Scalability of LoRa LP-WAN for Internet of Things // In 2018 IEEE/ACM 26th International Symposium on Quality of Service (IWQoS). – 2018. – P. 1–10.

3. *Zheng W., Zheng Z., Dai H., Chen Xu., Zheng P.* Xblockeos: Extracting and exploring blockchain data from eosio // Information Processing & Management. 2021. – 58(3). – P. 102477.

4. *Zhang Q., Zhao Z.* Distributed storage scheme for encryption speech data based on blockchain and IPFS // The Journal of Supercomputing. – 2023. – 79(1). – P. 897–923.

5. *Kaur M., Gupta S., Raboaca M.* Ipfs: An Off-Chain Storage Solution for Blockchain // In Proceedings of International Conference on Recent Innovations in Computing: ICRIC 2022. – Springer, 2023. – Vol. 1. – P. 513–525.

6. *Kummar S., Bhushan B., Bhatia S.* Blockchain based big data solutions for Internet of Things (IoT) and smart cities // In New Trends and Applications in Internet of Things (IoT) and Big Data Analytics. – Springer International Publishing, 2022. – P. 225–253.

7. *Xing F., Baoning N., Zhenliang L.* Scalable blockchain storage systems: research progress and models // Computing. – 2022. – 104(6). – P. 1497–1524.

8. *Kutub T., Al-Sakib P., Sadia I.* Internet of things (IoT) // In Emerging ICT Technologies and Cybersecurity: From AI and ML to Other Futuristic Technologies. – Springer, 2023. – P. 165–183.

9. *Chandra P., Ponsy R.* Performance analysis on Diversity Mining-based Proof of Work in bifolded consortium blockchain for Internet of Things consensus // Concurrency and Computation: Practice and Experience. – 2021. – 33(16).

10. *Lin Y., Zhang L., Li J., Ji L., Sun Y.* A survey of application research based on blockchain smart contract // Wireless Networks. – 2022. – 28(2). – P. 635–690.

УДК 004.8

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНВЕЙЕРА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СХОЖИХ ТИПОВ ПОВЕДЕНИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Г. В. Митин, А. В. Панов

Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники

Аннотация. В статье описывается архитектура системы интеллектуальной обработки данных, решающая задачу идентификации пользователей информационной системы по манере их поведения. Представлены результаты эксперимента на модели данных, подтверждающие действенность данной архитектуры.
Ключевые слова: информационная система, интеллектуальная обработка данных, машинное обучение, аутентификация пользователей.

Введение

Развитие информационных технологий позволяет автоматизировать многие сферы человеческой деятельности, относящиеся к обработке данных. Все больше задач, ранее считавшихся по силам лишь человеку, теперь решаются при помощи специального программного обеспечения.

Комбинируя алгоритмы анализа данных, можно находить в потоках данных информацию, неочевидную при простом считывании этих данных. Таким образом, можно находить полезные закономерности, опираясь на косвенные признаки.

В данной работе рассматривается использование архитектуры конвейера обработки потоковых данных для поиска поведенческих шаблонов пользователей информационной системы.

1. Актуальность проблемы

Проблема идентификации человека, который пользовался рабочей станцией (компьютером) в некоторый период времени, является весьма актуальной. Учетные записи пользователей не позволяют решить эту проблему. Так, например, сотрудник А может использовать учетную запись сотрудника Б, чтобы воспользоваться правами доступа Б к функциям корпоративной информационной системы, которых нет у А. Одним из путей решения данной проблемы является распознавание «почерка» работы человека за компьютером, на основании записей о его действиях. Подобный «почерк» называют поведенческой биометрией [1].

Подобные закономерности являются сложными для распознавания, поэтому для их поиска нужно использовать многоуровневые системы анализа потоковых данных. Один из вариантов такой архитектуры описан в данной работе. В отличие от других решений [1], архитектура, представленная в рамках статьи, не использует искусственные нейронные сети, что делает ее более доступной.

2. Постановка задачи

Определение схожих типов поведения пользователей является актуальной и нетривиальной задачей. Это может использоваться для выявления несанкционированного использования учетных записей пользователей другими пользователями на основании поведенческих

шаблонов. Искомые закономерности имеют вероятностную природу и относятся к слабо коррелированным информационным паттернам.

Действия пользователей преследуют определенные цели. Разные пользователи имеют разные цели использования системы и добиваются своих целей через разные последовательности действий. Анализируя последовательности действий пользователей, представляется возможным идентифицировать подходы к достижению целей, характерные для того или иного пользователя.

Для того, чтобы эффективно решать поставленную задачу, необходим метод, позволяющий определять намерения, стоящие за запросами пользователей. Поскольку для каждой информационной системы существует ограниченный круг приложений, намерения в запросах пользователей можно разделить на некоторый ограниченный круг категорий. Более того, так как информационная система предоставляет ограниченный спектр запросов, одному намерению соответствует лишь ограниченный круг запросов, подчиняющийся некоторым вычислимым законам. Зная эти законы, становится возможным вычислить цель действий пользователя. Таким образом, для выяснения сути запросов, можно использовать алгоритмы классификации.

Решение этой задачи требует построения конвейера обработки данных, способного как определять тип действия пользователя, так и находить закономерности в его действиях. Архитектура подобного конвейера была описана в [2]. Она разделяется на несколько функциональных уровней, решающих задачи различных уровней абстракции.

3. Функциональная схема конвейера интеллектуальной обработки данных

Предложенный подход предполагает определение типа запроса, переданного пользователем, нахождение закономерностей в запросах пользователя и анализ этих закономерностей для определения характерных черт, по которым данного пользователя можно идентифицировать.

Решение описанной задачи производится на базе многоуровневой архитектуры конвейера интеллектуальной обработки данных, представленной в [2] (см. рис.1). Архитектура нацелена на работу с потоковыми данными в условиях информационного шума и позволяет решать задачи различных уровней абстракции. Функционально в ней можно выделить три уровня:

1) Уровень подготовки данных. Основными задачами этого уровня является приведение данных в наиболее удобный для анализа вид, определение особенностей распределения данных в пространстве признаков и фильтрация информационного шума.

2) Уровень обработки данных. Основными задачами данного уровня являются поиск информационных паттернов в данных и поиск зависимостей между появлением этих паттернов. Он оперирует данными, очищенными от информационного шума и выбросов.

3) Уровень анализа результатов обработки данных. Этот уровень проводит заключительные этапы работы системы, включающие в себя анализ найденных закономерностей в появлении паттернов и выделение на их основе полезного знания.

Система обрабатывает категориальные и числовые данные как два отдельных потока данных, применяя соответствующие методы обработки для каждого потока. Исключение составляет уровень анализа результатов, который объединяет оба потока.

В рамках данного исследования мы исходим из предположения, что входящие данные не содержат информационного шума. Тогда нам понадобятся уровень обработки данных и уровень анализа результатов.

В рамках задачи определения схожих типов поведения пользователей, уровень обработки данных призван определить класс действия, совершенного пользователем. Среди таких действий может быть как «нормальный» запрос, так и какой-либо тип кибератаки. Для этого на данном уровне используется адаптивная классификация [3] и поиск ассоциативных правил. Адаптивная классификация позволяет, руководствуясь обновляющейся обучающей выбор-

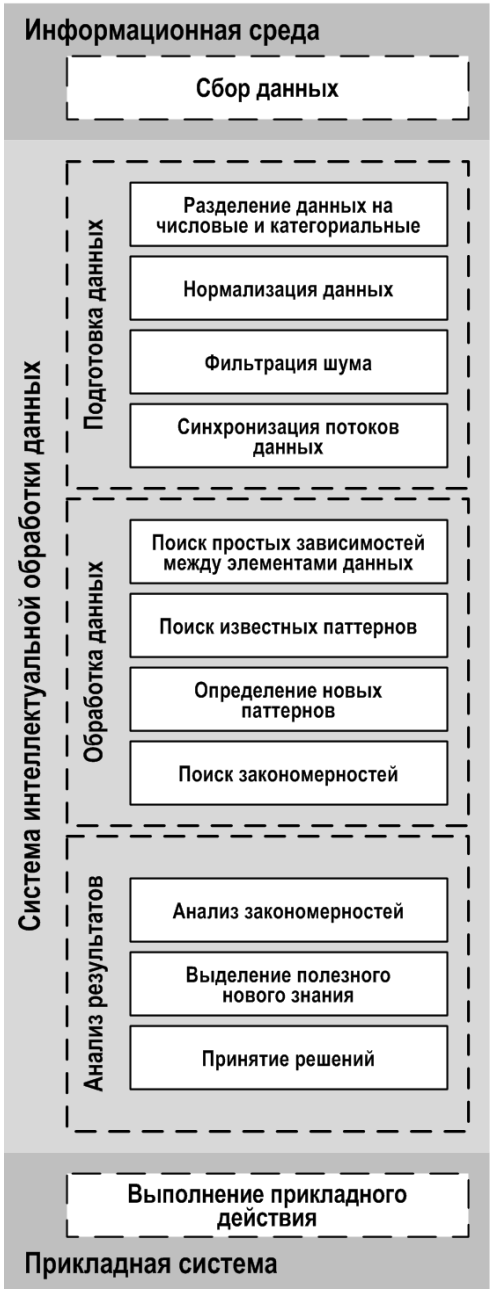


Рис. 1. Функциональная схема конвейера интеллектуальной обработки данных

кой, классифицировать действия пользователя, а поиск ассоциативных правил — определить набор общих закономерностей.

Уровень анализа результатов обработки данных определяет закономерности между действиями пользователя и определяет характерные особенности в поведении пользователей. Для этого на данном уровне используется адаптивная классификация и методы поиска последовательных шаблонов. При помощи метода поиска последовательных шаблонов производится поиск закономерностей, распределенных по времени, в то время как адаптивная классификация позволяет классифицировать обнаруженные закономерности – то есть определить тип поведения пользователя. Кроме того, адаптивная классификация позволяет добавлять новые закономерности в поведении пользователей.

4. Испытание системы интеллектуальной обработки данных на модели данных

Для моделирования прикладной задачи было проведено модульное тестирование каждого уровня системы обработки данных по отдельности. Ключевыми являются уровень обработки данных и уровень анализа результатов обработки.

Модель входящего потока данных строилась на базе набора данных NSL-KDD [4]. Это расширенный вариант набора данных KDD'99, описывающего характерные черты компьютерных сетевых атак. Набор содержит записи, имеющие одновременно категориальные и числовые признаки.

Для упрощения обработки, множество классов, обозначающих разнообразные типы компьютерных атак, было преобразовано в 5 макро-классов, обозначающих 4 типа атак и отдельный класс для «нормальных» или безопасных запросов.

Набор данных NSL-KDD был модифицирован, путем изменения порядка следования записей, для моделирования поведения пользователей информационной системы. Задачей модификации было создать последовательности действий, имеющих некоторый смысл для прикладной системы, при этом не снижая качества набора данных. Например, были сгруппированы попытки получения информации об инфраструктуре рассматриваемой сети (Probe-атаки) с другими типами атак, моделируя поведение злоумышленника, вначале проводящего разведку, а затем пытающегося причинить вред целевой информационной системе. Другим примером является модель пользователя, который по большей части работает с системой в штатном режиме, но время от времени его действия подпадают под определение информационной атаки. Такими действиями являются неправильные и потенциально вредоносные запросы, попытки «атаковать» систему, подбирая собственный пароль и использование программного обеспечения для анализа сетей, которое так же может рассматриваться как проведение Probe-атаки.

4.1. Уровень обработки данных

На наборе данных, имеющих как числовые, так и категориальные признаки, классификаторы числовых и категориальных данных показали различные результаты.

• Точность классификации NSL-KDD у составного адаптивного классификатора, реализующего метод Naive Bayes в режиме числовой классификации, выше, чем аналогичная точность у стандартного классификатора Naive Bayes для 2 наиболее распространенных классов.

• Неопознанные точки данных, появившиеся при классификации, позволяют снизить общее количество ошибок классификации, вызванных недостатком данных или несовершенством алгоритма классификации.

На тестовой модели, классификаторы, относящиеся к уровню обработки данных, показали точность (accuracy) 83–98%. При этом блок категориальной классификации, использовавший дерево решений, стремился охватить все имеющиеся классы. В то же время блок числовой классификации, использовавший алгоритм Gaussian Naive Bayes (GNB), сосредоточился на двух наиболее распространенных классах (DoS, normal), игнорируя менее распространенные классы.

4.2. Уровень анализа результатов

В задаче определения поведенческих шаблонов пользователей, уровень анализа результата берет на себя опознание пользователя по набору выявленных последовательностей. Следует заметить, что длины последовательностей и описывающих их векторов признаков, не одинаковы. В качестве входных данных для этого слоя были взяты метки классов, принадлежащих точкам данных из наборов для уровня обработки данных.

С точки зрения алгоритма поиска последовательных шаблонов данные рассматривались как последовательность предметных наборов из одного предмета — метки класса. Такое представление допустимо для случаев, когда нет событий происходящих одновременно, и позволяет обращать внимание на порядок следования меток классов, так как элементы внутри одного предметного набора сортируются в унифицированном порядке.

В модели были выделены 5 типов поведения:

• Hacker_1 — DoS-атаки. Имитация враждебно настроенного пользователя, пытающегося навредить информационной системе.

• Hacker_2 — Probe-атаки, за которыми следует ряд DoS-атак. Имитация враждебно настроенного пользователя, пытающегося провести разведку внутреннего устройства информационной системы, чтобы нанести максимальный ущерб.

• Hacker_3 — DoS-атаки с несколькими R2L-атаками. Имитация враждебно настроенного пользователя, пытающегося навредить информационной системе и получить доступ к конфиденциальным данным.

• Ordinary_1 — штатное использование системы, иногда сопровождающееся действиями, похожими на кибератаку (DoS).

• Ordinary_2 — штатное использование системы, с использованием средств разработчика, которые попадают под определение кибератаки (DoS, Probe).

В качестве алгоритма классификации для блока адаптивной классификации в рамках уровня анализа результатов были использованы деревья решений, как алгоритм, показывающий хорошие результаты при составлении ансамблевых решений.

Уровень анализа результатов обработки верно оценил классы «Hacker_2», «Ordinary_1» и «Ordinary_2», но отнес элементы класса «Hacker_3» к классу «Hacker_1» из-за того, что различия между классами небольшие, и класс «Hacker_3» представлен малым количеством элементов (0.6 %). Общая точность классификации (accuracy) на данном уровне составила 99.4 %. Таким образом, можно заключить, что представленный конвейер обработки данных справился с поставленной задачей.

Заключение

Представленный в данной работе конвейер обработки данных способен не только решать задачу классификации, но и распознавать закономерности, которые не проявляются при простой обработке входящего потока данных. Задача определения поведенческих шаблонов пользователей информационной системы является актуальной, особенно при использовании методов, не связанных с искусственными нейронными сетями.

Согласно результатам эксперимента, представленное в данной работе решение задачи определения схожих типов поведения пользователей информационной системы является концептуально верным.

Литература

1. Анализ перспективных методов поведенческой биометрии для аутентификации пользователей / В. А. Довгаль, Д. В. Довгаль // Вестник АГУ. – 2017. – Вып. 3.– С. 206.

2. Общая архитектура систем обработки данных с применением технологий машинного обучения для поиска информационных паттернов / Г.В. Митин, А.В. Панов / Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, 4-6 декабря 2023 г. Воронеж, 2024. – С. 1427–1433.

3. Адаптивная технология классификации с обратной связью на основе методов машинного обучения / Г. В. Митин, А. В. Панов / Современные наукоемкие технологии. – 2024. – № 1. – С. 55–61.

4. NSL-KDD // Kaggle.com URL: https://www.kaggle.com/datasets/hassan06/nslkdd/data

УДК 004.04

ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЦИИ ДАННЫХ РАЗНОРОДНЫХ ИСТОЧНИКОВ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

А. А. Носов, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается проблема типового решения задач интеграции данных. Приведен анализ методов интеграции данных разнородных источников. Представлены преимущества и недостатки использования подходов ETL, ELT, EAI, EII.
Ключевые слова: интеграция данных, ETL, ELT, EAI, EII, автоматизации, аналитика, бизнес-процесс, бизнес-задача, информационная система.

Введение

Современные промышленные предприятия имеют сложную информационную инфраструктуру, состоящую из множества разнородных источников данных: различные базы данных, электронные таблицы, веб-сервисы, текстовые файлы и т. д. Такое положение на предприятиях складывается в результате «островной» автоматизации отдельных бизнес-процессов. Любая задача, которая связана с принятием решений на основе данных, требует наличия этих данных в единой зоне или для того, чтобы система была наиболее полной, ей необходимы данные из других систем.

Попытки объединить в единое целое несколько разных систем автоматизации в целях воспользоваться их данными оказываются чаще всего неудачными и приходится прибегать к средствам интеграции данных.

Интеграция данных — направление, которое включает в себя следующие процессы:

- объединение или перемещение данных, находящихся в разных источниках;
- предоставление данных пользователям в унифицированном виде.

В качестве примера задач требующих интеграцию данных можно привести следующие проекты:

1. В нефтедобывающих компаниях существует обычно три больших направления: добыча, переработка, продажа. Направление, занимающееся добычей, обычно не знает, что творится в остальных направлениях, но блок логистики (перевозка нефти и трубопроводы) всегда находится в направлении переработки. Между этими направлениями нет передаваемой информации об изменении добычи нефти в блок переработки. Из-за этого возникает логистическая бизнес-проблема: уменьшается резко объем добычи нефти в определенном месте, но вагоны ждут, простаивают, в то время как в другой точке наблюдается резкий рост добычи нефти, но во второе место не успевают дойти вагоны, там заполняются склады. В итоге приходится умышленно снижать добычу нефти только из-за того, что блоки между собой не обмениваются информацией. Данная проблема стала особенно актуальна, когда государство начала контролировать работу нефтяной отрасли и требовать резкого повышения эффективности.

2. Происходит объединение нескольких компаний, контакт-центр становится общим, но информация о продуктах находится в разных ERP-системах. Возникает проблема онлайн и оффлайн синхронизации приложений нескольких систем, содержащих сведения о некоторых продуктах. У специалиста возникает проблема найти нужный продукт в семнадцати приложениях с различным интерфейсом.

Применение интеграции данных направлено на повышение операционной эффективности организации или подразделения, снижение издержек и сокращение расходов, быстрое реагирование на изменения внешней бизнес-среды, соответствие требованиям регуляторов.

В задачи интеграции данных входит:
- формирование чистых консолидированных данных для отчетности и аналитики;
- анализ данных из различных корпоративных систем;
- доступность любых данных из любых систем для бизнес-пользователей;
- минимальное влияние средств отчетности или аналитики на системы источники.

Сложность интеграции данных обусловлена следующими причинами:
- многочисленные «свалки» данных;
- отсутствие единых корпоративных справочников;
- неупорядоченная документация;
- несовместимые, неактуальные, некачественные данные;
- многочисленные инструменты и проектные команды;
- отсутствие анализа зависимостей;
- постоянно меняющаяся и усложняющаяся инфраструктура.

В настоящее время есть множество бизнес-задач по интеграции данных, представленных на рис. 1. А также методы по их реализации: ETL/ELT, EAI, EII, ESB.

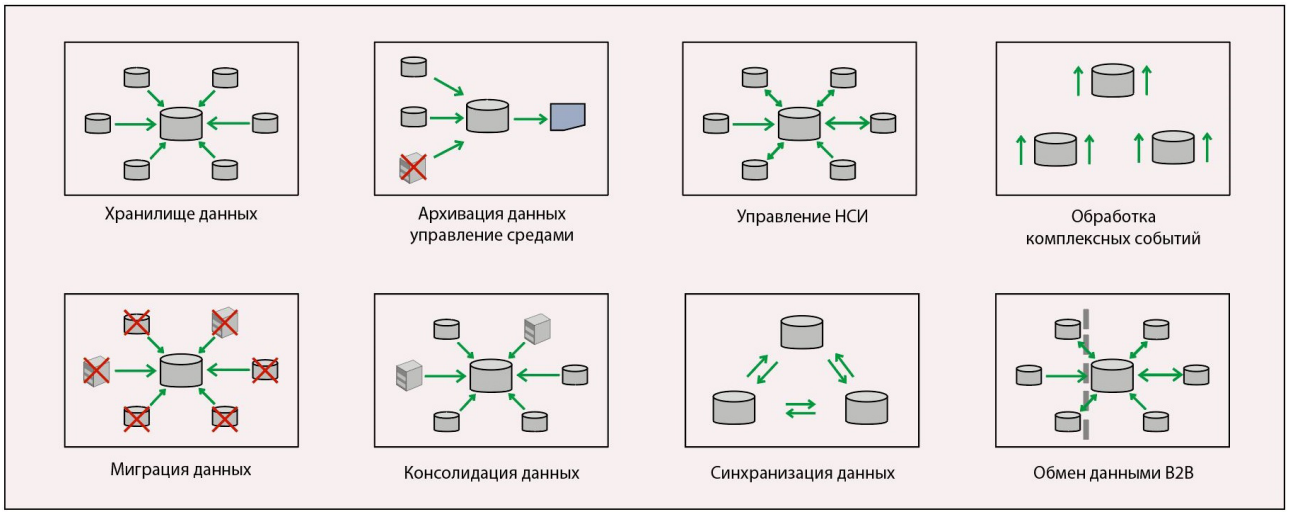


Рис. 1. Задачи интеграции данных

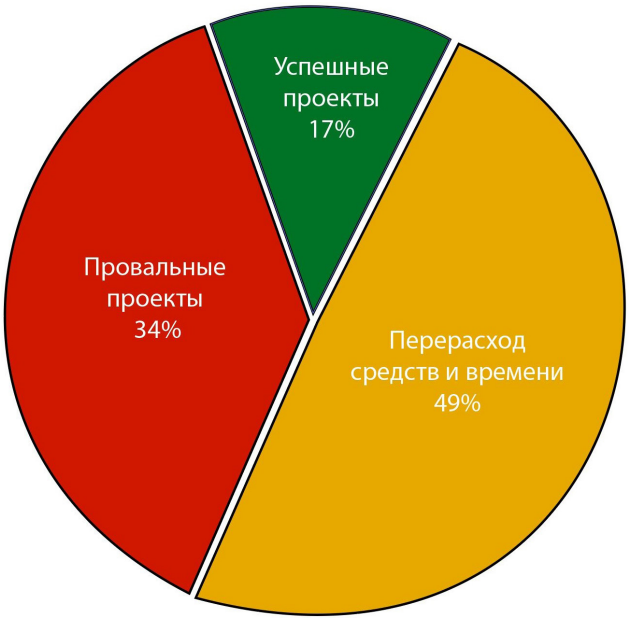


Рис. 2. Успешность проектов миграции и интеграции данных «Standish group»

Проекты по интеграции данных встречаются в настоящее время практически во всех отраслях. Но зачастую в процессе введения интеграции данных на предприятии может возникнуть ситуация, когда применен ошибочный подход построения проектного решения по интеграции данных. В результате этого предприятие теряет прибыль и время. По информации из источника «Standish group» (рис. 2) — 34 % проектов по миграции и интеграции данных являются провальными, 49 % в следствие реализации потребовали перерасход средств и времени, лишь 17 % проектов от общего числа оказывались успешными с точки зрения выделения средств и времени [1].

Следовательно, актуальна разработка проекта, позволяющего производить интеграцию данных наиболее удобно и эффективно для

разных видов бизнес-задач, так как нет типового и достаточно тиражируемого решения. Для этого необходимо проанализировать возможности, различия и конкретные применения того или иного метода интеграции данных из разнородных источников.

1. ETL/ ELT

ETL и ELT — широко используемые способы доставки данных из одного или нескольких источников в централизованную систему для удобства доступа и анализа. Обе этих методики состоят из этапов *extract* (*извлечения*), *transform* (*преобразования*) и *load* (*загрузки*). Разница заключается в последовательности действий, которое для потока интеграции многое меняет.

ETL — метод интеграции предназначенный для пакетного перемещения данных, чаще всего, по расписанию, в больших объемах, со сложными видами трансформации в централизованную систему для удобства доступа и анализа, рисунок 4.

Изначально задумка ETL была в том, чтобы уйти от SQL запросов и сделать процесс интеграции удобным для бизнес-пользователя поэтому инструменты ETL чаще всего удовлетворяют требованиям систем управления реляционными базами данных и/или традиционных хранилищ данных с поддержкой OLAP (online analytical processing, аналитической онлайн-обработки) [2]. Инструменты OLAP и запросы (SQL) требуют, чтобы массивы данных структурировались и стандартизировались при помощи серии преобразований, выполняемых до того, как данные попадут в хранилище.

ELT по сути меняет местами два последних этапа процесса ETL, то есть после извлечения из баз данных данные загружаются напрямую в центральный репозиторий, где происходят все преобразования. Промежуточная база данных отсутствует.

Такая методика стала возможной благодаря современным технологиям, позволяющим хранить и обрабатывать огромные объёмы данных в любом формате. В том числе и благодаря Apache Hadoop — открытому ПО, которое изначально создавалось для непрерывного получения данных из различных источников вне зависимости от их типа. Облачные хранилища данных наподобие Snowflake, Redshift и BigQuery также поддерживают ELT, поскольку они разделяют ресурсы хранения и вычислений, а также обладают высокой масштабируемостью [3].

Из-за того, что подходы построения работы с потоком данных у ETL и ELT различаются (рис. 3), выделяются области применения каждого из них.

ETL используется когда нужно обеспечить соответствие установленным стандартам защиты уязвимых данных клиентов, так как метод позволяет редактировать, шифровать и удалять уязвимые данные перед их передачей в хранилище данных. Следовательно, компаниям проще защищать данные и соблюдать различные стандарты комплаенса.

ELT в настоящее время — молодая методика, но ей отдается предпочтение в случаях необходимости работы с огромными массивами данных для целей бизнес-аналитики и аналитики big-data. Скорость интеграции данных — ключевое преимущество ELT по сравнению с ETL, поскольку целевая система способна выполнять преобразование и загрузку данных парал-

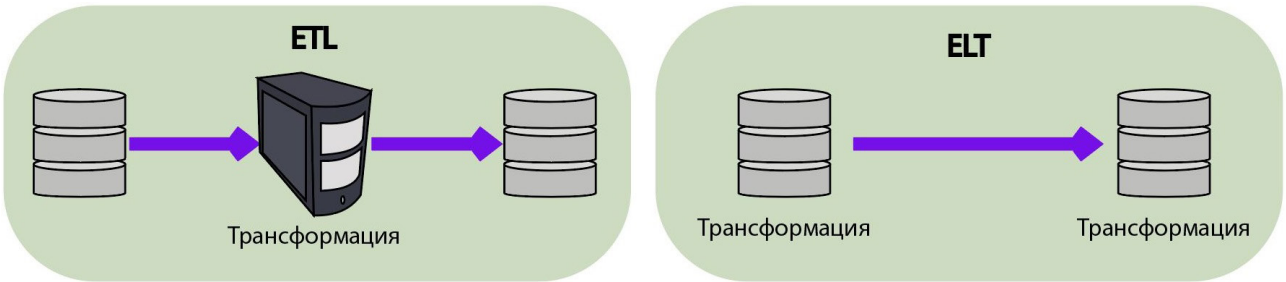


Рис. 3. Различие ETL и ELT

лельно [4]. Это, в свою очередь, позволяет генерировать аналитику практически в реальном времени. ELT можно использовать с облачными хранилищами и «озёрами» данных в отличие от ETL, который не может работать с «озерами» данных, а для работы с облачными хранилищами требуется внедрение промежуточных движков.

2. EAI

EAI, enterprise information integration (интеграция приложений) – метод интеграции предназначенный для работы с динамически изменяемыми данными. Цель EAI – упростить сложную цифровую архитектуру и повысить гибкость бизнеса [5]. Она связывает разрозненные системы для более эффективной совместной работы. Благодаря этой интеграции можно синхронизировать множество систем и инструментов в реальном для быстрого выполнения операционных задач, передавая небольшое количество данных практически без трансформации (рис. 4).

Основная задача данный интеграции по событию передавать данные между системами, в рамках одной транзакции. Для EAI объем данных важен, если одна транзакция будет занимать значительное количество времени, то это может быть критично для системы требующей синхронизации в реальном времени. Также у такого метода есть большое преимущество по сравнению с ETL — это гарантия доставки данных, т. е. в случае, когда приемник информации недоступен по какой-то причине сообщение с транзакцией не потеряется, а будет доставлено, когда приемник информации вновь будет доступен для использования [6].

3. EII

EII — enterprise information integration (интеграция информации) — метод интеграции в режиме реального времени несопоставимых типов данных из многочисленных источников как внутри, так и за пределами организации. Инструменты EII обеспечивают универсальный уровень доступа к данным. Отличительная особенность данного метода — работа по интеграции производится не техническим решением, а, в первую очередь, бизнес-пользователем, т. е. в большинстве своем это разовые операции, инициируемые бизнес-пользователем (рис. 4). Минусы данного вида интеграции в том, что если пользователь запросит большой объем дан-

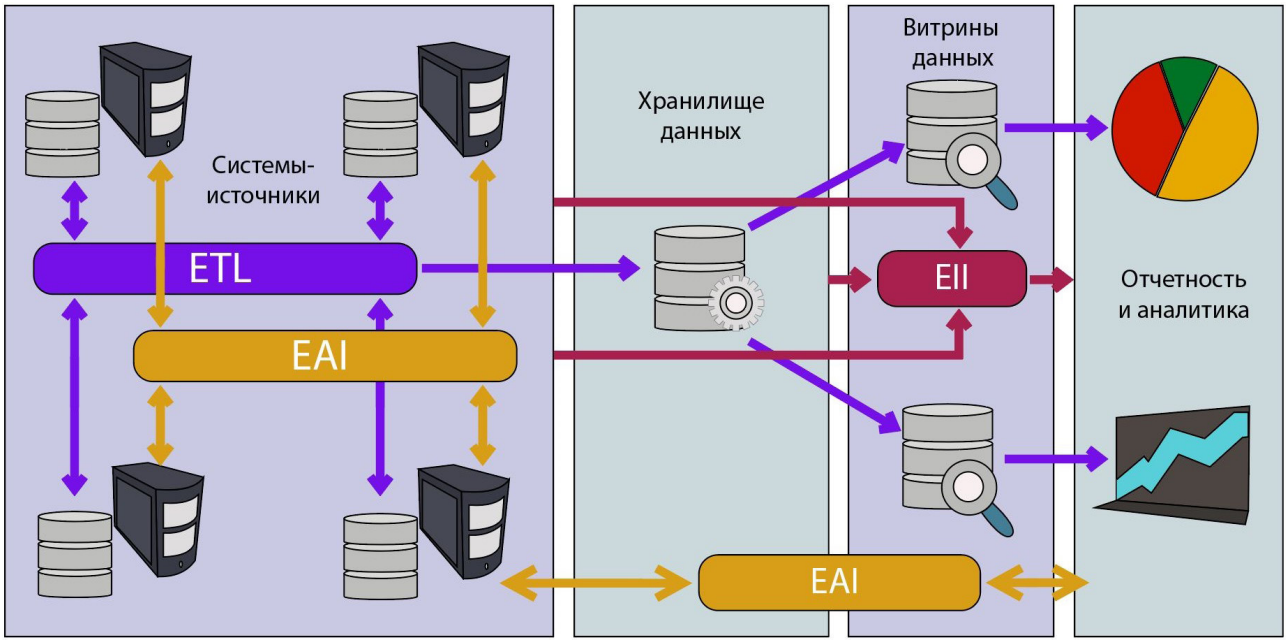


Рис. 4. Единая архитектура интеграции

ных, то это приведет к торможению работы систем источников. Вторая большая проблема — это то, что памяти сервера может не хватить на весь объем запрашиваемых данных ETL [7].

Технология EII использует распределенный запрос для сбора и интеграции информации из различных источников. Обычно такой запрос называют объединенным, или федеративным [8]. В этом случае запросы распределяются по источникам данных, а затем результаты их выполнения присоединяются другу к другу или объединяются. EII несколько отличается от других подходов интеграции. Так, EAI обычно передает сообщения от одного приложения к другому по концентратору или шине между системами. ETL использует физическое перемещение данных из одного местоположения в другое, создавая при этом в складах данных избыточные копии данных. Как правило, эти копируемые данные являются итоговыми данными и в этом случае детальные данные не доступны. В своей основе и EAI, и ETL — это технологии активной доставки. EII же является технологией извлечения информации, при которой объединенный запрос находит данные, необходимые для пользовательского приложения, и вставляет их в представление с пользовательским контекстом.

Заключение

Основные выводы по результатам проведенного анализа можно сформулировать следующим образом: успешность проектного решения по интеграции данных может быть достигнута только за счет грамотного использования всех трех методов ETL/ELT, EAI и EII. Использование метода ETL/ELT предлагается зачастую для создания интегрированного источника данных в рамках одной организации для дальнейшей работы с данными и аналитики. EAI позволит достичь максимальной надежности и скорости синхронизации работы систем с интегрированными данными. Использование метода интеграции данных EII будет предпочтительно для виртуальной интеграции информации между информационными системами, как правило, относящимися к разным организациям, запрещающим физическое копирование данных или предоставляющим ограниченный доступ к данным на платной основе [9]. Таким образом, на нижнем уровне данные интегрируются с помощью ETL, синхронизацию между системами в реальном времени позволяет достичь EAI, а на более высоком уровне интеграция осуществляется с использованием метода EII.

Литература

1. Исследование доли успешности проектов по миграции и интеграции данных : официальный сайт. – URL: https://www.standishgroup.com/sample_research_files/migrateNew.pdf (дата обращения: 24.11.2024).

2. Подход ETL : официальный сайт. – URL: https://aws.amazon.com/ru/what-is/etl/ (дата обращения: 24.11.2024).

3. ETL и ELT ключевые различия : официальный сайт. – URL: https://habr.com/ru/articles/695546/ (дата обращения: 24.11.2024).

4. Основные функции ETL-систем : официальный сайт. – URL: https://habr.com/ru/articles/248231/ (дата обращения: 24.11.2024).

5. Интеграция корпоративных приложений : официальный сайт. – URL: https://aws.amazon.com/ru/what-is/enterprise-application-integration/ (дата обращения: 24.11.2024).

6. Enterprise application integration : официальный сайт. – URL: https://www.tadviser.ru/index.php/Статья:Enterprise_application_integration (дата обращения: 24.11.2024).

7. Интеграция корпоративной информации: новое направление : официальный сайт. – URL: https://iso.ru/ru/press-center/journal/2038.phtml (дата обращения: 24.11.2024).

8. Способы интеграции корпоративных приложений : официальный сайт. – URL: https://studfile.net/preview/9985209/page:5/ (дата обращения: 24.11.2024).

9. Аналитические решения: понимание трех составляющих интеграции – EAI, EII, ETL : официальный сайт. – URL: https://iso.ru/ru/press-center/journal/2061.phtml (дата обращения: 24.11.2024).

УДК 81.32

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛЬНОГО СЛОВАРЯ ИНДИВИДА ОТ РАЗМЕРА ЕГО МЕТАКНИГИ

В. А. Оганисян

Воронежский государственный университет

Аннотация. Используя возможности современных технологий и применяя математические методы, лингвисты и другие исследователи получают уникальную возможность оценить идиолект конкретного человека. Чем больше корпус текстов, представляющих язык писателя, тем полнее и богаче информация о зависимости между размером корпуса и богатством словаря индивида. В статье описаны результаты исследования идиолекта В. И. Ленина.

Ключевые слова: лемматизация, корпус текстов, предельный размер словаря, коэффициент лексического разнообразия, идиолект, закон Ципфа, частотный словарь.

Введение

Количественный анализ текстов конкретного человека даёт возможность охарактеризовать его идиолект — индивидуальный вариант общенародного языка, находящий отражение во всем множестве текстов, порождённых индивидом. Чтобы проанализировать язык автора, в качестве предмета исследования выступает «Полное собрание сочинений» В. И. Ленина, состоящее из пятидесяти пяти томов. Из-за такого большого объёма данных было необходимо провести работу в несколько шагов. На каждом из них осуществляется прирост корпуса на примерно равную часть, сопровождаемый определением максимального размера активного словаря В. И. Ленина.

В работе использован метод моделирования и прогнозирования роста словаря индивида, предложенный в статьях А. А. Кретова, И. П. Половинкина и их соавторов [4–9].

Для проведения исследования были использован морфологический анализатор «MyStem», разработанный компанией «Яндекс», и возможности электронных таблиц MS-Excel, в которых производились расчёты и строились графики. С их помощью была проведена лемматизация (приведение слов к их начальным формам), получен частотный словарь автора и получены реальный и предельный размеры словарей индивида.

1. Проведение исследования и получение результатов

Важной характеристикой для этого исследования является *коэффициент лексического разнообразия* (КЛР), в основе которого лежит отношение количества лемм к количеству их употреблений в тексте. Этот показатель представляет собой количественную характеристику текста, отражающую степень богатства словаря при построении текста заданной длины.

Для получения реального и предельного размера словаря В.И. Ленина необходимы суммарные (кумулятивные) значения размера метакниги и словаря (табл. 1).

Таблица 1

Прирост новых слов и покрываемого ими текста

Том	Год	Длина	Слов	КоЛеР	ДлКум	СлКум	КуКоЛеР
Т01	1893–1894	108604	7090	0,0653	108604	7090	0,0653
Т02	1895–1897	104156	7435	0,0714	212760	10124	0,0476
Т03	1896–1900	104507	6499	0,0622	317267	12057	0,0380

T04	1898–1901 апрель	96831	7177	0,0741	414098	13716	0,0331
T05	1901 май – 1901 декабрь	78779	7392	0,0938	492877	15307	0,0311
T06	1902 январь – 1902 август	87138	7031	0,0807	580015	16455	0,0284
T07	1902 сентябрь –1903 сентябрь	67412	6358	0,0943	647427	17260	0,0267
T08	1903 сентябрь – 1904 сентябрь	91709	6419	0,0700	739136	18171	0,0246
T09	1904 июль – 1905 март	73290	6651	0,0907	812426	18995	0,0234
T10	1905 март – 1905 июнь	66348	6001	0,0904	878774	19560	0,0223
T11	1905 июль – 1905 октябрь	83662	6516	0,0779	962436	20190	0,0210
T12	1905 октябрь – 1906 апрель	79341	6515	0,0821	1041777	20759	0,0199
T13	1906 май – 1906 сентябрь	84668	6731	0,0795	1126445	21390	0,0190
T14	1906 сентябрь – 1907 февраль	85065	6416	0,0754	1211510	21930	0,0181
T15	1907 февраль – 1907 июнь	81166	6338	0,0781	1292676	22404	0,0173
T16	1907 июнь – 1908 март	100383	7778	0,0775	1393059	23146	0,0166
T17	1908 март – 1909 июнь	92905	7386	0,0795	1485964	23693	0,0159
T18	1908–1909	88082	5960	0,0677	1574046	24616	0,0156
T19	1909 июнь – 1910 октябрь	87222	6638	0,0761	1661268	25072	0,0151
T20	1910 ноябрь – 1911 ноябрь	87962	7287	0,0828	1749230	25628	0,0147
T21	1911 декабрь – 1912 июль	98711	7589	0,0769	1847941	26151	0,0142
T22	1912 июль – 1913 февраль	71716	6977	0,0973	1919657	26606	0,0139
T23	1913 март – 1913 сентябрь	79352	7534	0,094944	1999009	27154	0,01358
T24	1913 сентябрь – 1914 март	70025	6329	0,090382	2069034	27511	0,0133
T25	1914 март – 1914 июль	85754	6754	0,07876	2154788	27852	0,01293
T26	1914 Июль – 1915 август	73282	6240	0,085151	2228070	28218	0,01266
T27	1915 август – 1916 июнь	85504	6649	0,077762	2313574	28742	0,01242
T28	1915–1916	113221	11533	0,101863	2426795	32440	0,01336
T29	1895–1916	122894	8791	0,071533	2549689	33670	0,01321
T30	1916 июль – 1917 февраль	80682	6232	0,077242	2630371	33944	0,0129
T31	1917 март – 1917 апрель	86941	5805	0,066769	2717312	34197	0,01258
T32	1917 май – 1917 июль	82557	6215	0,075281	2799869	34452	0,01229
T33	1917–1918	50706	4418	0,08713	2850575	34632	0,01214
T34	1917 июль – 1917 октябрь	94706	6816	0,07197	2945281	34911	0,01185
T35	1917 октябрь – 1918 март	72738	6035	0,082969	3018019	35218	0,01167
T36	1918 март – 1918 июль	115722	7039	0,060827	3133741	35541	0,01134
T37	1918 июль –1919 март	116168	7299	0,062831	3249909	35867	0,01104
T38	1919 март – 1919 июнь	91509	6135	0,067043	3341418	36059	0,01079
T39	1919 июнь – 1919 декабрь	96741	6596	0,068182	3438159	36353	0,01057
T40	1919 декабрь – 1920 апрель	74060	5853	0,079031	3512219	36597	0,01042
T41	1920 май – 1920 ноябрь	94486	6656	0,070444	3606705	36846	0,01022
T42	1920 ноябрь – 1921 март	86724	6254	0,072114	3693429	37181	0,01007
T43	1921 март – 1921 июнь	83265	5861	0,07039	3776694	37469	0,00992
T44	1921 июнь – 1922 март	78832	6387	0,08102	3855526	37837	0,00981
T45	1922 март – 1923 март	82006	6495	0,079202	3937532	38203	0,0097
T46	1893–1904	89469	7032	0,078597	4027001	38873	0,00965
T47	1905–1910 ноябрь	52703	5408	0,102613	4079704	39188	0,00961
T48	1910 ноябрь – 1914 июль	58398	6039	0,103411	4138102	39635	0,00958
T49	1914 август – 1917 октябрь	72950	6125	0,083962	4211052	40071	0,00952
T50	1917 октябрь – 1919 июнь	43559	5499	0,126243	4254611	40682	0,00956

T51	1919 июль – 1920 ноябрь	38622	5385	0,139428	4293233	41266	0,00961
T52	1920 ноябрь – 1921 июнь	37747	5036	0,133415	4330980	41726	0,00963
T53	1921 июнь – 1921 ноябрь	43798	5019	0,114594	4374778	42101	0,00962
T54	1921 ноябрь – 1923 март	60697	6180	0,101817	4435475	42496	0,00958
T55	1893–1922	68707	5818	0,084678	4504182	43138	0,00958

В табл. 1: N — текущее значение размера словаря; ΔN — приращение словаря, то есть количество новых уникальных слов при добавлении новых текстов в корпус; M — текущее значение размера корпуса; ΔM — приращение размера корпуса, то есть количество словоупотреблений в добавляемом в корпус тексте; YTTR — текущее значение КЛР

Достижение предельного размера словаря активной лексики В. И. Ленина. достигается при приращении словаря близком к нулю, когда КЛР в процессе увеличения корпуса стремится к нулю, но не принимает нулевого значения, поскольку размер словаря — величина положительная. В исследовании используется линия тренда — логарифмическая зависимость. На каждом этапе были получены логарифмические функции, которые было необходимо приравнять нулю. Таким образом, был прогнозно оценён предельный размер словаря писателя.

Исследование первоначально проводилось в пять шагов, каждый из которых включал добавление равного количества текста автора (по одиннадцать томов). Впоследствии, для более детального анализа, метакнига (корпус текстов) была разделена на меньшие подкорпусы, состоящие из пяти томов.

Таблица 2

Полученные результаты на разных шагах исследования

Тома	Реальный словарь (РС)	Предельный словарь (ПС)	Среднее значение (СЗ)	Объем текста, при котором достигается ПС
1–5т.	15 307	29 161 – 29 475	29 318	1 833 503
1–10т.	19 560	32 637 – 33 918	33 277	2 433 886
ШАГ 1. 11 Т.	20 190	28 795 – 31 067	29 931	1 914 563
1–15т.	22 404	31 335 – 36 595	33 965	3 883 402
1–20т.	25 628	33 470 – 34 484	33 977	3 230 784
ШАГ 2. 22 Т.	26 606	40 026 – 43 655	41 840	5 560 786
1–25т.	27 852	34 462 – 36 214	35 338	3 330 889
1–30т.	33 944	40 505 – 42 991	41 748	4 562 281
ШАГ 3. 33 Т.	34 632	45 170 – 46 630	45 900	5 788 759
1–35т.	35 218	40 113 – 49 530	44 821	4 257 896
1–40т.	36 597	43 415 – 50 179	46 797	6 841 117
ШАГ 4. 44 Т.	37 837	47 373 – 48 300	47 836	6 107 328
1–45т.	38 203	42 394 – 45 184	43 789	4 802 347
ШАГ 5. 55 Т.	43 138	48 706 – 49 020	48 863	6 367 176

В результате, оценка предельного размера словаря В. И. Ленина преимущественно постепенно растёт по мере увеличения размера метакниги.

Заключение

Таким образом, наибольшее значение предельного словаря В. И. Ленина наблюдается на последнем шаге исследования, который проводился на основе корпуса из пятидесяти томов «Полного собрания сочинений» (1893-1923). На этом шаге предельный размер словаря активной лексики индивида находится в интервале *48 706 – 49 020*, т. е. равен *48 863* словам.

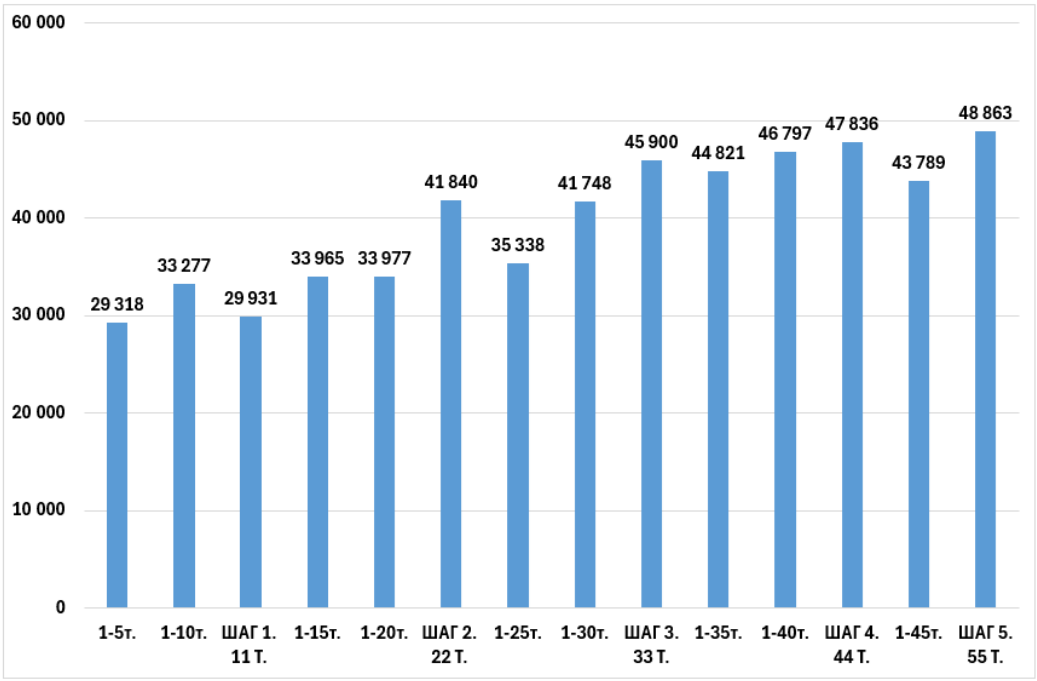


Рис. 1. Динамика роста значения предельного словаря активной лексики В. И. Ленина

Литература

1. *Алексеев П. М.* К основам статистической лексикографии. – В кн. Проблема слова и словосочетания. – ЛГИИ, 1980. – С. 95–105.

2. *Алексеев П. М.* Частотные словари и приемы их составления. Статистика речи. – Л. : Наука, 1968. – С. 61–63.

3. *Арапов М. В., Шрейдер Ю. А.* Закон Ципфа и принцип диссимметрии системы // Семиотика и информатика. – 1978. – Вып. 10. – С. 74–95.

4. *Кретов А. А.* Лексическое богатство словаря В. В. Набокова / А. А. Кретов, И. П. Половинкин, Н. А. Касымова, М. В. Половинкина // Электронный научный журнал «Квантитативная филология». – Смоленск : Смоленский Центр квантитативной филологии, 2021. – № 1. – С. 39–48. DOI 10.35785/0000-0000-2021-1-39-48.

5. *Кретов А. А.* О предельном размере словаря и фрактальной размерности метакниги М.Е. Салтыкова-Щедрина / А. А. Кретов, М. В. Половинкина, И. П. Половинкин, Н. А. Касымова // Информатика: проблемы, методы, технологии: сборник материалов XXII международной научно-методической конференции / под редакцией Д. Н. Борисова; Воронеж, Воронежский государственный университет, 10-12 февраля 2022 г. – Воронеж : «ВЭЛБОРН», 2022. – С. 1146–1154.

6. *Кретов А. А., Половинкин И. П., Ломец М. В.* Абсолютное и относительное «богатство словаря» на примере произведений Л. Н. Толстого // Математика и междисциплинарные исследования – 2020. – С. 200–203.

7. *Кретов А. А., Половинкина М. В., Половинкин И. П., Ломец М. В.* О моделировании изменений языка // Современные методы теории функций и смежные проблемы. – 2021. – С. 173–174.

8. *Кретов А. А., Половинкина М. В., Половинкин И. П., Ломец М. В.* О некоторых количественных характеристиках фрактальности в языке // Информатика: проблемы, методы, технологии. – 2020. – С. 1627–1634.

9. *Кретов А. А., Ломец М. В., Половинкин И. П.* Возможный алгоритм вычисления предельного размера словаря писателя // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2021. – С. 133–145.

10. *Папп Ф.* Количественный анализ словарной структуры некоторых русских текстов // Вопросы языкознания. – 1961. – № 6. – С. 93–100.

11. *Папп Ф.* О машинной обработке одноязычных словарей // Научно-техническая информация. – 1969. – № 3, Сер. 2. – С. 53–56.

УДК 004.056

ИНФОРМАЦИОННО-ПСИХОЛОГИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА РАБОТНИКОВ КРИТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

Ю. А. Паршенкова

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В нынешних реалиях критическая информационная инфраструктура играет ключевую роль в обеспечении функционирования различных сфер деятельности. Её безопасность и устойчивость являются важными аспектами национальной безопасности. В связи с этим возникает необходимость проведения тестирования обслуживающего персонала этой инфраструктуры с использованием специальных информационно-психологических воздействий (ИПВ). Это актуальное и важное направление аудита ИБ, поскольку человек является ключевым звеном системы КИИ, но при этом он уязвим для информационно-психологического воздействия, которое может привести к нарушению политики ИБ.

Ключевые слова: критическая информационная инфраструктура, информационная безопасность, политика информационной безопасности, объекты КИИ, информационно-психологическое воздействие, аудит ИБ, лицо, принимающее решение, тестирование ИБ.

Введение

Информационно-психологическое воздействие — это процесс воздействия на разум и чувства человека или группы людей с целью изменения их восприятия реальности, поведенческих установок и действий. Такое воздействие может быть направлено на индивидуальное, групповое, массовое и общественное сознание и иметь как положительный, так и отрицательный эффект [1].

1. Общее представление об информационно-психологическом воздействии.

Рассмотрим варианты информационно-психологического воздействия на работников КИИ.

Воздействие информационно-психологических средств на сотрудников объектов критической информационной инфраструктуры осуществляется с целью:

– жертву вынуждают нарушить политику безопасности предприятия;

– злоумышленник вынуждает жертву нарушить конфиденциальность/ целостность/ доступность рабочей информации;

– нарушить социально-психологические процессы привычного функционирования коллектива объекта КИИ;

– нарушить работу объектов критической информационной инфраструктуры, подорвав доверие к лицам, принимающим решения, и создав условия, при которых отдельные люди и группы будут отказываться выполнять приказы и распоряжения вышестоящего руководства, склоняя их к саботажу [2].

Объектами информационно-психологического воздействия могут быть:

– Личность: конкретные представители органов управления, правопорядка и безопасности, работники организаций, учреждений и предприятий, чья деятельность влияет на объекты КИИ.

– Система формирования и функционирования духовной сферы, общественного сознания и общественного мнения: образование, подготовка кадров, распространение социально значимой информации и социокультурных ценностей.

– Социальные группы и объединения людей: политические, профессиональные, национально-этнические, демографические, религиозные группы и другие.

– Органы власти, государственного и военного управления.

– Общественные и политические организации, общественно-политические движения и объединения граждан.

– Силовые министерства и ведомства.

– Государство и общество, население страны в целом как социально-историческая общность людей.

Субъектами информационно-психологического воздействия являются, прежде всего, силы информационных операций враждебных стран, а также люди и группы, занимающиеся диссидентской и подрывной деятельностью или сотрудничающие со спецслужбами других государств [3]. В зависимости от поставленных задач, воздействие осуществляется в следующих направлениях:

– воздействие на работников с целью побуждения их к некоторым действиям, влияющим на работу предприятия;

– изменения восприятия получаемой информации, формируя искаженное представление человека о происходящих процессах;

– воздействие на переживания и внутренние эмоции людей;

– создание условия для сотрудничества или конфликта между людьми.

Основные принципы разработки и реализации ИПВ:

– подготовка ИПВ всегда начинается заранее. Обязательно учитываются индивидуальные особенности объекта, подвергающегося обработке. Воздействие не афишируется;

– планирование и реализация ИПВ происходит с учётом найденных недостатков. Причем, речь идет как и о недостатках в политике безопасности предприятия, так и о уязвимостях психологического состоянии отдельных личностей и групп, наиболее подверженных к воздействию;

– разные ИПВ должны иметь корреляцию между собой для достижения общей цели;

– силы и средства ИПВ применяются массово, комплексно и разнообразно.

Мероприятия ИПВ направлены на внедрение определённых идей, убеждений или лозунгов в сознание отдельных людей и групп, чтобы вызвать недоверие к руководству, осознание неблагоприятного положения, угрозы жизни и благополучию близких, а также ввести в заблуждение и склонить к сотрудничеству. При разработке и проведении ИПВ злоумышленники используют следующие основные принципы:

– квалифицированное руководство — чёткое представление руководителей о целях и задачах операции;

– правдоподобие — действия, восприятие и объяснения, вызывающие доверие у целевой аудитории;

– доступность — учёт психологических особенностей, культуры, образа жизни, социальных взаимоотношений целевой аудитории, лингвистических, исторических, религиозных, природных и других объективных факторов;

– диалог — ИПВ в форме обмена мнениями способствует взаимопониманию и установлению доверительных отношений с объектом воздействия;

– масштабность — отсутствие временных и пространственных ограничений на ИПВ;

– согласованность — согласованные и интегрированные действия на всех уровнях иерархии по единому замыслу и плану;

– целенаправленность — ориентация всей совокупности ИПВ на получение конкретного результата;

– непрерывность — непрерывный процесс ИПВ, требующий постоянной обратной связи между планированием и действиями, а также анализом и оценкой результатов.

В процессе проведения отдельного ИПВ можно выделить три этапа:

– операциональный, когда субъект воздействует на объект;

– процессуальный, когда объект принимает или не принимает это воздействие;

– заключительный, когда проявляются реакции объекта на перестройку его психики.

Перестройка психики под воздействием ИПВ может быть разной по масштабу и продолжительности. ИПВ может осуществляться с использованием разных методов и средств, многие из которых, постоянно развиваясь и совершенствуясь, превратились в сложные технологии воздействия на психику людей. К примеру, наиболее распространенной технологией на сегодняшний день является воздействие на сознание людей посредством телевизионной техники и сети Интернет [4].

Психология как наука решает следующие задачи в рамках подготовки и применения ИПВ:

– указывает на особенности человеческой и групповой психики, которые целесообразно подвергнуть воздействию;

– предоставляет эффективные методы оценки психологического состояния отдельных лиц и групп;

– даёт рекомендации специалистам, использующим ИПВ, по планированию операций;

– разрабатывает критерии и методы оценки эффективности ИПВ для людей.

Психологи западных стран основываются на достижениях различных психологических школ при создании научной базы ИПВ. Основные положения, на которые они опираются, включают:

– решающую роль бессознательного в определении поведения человека и функционировании механизмов психологической защиты;

– способы преодоления психологической защиты (психоанализ);

– рефлекторное закрепление восприятий, переживаний и действий (бихевиоризм, нейролингвистическое программирование).

Когнитивная психология подчёркивает роль ментальных схем в восприятии человеком окружающего мира и информации, а гуманистическая психология изучает структуру и динамику человеческих потребностей. Психология помогает организаторам ИПВ определить уязвимые места в психологическом состоянии человека, а также научно обосновать тактику психологического воздействия на него. Используются политические, национальные, социальные и религиозные разногласия, распространение слухов и дезинформации для достижения злоумышленником поставленных целей.

Заключение

Подводя итоги статьи, можно сделать следующие краткие выводы:

– Для оценки уровня защищённости объектов КИИ в организационной и психологической сферах можно использовать тестирование отдельных лиц и персонала КИИ с помощью специальных средств и методов ИПВ. Эти средства и методы, а также сценарии их применения должны соответствовать аналогичным средствам, методам и сценариям потенциального противника [5].

– Классификация средств и методов специальных ИПВ для тестирования объектов КИИ включает информационные, лингвистические, психотронные, психофизические, психотропные и соматопсихологические методы.

– Выявлять уязвимости в организационной и психологической сферах. Разрабатывать предложения по повышению уровня информационно-психологической безопасности для обеспечения стабильности объектов КИИ в условиях информационного противоборства.

– Человек в системе КИИ является ключевым элементом так как к нему стекаются информационные потоки и он принимает окончательные решения. Однако человек также является сла-

бым звеном, подверженным воздействию ИПВ, которые могут привести к нарушению политики информационной безопасности. Аудит ИБ объектов КИИ должен включать проверку психологической устойчивости персонала с использованием специальных средств и методов ИПВ.

Литература

1. *Баришполец В. А.* Информационно- психологическая безопасность: основные положения // Информационные технологии. – 2003. – Т. 3, № 2. – С. 69–104.

2. *Монахов М. Ю., Полянский Д. А., Монахов Ю. М., Семенова И. И.* Концепция управления процессом обеспечения достоверности информации в ИТКС в условиях информационного противодействия // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 9. – С. 2397–2402.

3. *Иванова Н. В., Коробулина О. Ю.* Аудит информационной безопасности. – СПб. : ПГУПС, 2011. – 57 с.

4. *Макаренко С. И., Смирнов Г. Е.* Методика обоснования тестовых информационно-технических воздействий, обеспечивающих рациональную полноту аудита защищенности объекта критической информационной инфраструктуры // Вопросы кибербезопасности. – 2021. – № 6 (46). – С. 12–25. – DOI: 10.21681/2311-3456-2021-6-12-25

5. *Максимова Е. А.* Инфраструктурный деструктивизм субъектов критической информационной инфраструктуры [монография] / Е. А. Максимова // Москва – Волгоград : Волгоградский государственный университет, 2021. – 181 с. – EDN ZZTOKE

УДК 004

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ SQL-ЗАПРОСОВ К БАЗАМ ДАННЫХ

А. С. Свиридов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В научной статье рассматриваются методы оптимизации запросов к базам данных. В ходе работы будут определены методы оптимизации, порядок выполнения запросов, проанализировано влияние разных запросов на систему, дано понимание, как оценивается оптимизация и как работает план выполнения запросов. В качестве примера рассматривается упрощённая модель хранения документов. Рассмотрены следующие технологии: СУБД PostgreSQL, ERwin Data Modeler — компьютерная программа для проектирования и документирования баз данных.
Ключевые слова: база данных, PostgreSQL, ERwin Data Modeler, оптимизация, SQL-запрос, join, ER-диаграмма, план запросов, индкесы, DML.

Введение

Существуют приложения, которые для корректной своей работы опираются на данные, полученные от действий пользователей или внешних ресурсов. Эти данные сохраняются в базе данных. Базы данных, лежащие в основе таких приложений, подвергаются высокой нагрузке, что может привести к снижению производительности, задержкам и недоступности системы. Оптимизация запросов к базе данных является критически важным аспектом обеспечения стабильной работы и высокой производительности приложения. По мере роста объема информации и пользователей приложения должны гарантировать быструю и качественную работу, так как возрастает нагрузка как на базу данных, так и на приложение в целом. В этой статье рассмотрим планы выполнения запросов, варианты оптимизации самих запросов на примере модели хранения документов, загруженные через приложение.

1. Определение сферы решаемой задачи

В качестве примера для демонстрации оптимизации запросов выбрана модель хранения документов. Эта модель является актуальной, так как многие государственные организации (например, налоговая служба), запрашивают необходимые документы у других частных компаний, а электронное представление документов облегчит работу.

При загрузке документа данные должны сохраняться в базу данных. Документ принадлежит к определённому типу, организации, важно учитывать период документа и информацию о пользователе, который загрузил его. Сами данные относятся к определённому разделу. Например, к декларации по налогу на имущество.

В качестве запроса для оптимизации выступает выборка данных конкретных документов с типом «IMUD_DECLARATION_509», которые загружены в периоде «2022, 1 квартал».

Для того, чтобы приступить к реализации, необходимо спроектировать саму модель данных, ориентируясь на нормальные формы [1]. В качестве программы проектирования выбран ERwin Data Modeler. ERwin Data Modeler — это программное обеспечение для моделирования баз данных, разработанное компанией Micro Focus. На рис. 1 представлена ER-диаграмма «Хранение документов».

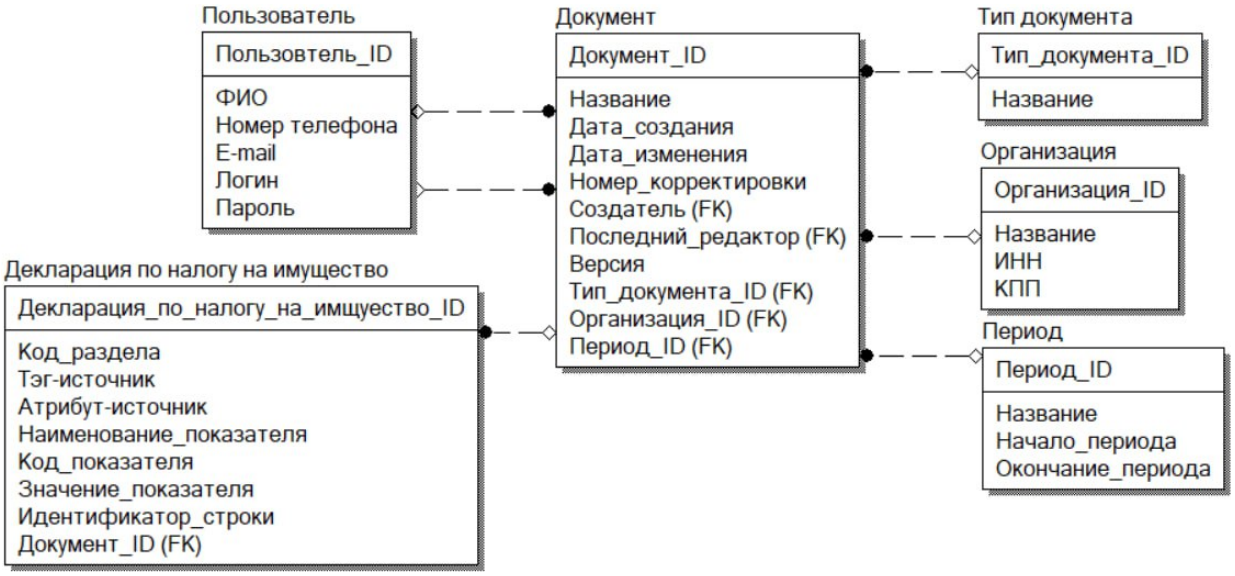


Рис. 1. ER-диаграмма «Хранение документов»

2. База данных

Для хранения данных, к которым будут написаны запросы, был выбран PostgreSQL — объектно-реляционная база данных [2]. Эта СУБД представляет все данные в виде объектов, имеет иерархию ролей. PostgreSQL имеет следующие преимущества:

- поддержка баз данных неограниченного размера;
- мощные и надёжные механизмы транзакций и репликации;
- лёгкая расширяемость.

Ориентируясь на перечисленные преимущества, PostgresSQL больше подходит для выбранной темы, чем другие СУБД. Например, MySQL, который недостаточно надёжен при работе с данными.

3. Оптимизация запросов

Для извлечения данных из базы данных используется select. Select — оператор запроса в языке SQL, который относится к подмножеству DML, возвращающий набор данных из базы данных [3].

Запрос для выборка данных конкретных документов с типом «IMUD_DECLARATION_509», которые загружены в периоде «2022, 1 квартал» выглядит следующим образом:

```
select *
from dm_imud_decl did
where did.doc_id in (select distinct d.doc_id
                     from documents d,
                          document_types dt,
                          tax_periods tp
                     where d.doc_type_id = dt.doc_type_id
                       and dt.doc_type_code = 'IMUD_DECLARATION_509'
                       and tp.tax_period_name = '2022, 1 квартал');
```

В этом запросе данные документа при заданных условиях находятся при помощи подзапроса. Формируются идентификаторы документов, по которым ищем нужные данные, проверяя, входят они по полю doc_id в сформированный список или нет. План выполнения запроса представлен на рис. 2.

QUERY PLAN
Hash Join (cost=38.47..1931.17 rows=65 width=7264)
Hash Cond: (did.doc_id = d.doc_id)
-> Seq Scan on dm_imud_decl did (cost=0.00..1887.69 rows=1869 width=7264)
-> Hash (cost=38.38..38.38 rows=7 width=8)
-> Unique (cost=38.28..38.31 rows=7 width=8)
-> Sort (cost=38.28..38.30 rows=7 width=8)
Sort Key: d.doc_id
-> Nested Loop (cost=10.14..38.18 rows=7 width=8)
-> Seq Scan on tax_periods tp (cost=0.00..1.16 rows=1 width=0)
Filter: ((tax_period_name)::text = '2022, 1 квартал'::text)
-> Hash Join (cost=10.14..36.95 rows=7 width=8)
Hash Cond: (d.doc_type_id = dt.doc_type_id)
-> Seq Scan on documents d (cost=0.00..24.63 rows=563 width=16)
-> Hash (cost=10.12..10.12 rows=1 width=8)
-> Seq Scan on document_types dt (cost=0.00..10.12 rows=1 width=8)
Filter: ((doc_type_code)::text = 'IMUD_DECLARATION_509'::text)

Рис. 2. План выполнения запроса

План выполнения запроса можно оценить по стоимости выполнения, за которое отвечает значение cost. В этом примере происходит полное сканирование таблиц, что при больших данных приведёт к более низкому выполнению по времени. В плане выполнения запроса встречается sort и unique. Эти операции могут быть избыточны для выборки данных конкретных документов. Можно оптимизировать запрос, используя оператор объединения таблиц и добавив индексы на таблицы, что позволит ускорить выполнение. Индексы — это специальные структуры данных, которые значительно ускоряют поиск данных в таблицах [4].

Оптимизированный запрос выглядит следующим образом:

```
select did.*
from udl.dm_imud_decl did
         join wdl.documents d on did.doc_id = d.doc_id
         join wdl.document_types dt on d.doc_type_id = dt.doc_type_id
         join wdl.tax_periods tp on d.period_id = tp.tax_period_id
where dt.doc_type_code = ‘IMUD_DECLARATION_509’
  and tp.tax_period_name = ‘2022, 1 квартал’;
```

В оптимизированном запросе не используется подзапрос. Вместо него фигурирует join — оператор для внутреннего соединения таблиц. После объединения выполняется оператор where, который позволяет применить условия фильтрации, затем выполняется конкретная выборка данных. На рис. 3 представлен план выполнения запроса.

По стоимости выполнения оптимизированный запрос значительно лучше первого, хотя есть вложенные циклы, которые потребуют дальнейшей оптимизации с увеличением объёма данных. При этом использование индексов и избавление от подзапроса помогло ускорить запрос. Применились на практике следующие методы оптимизации:

- ограничение использования подзапросов;
- использование индексов;
- извлечение только тех данных, которые нужны;
- ограничение использования сортировок.

QUERY PLAN
Nested Loop (cost=8.60..275.75 rows=31 width=190)
-> Nested Loop (cost=8.31..34.89 rows=1 width=8)
-> Hash Join (cost=8.17..34.32 rows=3 width=16)
Hash Cond: (d.doc_type_id = dt.doc_type_id)
-> Seq Scan on documents d (cost=0.00..24.63 rows=563 width=24)
-> Hash (cost=8.16..8.16 rows=1 width=8)
-> Index Scan using uk_document_types on document_types dt (cost=0.14..8.16 rows=1 width=8)
Index Cond: ((doc_type_code)::text = 'IMUD_DECLARATION_509'::text)
-> Index Scan using tax_periods_u1 on tax_periods tp (cost=0.14..0.18 rows=1 width=8)
Index Cond: (tax_period_id = d.period_id)
Filter: ((tax_period_name)::text = '2022, 1 квартал'::text)
-> Index Scan using ix_dm_imud_decl on dm_imud_decl did (cost=0.29..158.68 rows=8218 width=190)
Index Cond: (doc_id = d.doc_id)

Рис. 3. План выполнения оптимизированного запроса

Заключение

В данной статье были сравнены планы выполнения запросов, варианты оптимизации самих запросов на примере модели хранения документов.

Оптимизация запросов к базам данных — сложная задача, требующая комплексного подхода. Анализ производительности, оптимизация схемы, SQL-запросов — все эти аспекты должны быть учтены для достижения наилучших результатов в условиях постоянно возрастающей нагрузки на современные приложения. Постоянный мониторинг производительности и профилирование запросов, а также гибкое применение описанных методов позволят поддерживать стабильную и эффективную работу приложения.

Литература

1. Руководство по проектированию реляционных баз данных. Режим доступа: свободный. https://habr.com/ru/post/193136. (Дата обращения 23.11.2024)

2. PostgreSQL : официальный сайт. – URL: https://www.postgresql.org/ (дата обращения: 23.11.2024).

3. *Грофф Д.* SQL: Полное руководство / Д. Грофф, П. Вайнберг. – Москва : Вильямс, 2015. – 960 с.

4. PostgreSQL : Документация: 15: 1.2. Основы архитектуры : Компания Postgres Professional. – URL: https://postgrespro.ru/docs/postgresql/15/tutorial-arch (дата обращения: 24.11.2024).

УДК 65.016.7

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В МАТРИЧНОЙ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ОЦЕНКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

В. С. Тарасов

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В данной статье рассматривается интеллектуальная поддержка принятия управленческих решений, а также предложен алгоритм интеллектуальной поддержки принятия управленческих решений в матричной организационной системе оценки обучающихся. Используется математическая модель для определения «рабочей точки», которая показывает уровень сформированности набора компетенций у обучающихся. Определяется, какие факторы влияют на уровень сформированности компетенций. Используется уравнение линеаризации для определения степени влияния факторов на изменение «рабочей точки». На основе полученных данных о степени влияния факторов на уровень сформированности компетенций, принимаются управленческие решения для оптимизации процесса обучения. Данный алгоритм позволяет выявить проблемы в образовательном процессе и грамотно подойти к решению данных проблем.
Ключевые слова: алгоритм, интеллектуальная поддержка, оценка, организационная система, управленческие решения, математические компетенции.

Введение

На сегодняшний день управление образовательным процессом требует от руководящего состава оперативности и грамотных управленческих решений, которые без матричной организационной системы — в недостаточной степени эффективны. В связи с чем, руководители в сфере образования сталкиваются с необходимостью принимать множество решений, опираясь на результаты обработки больших объемов данных. В виду чего, возникает крайняя необходимость в разработке систем интеллектуальной поддержки процесса принятия управленческих решений на базе организационных систем.

1. Поддержка принятия управленческих решений в образовательной сфере

Вопроса о принятии управленческих решений в образовательной сфере на сегодняшний день, в той или иной степени, опирается на возможности анализа диагностических показателей. И, для эффективного управления профессиональной подготовки и обоснования компетентных управленческих решений, необходима формулировка вопросов по определению уровня и алгоритма интеллектуальной поддержки в процессе принятия управленческих решений.

В связи с чем, становится актуальной разработка механизма, которая предоставляет собой локализацию управленческих решений в профессиональной подготовке [2]. Отметим, что разработка алгоритма управления в матричной организационной системе, которая представляет собой метод двойного управления, занимает важное место в решении управленческих задач. Однако, несмотря на достижения математических теорий, остаются нерешённые вопросы, с которыми приходится сталкиваться при управлении решений. Стоит отметить, что на практике управленческих решений возникает множество классических задач, методы математических решений которых, основываются на предположениях, не соответствующих современным особенностям математических моделей. К примеру, высокий уровень неопределенности может затруднять применение стандартных математических моделей. В связи с чем, необходимы

новые, более совершенные подходы и методы, учитывающие непрерывную оценку при матричной организационной системе, которая подразумевает под собой использование оценок, исходя их выполненных заданий, форм фиксирования оценок, педагогических приёмов и механизмов анализа полученных результатов.

Стоит отметить, что алгоритмы интеллектуальной поддержки управленческих решений в матричной организационной системе, изначально были направлены на возможность осуществления обратной связи с целью выявления уровня навыков учащихся. В связи с чем, уровень обоснования коррекционных методов образовательного процесса, с точки зрения математических решений, должен отвечать сформированности компетенций, отвечающих за формирование знаний у обучающихся [3]. При этом, математическая компетенция не может быть сформулирована на одном заданном уровне, однако её, в зависимости от характера, можно разделить на группы:

– в зависимости от сложности математических теорий;
– в зависимости от способности демонстрации к абстракции и формальных теорий;
– в зависимости от областей математики и других предметных областей;
– в зависимости от уровня сложности и математических утверждений.

Таким образом, стоит выделить методы и критерии определения трех уровней математических компетенций (пороговый, продвинутый, высокий), которые служат критериями отбора заданий, как предоставлено в табл. 1 [1].

Таблица 1

Критерии определения уровней математических компетенций

Уровень	Критерий определения	Критерий отбора
I пороговый	Знать и выявлять ключевые определения и проблемы математики в рамках учебной информации, уметь находить и репродуцировать необходимую информацию	Задачи, которые можно распознавать и применять
II продвинутый	Уметь сопоставлять и преподносить изученные материалы и утверждения, а также анализировать и синтезировать полученную информацию	Задачи, которые выходят за рамки традиционного обучения
III высокий	Знать и определять проблематику информации; уметь анализировать и интерпретировать полученные результаты математики, а также вести обсуждения на любую тему	Задачи, для умения выбирать математический инструментарий и осуществлять разработку алгоритма действий

2. Определение влияния показателей успеваемости на уровень компетенций

Оценка является исходной позицией для определения уровня сформированности набора компетенций, отвечающих за формирование знаний X_3, со всей совокупностью промежуточных результатов вычисления с целью создания новых методов в предметной области. Отметим, что состояние уровня сформированности компетенций $\dot{X}$ описывается «рабочей точкой», которое представляет собой вычислительное значение оценки обучающихся [4].

$$\dot{X} = f(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_n). \quad (1)$$

Таким образом, согласно решению математического уравнения можно определить уровень сформированности набора компетенций между i-ми компетенциями в j-й группе с учетом использования обратной функции, как указано в формуле 2:

$$X_j + \Delta X_j \to \varphi\pi - 1 \to E + E_j. \quad (2)$$

Изменение X^* в «рабочей точке» следует описать уравнением ниже:

$$\Delta X = \sum_{i=1}^{n} K_i \Delta x_i \quad (3)$$

где значения линеаризации $\frac{\partial X}{\partial X_i} X^*, i \in \overline{1, I}$ определяются методом в областях ε_t^i на основе оценки к вариациям отдельных критериев успеваемости.

На основе оценивания уровня сформированности компетенций в матричной организационной системе обучающихся было выявлено, что на уровень сформированности воздействуют два показателя: уровень сформированности компетенций и управленческая деятельность. Таким образом, процедуру определения коэффициентов линеаризации k_4, k_5 в области линеаризации $\varepsilon_4, \varepsilon_5$, где

$$k_4 = tga_4 = 0,57,\ \Delta X_5 \in [0;0,3],\ k_5 = tga_5 = 0,83,\ \Delta X_6 \in [0;0,3],$$

следует представить следующим образом [5]:

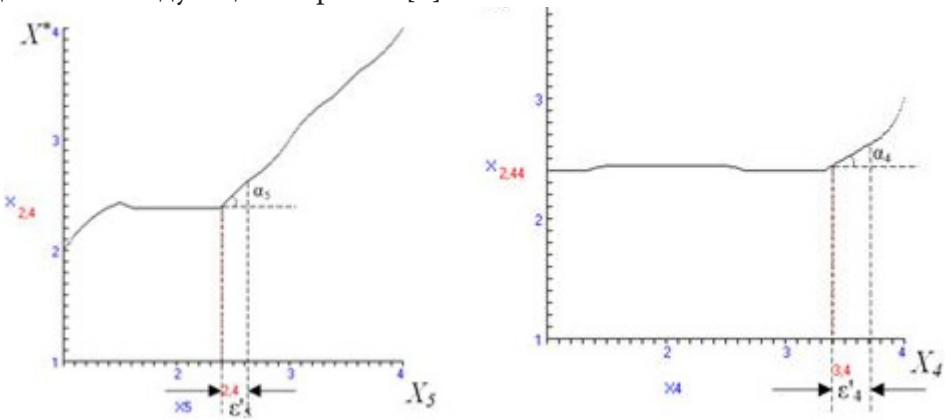


Рис. 1. Процедура определения коэффициентов линеаризации k_4, k_5

Таким образом, уравнение линеаризации выглядит следующим образом:

$$\Delta X = k_4 \Delta X_4 + k_5 \Delta X_5,\ \Delta X^{\max} = 0,57 * 0,3 + 0,83 * 0,3 \quad (4)$$

Таким образом, управленческие решения в матричной организационной системе оценки обучающихся должны охватывать процессы формирования компетенций и процессы профессиональной подготовки, учитывая при этом, принципы управления (измерения состояния величины, задания желаемого значения, получения обратной связи) с применением результатов измерений, основанных на уровне оценки обучающихся и уровне управленческих решений. Предложенные инструментальные средства реализуют компетентностный подход в области образовательных управленческих решений, соблюдая принципы управления, с целью выполнения задач в образовательном процессе.

Таким образом, алгоритм интеллектуальной поддержки принятия управленческих решений в матричной организационной системе непрерывной оценки обучающихся состоит из 3 этапов, где:

– на первом этапе формируется статистическая выборка обучающихся и их оценочная успеваемость;

– на втором этапе выполняется корреляционный анализ показателей;

– на третьем этапе строится когнитивная модель (рис. 2), где определяются концепты и аспекты процесса обучения, которые выявлены в когнитивной модели как нуждающиеся в корректировке или оптимизации и, на основе которой выполняется поиск соответствующих управленческих решений.

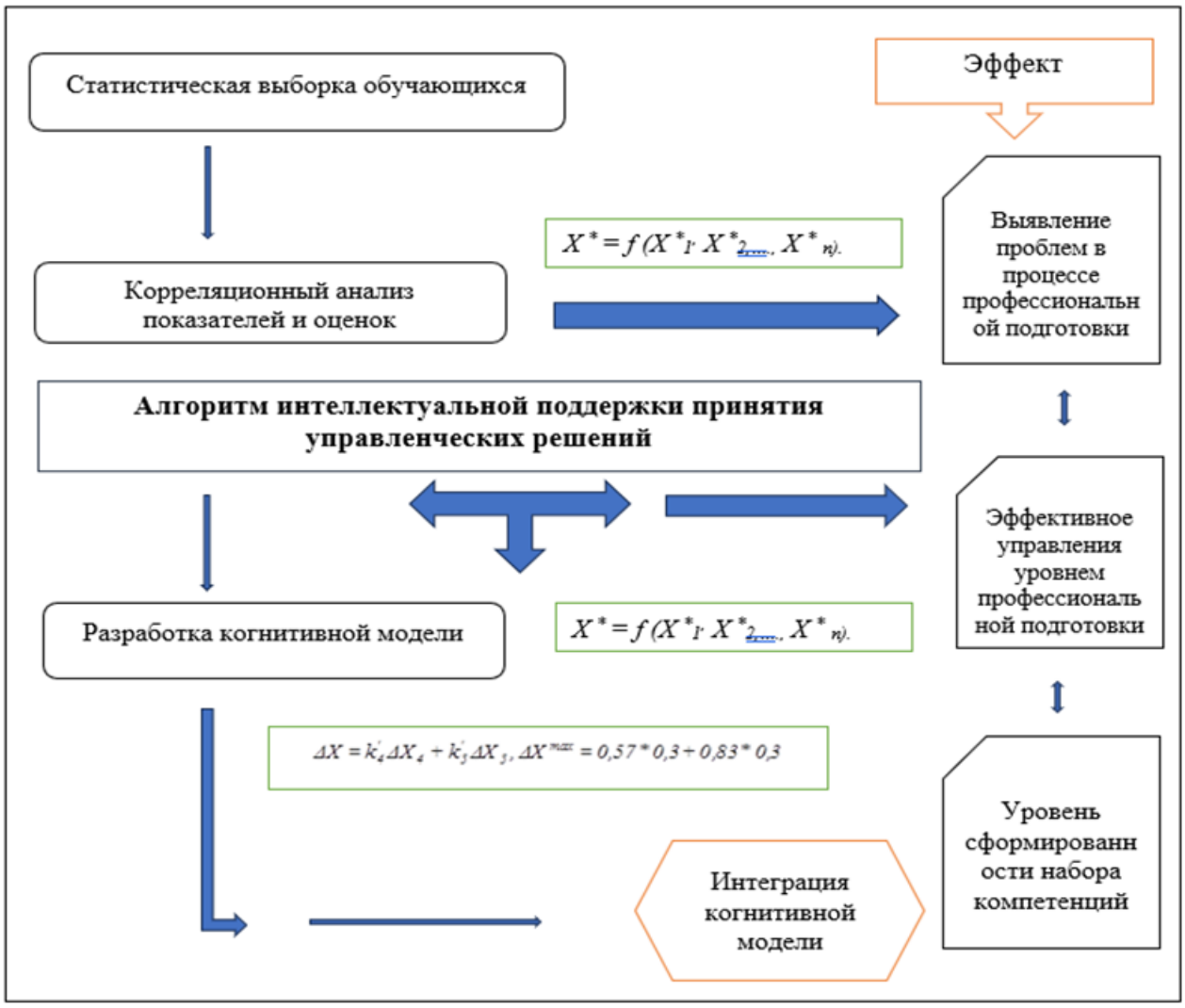


Рис. 2. Алгоритм интеллектуальной поддержки принятия управленческих решений

Таким образом, особенности предлагаемого алгоритма заключаются в том, что при построении когнитивной модели применяются как статистические, так и интеллектуальные методы, которые позволяют рассчитать ресурсы, обеспечивающие достижение максимального интегрального значения.

Заключение

Таким образом, данный алгоритм, возможно, применять для повышения эффективности процесса совершенствования образовательного процесса, а также при внедрении интерактивного метода обучения и т. д. Разработанный алгоритм интеллектуальной поддержки принятия управленческих решений в матричной организационной системе непрерывной оценки обучающихся позволяет выявить проблемы образовательного процесса с целью осуществления адресного воздействия при помощи методов двойного управления и математических решений в рамках эффективности удельного веса по освоению дисциплины.

Литература

1. *Анисова Т. Л.* Математические компетенции, уровни оценки / Т. Л. Анисов // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11-4. – С. 497.

2. *Алексеев А. О.* Алгоритмические основы комплексного оценивания объектов / А. О. Алексеев // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 3. – С. 474.

3. *Бурков В. Н.* Введение в теорию управления организационными системами: учебник / под ред. Д. А. Новикова. – М. : Либроком, 2009. – 264 с.

4. *Харитонов В. А.* Функциональные возможности комплексного оценивания с топологической интерпретацией матриц / В. А. Харитонов // Управление большими системами. – М. : Изд-во ИПУ РАН, 2007. – Вып. 18.

5. *Харитонов В. А.* Интеллектуальные технологии обоснования инновационных решений: монография / под науч. ред. В. А. Харитонова. – Пермь : Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 363 с.

УДК 004.657

АНАЛИЗ РАСЧЁТА ПРОСРОЧЕННОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ В КОРПОРАТИВНОМ ХРАНИЛИЩЕ ДАННЫХ БАНКА

П. Е. Толстых

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье проведён обзор и анализ двух алгоритмов расчёта просроченной задолженности в корпоративном хранилище данных банка: по методу *FIFO* (в первую очередь происходит погашение самой ранней просроченной задолженности) и по методу *LIFO* (в первую очередь происходит погашение последней просроченной задолженности).
Ключевые слова: корпоративное хранилище данных, просроченная задолженность, *FIFO*, *LIFO*, сторнирование.

Введение

Банковская сфера характеризуется большим объёмом данных, которые необходимы для создания отчётов [1]. Для быстрого анализа информации, формирования отчётности и корректности рабочих процессов возникает необходимость единого корпоративного хранилища данных (далее — КХД).

В КХД не только хранится информация о клиентах, заключённых договорах, операциях, транзакциях и других важных сущностях банковского процесса, но и происходит расчёт многих показателей банка, анализ которых помогает бизнес-пользователям принимать взвешенные решения. Одним из таких показателей является просроченная задолженность.

Просроченная задолженность — не погашенная в срок задолженность по основному долгу и/или плановым процентам за пользование ссудой, а также иным платежам по кредитному договору [2].

В КХД банка используются следующие основные алгоритмы расчёта просроченной задолженности: *FIFO* (*First In First Out* — «первым вошёл — первым вышел») и *LIFO* (*Last In First Out* — «последним вошёл — первым вышел»). Результаты расчётов доступны бизнес-пользователям и хранятся в объектах витринного слоя.

1. Требования к витрине, содержащей данные о просроченной задолженности

1.1. Функциональное описание

Витрина должна содержать исторические данные по просроченной задолженности по договору. Объект должен рассчитываться ежедневно.

В витрине учитывается просроченная задолженность по следующим типам:

- основной долг («*PRN*»);
- проценты («*INT*»);
- страховая плата («*INS*»);
- комиссии («*COM*»).

Информация должна быть сгруппирована в разрезе следующих измерений:

1) идентификатор договора;
2) тип просроченной задолженности;
3) дата начала просроченной задолженности.

История возникновения и погашения просроченной задолженности формируется по операциям, связанным с переносом договора на пророченную задолженность, и платежам клиента.

В случае, если по операции был выполнен процесс сторнирования [3] — отмена или корректировка записи об операции при ошибке — сторно-операция также должна быть учтена.

1.2. Атрибутный состав

Для предоставления отчётности обязательно наличие следующих атрибутов:

- идентификатор договора;
- тип просроченной задолженности;
- дата начала действия просроченной задолженности — дата окончания платёжного периода, в течение которого на счёт клиента не поступила минимально необходимая сумма, совпадает с датой операции, означающей перевод договора в состояние просроченной задолженности;
- дата окончания действия просроченной задолженности — дата совершения операции, суммы которой достаточно для погашения просроченного платежа;
- количество дней просроченной задолженности;
- уровень просроченной задолженности.

2. Алгоритм расчёта просроченной задолженности

Основные этапы расчёта просроченной задолженности:

1. Выделение из общего перечня операций, совершённых по договору, тех, которые непосредственно влияют на расчёт просроченной задолженности.

2. Определение «верно» сторнированных операций — система-источник в явном виде передала сторнирующую операцию с тем же типом и суммой.

3. Определение «плохо» сторнированных операций — у операции присутствует признак сторнирования, однако система-источник по каким-либо причинам не передала в КХД в явном виде сторнирующую операцию. В этом случае производится поиск сторнированных операций методом ближайшей операции: сторнирующей считается операция, ближайшая по дате к сторнированной операции и совпадающая по сумме операции.

4. Определение дат начала и окончания просроченной задолженности: даты операций с типом «*OVD*» (просроченная задолженность) становятся датами начала просроченной задолженности, даты операций с типом «*PAY*» (платёж) — датами окончания просроченной задолженности в случае, если суммы платежа достаточно для погашения текущей задолженности.

5. Пересчёт количества дней и уровня просроченной задолженности в зависимости от операций по договору.

Алгоритм выполнения п. 4, 5 зависит от метода, по которому происходит расчёт просроченной задолженности.

2.1. FIFO

Алгоритм *FIFO* — метод учёта просроченной задолженности, при котором внесённый платеж погашает первый просроченный платеж.

Дата начала непрерывной просроченной задолженности может меняться по мере того, как происходит её погашение.

Пример расчёта просроченной задолженности по методу *FIFO*:

1. Дата окончания платёжного периода по договору — 10.09.2024. На счёт клиента не поступила сумма, необходимая для выполнения обязательства по платежу. В системе-источнике появилась информация о начале просроченной задолженности по основному долгу. После расчёта в КХД строка с данной информацией появилась в витрине (табл. 1) с заполненной датой начала просроченной задолженности, но с незаполненной датой окончания.

Таблица 1

Состояние витрины после первого выхода договора на просроченную задолженность (FIFO)

Тип	Дата начала	Дата окончания	Уровень	Кол-во дней
PRN	10.09.2024	NULL	1	1

2. Дата окончания следующего платёжного периода по договору — 10.10.2024. За период с 10.09.2024 по 10.10.2024 на счёт клиента также не поступило ни одного платежа, который мог бы погасить просроченную задолженность. В системе-источнике сформировалась ещё одна операция по переносу договора на просроченную задолженность, которая появилась в витрине с уровнем 2 (табл. 2). Помимо этого, клиент не оплатил комиссию, что также отразилось в системе-источнике и витрине. При этом у предыдущей просроченной задолженности изменилось количество дней (меняется каждый день при расчете). Датой начала непрерывной просроченной задолженности считается 10.09.2024.

Таблица 2

Состояние витрины после повторного выхода договора на просроченную задолженность (FIFO)

Тип	Дата начала	Дата окончания	Уровень	Кол-во дней
PRN	10.09.2024	NULL	1	30
PRN	10.10.2024	NULL	2	1
COM	10.10.2024	NULL	1	1

3. На следующий день клиент внёс сумму по основному долгу, достаточную для погашения одной из просроченных задолженностей. В системе-источнике появилась запись с типом платёж и была передана в КХД. У самой ранней просроченной задолженности (от 10.09.2024) появилась дата окончания. Теперь датой начала просроченной задолженности по договору считается 10.10.2024 (табл. 3).

Таблица 3

Состояние витрины с информацией о просроченной задолженности после погашения (FIFO)

Тип	Дата начала	Дата окончания	Уровень	Кол-во дней
PRN	10.09.2024	11.10.2024	1	31
PRN	10.10.2024	NULL	2	2
COM	10.10.2024	NULL	1	2

Для реализации данного алгоритма в КХД используются аналитические (оконные) функции. Они позволяют вычислять различные показатели на основе группы строк, возвращая при этом результат из нескольких записей для каждой группы [4].

Использованы следующие функции:

• *SUM* — возвращает арифметическую сумму всех выбранных значений поля [5], используется для вычисления сумм просроченных задолженностей и платежей;

• *LEAD* и *LAG* — функции смещения, возвращающие значение выражения, вычисленного для следующей или предыдущей строки результирующего набора соответственно [6], используются для определения дат начала и окончания просроченной задолженности;

• *ROW_NUMBER* — возвращает номер строки в текущей выборке [7], используется для определения уровня просроченной задолженности.

2.2. LIFO

Алгоритм *LIFO* — метод учёта просроченной задолженности, при котором внесённый платеж погашает последний просроченный платеж.

Дата начала непрерывной просроченной задолженности не может меняться по мере того, как происходит её погашение.

Пример расчёта просроченной задолженности по методу *LIFO*:

1. Дата окончания платёжного периода по договору — 10.09.2024. На счёт клиента не поступила сумма, необходимая для выполнения обязательства по платежу. В системе-источнике появилась информация о начале просроченной задолженности по основному долгу. После расчёта в КХД эта строка появилась в витрине с заполненной датой начала просроченной задолженности, но с незаполненной датой окончания. Также в витрине появилась запись с типом «*OVD*», означающая непрерывную просроченную задолженность (табл. 4).

Таблица 4

Состояние витрины после первого выхода договора на просроченную задолженность (LIFO)

Тип	Дата начала	Дата окончания	Уровень	Кол-во дней
OVD	10.09.2024	NULL	1	1
PRN	10.09.2024	NULL	1	1

2. Дата окончания следующего платёжного периода по договору — 10.10.2024. За период с 10.09.2024 по 10.10.2024 на счёт клиента также не поступило ни одного платежа, который мог бы погасить просроченную задолженность. В системе-источнике сформировалась ещё одна операция по переносу договора на просроченную задолженность, которая отразилась в витрине после расчёта с уровнем 2 (табл. 5). При этом уровень у непрерывной просроченной задолженности не изменился, он всегда остаётся равным единице. Помимо этого, клиент не оплатил комиссию, что также отразилось сначала в системе-источнике, а затем и в витрине. При этом у предыдущей просроченной задолженности изменилось количество дней (меняется каждый день при расчете). Датой начала непрерывной просроченной задолженности считается 10.09.2024.

Таблица 5

Состояние витрины после повторного выхода договора на просроченную задолженность (LIFO)

Тип	Дата начала	Дата окончания	Уровень	Кол-во дней
OVD	10.09.2024	NULL	1	30
PRN	10.09.2024	NULL	1	30
PRN	10.10.2024	NULL	2	1
COM	10.10.2024	NULL	1	1

3. На следующий день клиент внёс сумму по основному долгу, достаточную для погашения одной из просроченных задолженностей. В системе-источнике появилась запись с типом платёж и была передана в КХД. У самой поздней просроченной задолженности (от 10.09.2024) появилась дата окончания. При этом дата начала непрерывной просроченной задолженности по договору не изменилась (табл. 6).

4. Через несколько дней клиент внёс два платежа, суммы которых достаточно для погашения двух просроченных задолженностей: по основному долгу и по комиссиям. После расчёта витрины в ней появились даты окончания просроченных задолженностей. Так как больше у данного договора нет открытых просроченных задолженностей, дата окончания появилась также и у строки с непрерывной просроченной задолженностью (табл. 7).

Таблица 6

Состояние витрины с информацией о просроченной задолженности после первого погашения (LIFO)

Тип	Дата начала	Дата окончания	Уровень	Кол-во дней
OVD	10.09.2024	NULL	1	31
PRN	10.09.2024	NULL	1	31
PRN	10.10.2024	11.10.2024	2	2
COM	10.10.2024	NULL	1	2

Таблица 7

Состояние витрины с информацией о просроченной задолженности после полного погашения (LIFO)

Тип	Дата начала	Дата окончания	Уровень	Кол-во дней
OVD	10.09.2024	15.10.2024	1	34
PRN	10.09.2024	15.10.2024	1	34
PRN	10.10.2024	11.10.2024	2	2
COM	10.10.2024	15.10.2024	1	6

Для реализации данного алгоритма в КХД используется PL/SQL. Это язык программирования, который предоставляет процедурные расширения SQL и позволяет реализовывать сложную бизнес-логику с использованием условных операторов, циклических конструкций, процедур, функций и других элементов кода [8].

Для корректного расчета просроченной задолженности используются несколько переменных с пользовательским комбинированным типом данных — запись [9].

Запись содержит следующие поля:

- номер просроченной задолженности;
- номер договора;
- тип просроченной задолженности;
- дата окончания просроченной задолженности;
- сумма.

В цикле с курсором (набором строк, полученным при помощи оператора SELECT и связанным с ним указателем текущей строки [9]) по всем операциям происходит формирование массива сумм.

Для каждой операции с типом «OVD» (просроченная задолженность) происходит добавление нового значения в массив сумм. Для каждой последующей строки для каждого значения массива рассчитывается сумма (для операций с типом «OVD» учитывается отрицательное значение суммы, для операций с типом «PAY» — положительное).

Этот процесс продолжается, пока текущая сумма не станет неотрицательной (т. е. просроченная задолженность закроется). После этого происходит запись даты закрытия просроченной задолженности.

Как только заканчивается обработка всех операций по одному типу просроченной задолженности или договору, полученные данные из записи переносятся в целевую таблицу. Расчёт продолжается для всех оставшихся типов просроченных задолженностей и договоров.

Заключение

Для быстрой и корректной работы банковских процессов часто на стороне КХД происходит расчёт многих показателей, одним из которых является просроченная задолженность. Это сложный вычисляемый показатель, который непосредственно влияет на деятельность банка, позволяет оценить кредитную историю клиента, его платежеспособность и принять решение по выдаче кредита.

Расчёт просроченной задолженности может происходить по двум алгоритмам: FIFO (сначала погашаются более ранние просроченные задолженности) или LIFO (сначала погашаются более поздние просроченные задолженности).

Эти методы являются алгоритмами высокой сложности, т. к. требуют корректного соотношения между операциями перевода на просроченную задолженность и платежами, а также построения истории, поэтому для их реализации в КХД используются расширенные возможности SQL — аналитические функции и процедурное расширение PL/SQL.

Литература

1. Хранилище данных для банков. – URL: https://datafinder.ru/solutions/hranilishche-dannyh-dlya-bankov?

2. Просроченная задолженность. – URL: https://www.banki.ru/wikibank/prosrochennaya_zadoljennost/

3. Что такое сторно? Проводки в бухгалтерии. – URL: https://assistentus.ru/buhuchet/storno/

4. Analytic Functions. – https://docs.oracle.com/en/database/oracle/oracle-database/23/sqlrf/Analytic-Functions.html

5. СУБД: язык SQL в примерах и задачах / И. Ф. Астахова [и др.]. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 38 с.

6. Функции LAG и LEAD. – http://www.sql-tutorial.ru/ru/book_lag_and_lead_functions.

7. Учебник Oracle SQL, PL/SQL | Аналитические функции: – URL: http://orasql.ru/sql/standfunc/analytics

8. *Фейерштейн С.* Oracle PL/SQL. Для профессионалов/ С. Фейерштейн, Б. Прибыл. – 6-е изд. – СПб. : Питер, 2015. – 26 с.

9. *Домников А. С.* Введение в Oracle / А. С. Домников, В. И. Комаров. – Москва : МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2005. – 44 с.

УДК 004.056

АРХИТЕКТУРА СППР ДЛЯ ОЦЕНКИ РИСКОВ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

М. А. Утенкова, А. А. Комков, Е. А. Максимова

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В ходе работы было исследована история развития архитектуры СППР. Выделены особенности каждого типа: СППР, ориентированные на модели; СППР, ориентированные на данные; СППР, ориентированные на документы; СППР, ориентированные на знания; СППР, ориентированные на коммуникацию; СППР на основе сети Интернет. Проведена аналитическая работа по выявлению более подходящей архитектуры СППР для оценки рисков информационной безопасности. Приведена типовая архитектура СППР для оценки рисков информационной безопасности.

Ключевые слова: система поддержки принятия решений, информационная безопасность, оценка рисков, архитектура СППР, принятие решений, количественные метрики, Model-driven DSS, Data-driven DSS, Communication-driven DSS, Document-driven DSS, Knowledge-driven DSS, Web-based DSS.

Введение

Системы поддержки принятия решений являются важной частью процесса принятия решений в современных компаниях. СППР могут применяться в бизнес-процессах организаций различных отраслей, в том числе относящихся к субъектам критической информационной инфраструктуры (см. рис. 1) [1, 6]. За счет цифровизации процессов и развития обработки данных при помощи искусственного интеллекта, обостряется вопрос защиты используемой информации. Во всех представленных отраслях СППР могут быть использованы и для решения отдельных задач информационной безопасности (далее — ИБ), в частности — оценки рисков.

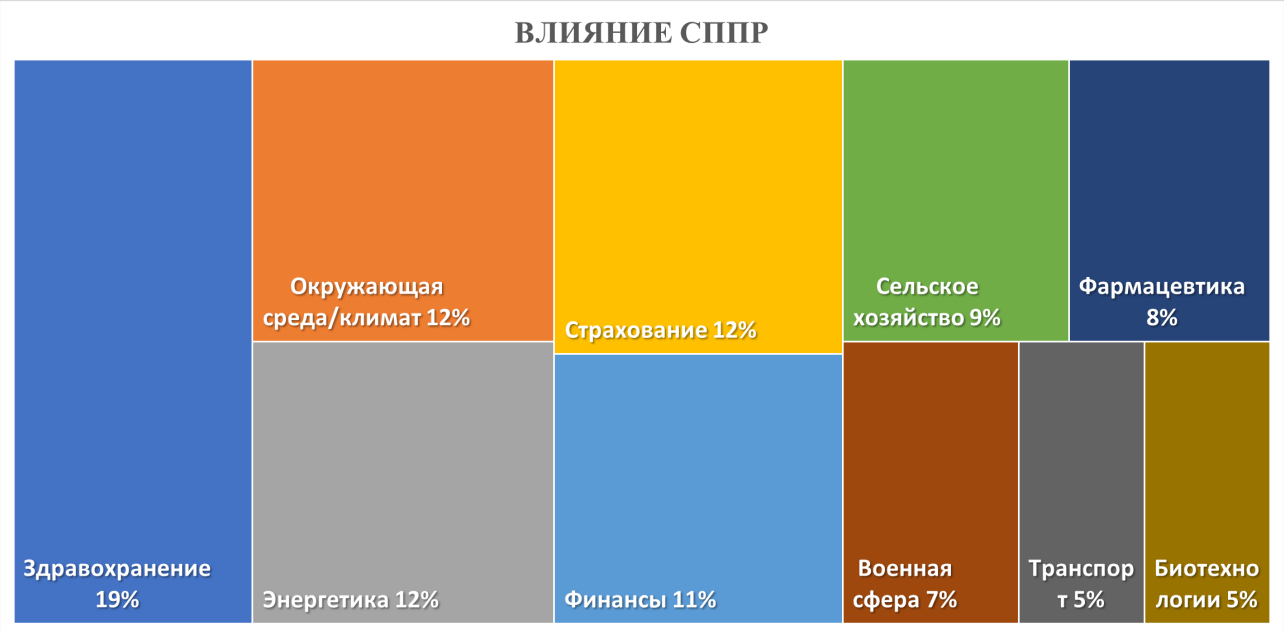


Рис. 1. Соотношение популярности использования СППР в различных отраслях

На сегодняшний день существует множество различных архитектур СППР и их реализаций. Каждая архитектура наилучшим образом подходит для решения определенных задач. В рамках данного исследования для решения проблемы выбора архитектуры СППР для оценки рисков ИБ необходимо проанализировать и сравнить различные архитектуры СППР и выбрать наилучшую, которая поможет поддерживать высокий уровень защищенности на протяжении всего процесса эксплуатирования системы.

1. Основные этапы развития СППР

Для принятия решения о выборе архитектуры систем поддержки принятия решений, следует сделать шаг назад и посмотреть на весь проделанный путь СППР. Хоть история СППР не столь велика, но уже сейчас можно выделить основные исторические периоды, в которых СППР заметно менялось (см. рис. 2) [7].

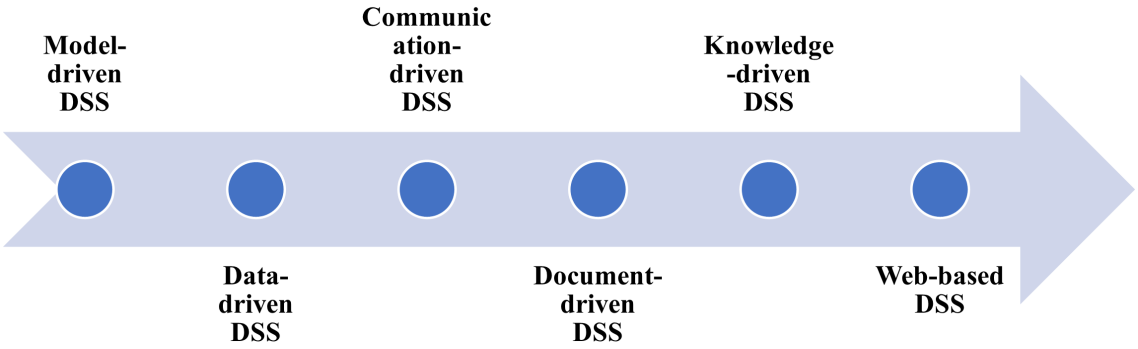


Рис. 2. Основные этапы развития СППР

Начиная историческую справку, стоит отметить СППР на основе моделей, которые были основаны на простых количественных моделях: статистические данные, финансовые данные или расписания, а также их взаимосвязях [2]. Используя простые инструменты анализа и сложную статистику, такие СППР служат для взаимодействия с пользователем на не столь больших объемах данных в сравнении с другими типами СППР.

Следующий тип, который следует отметить являются системы поддержки принятия решений, ориентированные на данные, которые делают акцент на запросы к хранилищам данных в целях нахождения конкретных ответов для конкретных целей, опираясь на данные временных рядов.

Отдельно стоит выделить системы поддержки принятия решений, ориентированные на коммуникацию, так как в отличие от разобранных выше типов, она поддерживает совместную работу и коммуникацию. Основной задачей данных СППР становится обеспечение удобной совместной работы пользователей. Самые распространенные технологии, использующиеся в этом типе СППР являются клиент-серверная технология и веб-технология: программы для обмена мгновенными сообщениями, онлайн системы совместной работы.

Для работы с большими объемами информации в неструктурированном виде используются системы поддержки принятия решений, ориентированные на документы. Одной из целей таких СППР может быть осуществление поиска в документах по определённому набору ключей или поисковых запросов. За информацию могут быть взяты факты и цифры, протоколы совещаний, каталоги, деловые переписки и любая другая документируемая информация в компании.

Для взаимодействия искусственного интеллекта и когнитивных способностей человека используются системы поддержки принятия решений, основанные на знаниях. Это обширная категория, охватывающая широкий спектр систем, предназначенных для использования в ор-

ганизации. Перед ними ставится цель предоставления рекомендаций по управлению или выбора продукции и услуг. Особое внимание уделяется обработки фактов и экспертных оценок.

Переходя к самой сложной системе по своей структуре — веб-СППР, которые работают на основе всемирной сети интернет. Благодаря осуществлению вычислений в облаке данные СППР предоставляют эффективные решения, которые могут привести к значительным сокращениям расходов. За счет доступности всемирной аудитории эти СППР не ограничены в масштабируемости.

2. Выявление наиболее подходящего вида СППР для оценки рисков ИБ

Из представленных видов СППР, появлявшихся на каждом этапе их развития, в меньшей степени для оценки рисков ИБ подходят СППР, ориентированные на документы. Оценка рисков опирается на количественные метрики, которые сложно извлечь из неструктурированных данных. Тем не менее в перспективе развитие технологий распознавания естественно-языковых текстов данная проблема может быть решена следующими поколениями нейросетей.

В классическом представлении риск ИБ вычисляется как сумма произведений стоимости ущерба при реализации некоторой угрозы на вероятность ее реализации. Эти данные могут быть предоставлены экспертами в качестве модели, в рамках которой СППР производит вычисление.

Однако рост масштаба информационных систем, которые требуется защищать, а также увеличение баз данных угроз и уязвимостей, которые необходимо учитывать, не всегда позволяет обработать вручную такие объемы данных. Поэтому на передний план выходят СППР, ориентированные на данные. В хранилище данных содержится информация обо всех актуальных угрозах и уязвимостях, с которой СППР в дальнейшем работает. Эти данные могут быть получены от SIEM-систем или других средств защиты информации, способных осуществлять сканирование информационных систем на наличие уязвимостей.

Также важно отметить, что в процессе оценки рисков ИБ должны участвовать специалисты как непосредственно по защите информации, так и финансового направления организации, так как только они могут знать стоимость ущерба в случае нарушения работы отдельных сегментов информационной инфраструктуры. Набирающие популярность СППР основанные на безлюдных подходах, не подходят [3]. Поэтому СППР должна поддерживать возможность совместной работы, то есть быть ориентированной на коммуникации.

В спектр задач СППР может входить также построение прогнозных моделей, которые могут быть использованы как бизнесе в целом [4], так и в информационной безопасности [8–9].

В перспективе развития СППР именно для решения задач по оценки рисков ИБ может быть добавлено применение технологий искусственного интеллекта при обработке данных, а также использование общедоступных баз данных, расположенных в сети Интернет (например, БДУ ФСТЭК России или база данных сертифицированных средств защиты информации с указанием закрываемых ими угроз и их стоимостью).

3. Технические аспекты архитектуры СППР

СППР могут быть классифицированы по функционалу [5]. Пассивные СППР не дают рекомендаций для пользователя, а только аккумулируют и представляют в удобном для анализа виде входные данные. В отличие от них существуют также активные СППР, которые для лица принимающего решения предлагают рекомендованные варианты решения задачи. Существуют также комплексные (они же совместные) СППР, которые объединяют оба способа работы СППР. В рамках оценки рисков ИБ лучше всего подойдет либо пассивная, либо комплексная СППР.

Уже была обоснована необходимость многопользовательского режима работы СППР. Для его реализации может быть использована клиент-серверная архитектура СППР. В качестве клиентов выступает АРМ каждого пользователя, а сервер является отдельным ЭВМ, на котором происходят все аналитические вычисления. При этом не стоит забывать о необходимости наличия хранилища данных, представляющего собой базу данных, в которой средства защиты информации аккумулируют информацию об угрозах и уязвимостях, а специалисты финансового направления организации — данные о возможном ущербе в случае их реализации. На рис. 3 представлена типовая архитектура СППР, подходящая под задачи оценки рисков ИБ.

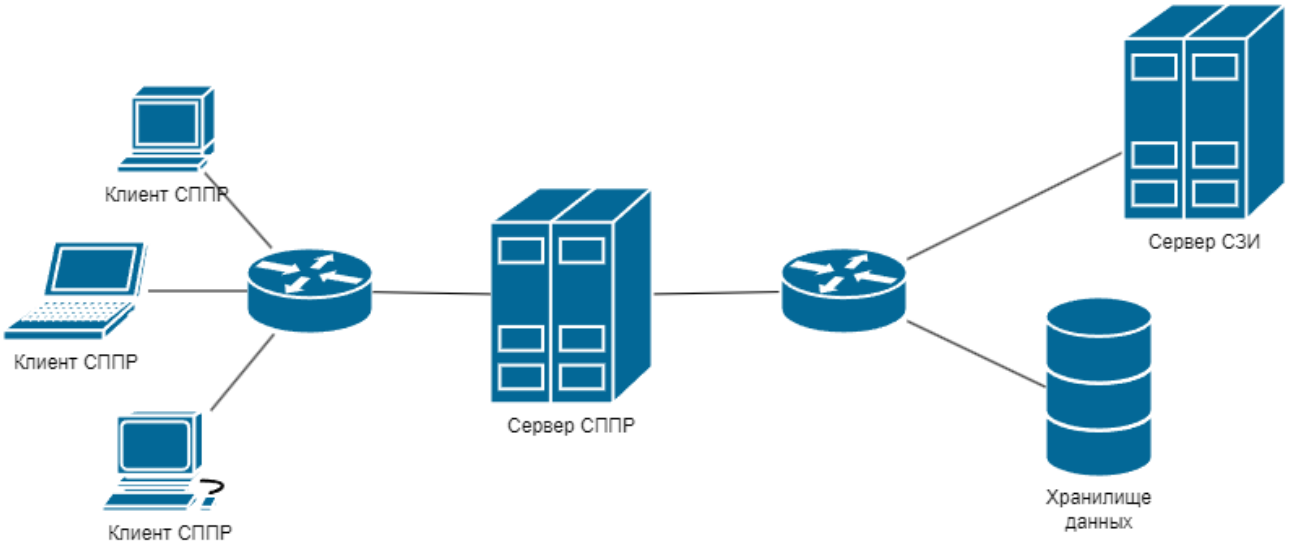


Рис. 3. Типовая архитектура СППР для оценки рисков ИБ

Заключение

В ходе исследования были рассмотрены основные этапы развития видов СППР и их архитектуры. Исходя из особенностей каждого типа СППР, были выведены преимущества и недостатки относительно применимости для оценки рисков ИБ. Наиболее перспективным вектором развития СППР для решения поставленной задачи выделяется WEB-DSS, который также может включать в себя улучшенные алгоритмы анализа данных и технологии искусственного интеллекта. Непосредственный доступ к базам данных сети интернет позволит своевременно актуализировать информацию об угрозах и уязвимостях, что в свою очередь выведет оценку рисков ИБ на новый качественный уровень.

Литература

1. Федеральный закон № 187-ФЗ от 26.07.2017 «О безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации».

2. *Антонов В. В., Конев К. А.* Усовершенствование ситуационной методологии разработки систем поддержки принятия решений для предприятий // Онтология проектирования. – 2022. – №4 (46). – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/usovershenstvovanie-situatsionnoy-metodologii-razrabotki-sistem-podderzhki-prinyatiya-resheniy-dlya-predpriyatiy (дата обращения: 07.11.2024).

3. *Афанасьев М. А.* Рентабельность функционирования СППР с подсистемой принятия решений безлюдными технологиями // Научные труды Вольного экономического общества России. – 2023. – № 3. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/rentabelnost-funktsionirovaniya-sppr-s-podsistemoy-prinyatiya-resheniy-bezlyudnymi-tehnologiyami (дата обращения: 07.11.2024).

4. *Янушкина Ю. И., Комков А. А.* Анализ зарубежного опыта обеспечения устойчивости национальной валюты // Сборник научных трудов «Цифровизация науки и образования: перспективы создания единой системы знаний». Материалы Международных научно-практических мероприятий Общества Науки и Творчества (г. Казань) за октябрь 2024 года.

5. *Овчинников В. В., Станкевич С. А., Никольский С. Н.* Архитектура и таксономия систем поддержки принятия решений // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. – 2018. – № 3 (43). – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/arhitektura-i-taksonomiya-sistem-podderzhki-prinyatiya-resheniy (дата обращения: 07.11.2024).

6. Clinical Decision Support Systems. PSNet [internet]. Rockville (MD): Agency for Healthcare Research and Quality, US Department of Health and Human Services. – 2019. – URL: https://psnet.ahrq.gov/primer/clinical-decision-support-systems

7. *Power D. J.* A Brief History of Decision Support Systems. DSSResources.COM, World Wide Web, http://DSSResources.COM/history/dsshistory.html, version 4.0, March 10, 2007.

8. *Utenkova M. A., Maksimova E. A.* Proactive modeling of limited access data leaks at critical information infrastructure facilities (using the example of the transport industry) // Scientific and analytical journal «Vestnik Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia». – 2024. – № 2. – P. 91–104. DOI: https://doi.org/10.61260/2218-130X-2024-2-91-104

9. *Utenkova M., Maksimova E.* Forecasting the Development of Information Security Events in the Context of Information Warfare. In: Lapina M., Raza Z., Tchernykh A., Sajid M., Zolotarev V., Babenko M. (eds) AISMA-2024: International Workshop on Advanced Information Security Management and Applications. AISMA 2024. Lecture Notes in Networks and Systems. – 2024. – Vol. 863. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-72171-7_32

УДК 004:658

СОСТАВЛЯЮЩИЕ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕННОСТИ СОТРУДНИКОВ ОВД РОССИИ

П. В. Шаляпин[1], Л. В. Россихина[2]

[1]Оперативно-поисковое бюро МВД России
[2]Академия Управления МВД России

Аннотация. В статье исследуются основные составляющие информационно-технологической компетенции сотрудников органов внутренних дел (ОВД) России. Рассмотрены ключевые элементы этой компетенции, включая знание основ информатики, владение специализированными программами, навыки работы с большими данными и аналитическими инструментами, а также готовность к непрерывному обучению. Особое внимание уделено применению математических моделей и методов анализа данных в деятельности ОВД. Предложены рекомендации по совершенствованию информационно-технологической подготовки сотрудников ОВД.
Ключевые слова: информационно-технологическая компетенция, органы внутренних дел, математика в ОВД, прогнозирование преступлений, анализ больших данных, кибербезопасность, профессиональное развитие.

Введение

Современный мир характеризуется стремительным развитием информационных технологий, которые оказывают значительное влияние на все сферы жизни общества, включая обеспечение общественной безопасности и правопорядка [1]. Органы внутренних дел (ОВД) Российской Федерации играют важнейшую роль в поддержании стабильности и защите прав граждан, и для эффективного выполнения своих функций сотрудники этих структур должны обладать высоким уровнем информационно-технологической компетенции. В данном исследовании мы рассмотрим ключевые составляющие этой компетенции, проанализируем существующие подходы к ее формированию и развитию, а также предложим пути совершенствования процесса обучения и профессиональной подготовки сотрудников ОВД.

1. Основные компоненты информационно-технологической компетенции

Информационно-технологическая компетенция сотрудников ОВД включает в себя следующие основные компоненты:

Знание основ информатики и вычислительных систем: включает базовые понятия о принципах работы компьютерных систем, архитектуры компьютеров, операционных систем, сетевых технологий и баз данных. Этот компонент необходим для понимания того, как функционируют современные информационные системы, используемые в правоохранительных органах.

Владение специализированными программами и приложениями: сотрудники ОВД должны уметь эффективно использовать программное обеспечение, предназначенное для решения задач, связанных с управлением информацией, расследованием преступлений, мониторингом общественного порядка и другими аспектами их профессиональной деятельности. К таким программам относятся системы автоматизированного документооборота, базы данных криминальной статистики, аналитические инструменты и средства защиты информации.

Навыки работы с большими данными и аналитическими инструментами: важнейшим элементом современной информационно-технологической компетентности является умение

обрабатывать и анализировать большие массивы данных, получаемых из различных источников. Сюда входят навыки работы с системами бизнес-аналитики (BI), средствами визуализации данных, а также знание основ машинного обучения и искусственного интеллекта.

Понимание вопросов кибербезопасности и защиты информации: учитывая рост числа киберугроз, сотрудникам ОВД необходимо владеть основами информационной безопасности, знать принципы защиты конфиденциальной информации, а также уметь выявлять и предотвращать попытки несанкционированного доступа к данным.

Готовность к непрерывному обучению и профессиональному росту: информационные технологии постоянно эволюционируют, и сотрудники ОВД обязаны поддерживать свою квалификацию на высоком уровне, осваивая новые инструменты и методики работы с информацией.

2. Математическое моделирование и анализ данных в ОВД

Одним из важнейших аспектов информационно-технологической компетенции является умение применять математические модели и методы анализа данных для решения практических задач [2]. Рассмотрим некоторые примеры таких подходов.

2.1. Прогнозирование преступной активности

Прогностический анализ преступной активности позволяет сотрудникам ОВД планировать свои ресурсы и меры профилактики наиболее эффективным образом. Одним из популярных методов прогнозирования является метод временных рядов [5], который основывается на анализе исторических данных о преступлениях. Рассмотрим простую модель авторегрессионного процесса первого порядка (AR(1)):

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t,$$

где y_t — число преступлений в период t, ϕ — коэффициент автокорреляции, ϵ_t — случайная ошибка.

Эта модель позволяет предсказывать будущее значение ряда на основе предыдущих значений и помогает выявить тенденции и закономерности в динамике преступной активности [6].

2.2. Анализ социальных сетей и связей между подозреваемыми

Анализ социальных сетей используется для выявления взаимосвязей между участниками преступных группировок и потенциальными сообщниками. Методология социального графового анализа позволяет строить модели взаимодействия между людьми и выявлять ключевые фигуры в сети [7]. Например, центральность узла (degree centrality) определяется формулой:

$$C_D(v) = \frac{\deg(v)}{N-1},$$

где $\deg(v)$ — степень вершины v, N — общее количество вершин в графе.

Этот показатель позволяет определить, насколько важна та или иная фигура в социальной сети, и может использоваться для планирования оперативных мероприятий.

2.3. Моделирование оптимальных маршрутов патрулирования

Оптимальное распределение ресурсов патрульной службы является важной задачей для обеспечения безопасности на улицах городов. Для решения этой задачи могут применяться методы линейного программирования [5]. Рассмотрим классическую транспортную задачу:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

При ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \mathrm{d}_j, j = 1,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, i = 1,\ldots,m,$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \forall \mathrm{i}, j,$$

где c_{ij} — стоимость перемещения из пункта i в пункт j, d_j — спрос в пункте j, s_i — предложение в пункте i, x_{ij} — объем перевозки из i-го пункта в j-й.

Эта задача позволяет найти оптимальный маршрут патрулирования, минимизируя затраты на передвижение и обеспечивая максимальное покрытие территории.

3. Совершенствование информационно-технологической компетенции

Для повышения уровня информационно-технологической компетентности сотрудников ОВД необходимо разрабатывать и внедрять комплексные образовательные программы, включающие теоретические и практические занятия. Важно также учитывать индивидуальные особенности обучающихся, предлагая персонализированные траектории развития [3,4]. Ниже приведены рекомендации по совершенствованию процесса обучения:

Интерактивные учебные курсы: использование интерактивных платформ и симуляторов позволит сотрудникам лучше усваивать материал и практиковаться в решении реальных задач.

Обучение на рабочем месте: организация стажировок и тренингов непосредственно на рабочих местах поможет сотрудникам быстрее адаптироваться к новым технологиям и инструментам.

Регулярные обновления учебных материалов: постоянное обновление учебных программ и материалов в соответствии с последними достижениями в области информационных технологий обеспечит актуальность знаний и навыков сотрудников.

Взаимодействие с научным сообществом: сотрудничество с университетами и исследовательскими центрами позволит привлекать экспертов для проведения лекций и семинаров, а также участвовать в совместных научных проектах.

Заключение

Информационно-технологическая компетенция сотрудников ОВД является ключевым фактором повышения эффективности их работы и обеспечения безопасности граждан. Развитие этой компетенции должно включать систематическое обучение, внедрение передовых технологий и постоянное повышение квалификации персонала. Комплексный подход к образованию и подготовке кадров, основанный на использовании современных образовательных технологий и математических методов анализа данных, позволит значительно улучшить качество работы правоохранительных органов и повысить уровень общественной безопасности.

Литература

1. *Аверьянова Т. В.* Информационная безопасность в органах внутренних дел : учебное пособие / Т. В. Аверьянова. – Москва : Юнити-Дана, 2017. – 223 с.

2. *Данько Т. П.* Современные информационные технологии в управлении : учеб. для вузов / Т. П. Данько. – Минск : Амалфея, 2020. – 416 с.

3. *Козлов В. Н.* Информационное право : учеб. пос. для студентов юрид. фак. / В. Н. Козлов. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2021. – 352 с.

4. *Лебедев С. А.* Философия науки : учеб. для магистрантов и аспирантов / С. А. Лебедев. – М. : Академический проект, 2020. – 608 с.

5. *Молчанов А. Ю.* Основы теории информации : учеб.пособие / А. Ю. Молчанов. – Санкт-Петербург : Питер, 2019. – 480 с.

6. *Пароджанов В. Д.* Как улучшить работу ума : алгоритмы без программистов – просто и доступно / В. Д. Пароджанов. – Дубна : Феникс+, 2018. – 224 с.

7. *Сергиенко А. Б.* Цифровая обработка сигналов : учеб. пособия для вузов / А. Б. Сергиенко. – СПБ. : Питер, 2021. – 604 с.

8. *Трайнев В. А.* Информационные коммуникационные педагогические технологии (обобщение и рекомендации) : учеб.-метод. пособие / В. А. Трайнев. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Дашков и Ко, 2020. – 272 с.

УДК 004.42

РАЗРАБОТКА КОНЦЕПТУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ИГРОВЫМИ СОБЫТИЯМИ

К. Н. Шестаков, В. О. Кушев

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация. В работе представлено моделирование информационной системы, предназначенной для управления игровыми событиями. В рамках исследования разработаны диаграммы прецедентов, описывающие взаимодействие трёх типов акторов. Для каждого актора выделены основные функциональные возможности, такие как регистрация, авторизация, создание и поиск игровых событий. Подробно описаны ключевые процессы, включая персонализацию поиска событий и обработку жалоб, с использованием диаграмм активности в нотации BPMN. Кроме того, построена ER-диаграмма, которая демонстрирует основные сущности системы. Представленные модели обеспечивают структурированный подход к моделированию системы, способствуя её дальнейшей реализации и улучшению.

Ключевые слова: информационная система, диаграммы прецедентов, диаграммы активности, UML, BPMN, ER-диаграмма, акторы, игровые события, модерация, управление пользователями, проектирование базы данных.

Введение

Современные информационные системы играют ключевую роль в организации и управлении различными видами активности пользователей, особенно в области цифровых платформ, где активно взаимодействуют различные категории участников. Одной из таких областей являются игровые платформы, которые предоставляют пользователям возможность создавать, находить и участвовать в игровых событиях. Однако разработка подобных систем требует тщательного проектирования архитектуры, чтобы учесть разнообразие функциональных требований, типов пользователей и их взаимодействий.

Целью работы является разработка концептуальной модели системы, обеспечивающей интуитивное и продуктивное взаимодействие пользователей с платформой для управления игровыми событиями.

Проектирование

Начать моделирование системы стоит с создания диаграмм прецедентов. Таким образом будут обозначены основные варианты использования системы пользователями. Диаграммы разработаны используя нотацию UML. Правила и подходы моделирования информационной системы применялись в соответствии с учебно-методическим пособием [1].

Для удобства чтения будут спроектированы несколько диаграмм прецедентов для разных типов акторов. Акторы — это внешние объекты, взаимодействующие с системой.

Выделим три актора для разрабатываемой ИС:

– гость. Незарегистрированный пользователь, взаимодействующий с системой;

– авторизованный пользователь. Пользователь прошедший процесс авторизации;

– модератор. Пользователь имеющие особые права по модерации контента системы.

Отметим, что все акторы связаны отношением наследования. Так гость находится на верхушке иерархии и модератор его последний наследник.

Спроектируем диаграмму прецедентов для гостя и авторизированного пользователя (рис. 1).

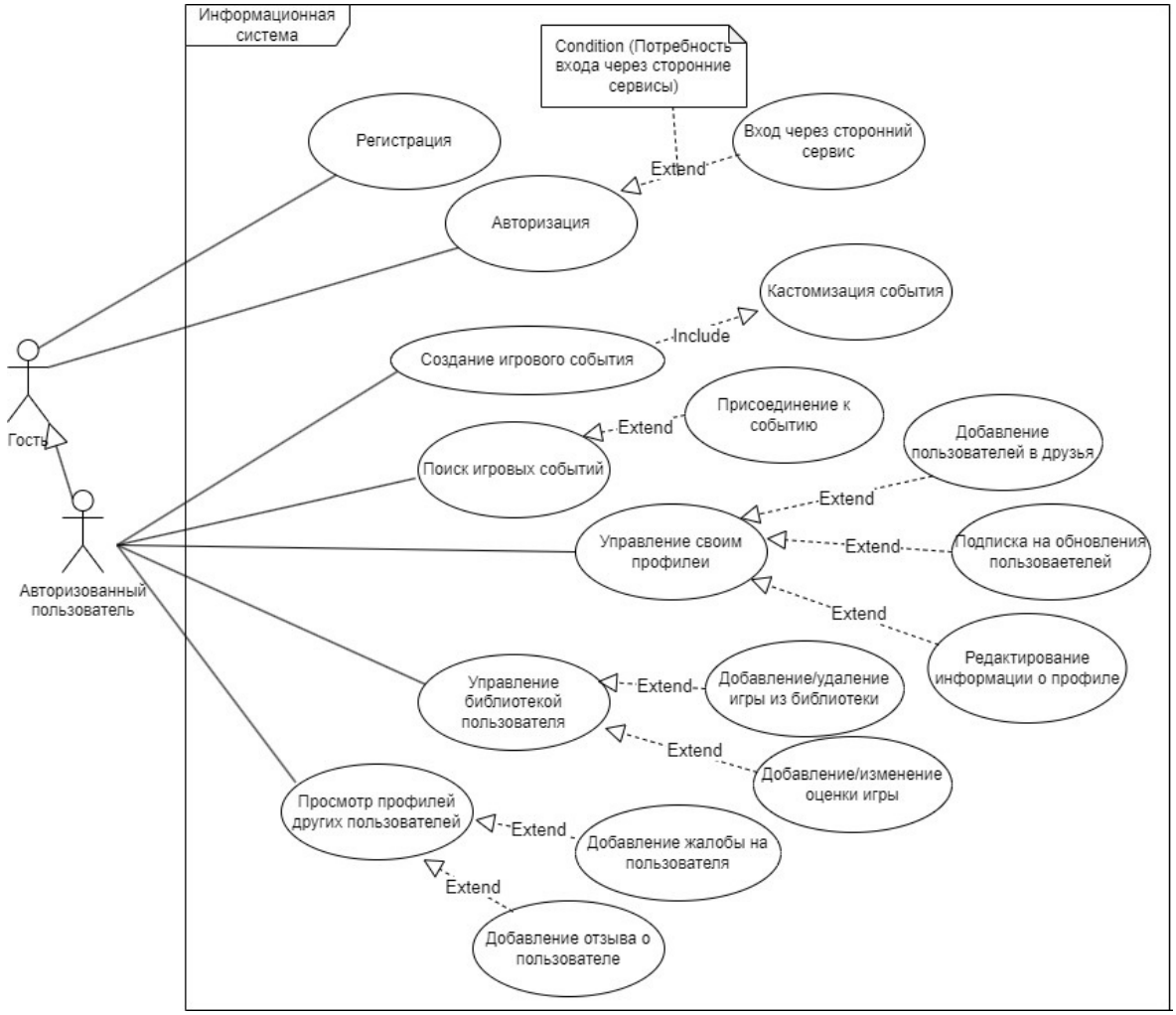


Рис. 1. Диаграмма прецедентов для Гость и Авторизированный пользователь

Основные прецеденты:

– регистрация (регистрация в системе для пользователя гостя);

– авторизация (вход пользователей в систему. Расширяется дополнительным прецедентом вход через сторонний сервис);

– создание игрового события (создание и публикация игрового события. Включает в себя прецедент кастомизация события, который отвечает за персональную настройку текущего события);

– поиск игровых событий (поиск игровых событий по заданным критериям фильтрация. Расширяется прецедентом присоединения к событию);

– управление своим профилем (управление профилем пользователя. Расширяется такими прецеденты как добавление пользователей в друзья, подписка на обновления пользователей, редактирование информации о профиле);

– управление библиотекой пользователя (управление игровой библиотекой пользователя. Расширяется прецедентами добавление/удаление игры из библиотеки, добавление/изменение оценки игры);

– просмотр профилей других пользователей (изучение игровых профилей других пользователей. Расширяется прецедентами добавление жалобы на пользователей, добавление отзыва о пользователе).

Остаётся обозначить прецеденты для актора модератора (рис. 2).

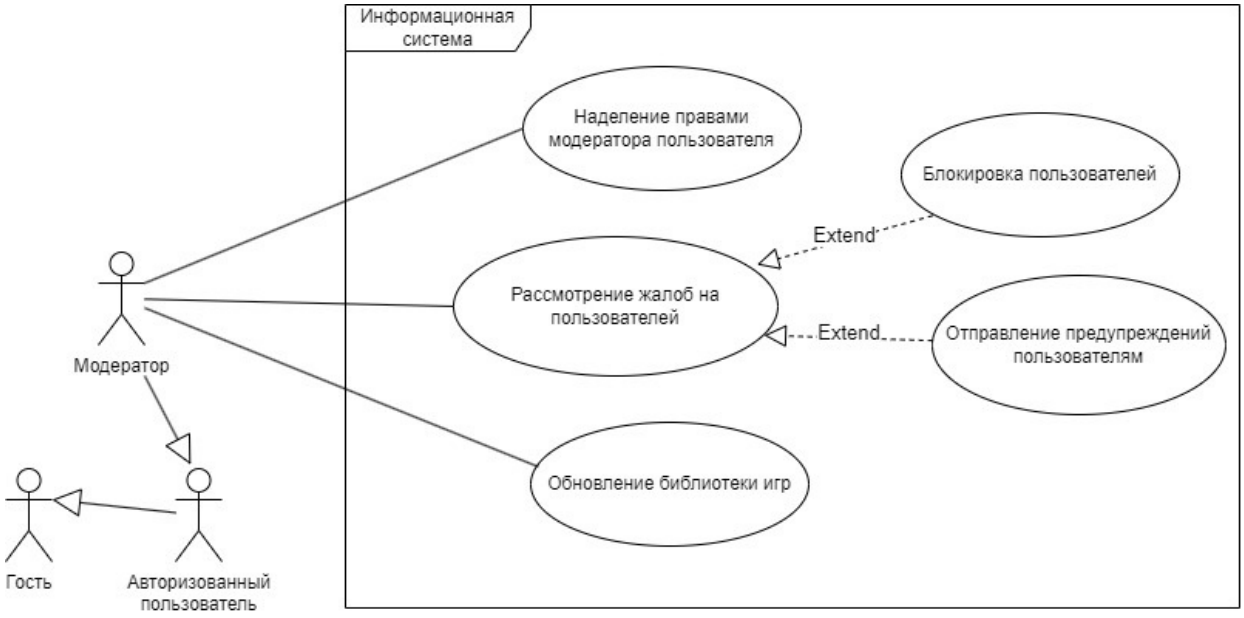


Рис. 2. Диаграмма прецедентов для Модератора

Основные прецеденты:

– наделение правами модератора пользователя (обновление прав зарегистрированного пользователя до модератора);

– рассмотрение жалоб на пользователей (анализ жалоб на пользователей. Расширяется блокировкой пользователей на период времени, и возможным отправлением предупреждений пользователям);

– обновление библиотеки игр (актуализация общей библиотеки игр).

Для лучшего представления и понимание будущих процессов системы перейдём к созданию диаграмм активностей.

Проектирование диаграмм активности произведено с помощью нотации BPMN. Диаграмма активности позволяет более наглядно смоделировать случаи использования. Начнём с описания процесса создания игрового события (см. рис. 3). Нужно учесть, что создание игрового события будет доступно только авторизированным пользователям.

После моделирования создания игрового события, логично следует перейти к разработке диаграммы поиска событий (рис. 4). Для удобства чтения диаграмм процесс «Персонализация фильтра поиска игровых событий» был выделен как подпроцесс и описан на другой диаграмме (см. рис. 5).

Рассмотрев диаграмму фильтра поиска игровых событий, можно убедиться, что разные пользователи смогут настроить поиск игровых событий под свои потребности.

В информационных системах, где пользователи взаимодействуют между собой, никак не обойтись без хотя бы какой-нибудь системы модерации. В статье «How Collegiate Players Define, Experience and Cope with Toxicity» [2] авторы приходят к выводу, что токсичное поведение игроков в мультиплеерных играх нередкое явление. Более того, такое поведение может плохо сказываться на результативности игроков в соревновательных играх. Таким образом необходим механизм контроля недобросовестных пользователей. Используя диаграмму активности, смоделируем процесс рассмотрения жалоб модератором (рис. 6).

От описания процессов перейдём к проектированию сущностей системы.

Отобразим на ER-диаграмме основные сущности в контексте системы (рис. 7).

Было выделено 8 основных сущностей в системе. На диаграмме можно рассмотреть существующие связи между сущностями.

Разработанная диаграмма при разработке базы данных послужит опорной структурой. Также диаграмма будет использоваться при разработке системных классов.

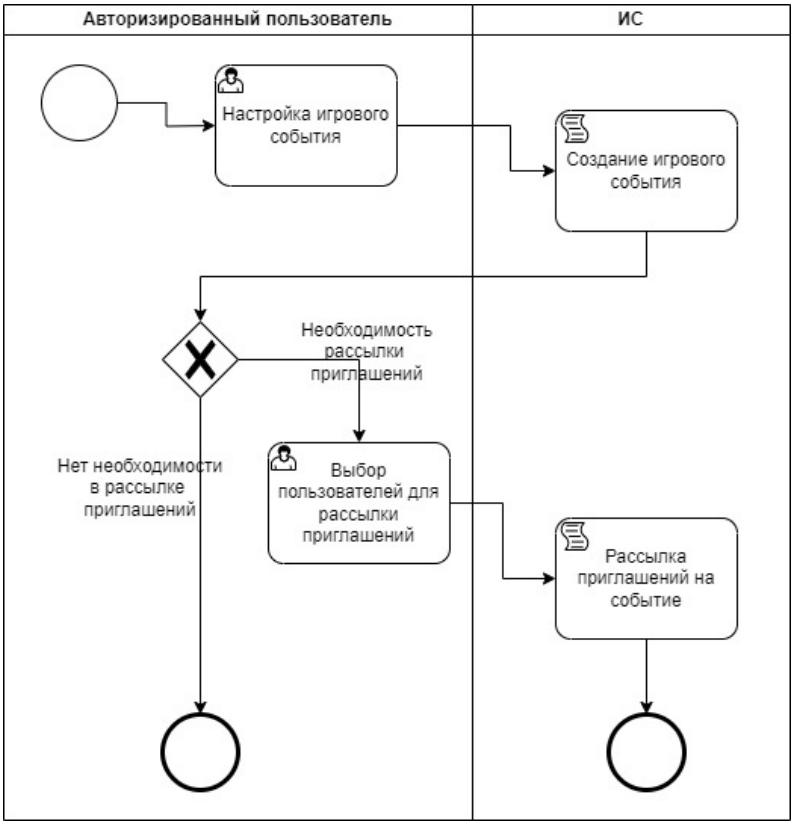


Рис. 3. Диаграмма активности создание игрового события

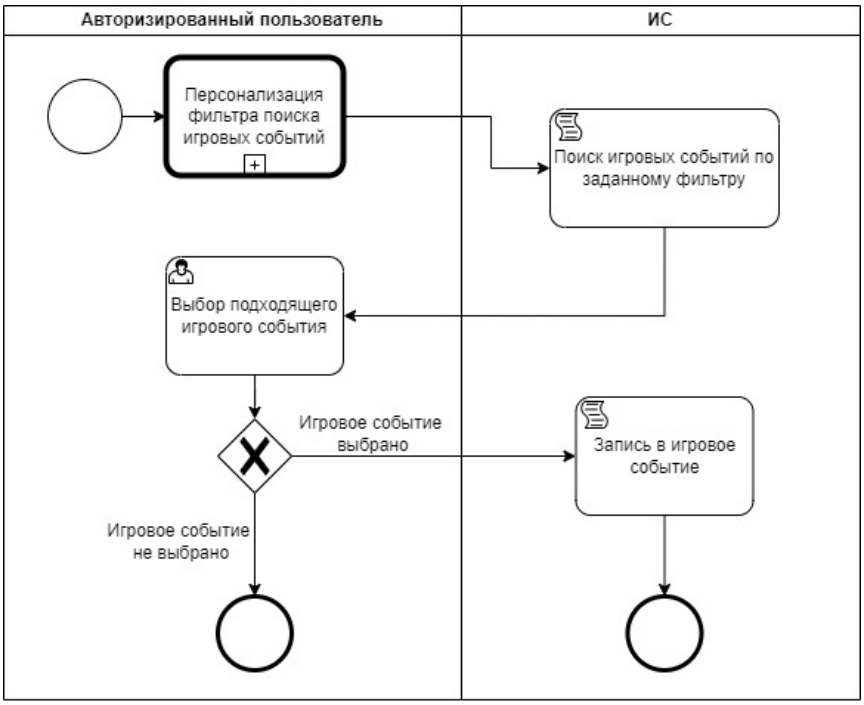


Рис. 4. Диаграмма активности поиск игровых событий

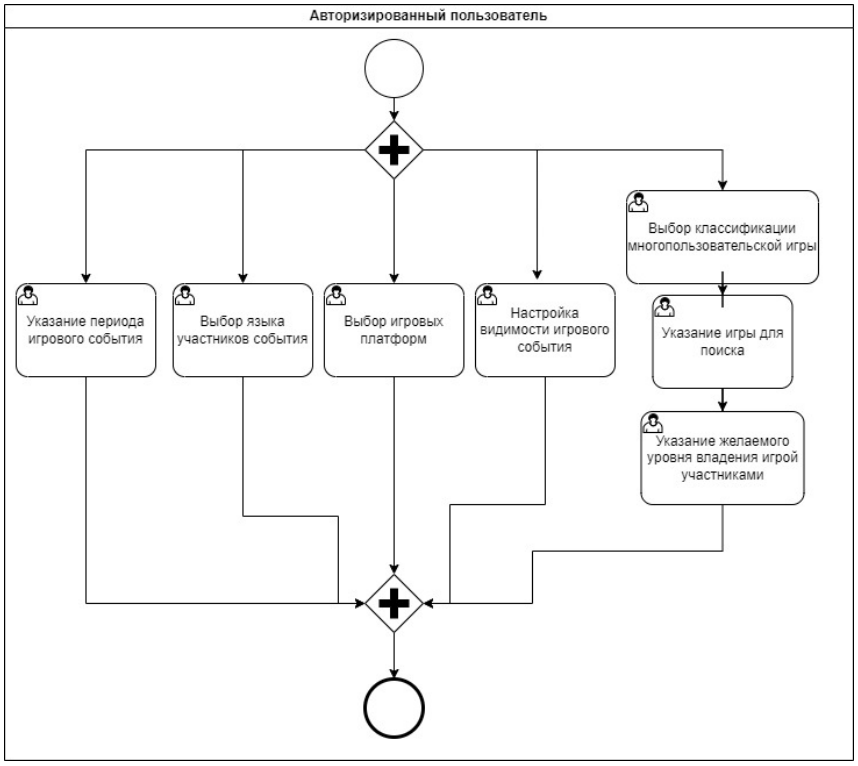


Рис. 5. Диаграмма активности подпроцесс фильтра поиска игровых событий

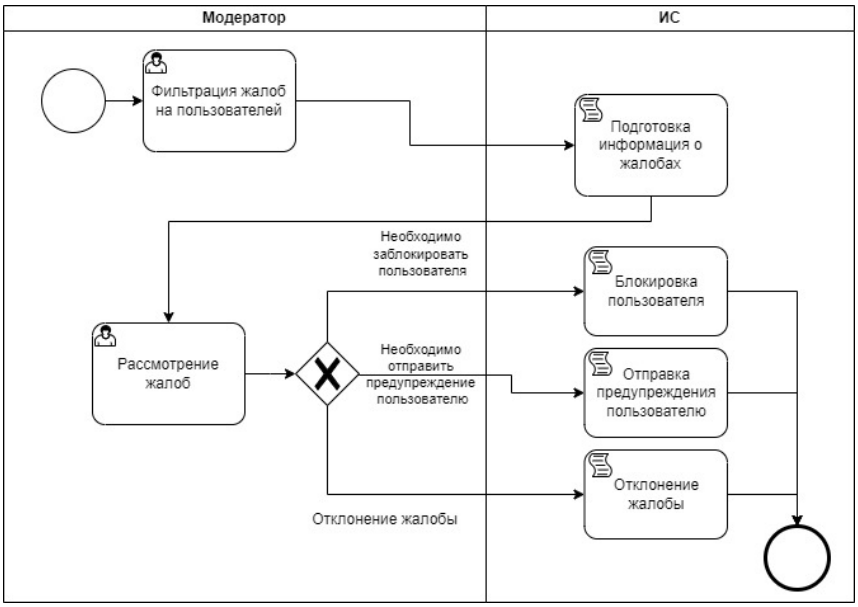


Рис. 6. Диаграмма активности рассмотрение жалоб

Заключение

В представленной работе был отображён комплексный подход к проектированию информационной системы для управления игровыми событиями. Разработанные диаграммы прецедентов, активности и ER-диаграмма позволяют структурировать процессы взаимодействия пользователей с системой, учесть разнообразные требования и оптимизировать архитектуру на этапе разработки.

Рассмотренные в работе модели демонстрируют, как различные типы пользователей — гости, авторизованные пользователи и модераторы — взаимодействуют с функционалом системы. Диаграммы прецедентов помогают выделить ключевые сценарии использования, такие

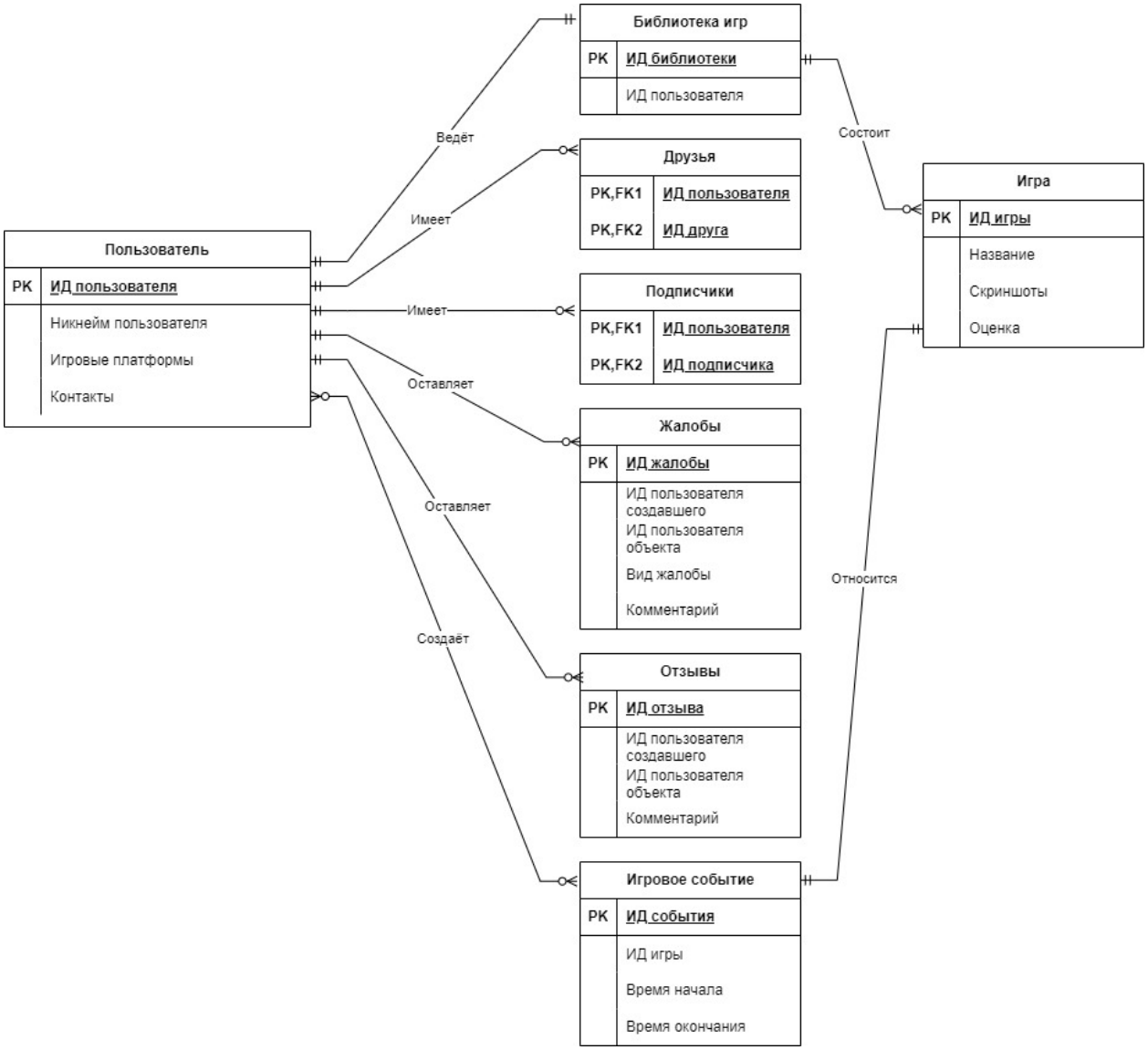


Рис. 7. ER–диаграмма

как регистрация, поиск и создание игровых событий, управление профилем и библиотекой игр, а также процессы модерации. Использование диаграмм активности в нотации BPMN позволило более детально смоделировать основные процессы, такие как персонализация поиска событий и обработка жалоб. Построенная ER-диаграмма служит основой для проектирования базы данных, обеспечивая её соответствие функциональным требованиям системы.

Литература

1. Основы проектирования и реализации информационных систем: учебно-методическое пособие / Н. Н. Дацун, А. В. Отинов, Т. С. Гашева, Д. И. Власов; Пермский государственный национальный исследовательский университет. –– Пермь, 2021. – 132 с.

2. See No Evil, Hear No Evil, Speak No Evil: How Collegiate Players Define, Experience and Cope with Toxicity / Selen Türkay, Jessica Formosa, Sonam Adinolf, Robert Cuthbert, Roger Altizer [Электронный ресурс] // CHI ‘20: Proceedings of the 2020 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems – URL: https://dl.acm.org/doi/10.1145/3313831.3376191 (Дата обращения 19.11.2024)

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 004.5

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ОЦЕНКИ ПОТЕНЦИАЛА СОТРУДНИКА В КОМПАНИИ

Т. В. Азарнова, Л. А. Киреева

Воронежский государственный университет

Аннотация. Разработка информационных систем для оценки персонала является важной и сложной задачей. В статье представлена новая система, реализующая алгоритмы оценки потенциала сотрудников на основе компетентностных моделей и корреляционного анализа. Система оценивает важность компетенций с позиции соискателя и работодателя, и на основании анализа интеграции этих данных формулирует рекомендации. Основные компоненты системы включают инструментальные средства для тестирования, расчет и анализ показателей успешности, а также выработку рекомендаций по развитию персонала.

Ключевые слова: информационные системы, оценка персонала, компетенции, корреляционный анализ, управление персоналом,HRM (Human Resource Management), алгоритмы оценки, модели важности, профессиональная успешность, тестирование компетенций, развитие сотрудников.

Введение

Разработка информационных систем для оценки персонала представляет собой сложную актуальную задачу. На российском рынке существует несколько широко используемых оценочных систем [2]. Система Assessment Tools реализует ряд функций для проведения аттестации внутри компании. Система настраивается под три вида ролей: работник, HR-менеджер и руководитель, имеет возможность интеграции с корпоративными информационными системами и платформой дистанционного обучение eLearning Server. БОСС-Кадровик — информационно-аналитическая система, предназначенная для автоматизации бизнес-задач, связанных с управлением персоналом, его обучением, адаптацией, аттестацией, расчетом заработной платы и HR-аналитикой [4]. Пользователям доступны как классический учет кадров, так нововведения в области управления персоналом (HRM). Функция управления профилями позволяет автоматически отбирать сотрудников, используя при этом различные фильтры и разделение по рангам, что даёт возможность безошибочно определять среди соискателей именно тех, кто больше всего соответствует какой-либо позиции в компании и всем её требованиям. Система E-Staff от компании WebSoft предназначена для HR-служб компаний, осуществляющих подбор сотрудников, и для кадровых агентств. E-Staff — система полного цикла, автоматизирующая такие бизнес-процессы, как создание профилей должностей, ведение «библиотеки компетенций», планирование, проектирование и проведение различных процедур оценки персонала и корпоративного обучения. Частью системы является специализированный HR-портал, представляющий собой интернет-сайт, доступный всем сотрудникам кадрового сектора. S&AOnline — система консалтинговой группы BI TO BE. Эта система автоматизированной оценки персонала. Отличается от всех предлагаемых на Российском рынке своей гибкостью и кастомизацией. В ней представлены такие инструменты оценки, как управленческие опросники, психодиагностические методики, кейсы, интервью по компетенциям, биографические опросники. Кроме предоставления готового решения, компания в рамках рассматриваемой системы предлагает автоматизацию инструментов оценки заказчика, разработку инструментов оценки для конкретной компании с нуля и передачу полной системы S&AOnline для самостоятельного пользованиях [9].

Несмотря на широкий функционал описанных выше систем, актуальными являются инструментальные средства, расширяющие их аналитические и рекомендательные возможности [1]. В данной работе предложены алгоритмы оценки потенциала сотрудника или соискателя на вакантную должность в компании на основе: компетентностной модели должности, модели важности различных компетенций для рассматриваемой должности для работодателя и модели важности компетенций для рассматриваемой должности для соискателя. Разработанный алгоритм позволяет не только оценить потенциал респондента (соискателя, сотрудника), но и сформировать направления его развития. Алгоритм базируется на методах корреляционного анализа, определения «пикового» потенциала и формирования согласованных экспертных рекомендаций по повышению потенциала сотрудника.

1. Описание алгоритма оценки потенциала сотрудника в компании

Алгоритм содержит следующие укрупненные шаги:

Шаг 1. Проведение оценочных мероприятий (компетентностного тестирования) для формирования модели (модель 3) выраженности различных компетенций у соискателя.

Шаг 2. Построение моделей важности различных компетенций с позиции соискателя (модель 1) и работодателя (модель 2).

Шаг 3. Оценка потенциала соискателя на основе трех построенных моделей.

Шаг 4. Формирование рекомендаций относительно повышения потенциала оцениваемого сотрудника.

Шаг 5. Определение корневого потенциала и наиболее важных качеств для успешной деятельности.

Остановимся более подробно на реализации данных шагов алгоритма.

На первом этапе проводится компетентностное тестирование для формирования модели (модель 3) выраженности различных компетенций у соискателя [8]. В качестве примера набора компетенций в работе используется следующий набор: логическое мышление; аналитическое и концептуальное мышление; умение работать в команде; способность к самообучению; способность самоорганизации (тайм-менеджмент); коммуникативные навыки; стрессоустойчивость; креативность; самостоятельность в работе; умение управлять людьми [11]. Для выявления уровня выраженности данных компетенций у соискателя проводится тестирование по следующим тестам: тест на логическое мышление, тест на аналитическое и концептуальное мышление, тест на способность к самообучению, тест на коммуникативные навыки, тест на креативность, тест на самостоятельность в работе, тест на умение управлять людьми [10].

Результаты тестирования по всем тестам переводятся в 10-ти балльную шкалу умножением на весовой коэффициент:

$$\alpha = \frac{10}{\max x}, \tag{1}$$

где α — весовой коэффициент, $\max x$ — максимальное количество баллов в данном тесте. Результаты заносятся в табл. 1, как элементы модели R.

На втором этапе формируются две модели: модель W — важности компетенций для соискателя и модель I важности компетенций для работодателя. Модели заносятся в столбцы 3, 4, 5 табл. 1.

Вычисляется показатели профессиональной успешности в соответствии с моделями W и I:

$$P_W = \frac{\sum W_i \times R_i}{10 \sum W_i} \times 100\,\% \tag{2}$$

$$P_I = \frac{\sum I_i \times R_i}{10 \sum I_i} \times 100\,\% \tag{3}$$

Таблица 1

Основные модели алгоритма

№ критерия	Содержание критерия	Вес компетенции в модели W	Вес компетенции в модели I	Оценка компетенции R	Ранг R	Ранг W	Ранг I
1	логическое мышление	W_1	I_1	R_1			
2	аналитическое и концептуальное мышление	W_2	I_2	R_2			
3	умение работать в команде	W_3	I_3	R_3			
4	способность к самообучению	W_4	I_4	R_4			
5	способность самоорганизации (тайм-менеджмент)	W_5	I_5	R_5			
6	коммуникативные навыки	W_6	I_6	R_6			
7	стрессоустойчивость	W_7	I_7	R_7			
8	креативность	W_8	I_8	R_8			
9	самостоятельность в работе	W_9	I_9	R_9			
10	умение управлять людьми	W_{10}	I_{10}	R_{10}			
11	критерии от работодателя	W_{11}	I_{11}	R_{11}			

Величина P_W является обобщенной характеристикой успешности соискателя относительно важности компетенций со стороны работодателя, а величина P_I показывает успешность с позиции собственной оценки важности компетенций [3].

На этапе 3 оценивается согласованность моделей W, I, R. Для этого модели ранжируются (проранжированные модели заносятся в столбцы 6, 7, 8 таблицы 1) и вычисляются коэффициенты корреляции Спирмена r_s между моделями [7]:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{l(l^2-1)}, \tag{4}$$

где d — разности рангов; 1 — число пар рангов;

Корреляция r_{RW} между моделями R и W характеризует степень согласованности между видением важности различных компетенций соискателем и уровнем данных компетенций. Если $r_{RW} > 0,5,$ то это указывает на достаточно сильное стремление соискателя соответствовать должности. Отрицательная корреляция означает, что сотрудник не стремиться развивать качества, по его мнению, важные для должности.

Корреляция r_{RI} между моделями R и I характеризует степень согласованности между видением важности различных компетенций работодателя и уровнем данных компетенций у

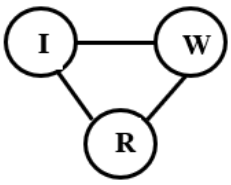
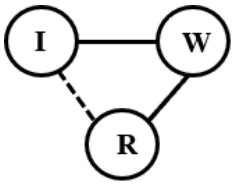
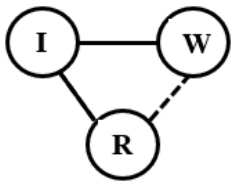
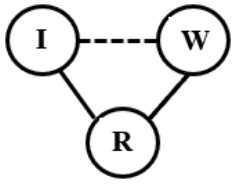
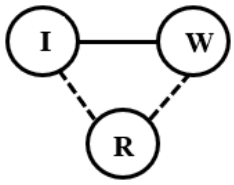
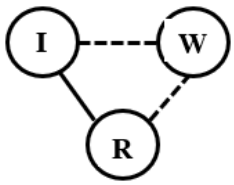
соискателя. Значение $r_{RI} > 0,5$ указывает на достаточно сильное соответствие компетентностной модели соискателя требованиям работодателя. Отрицательная корреляция означает, что сотруднику будет сложно подстроиться под требования компании.

Корреляция r_{WI} отражает степень согласованности мнения работодателя и соискателя о важности различных компетенций. Значение $r_{WI} > 0,5$ говорит о высокой согласованности их приоритетов. Отрицательная корреляция означает, что сотруднику будет сложно подстроиться под требования компании.

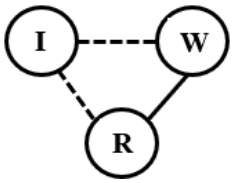
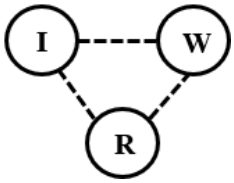
Интерпретация коэффициентов корреляций r_{RW}, r_{RI}, r_{WI}, полученных на предыдущем шаге, осуществляется по следующим, разработанным в рамках исследования структурным схемам, приведенным в табл. 2.

Таблица 2

Интерпретация коэффициентов корреляции моделей

Номер модели	Модель	Интерпретация результатов
1	*2*	*3*
1		Все три модели достаточно согласованы, возможен синергетический эффект, работа сотрудника будет продуктивной для него и для компании.
2		Оценки важности компетенций у сотрудника и работодателя близки, но модель выраженности компетенций у соискателя слабо коррелирует с моделью важности их для работодателя. Необходимо развивать важные для компетентностной модели компетенции, чтобы повысить потенциал соискателя в компании.
3		Оценки важности компетенций у сотрудника и работодателя близки, но модель выраженности компетенций у соискателя слабо коррелирует с моделью важности их для соискателя. Соискатель не стремиться соответствовать должности. Необходимо развивать важные для компетентностной модели компетенции, чтобы повысить потенциал соискателя в компании.
4		Модель выраженности различных компетенций хорошо согласована с моделями важности компетенций со стороны соискателя и работодателя, но есть несогласованность моделей важности между собой, что может приводить к разногласиям в деятельности.
5		Модели важности компетенций с позиции соискателя и работодателя хорошо согласованы, но модель выраженности компетенций у соискателя несогласована с ними. В перспективе после обучения повышения уровня компетенций, соискатель может успешно работать в компании.
6		Модель важности компетенций с позиции работодателя хорошо согласована с моделью выраженности компетенций у соискателя, но данные две модели несогласованы с моделью важности компетенций с позиции соискателя, это может быть скорректировано в процессе деятельности.

Продолжение таблицы 2

1	*2*	*3*
7		Модель важности компетенций с позиции соискателя хорошо согласована с моделью выраженности компетенций у соискателя, соискатель стремится соответствовать должности по тому как он ее видит, но данные две модели несогласованы с моделью важности компетенций с позиции работодателя, это может быть скорректировано в процессе деятельности.
8		Плохая согласованность всех трех моделей. Соискатель не имеет высокого потенциала в данной компании.

По каждой из моделей, в которых существует плохая согласованность каких-либо её компонентов, разрабатываются рекомендации по повышению согласованности. Такие рекомендации могут заключаться в прохождении курсов, тренингов, корпоративного обучения, освоении методик развития коммуникативных навыков. Рекомендации оцениваются группой экспертов. Каждый из экспертов выражает свое мнение о том, как изменится (в процентах) каждая компетенция в результате выполнения рекомендаций. Полученные значения для каждого эксперта ранжируются. Для оценки согласованности мнений экспертов используется коэффициент конкордации Кендалла [5]:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} x_i^{(k_j)} - \frac{m(n+1)}{2})^2}{\frac{1}{12}m^2(n^3-n) - m\sum_{j=1}^{m} T^{(k_j)}}, \quad (5)$$

где поправочный коэффициент $T^{(k_j)}$ вычисляется по формуле:

$$T^k = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{m(k)}\left[(n_t^k)^3 - (n_t^k)\right], \quad (6)$$

где $m^{(k)}$ — число групп одинаковых рангов у эксперта $x^{(k)}$, а $n_t^{(k)}$ это число элементов, которые входят в t-ю группу одинаковых рангов. В частном случае, если все ранги различные, величина $T^{(k)} = 0$.

Если мнения всех экспертов согласованы, то вычисляются средние значения изменений компетенций по всей экспертной группе и еще раз проводятся корреляционный анализ согласованности моделей. Если же мнения экспертов не согласованы по коэффициенту конкордации Кендалла, то с помощью коэффициента корреляции Спирмена ищется согласованная подгруппа экспертов и вычисляются средние значения изменения компетенций по этой подгруппе.

На последнем шаге для расчета корневого потенциала личности, находятся наиболее значимые компетенции модели у соискателя.

Считается, что наиболее важные компетенции составят 20 % от общего количества компетенций, т.е. это компетенции ранг, которых в моделях не превышает 3.

Определим множество А компетенций в моделях $W, I, R,$ ранги которых не превышают 3.

Возможны варианты:

1. $A = \varnothing$ — множество A пустое.

Вывод: потенциал соискателя не соответствует требованиям деятельности. Совместная деятельность не принесет успеха ни одной из сторон и, таким образом, нанимать работника на вакантную должность не целесообразно.

2. $A = \{a_1\}$ — множество A включает в себя лишь один элемент.

Вывод: потенциал соискателя будет сложно проявить и между соискателем и работодателем может возникнуть несогласие в рамках осуществления и последующего оценивания деятельности.

3. $A = \{a_1, a_2\}$ — множество A полностью определено.

Вывод: данного соискателя следует отнести к группе High Potential, его корневой потенциал может быть полностью реализован в компании на данной должности.

По предложенному алгоритму разработана информационная система, реализующая весь комплекс шагов [6]. На рис. 1 приведен фрагмент компетентностного тестирования и формирования модели выраженности различных компетенций у соискателей.

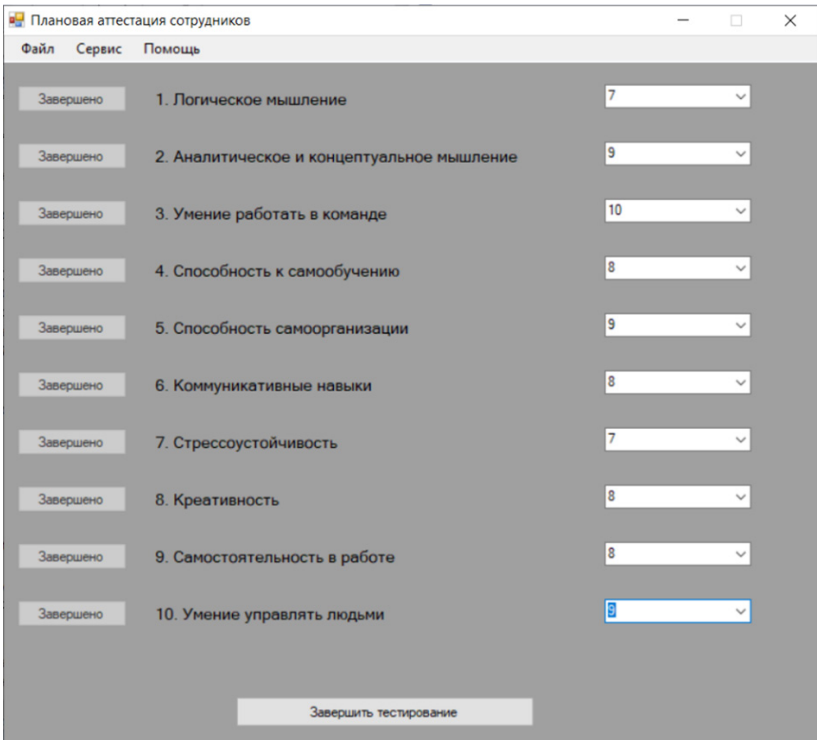


Рис. 1. Результаты компетентностного тестирования

На рис. 2 демонстрируется заполнение модели важности компетенций для соискателя.

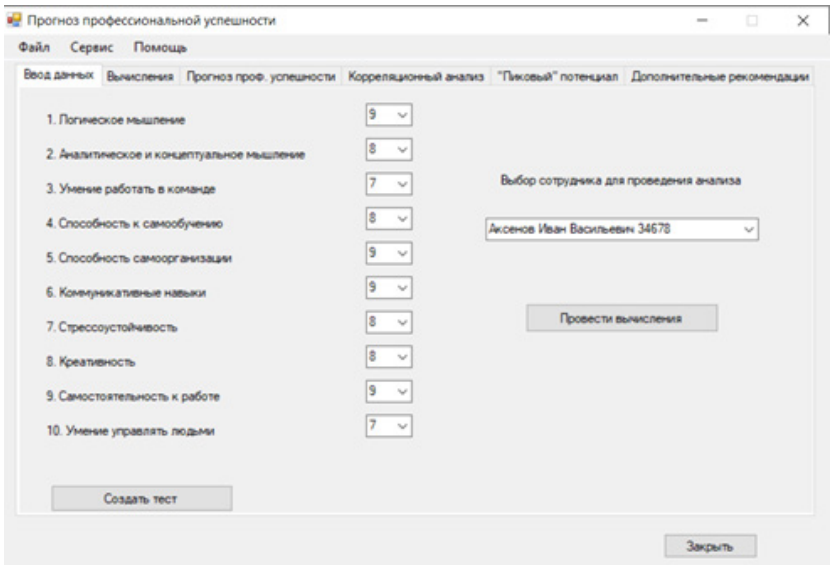


Рис. 2. Модель важности компетенций для соискателя

На рис. 3 по результатам вычислений осуществляется прогноз профессиональной успешности [3].

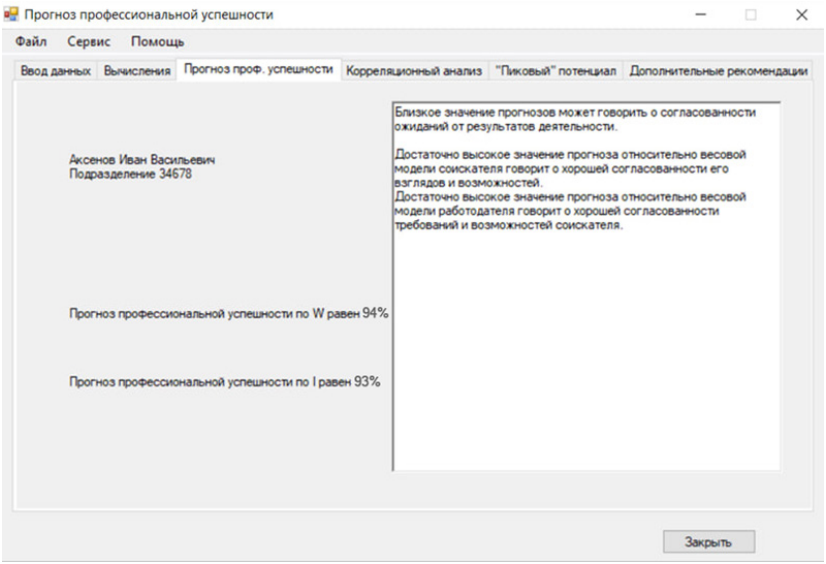


Рис. 3. Прогноз профессиональной успешности соискателя

Результаты корреляционного анализа представлены на рис. 4, 5.

Для данного сотрудника не требуется разработка рекомендаций и их оценка экспертами. Рассмотрим результаты еще одного кандидата на рис. 6, 7.

Для данного соискателя результаты неудовлетворительные, поэтому, ему предлагаются рекомендации и проводится экспертное оценивание изменений на рис. 8.

Эксперты оценивают изменение компетенций в результате реализации рекомендаций и на основании полученных усредненных значений еще раз оцениваются корреляции моделей на рис. 9.

Прогнозируются хорошие результаты согласованности моделей на рис. 10, 11.

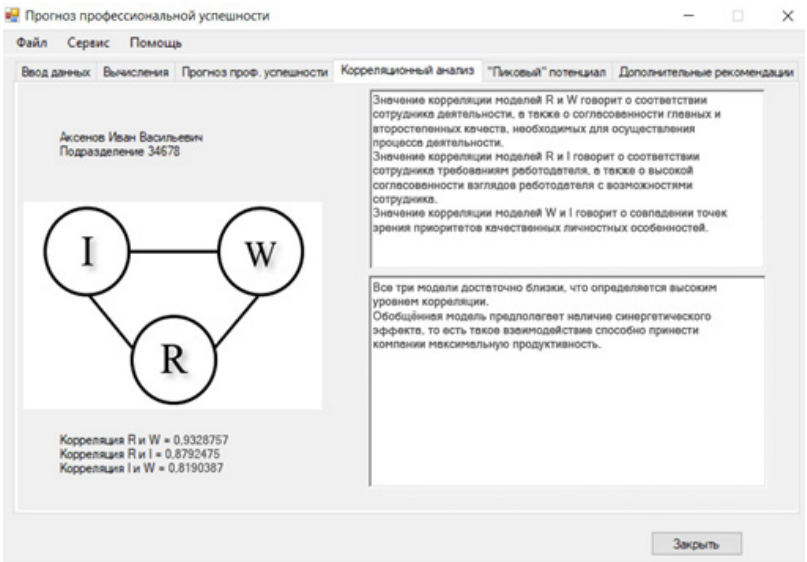


Рис. 4. Корреляционный анализ

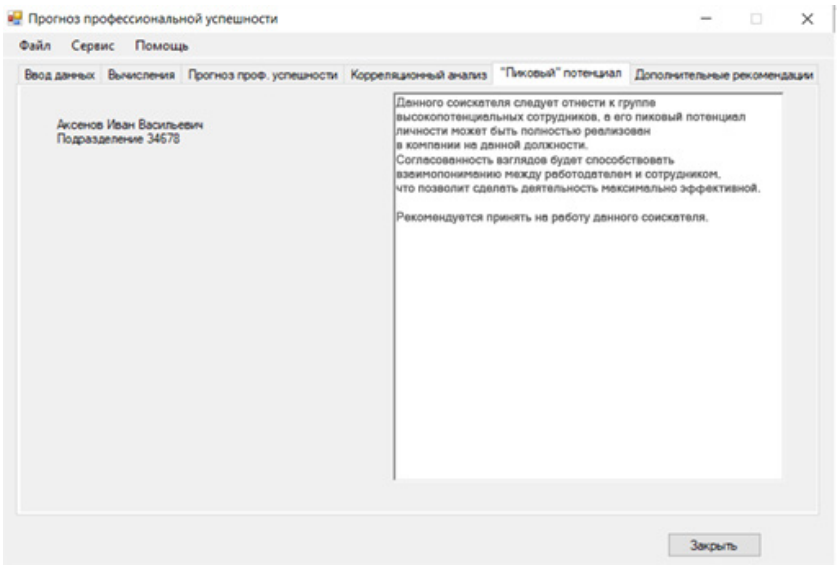


Рис. 5. Оценка потенциала сотрудника

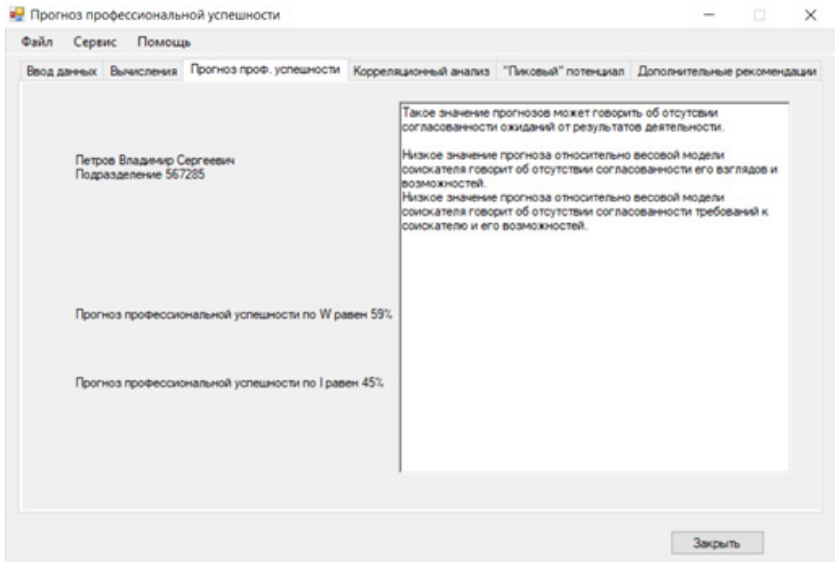


Рис. 6. Прогноз профессиональной успешности

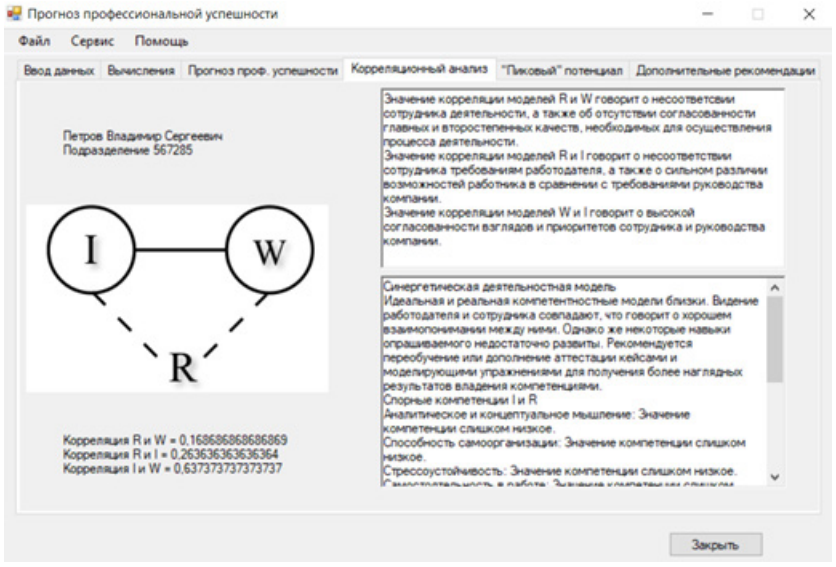


Рис. 7. Корреляционный анализ

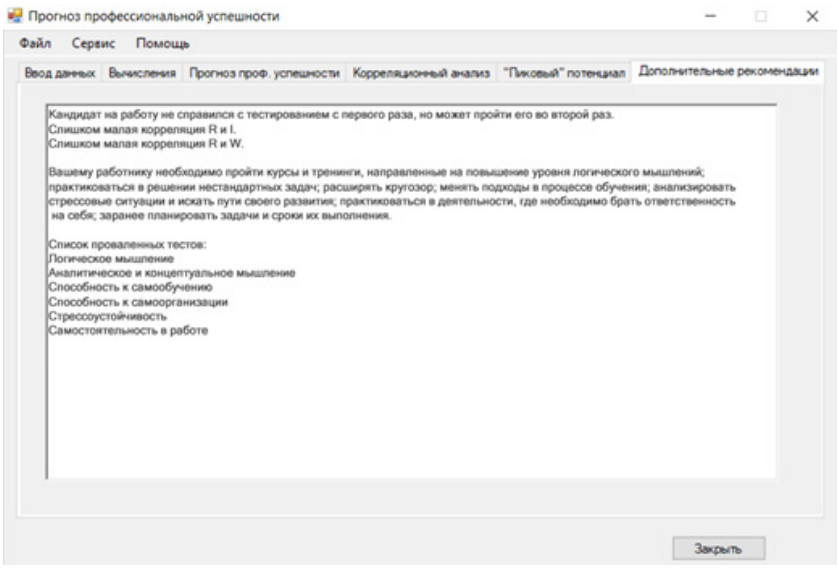


Рис. 8. Дополнительные рекомендации

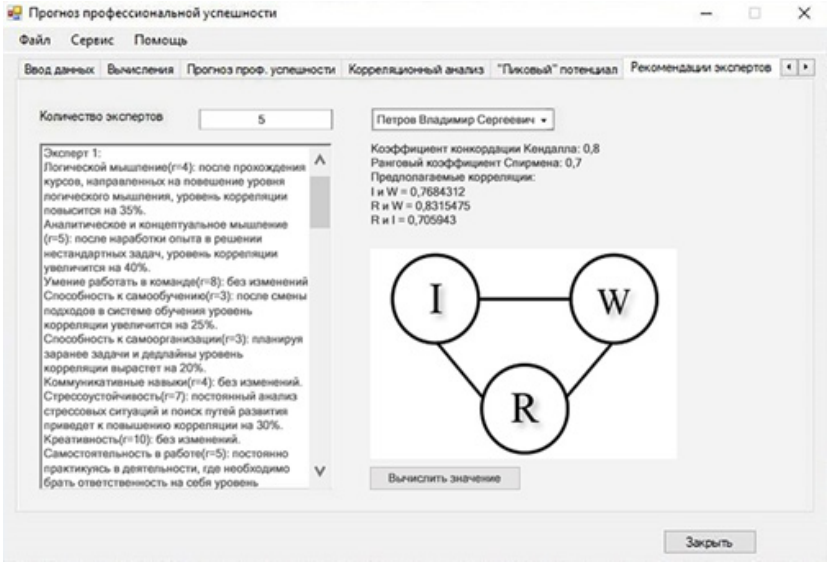


Рис. 9. Оценки изменения компетенций экспертами

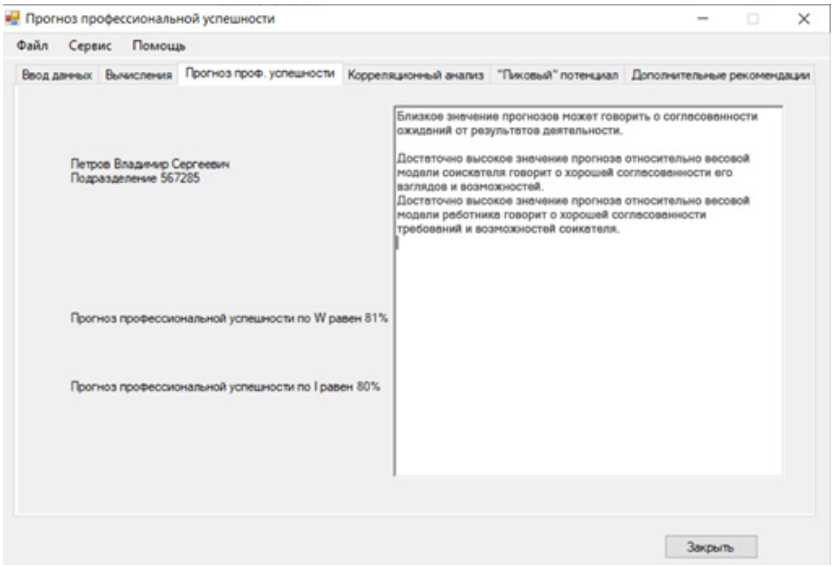


Рис. 10. Прогноз профессиональной успешности

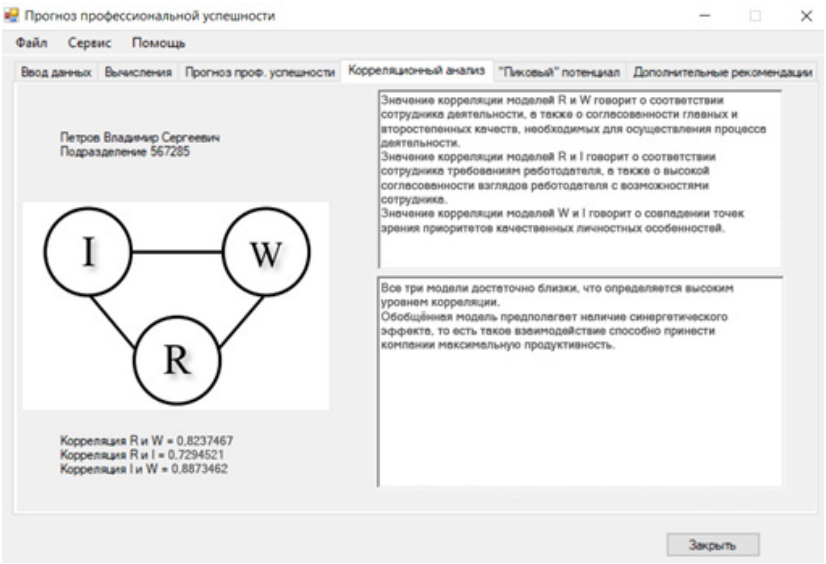


Рис. 11. Прогнозируемые значения корреляции моделей

Заключение

В статье описана информационная система, реализующая комплекс шагов по оценке потенциала сотрудника в компании. Предложенная система позволяет сформировать комплекс компетенций по определенной позиции в компании, провести оценочное тестирование по данным компетенциям, провести оценку важности компетенций с позиции соискателя и работодателя, провести корреляционный анализ между вектором оценок важности компетенций со стороны работодателя, вектором оценок важности компетенций со стороны соискателя и вектором оценок центра опросов для данного соискателя. На основе анализа корреляции между моделями делается вывод о потенциале сотрудника в компании и разрабатываются рекомендации по повышению согласованности моделей.

Литература

1. *Базаров Т. Ю.* Технология центров оценки персонала: процессы и результаты / Т. Ю. Базаров. – Москва : Кнорус, 2011. – 300 с.

2. *Борисова Е. А.* Оценка и аттестация персонала / Е. А. Борисова. – Санкт-Петербург: Питер, 2015. – 317 с.

3. *Невраева И. В.* Прогноз профессиональной успешности менеджера / И. В. Невраева // Вестник Томского государственного педагогического университета. Серия Естественные и точные науки. – 2005. – Вып. 7 (51). – С. 55–60.

4. Автоматизированные системы и решения для управления персоналом. – Режим доступа: https://boss.ru/products/bk-about. Дата обращения: 07.09.2024.

5. Аттестация персонала в режиме on-line: Assessment Tools. Система аттестации, оценки и развития персонала. Новые возможности для решения традиционных задач. – Режим доступа: https://ra-kurs.spb.ru/info/articles/?id=27. Дата обращения: 27.09.2024.

6. Комплексное решение в области подбора персонала. Программное обеспечение & Облачные сервисы. – Режим доступа: https://www.e-staff.ru. Дата обращения: 20.05.2021.

7. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена. – Режим доступа: http://medstatistic.ru/theory/spirmen.html. Дата обращения: 27.09.2024.

8. *Сажаева Г. А*. Компетентностный подход при отборе и найме человеческих ресурсов / Г. А. Сажаева, П. Л. Шестаков // Современные научные исследования и инновации. – 2017. – № 11. – Режим доступа: http://web.snauka.ru/issues/2017/11/84691. Дата обращения: 28.09.2024.

9. Система автоматизированной оценки персонала SURVEYS & ASSESSMENT ONLINE. – Режим доступа: https://www.bitobe.ru/filedownload.php?file=7255. Дата обращения: 25.09.2024.

10. Тестотека. – Режим доступа: http://testoteka.narod.ru. Дата обращения: 20.09.2024.

11. *Шипилов В. И*. Перечень навыков soft-skills и способы их развития / В. И. Шипилов. – Режим доступа: https://www.cfin.ru/management/people/dev_val/soft-skills.shtml. Дата обращения: 05.09.2024.

УДК 004.89

АДАПТИВНАЯ НАВИГАЦИОННАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ШЕСТИКОЛЁСНЫХ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ

Ал-Хафаджи Исра М. Абдаламир, А. В. Панов

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В данной работе предложена гибридная система навигации для шестиколёсных мобильных роботов, сочетающая алгоритм поиска путей A*, методы глубокого обучения (CNN) для анализа поверхности и законы Беккера, описывающие взаимодействие с различными типами грунтов. Разработанная модель обеспечивает адаптивную навигацию в условиях сложного рельефа, включая глинистые участки, ямы, бетонные покрытия и холмы. Система продемонстрировала высокую точность классификации поверхности и устойчивость в динамично меняющихся условиях. Это исследование расширяет возможности мобильных роботов для автономного передвижения в сложных средах.
Ключевые слова: адаптивная навигация, мобильные роботы, алгоритм A*, CNN, законы Беккера, классификация поверхности, устойчивость, гибридная система, сложный рельеф, автономное передвижение.

Введение

Автономные мобильные роботы играют ключевую роль в решении задач, связанных с логистикой, сельским хозяйством, исследованием сложных территорий и спасательных операций. Их основная сложность заключается в адаптации к разнородным поверхностям, таким как глина, холмы, ямы, дороги и бетонные покрытия. Задачи устойчивого передвижения требуют комплексного подхода, который учитывает как физические, так и вычислительные аспекты.

В данном исследовании предложена гибридная модель, которая интегрирует классический алгоритм поиска путей A*A^*A*, свёрточные нейронные сети (CNN) для анализа поверхности и законы М. Г. Беккера для расчёта физического взаимодействия с грунтом. Целью работы является повышение точности и стабильности навигации робота, что обеспечивает адаптацию к динамически изменяющимся условиям.

1. Обзор литературы

Существующие алгоритмы, такие как A*, широко применяются для поиска оптимального пути, однако они часто недостаточно эффективны при резких изменениях рельефа. Использование свёрточных нейронных сетей (CNN) позволяет повысить точность анализа поверхности за счёт обработки изображений с камеры робота. Теории Беккера предлагают подходы к расчёту тяговой силы и сопротивления движению, что особенно важно при навигации на сложных поверхностях. Несмотря на успехи в этих направлениях, интеграция всех этих подходов остаётся недостаточно изученной.

2. Методология

Методология исследования базируется на использовании гибридной модели навигации, которая объединяет классический алгоритм A*, методы глубокого обучения и физические законы взаимодействия движителя с грунтом. Эта модель была разработана для повышения точности и адаптивности автономной навигации шестиколёсного мобильного робота в сложных условиях, включая разнородные и динамичные поверхности.

Гибридная модель основывается на использовании нескольких ключевых компонентов. Во-первых, алгоритм A* служит основой для планирования оптимального маршрута, обеспечивая возможность выбора пути с учётом рельефа и наличия препятствий. Во-вторых, свёрточные нейронные сети (CNN) используются для анализа и классификации пяти основных типов поверхности: глина, холмы, ямы, дороги и бетон. Это позволяет системе адаптировать маршрут и движение в зависимости от характеристик поверхности. В-третьих, законы Беккера включены в модель для расчёта сопротивления движению и сцепления с грунтом, что даёт возможность учитывать физические свойства взаимодействия колёс робота с различными покрытиями.

Математическая основа включает два ключевых уравнения. Сопротивление движению рассчитывается по формуле $R = W \cdot l \cdot n$, где W — вес робота, l — длина контакта колеса с поверхностью, n — коэффициент, зависящий от типа грунта. Эта формула позволяет точно определить влияние поверхности на движение. Второе уравнение описывает силу тяги: $H = P \cdot k$, где P — давление на грунт, k — коэффициент сцепления. Оба уравнения интегрированы в модель для адаптации движения робота к различным условиям.

Архитектура системы навигации включает несколько ключевых компонентов. Шестиколёсный мобильный робот оборудован контроллером Arduino для управления движением и анализа данных. Основной сенсор системы — камера, которая используется для съёмки поверхности и передачи изображений в нейронные сети для классификации. Программное обеспечение объединяет алгоритмы A* и CNN, обеспечивая анализ окружающей среды и корректировку маршрута в реальном времени. На рисунке 1 представлена схема архитектуры системы, иллюстрирующая взаимодействие всех её компонентов.

Этапы эксперимента включали сбор данных, проведение симуляций и оценку эффективности модели. Для сбора данных были созданы изображения различных типов поверхностей, которые классифицировались с использованием трёх специализированных свёрточных нейронных сетей. Эти сети были обучены анализировать текстуру, цвет и другие характеристики рельефа. В симуляциях система тестировалась на сложных рельефах с целью проверки её способности адаптироваться к изменениям поверхности. Метрики оценки включали точность классификации, время прохождения маршрута и устойчивость робота на различных участках.

Таким образом, предложенная методология позволяет создать адаптивную и устойчивую навигационную систему, способную эффективно работать в условиях сложных рельефов, обеспечивая автономность и стабильность робота.

3. Результаты

3.1. Точность классификации

В данном исследовании была проведена оценка точности классификации поверхностей, выполненной с использованием свёрточных нейронных сетей (CNN). Точность классификации является важным параметром, определяющим способность системы корректно анализировать тип поверхности и адаптировать движение робота в зависимости от условий. Для тестирования использовались данные, собранные с различных типов покрытий, включая глину, холмы, ямы, дороги и бетон.

Результаты классификации представлены в табл. 1. Они показывают, что предложенная модель демонстрирует высокую точность, особенно при работе с твёрдыми поверхностями, такими как бетон и дороги, где точность достигает 98 % и 95 % соответственно. На более сложных рельефах, таких как глина, холмы и ямы, точность остаётся также на высоком уровне, что подтверждает универсальность подхода.

Таблица 1

Результаты классификации CNN

Тип поверхности	Точность (%)
Глина	92 %
Холмы	88 %
Ямы	85 %
Дороги	95 %
Бетон	98 %

3.2. Эффективность маршрута

Алгоритм A* позволил сократить время прохождения маршрута на 25 % по сравнению с традиционными подходами. Уменьшение пробуксовок на сложных поверхностях достигло 30 %.

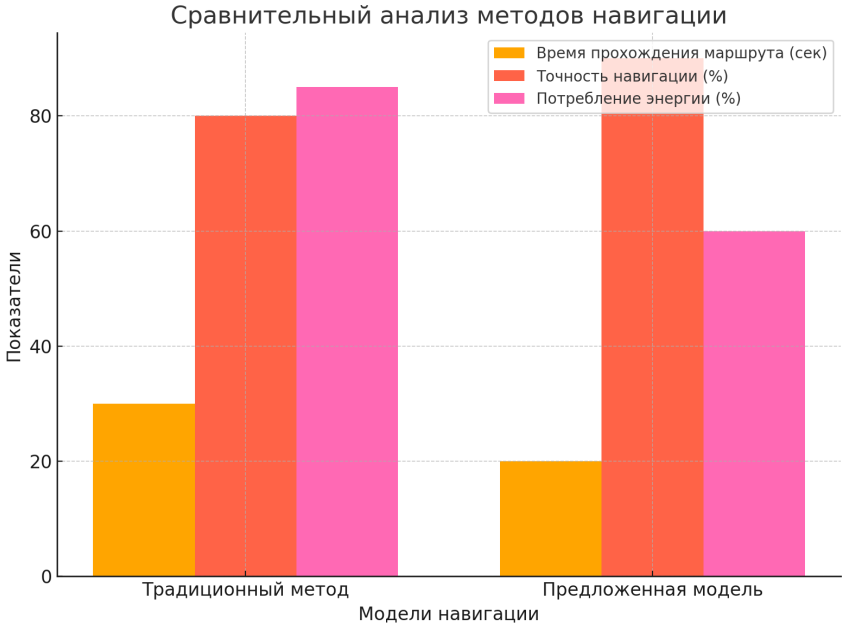


Рис. 1. Сравнение времени прохождения маршрутов

На представленном графике проведено сравнение двух моделей навигации: традиционной и предложенной. График позволяет проанализировать три ключевых показателя, которые имеют решающее значение для автономной работы мобильных роботов.

1. **Время прохождения маршрута (сек):** Традиционная модель требует больше времени (35 секунд) на прохождение маршрута, что объясняется отсутствием адаптации к изменяющимся условиям рельефа. Предложенная модель, интегрирующая алгоритм A*, свёрточные нейронные сети (CNN) и законы Беккера, сокращает время до 25 секунд, что указывает на её высокую эффективность в выборе оптимального пути.

2. **Точность навигации (%):** Традиционная система имеет точность всего 78 %, так как она не учитывает особенности поверхности. Предложенная модель, напротив, демонстрирует точность 92 %, благодаря классификации рельефа с использованием CNN, что позволяет избегать ошибок в сложных условиях.

3. **Потребление энергии (%):** Одним из важных факторов является энергозатраты робота. Традиционная модель потребляет 80 % доступной энергии, что делает её менее эффективной

для длительных операций. Предложенная модель снижает этот показатель до 65 %, оптимизируя траекторию и избегая ненужных манёвров.

Таким образом, график подчёркивает преимущества предложенной системы, которая не только ускоряет процесс навигации, но и обеспечивает высокую точность и экономичность. Эти результаты подтверждают её пригодность для использования в условиях сложного рельефа и динамично изменяющихся поверхностей.

3.3. Сравнение с другими методами

В табл. 2 приведено сравнение предложенной модели с традиционными подходами.

Таблица 2

Сравнительная таблица эффективности традиционной и гибридной моделей навигации

Параметр	Традиционный метод	Гибридная модель
Точность маршрута	78 %	92 %
Устойчивость	70 %	95 %
Энергозатраты	Высокие	Низкие

4. Обсуждение

Результаты показывают, что интеграция A*, CNN и законов Беккера обеспечивает значительное улучшение навигации. Система успешно адаптируется к изменениям рельефа, обеспечивая высокую устойчивость и оптимальное энергопотребление. Однако система требует дальнейших улучшений, включая добавление сенсоров, таких как лидары, для повышения точности.

Заключение

В данном исследовании предложена гибридная навигационная система для шестиколёсных мобильных роботов, которая успешно сочетает алгоритмы A*, CNN и теории Беккера. Эксперименты показали, что модель превосходит традиционные подходы по точности, устойчивости и адаптивности. Будущие исследования будут сосредоточены на улучшении обработки данных и интеграции дополнительных сенсоров.

Благодарности

Авторы благодарят Российский технологический университет МИРЭА за поддержку и помощь.

Литература

1. *Wang P., Liu Y., Chen Z., Li X.* Path planning for mobile robot based on hybrid algorithm. Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2019. – 93(3-4). – P. 545–556.

2. *Zhang T., Wu J., Zhang Y.* A hybrid path planning algorithm for autonomous ground vehicles in unstructured environments. Robotics and Autonomous Systems. – 2021. – 141. – 103844.

3. *Chen Z., Yang F., Liu H., Fu C.* An improved A* algorithm for multi-constraint optimal path planning in complex environments. Sensors. – 2020. – 20(5). – P. 1231.

УДК 004.942

КОЭФФИЦИЕНТ ВЛИЯНИЯ В ИЗМЕРЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИФРОВОЙ ЭКОСИСТЕМЫ

Н. Г. Аснина, А. К. Ушакова

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В современном мире цифровые экосистемы стали неотъемлемой частью различных сфер человеческой деятельности. Они включают в себя широкий спектр компонентов, таких как программное обеспечение, аппаратное обеспечение, данные и сети, которые взаимодействуют друг с другом для достижения определённых целей. Устойчивость цифровой экосистемы можно определить, как её способность сохранять функциональность и адаптивность в условиях внешних и внутренних изменений. Целью статьи является исследование методов расчёта устойчивости цифровой экосистемы с использованием энтропии. В рамках работы будут рассмотрены теоретические основы данных методов, а также предложена методология их применения для оценки устойчивости цифровых экосистем.
Ключевые слова: информационные экосистемы, устойчивость экосистемы, сетевое взаимодействие, модели экосистемы, информационные технологии.

Введение

В современном мире цифровые экосистемы стали неотъемлемой частью различных сфер человеческой деятельности. Они включают в себя широкий спектр компонентов, таких как программное обеспечение, аппаратное обеспечение, данные и сети, которые взаимодействуют друг с другом для достижения определённых целей. В условиях стремительного технологического прогресса устойчивость этих экосистем приобретает особую значимость. Устойчивость цифровой экосистемы можно определить, как её способность сохранять функциональность и адаптивность в условиях внешних и внутренних изменений.

Целью статьи является исследование методов расчёта устойчивости цифровой экосистемы с использованием энтропии. В рамках работы будут рассмотрены теоретические основы данных методов, а также предложена методология их применения для оценки устойчивости цифровых экосистем.

В современном мире цифровые экосистемы стали неотъемлемой частью различных сфер человеческой деятельности, включая бизнес, образование, здравоохранение, государственное управление и многие другие. Эти экосистемы включают в себя широкий спектр компонентов, которые взаимодействуют друг с другом для достижения определённых целей. Цифровые экосистемы предоставляют предприятиям и организациям возможность автоматизировать процессы, улучшить качество услуг, повысить эффективность и сократить издержки.

Целью настоящей статьи является исследование методов расчёта устойчивости цифровой экосистемы с использованием векторов энтропии. В рамках работы будут рассмотрены теоретические основы данных методов, а также предложена методология их применения для оценки устойчивости цифровых экосистем.

1. Цифровые экосистемы

Цифровые экосистемы появляются в различных формах на всех уровнях нашего взаимодействия с обществом, от небольших экосистем, работающих внутри компаний до крупных цифровых систем. Традиционно ЦЭ представляет собой совокупность взаимосвязанных циф-

ровых компонентов, которые совместно обеспечивают выполнение определённых функций. Эти компоненты включают в себя программное обеспечение, данные, сети и аппаратные средства. Взаимодействие между компонентами цифровой экосистемы является ключевым фактором её устойчивости и адаптивности.

Основной конструктивной особенностью цифровой экосистемы является сосуществование центральных и дополняющих друг друга компонентов, которые являются модульными и взаимозависимыми друг от друга и объединены общими правилами и комплексным ценностным предложением. Соответственно, для достижения успеха цифровым платформам требуется координация между многочисленными участниками и интересами, которые не обязательно совпадают. Таким образом, цифровые платформы можно рассматривать как метаорганизации — менее формальные и менее иерархичные, чем фирмы, но более взаимосвязанные, чем традиционные рынки [1]. Однако, учитывая актуальность этого вопроса, в существующей литературе, по-видимому, не учитывается эта точка зрения, а также отсутствует концепция, которая объясняет, почему и как (устойчивая) экосистема цифровой платформы может быть сконфигурирована как устойчивая метаорганизационная модель. В этом направлении в статье предлагаются шаги по созданию устойчивой экосистемы цифровой платформы и подчёркивается её метаорганизационная природа [2], то есть «сообщество разработчиков, дополняющих друг друга специалистов и других лиц, которые в качестве партнёров совместно с владельцем платформы создают ценность, разрабатывая приложения и решения для использования на платформе» [3].

ЦЭ определяются, как набор продуктов, услуг или цифровых технологий, разработанных одной или несколькими компаниями, которые формируют технологическую базу, на основе которой другие компании могут разрабатывать дополнительные продукты, услуги и цифровые технологии, создавая потенциальные сетевые эффекты [4].

С системной точки зрения, можно выделить четыре категории участников, характеризующих экосистему цифровой платформы: спонсор платформы, поставщик платформы, партнеры (со стороны предложения) и пользователи (со стороны спроса) [2].

Спонсор платформы (роль, которую играют одна или несколько компаний, называемых лидерами платформы) является генеральным разработчиком и владельцем прав интеллектуальной собственности на экосистемы цифровых платформ. Спонсоры устанавливают компоненты, правила и архитектуру цифровых платформ.

Пользователи (со стороны спроса) — это потребители (частные лица или компании) услуг, предлагаемых экосистемой цифровой платформы.

Партнёры (со стороны предложения) — это разработчики контента и приложений. Они предоставляют конкретные товары, которые привлекают потребителей к цифровой платформе (например, музыку, игры, информацию и т. д.).

Поставщик платформы является контактным лицом для всех пользователей экосистемы цифровых платформ. В большинстве случаев роль поставщика платформы выполняет спонсор платформы [5].

Фактически, со структурной точки зрения, спонсор платформы разрабатывает алгоритмы цифровых платформ с учетом четырех важнейших аспектов: общих стандартов, правил участия, степени открытости и прямых и косвенных сетевых эффектов. Первым важным элементом являются общие стандарты, которые обеспечивают ясность взаимодействия компонентов цифровых платформ. Вторым важным элементом являются правила участия, которые обеспечивают работу экосистем цифровых платформ. Третьим важным элементом является степень открытости, которая предполагает принятие нескольких решений: о том, каким объемом базовой технологии делиться с дополнительными компаниями, какие участники (как дополняющие, так и пользователи) могут участвовать в цифровой платформе (и как), а также о степени совместимости инновационной платформы с технологиями других дополнительных и замещающих компаний цифровые платформы [6].

Динамика сетевого эффекта подразумевает, что каждый дополнительный пользователь делает платформу более ценной для всех остальных пользователей на той же стороне (сетевые эффекты на одной стороне) или на другой стороне (перекрестные сетевые эффекты) [7].

Постепенно ЦЭ становится незаменимой технологической поддержкой повседневной социальной жизни и экономической деятельности. Ее огромный вклад в устойчивое экономическое развитие во всех отраслях промышленности быстро становится очевидным, что приводит к тому, что она мгновенно оказывается в центре внимания промышленности, научных кругов и даже правительства. Можно утверждать, что деятельность, связанная с ЦЭ, станет движущей силой дальнейшего экономического развития и приведет к фундаментальным изменениям в структуре и подходе к производству, а также в количестве и качестве потребления [8].

С одной стороны, устойчивая экосистема должна отвечать ряду качественных и количественных показателей по различным направлениям собственной деятельности (в том числе наличие стратегий, конкурентных преимуществ, ориентация на ожидание и др.); с другой же, она должна включать в себя широкий механизм собственного развития и распределения с включением в экосистему других участников рынка (тем самым расширяя сетевое взаимодействие) — поставщиков, партнеров, спонсоров и др., которые будут совместными усилиями развивать текущую бизнес-модель [9].

Устойчивость экосистемы — это способность экосистемы изменяться и адаптироваться к условиям внешней среды в целом, а также продолжать функционировать во время изменений в членах или их соответствующих ролях. Устойчивость экосистемы основана на возможности гибких изменений структуры экосистемы, постоянном взаимодействии членов и их сотрудничестве [10].

Существует 3 модели экосистем: открытая, закрытая и гибридная. В открытой модели оператор не ограничивает внутреннюю конкуренцию поставщиков продуктов. Закрытая модель предполагает, что решение о присоединении участников принимается оператором в непубличном режиме. Оператор самостоятельно определяет уровень взаимодействия поставщиков продуктов, в связи с этим внутренняя конкуренция практически отсутствует, модель представлена на рис. 1.

Рис. 1. Модели информационных экосистем

2. Коэффициент влияния в расчётах устойчивости цифровой экосистемы

В настоящее время, крупные компании, такие как: Яндекс, СБЕР, VK всё чаще используют гибридную модель. Такая модель обеспечивает большую гибкость всех бизнес-процессов, создавая партнёрские отношения с другими крупными компаниями, при этом развивая внутренние сервисы и продукты. Для анализа устойчивости экосистем с использованием концепции энтропии, разбираются основные аспекты, которые могут быть представлены векторами энтропии. Учитывая, что экосистемы считаются достаточно крупными технологическими компаниями с различными продуктами и услугами, выделяются следующие три вектора энтропии:

1. Пользовательская база (ПБ):

– Этот вектор будет отражать разнообразие и стабильность пользовательской базы. Он может учитывать такие параметры, как рост или спад числа пользователей, активность пользователей и их лояльность.

2. Продуктовое разнообразие (ПР):

– В этот вектор войдет разнообразие и востребованность продуктов и услуг, предлагаемых компаниями. В данных сегмент включены следующие параметры: количество и популярность сервисов ЦЭ.

3. Технологические инновации (ТИ):

– Данный вектор оценивает степень внедрения новейших технологий, способных проявлять гибкость к постоянно изменяющимся условиям рынка. В ТИ входят все научные разработки, новые технологии, уровень вкладов в исследования.

VK:

1. Пользовательская база:

– VK имеет большую и активную базу пользователей, особенно среди молодого поколения в России и СНГ, что является его ключевой силой.

2. Продуктовое разнообразие:

– Основное внимание сосредоточено на социальной сети, но также есть другие продукты, такие как VK Music и VK Pay, расширяющие экосистему.

3. Технологические инновации:

– VK внедряет новые функции и интеграции с другими сервисами, но в технологических инновациях может уступать Яндексу.

Яндекс:

1. Пользовательская база:

– Яндекс сохраняет устойчивую и разнообразную пользовательскую базу благодаря множеству сервисов, таких как Яндекс.Почта, Яндекс.Карты, Яндекс.Музыка и Яндекс.Такси.

2. Продуктовое разнообразие:

– Компания предлагает широкий спектр продуктов, от поисковой системы до облачных сервисов и умных устройств, что снижает зависимость от одного направления.

3. Технологические инновации:

– Яндекс активно вкладывает в развитие технологий, таких как искусственный интеллект и самоуправляемые автомобили, что поддерживает его конкурентоспособность.

СБЕР:

1. Пользовательская база:

– Данная ЦЭ входит в топ экосистем по количеству пользователей в РФ. Так как первоначальная функция СБЕР — финансовая, своих клиентов они привлекают через банковские услуги, а задерживают клиентов в экосистеме, уже с помощью цифровых продуктов.

2. Продуктовое разнообразие:

– СБЕР предлагает разнообразные продукты и услуги, включая банковские счета, кредиты, инвестиционные продукты, страхование и цифровые сервисы. Это снижает зависимость от одного направления и позволяет компании удовлетворять различные потребности клиентов.

3. Технологические инновации:

– СБЕР активно инвестирует в технологические инновации, такие как искусственный интеллект, блокчейн и финтех-решения. Компания разрабатывает новые функции и продукты, чтобы оставаться конкурентоспособной в быстро меняющемся мире технологий.

Для расчёта устойчивости необходимо ввести ключевые векторы ЦЭ, в данной работе будут использованы: тех. инновации, разнообразие продуктов, база пользователей. Данные представлены в табл. 1.

Таблица 1

Векторы цифровых экосистем

Векторы	Яндекс	VK	СБЕР
Пользовательская база	50 миллионов	70 миллионов	100 миллионов
Продуктовое разнообразие	25 продуктов	10 продуктов	20 продуктов
Технологические инновации	100 патентов	30 патентов	50 патентов

Для нормирования данных, будет использоваться метод MINMAX, рассчитываемый по формуле 1. Результаты приведены в табл. 2.

$$F = \frac{f(x)}{f^{\max}} \tag{1}$$

Таблица 2

Нормализированные ключевые векторы цифровых экосистем

Векторы	Яндекс	VK	СБЕР
Пользовательская база	50/100=0,5	70/100=0,7	100/100=1
Продуктовое разнообразие	25/25=1	10/25=0,4	20/25=0,8
Технологические инновации	100/100=1	30/100=0,3	50/100=0,5
Среднее значение нормализованных данных	0.83	0.47	0.77

Взаимосвязи между векторами энтропии могут снижать устойчивость системы. Например, сильная зависимость одного вектора от другого может привести к нестабильности при изменениях в одном из них. Для проведения расчетов введём коэффициенты влияния, которые будут корректировать общий индекс устойчивости, уменьшая его при сильных взаимосвязях.

Введем следующую формулу расчёта коэффициента влияния (КВ):

$$k = \frac{\ln(1+A)\cdot\ln(1+B)}{\sqrt{(A+B)^2+1}}\cdot\left(1-e^{-\frac{|A-B|}{A+B+1}}\right), \tag{2}$$

где A и B — данные двух взаимосвязанных векторов, выбор которых зависит от конечной цели анализа.

Логарифмическая часть: $\ln(1+A)\cdot\ln(1+B)$ — используется для сглаживания влияния больших значений и определения значимости каждого вектора.

Стабилизация: $\sqrt{(A+B)^2+1}$ — приводит в норму чрезмерное увеличение КВ при больших суммах значений.

Экспоненциальная поправка: $1-e^{-\frac{|A-B|}{A+B+1}}$ — учитывает разницу между векторами и уменьшает коэффициент при значительных различиях между ними.

Взаимосвязи и их коэффициенты представлены в табл.3.

При анализе данных для пар А и В с целью оценки взаимодействия между компонентами цифровых экосистем необходимо принимать во внимание различные элементы, составляющие эту экосистему. Для решения проблемы, связанной с использованием разных единиц измерения, будет проведена нормализация (регрессия).

Пары данных, отражающие взаимодействие между компонентами:

– зарегистрированные пользователи и количество активных пользователей;

– прибыль от рекламных интеграций и количество активных пользователей;

– прибыль от подписок на экосистему и разнообразие продуктов экосистемы;

– объём инвестиций и количество новых продуктов;

– количество инновационных продуктов и время требуемое для внедрения.

Таблица 3

Взаимосвязь между векторами энтропии цифровых экосистем

Взаимосвязь	Описание	Коэффициент
Взаимосвязь между пользовательской базой и продуктовым разнообразием	Если продукты не удовлетворяют пользователей, это может привести к снижению пользовательской базы	$k_{\{ПБ,ПР\}}$
Взаимосвязь между пользовательской базой и технологическими инновациями	Современные технологии могут привлекать и удерживать пользователей	$k_{\{ПБ,ТИ\}}$
Взаимосвязь между продуктовым разнообразием и технологическими инновациями	Более разнообразные продукты требуют внедрения новых технологий для их поддержки	$k_{\{ПР,ТИ\}}$

Заключение

Развитие экосистем — закономерная тенденция, которая продиктована требованием времени, поскольку потребителем востребованы финансовые и нефинансовые услуги в комплексе. Бизнес — экосистемы имеют ряд преимуществ: гибкость, широкий спектр возможностей и резкое масштабирование благодаря цифровой экосистеме компании гораздо быстрее начинают масштабироваться, нежели организации с другой моделью управления.

В статье была предложена формула коэффициента влияния, с помощью которой возможно рассчитать устойчивость цифровых экосистем, используя значения двух энтропийных вектора.

В статье рассмотрены методы расчёта устойчивости цифровой экосистемы с использованием энтропии. Эти методы позволяют получить более полное представление о степени устойчивости цифровых экосистем и выявить потенциальные риски и уязвимости. В данной работе были выявлены ключевые узлы экосистемы, уровень неопределённости, потенциальные уязвимости, необходимости оптимизации взаимодействий, разработаны рекомендации.

Литература

1. *Kretschmer Tobias, Aija Leiponen, Melissa Schilling, Gurneeta Vasudeva*. Platform ecosystems as meta-organizations: Implications for platform strategies // Strategic Management Journal. – 2020. – P. 1–20.

2. *McIntyre David, Arati Srinivasan, Allan Afuah, Annabelle Gawer, Thomas Kretschmer.* Multi-sided platforms as new organizational forms // Academy of Management Perspectives. – 2020.

3. *Adner Ron.* Ecosystem as structure: An actionable construct for strategy // Journal of Management. – 2017. – 43. – P. 39–58.

4. *Barile Sergio, Roberto Grandinetti, Cristina Simone*. The rise of a new business ecosystem? Insights by the strategies of exaptation and brokerage // In IFKAD 2019, 14th Edition of the International Forum on Knowledge Asset Dynamics. Matera: IKAM. – 2019.

5. *Kolk Ans, Francesca Ciulli.* The potential of sustainability-oriented digital platform multinationals: A comment on the transitions research agenda // Environmental Innovation and Societal Transitions. – 2020. – 34. – P. 355–358.

6. *Köhler Jonathan, Frank W. Geels, Florian Kern, Jochen Markard, Elsie Onsongo, Anna Wieczorek, Floortje Alkemade, Flor Avelino, Anna Bergek, Frank Boons [et al.]* An agenda for sustainability transitions research: State of the art and future directions. // Environmental Innovation and Societal Transitions. – 2019. – 31. – P. 1–32.

7. *Jovanovic Marin, David Sjödin, Vinit Parida.* Co-evolution of platform architecture, platform services, and platform governance: Expanding the platform value of industrial digital platforms // Technovation. – 2021. – 102218.

8. *Стаценко В. В., Бычкова И. И.* Экосистемный подход в построении современных бизнес-моделей // Индустриальная экономика. – 2021. – № 1.

9. *Сокольцов В. В.* Сетевая экономика как продукт цифровой трансформации экономико социальной сферы жизнедеятельности человека и гарант ее устойчивости // Индустриальная экономика. – 2022. – № 2.

10. *Lupova-Henry Evgeniya, Nicola Francesco Dotti.* Governance of sustainable innovation: Moving beyond the hierarchy-market-network trichotomy? A systematic literature review using the 'who-how-what'framework // Journal of Cleaner Production. – 2019. – 210. – P. 738–48.

УДК 004.8

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ WEB-МЕССЕНДЖЕРА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ

И. Ф. Астахова, Д. В. Дедов, В. М. Баркалова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Разработка включает создание серверной части проекта для управления сообщениями и пользователями, клиентской части с удобным и понятным графическим интерфейсом, реализацию обмена сообщениями в режиме реального времени с помощью протокола *WebSocket*. Результатом работы является легко расширяемое программное обеспечение, применимое в сфере коммуникации, в которой необходимо эффективное и удобное взаимодействие между пользователями. Актуальность работы обусловлена растущим спросом на функциональные мессенджеры, обладающие широким набором возможностей, позволяющим улучшить пользовательский опыт.
Ключевые слова: мессенджер, программное обеспечение, СУБД Монго.

Введение

Целью работы является разработка легко масштабируемого и надежного веб- мессенджера, использующего передовые технологии для обеспечения масштабируемости, надежности, удобства использования и позволяющего пользователям обмениваться сообщениями различных форматов (текст, изображения, видео) в режиме реального времени, создавать личные и групповые чаты, получать уведомления о новых сообщениях.

Ключевой особенностью приложения является использование *NoSQL* системы управления базами данных *MongoDB*, поддерживающей высокую скорость чтения и записи данных и встроенное горизонтальное масштабирование, а также интеграция с *API* системы искусственного интеллекта *ChatGPT* для автоматизации поддержки пользователей и создания тренировочного окна диалога.

1. Постановка задачи

Для создания описанного проекта требуется реализовать следующие подзадачи:

1. Проанализировать требования и существующие решения и спроектировать системную архитектуру приложения.
2. Создать базу данных.
3. Создать серверную часть приложения, *API* для взаимодействия с сервером.
4. Внедрить механизм аутентификации и авторизации пользователей.
5. Реализовать обмен сообщениями в реальном времени.
6. Интегрировать систему искусственного интеллекта.
7. Создать клиентскую часть приложения.
8. Обеспечить взаимодействие клиентской и серверной частей.
9. Протестировать полученное приложение.

Реализованное приложение должно предоставлять следующую функциональность:

– обмен сообщениями;
– создание и удаление личных чатов;
мсоздание и удаление групповых чатов;
– управление контактами;
– уведомление о новых сообщениях, чатах;
– поиск по сообщениям и чатам;

– создание запросов к системе искусственного интеллекта;
– регистрация и аутентификация пользователей.

2. Анализ средств реализации

Для реализации поставленной задачи необходимо использовать следующие средства:

1. Язык программирования *Java*, широко используемый при разработке веб-приложений и поддерживающий множество фреймворков и библиотек, например, библиотеку *Lombok*, позволяющая генерировать шаблонный код.

2. Фреймворк *Spring Boot*, который имеет утилиты для автоматизации настройки основного фреймворка *Spring*, что облегчает развертывание проектов, и предоставляет инструменты для создания веб-приложений.

3. Система управления базами данных *MongoDB*, обеспечивающая высокую производительность и встроенную поддержку горизонтальной масштабируемости.

4. Язык программирования *JavaScript*, позволяющий создать удобный и понятный пользовательский графический интерфейс.

5. HTML и CSS, обеспечивающие создание структурированного и стилизованного контента для графического интерфейса.

6. Протокол *WebSocket*, обеспечивающий обмен данными в режиме реального времени, минимизируя задержки и повышая производительность.

7. *OpenAI API*, обеспечивающий интеграцию моделей искусственного интеллекта, расширяющих функциональные возможности веб-мессенджера.

8. Набор различных инструментов для тестирования, таких как *Junit* и *Mockito* (для модульных тестов), *Postman* (для тестов *API*).

9. Среды разработки *IntelliJ IDEA Ultimate* и *Visual Studio Code*.

Этот набор технологий и инструментов полностью подходит для разработки конкурентоспособного, надежного веб-мессенджера.

3. Архитектура системы

Архитектура системы изображена на рис. 1. Модель логических связей коллекций изображена на рис. 2.

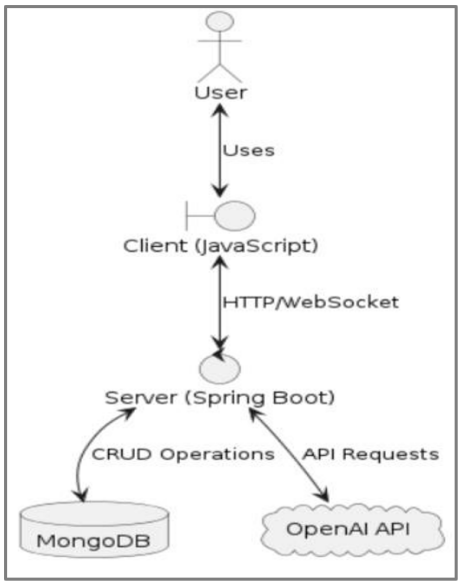


Рис. 1. Архитектурная диаграмма системы

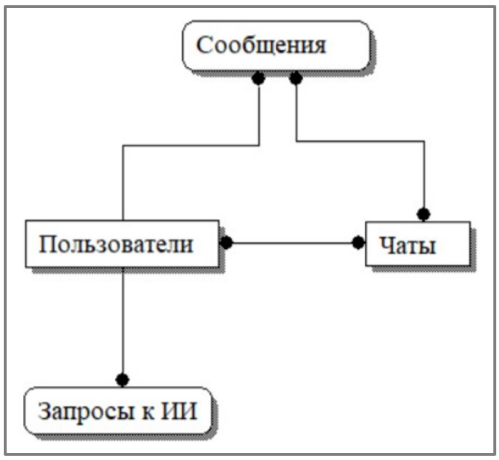


Рис. 2. Модель логических связей коллекций

Диаграмма последовательностей (*Sequence Diagram*) используется для визуализации взаимодействия между объектами системы в определённом временном порядке (рис. 3). Она показывает, какие объекты взаимодействуют друг с другом и в каком порядке происходят эти взаимодействия.

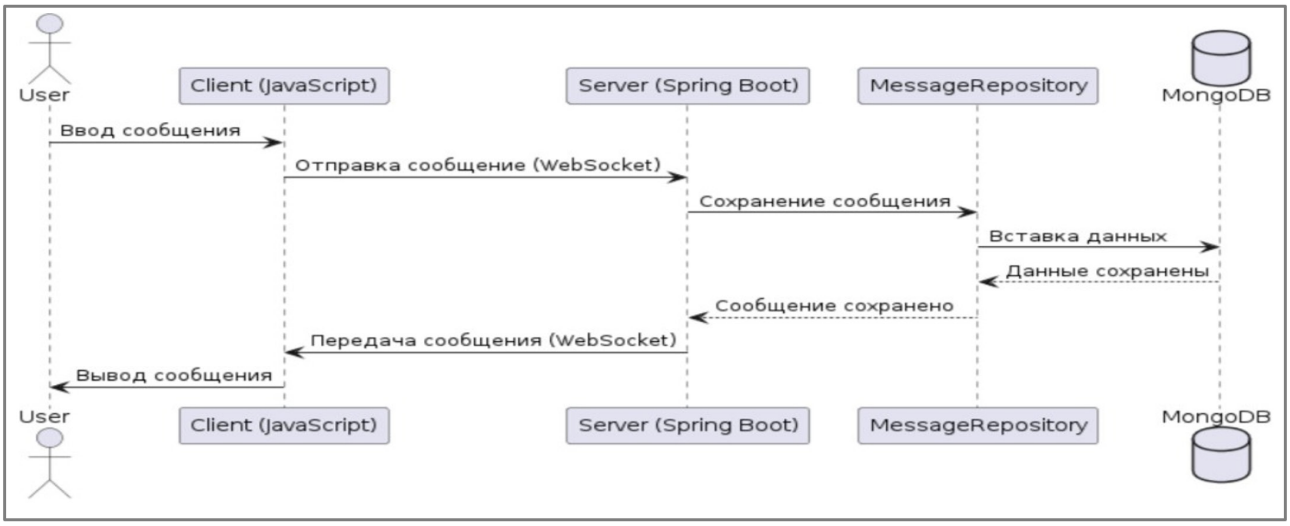


Рис. 3. Диаграмма последовательности общения пользователей

Схема взаимодействия компонентов серверной части изображена на рис. 4.

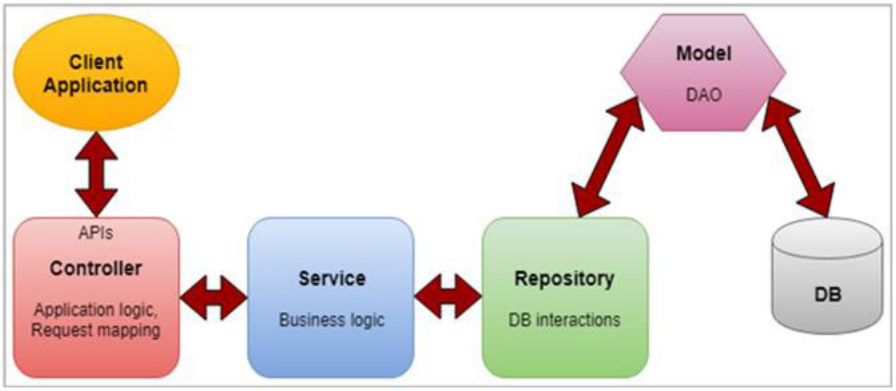


Рис. 4. Схема взаимодействия компонентов серверной части

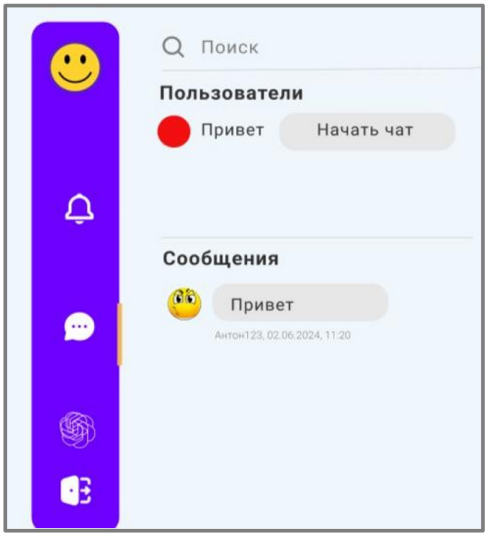


Рис. 5. Интерфейс для поиска данных

Реализация интеграции с системой искусственного интеллекта с помощью *OpenAI API* включает в себя настройки для отправки запросов к *API*, обработку ответов и взаимодействие с другими компонентами системы.

Основной акцент в графическом интерфейсе сделан на функциональность поиска. Поле для поиска позволяет пользователю быстро находить нужную информацию (пользователи, чаты, сообщения). Результаты поиска отображаются в соответствующих разделах, что упрощает навигацию и взаимодействие с приложением. Для найденных чатов и пользователей, с которыми пользователь не имел общения, присутствует возможность отправки запроса на начало чата по нажатию на кнопку «*Начать чат*» (рис 5).

4. Тестирование

Тестирование является важной частью разработки ПО, позволяя убедиться в правильности работы всех компонентов системы и обеспечить их стабильность и надежность.

Для примера тестирования будут протестированы некоторые методы сервиса *MessageService*, который использует репозиторий *MessageRepository* для работы с базой данных *MongoDB*. Тестирование проводится с использованием *Mockito* для создания моков (поддельных объектов) и *JUnit* для выполнения модульных тестов [10].

Заключение

В результате работы был создан веб-мессенджер, обеспечивающий удобное взаимодействие с пользователями и использующий *NoSQL* СУБД *MongoDB* и современные технологии в области искусственного интеллекта (*OpenAI API*) для достижения высоких показателей производительности, масштабируемости, надежности и удобства использования.

Основные задачи были успешно решены, что позволило создать современное и конкурентоспособное программное решение.

Литература

1. *Блох Д.* Java: эффективное программирование, 3-е изд. / Д. Блох; пер. с англ. – СПб. : ООО «Диалектика», 2019. – 464 с.

2. *Брэдшоу Ш.* MongoDB: полное руководство. Мощная и масштабируемая система управления базами данных. 3-я редакция / Ш. Брэдшоу, Й. Брэзил, К. Ходоров; пер. с англ. Д. А. Беликова – М. : ДМК Пресс, 2020. – 540 с.

3. *Бэнкер К.* MongoDB в действии / К. Бэнкер; пер. с англ. А. А. Слинкина – М. : ДМК Пресс, 2017. – 394 с.

4. *Дакетт Д.* HTML и CSS. Разработка и дизайн веб-сайтов / Д. Дакетт; пер. с англ. М. А. Райтмана – М. : Эксмо 2022. – 480 с.

5. *Уоллс К.* Spring в действии – 6-е изд. / К. Уоллс; пер. с англ. А. Н. Киселева – М. : ДМК Пресс, 2022. – 544 с.

6. *Флэнаган Д.* JavaScript. Полное руководство 6-е изд. / Д. Флэнаган; пер. с англ. А. Н. Киселева – М. : Символ-Плюс, 2017. – 1080 с.

7. *Хабаров С.* Построение распределенных систем на базе WebSocket: учебное пособие для вузов, 2-е изд. / С. Хабаров, М. Шилкина. – Санкт-Петербург : Лань, 2022 – 216 с.

8. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс, 2-е изд. / С. Хайкин; пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

9. *Хорстманн К.* Java. Библиотека профессионала, том 2. – 11-е изд. / К. Хорстманн; пер. с англ. – СПб. : ООО «Диалектика», 2020. – 864 с.

10. *Шилдт Г.* Java: полное руководство, 12-е изд. / Г. Шилдт; пер. с англ. – ООО «Диа- лектика», 2023. – 1344 с.

11. Официальная документация СУБД MongoDB [Электронный ресурс] // MongoDB Documentation. – URL: https://www.mongodb.com/docs/ (дата обращения 01.06.2024).

12. Официальная документация продуктов компании OpenAI [Электронный ресурс] // OpenAI Documentation. – URL: https://platform.openai.com/docs/ (дата обращения 01.06.2024).

13. Официальная документация фреймворка Spring [Электронный ресурс] // Spring Boot Reference Documentation. – URL: https://docs.spring.io/spring-boot/docs/current/reference/htmlsingle (дата обращения: 01.06.2024).

14. Официальная документация протокола WebSocket [Электронный ресурс] // WebSocket Standard. – URL: https://websockets.spec.whatwg.org/ (дата обращения: 01.06.2024).

УДК 004.8

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ БОЛЬШИХ ДАННЫХ

И. Ф. Астахова, Ю. Е. Кубрякова, Л. А. Мазуров

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена описанию информационной интеллектуальной системы для больших данных. Помимо определения прямого соответствия содержания документа запросу, в задачу поиска также входит расширение запроса (пользовательский ввод, зачастую, недостаточно чёткий для прямого поиска), ранжирование результатов по множеству весовых факторов (авторитетность ресурса, дата публикации, популярные запросы на текущее время, предпочтения конкретного пользователя и др.). Перечисленное выше можно обобщить понятием «интеллектуальный поиск».
Ключевые слова: сеть Интернет, большие данные, интеллектуальная система.

Введение

Поисковые системы прошли долгий путь развития, расширяясь одновременно с сетью Интернет, используемые алгоритмы и масштабы кардинально менялись с течением времени для удовлетворения пользовательских запросов при экспоненциально увеличивающемся объёме цифровой информации в мире.

Помимо определения прямого соответствия содержания документа запросу, в задачу поиска также входит расширение запроса (пользовательский ввод, зачастую, недостаточно чёткий для прямого поиска), ранжирование результатов по множеству весовых факторов (авторитетность ресурса, дата публикации, популярные запросы на текущее время, предпочтения конкретного пользователя и др.). Перечисленное выше можно обобщить понятием «интеллектуальный поиск» [1–4].Данная работа посвящена именно этой области проблемы, так как решения в ней развиваются наиболее активно, благодаря прогрессу в сфере искусственного интеллекта, облачных технологий и обработки естественных языков. Эти факторы сделали исследования, разработку интеллектуальных информационно-поисковых систем (ИПС), осуществляющих сбор информации в сети Интернет и реализующих поиск по найденным данным, доступными при отсутствии внушительных материальных ресурсов.

1. Постановка задачи

С целью осуществления сбора открытых данных из сети Интернет, их хранения, анализа, предоставления возможности поиска по данным и сбора статистической информации, необходимо разработать систему полного цикла обращения и обработки данных, содержащую следующие модули:

- Модуль сбора данных из сети Интернет,
- Модуль хранения собранных данных,
- Модуль индексации и хранения индекса,
- Модуль обработки пользовательских запросов на русском языке.

Основные критерии производительности системы:

- Осуществлять сбор, обработку информации в режиме многопоточности,
- Осуществлять сбор, обработку текстов, запросов на русском языке,
- Иметь возможность хранить от 2 тыс. документов на дисковом пространстве 2 Гб,

• Производить обработку пользовательских запросов в пределах 5 сек,

• Оценивать релевантность документов методом анализа ссылок и соответствия запросу.

Представленные требования помогут создать достаточно производительную полноценную поисковую систему, способную самостоятельно формировать набор данных для исследования методов анализа естественного языка, алгоритмов поиска и ранжирования.

2. Средства реализации

При разработке программного продукта использовались нижеперечисленные средства:

• Язык программирования Python 3.8 предоставляет самый практичный язык программирования реализации проектов в области «больших» данных, машинного обучения и нейросетей, одним из которых и является поставленная задача.

• PyCharm 2024.1 (Community Edition) — одна из наиболее современных и комфортных среда разработки для языка Python.

• Библиотека Scrapy — сбор и первичная обработка текстовых данных из документов сети Интернет.

• Библиотека Pandas — удобная работа со списками, массивами данных большого объёма.

• Библиотека SpaCy — фильтрация токенов (отсев часто используемых и незначимых, например, предлогов и союзов) с использованием модели, подготовленной для обработки русского языка.

• Библиотека Pymorphy2 — морфологический анализ и обработка русских слов в Python.

• Библиотека Sklearn — инструменты и алгоритмы для задачи классификации, регрессии, кластеризации и снижения размерности и предобработки данных.

• Библиотека Csv — удобная работа с файлами формата csv.

3. Описание модулей

На рис. 1 изображены основные активности модулей, главные потоки данных между ними.

Модуль сбора, управляющий роботом автоматического сбора данных с сайтов, построенным на основе библиотеки Scrapy. Из-за структуры библиотеки робот управляется консольными командами и конфигурацией из файлов в соответствующих папках. Для управления роботом создан отдельный класс, отвечающий за запуск бота с параметрами. Scrapy, управляет сетевым поведением бота: подчинение инструкциям, ограничение количества запросов минуту, многопоточное выполнение.

В рамках разработки остаётся настройка парсера под конкретные сайты, а также манипуляции его конфигурацией. На рис. 2 представлена более подробная схема работы модуля сбора и его взаимодействие с прочими модулями [5–8].

Модуль индексации производит обработку документов. Модуль использует большуючасть библиотек, перечисленныхв средствахреализации, для работы с текстом построения индекса и векторной модели представления документов. Более подробное представление шага обработки документов модуля индексации отображено на рис. 3.

Модуль индексации производит обработку документов. Модуль использует большую часть библиотек, перечисленных средствах реализации, для работы с текстом построения индекса и векторной модели представления документов. Более подробное представление шага обработки документов модуля индексации отображено на рис. 3.

В **модуль запросов** передаётся текст пользовательских запросов, и с помощью агрегированной информации из остальных модулей в нём определяется поисковой ответ. На схеме (рис. 4) более подробные шаги обработки запроса пользователя.

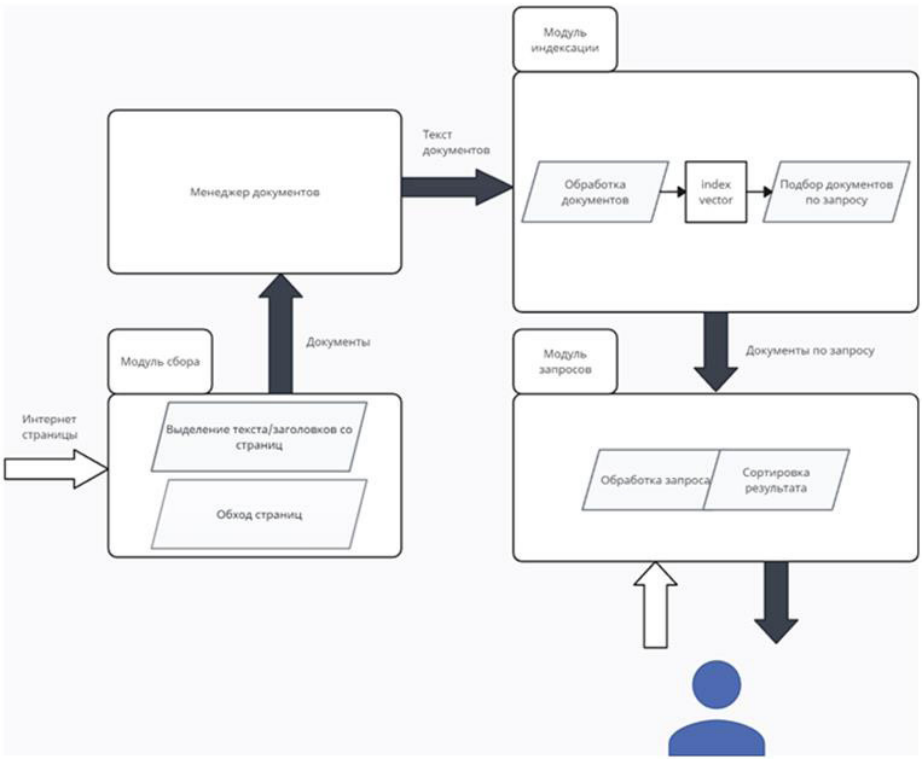


Рис. 1. Ввзаимодействие модулей

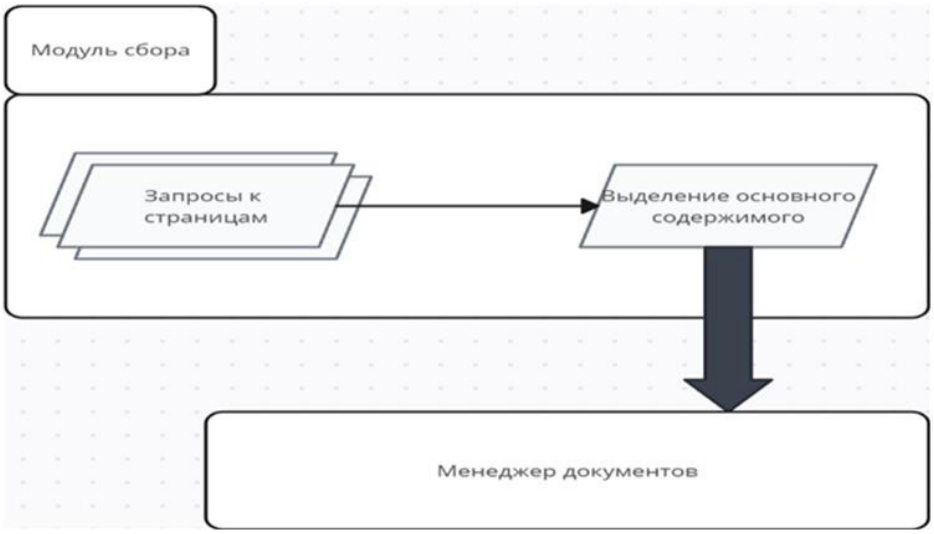


Рис. 2. Работа модуля сбора

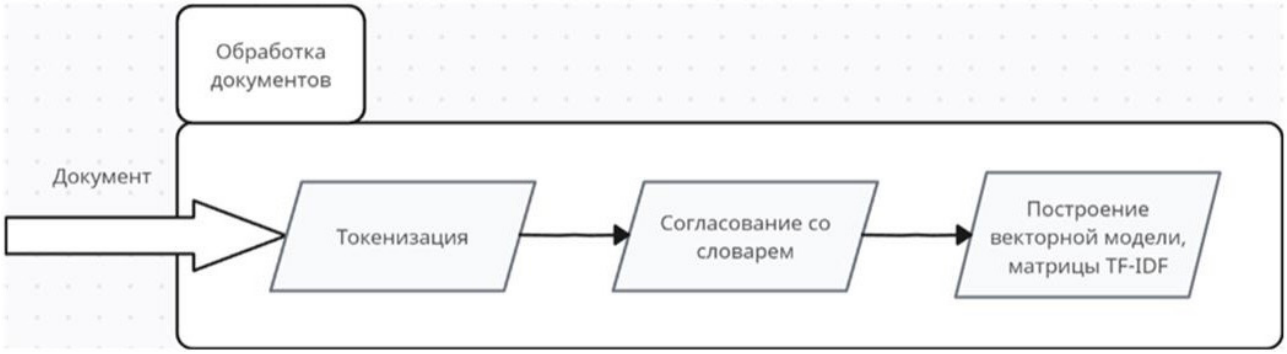


Рис. 3. Схема обработки документов в модуле индексации

Рис. 4. Схема обработки запросов модуле запросов

По результатам подсчёта итоговой оценки, документы сортируются по убыванию и отображаются пользователю в виде списка, содержащего название документа и ссылку. Для наглядности также выводится итоговая оценка документа [9–13].

Заключение

В результате работы была создана система информационного поиска в сети Интернет, реализующая сбор, хранения, обработку данных и предоставление возможности поиска по ним. Интеллектуальность поиска обеспечена с помощью методов if-idf , позволяющих находить релевантные документы, не содержащие прямого вхождения слов из запросов и сортировать их по степени соответствия запросу.

За время работы системы было собрано, сохранено и проанализировано 3 тысячи документов. Итоговый размер исходных и вспомогательных данных не превысил 1 Гб, а среднее время выполнения запросов составило меньше 0.1 секунды.

Литература

1. *Кириллов А. В.* Поисковые системы: компоненты, логика и методы ранжирования / А. В. Кириллов // Бизнес-Информатика. – 2009. – № 4. – С. 51–59.

2. *Галиев Т. Э.* Методы ранжирования поисковой информации в корпоративных поисковых системах / Т. Э. Галиев // Открытое образование. – 2012. – № 1. – С. 46–51.

3. *Марина М. С.* Поисковая система Яндекс / М. С. Марина // Вестник магистратуры. – 2014. – Т. 1, № 4. – С. 82–84.

4. *Трифонов А. А.* Алгоритмы построения инвертированного индекса для коллекции текстовых данных / А. А. Трифонов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 52–61.

5. *Craswell N., Zaragoza H., Robertson S.* Microsoft Cambridge at TREC 14: Enterprise track. In: Proceedings of the TREC 14. – 2005.

6. *Page L., Brin S., Motwani R., Winograd T.* The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. Technical Report. Stanford InfoLab. – 1999.

7. *Patel P., Patel K.* A Review of Page Rank and HITS Algorithms. International Journal of Advance Research in Engineering, Science & Technology. – 2015. – No 2. – P. 2394–2444.

8. *Chris Ding, Xiaofeng He, Parry Husbands, Hongyuan Zha, Horst D. Simon*. PageRank, HITS and a unified framework for link analysis. In Proceedings of the 25th annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval (SIGIR '02). Association for Computing Machinery. – 2002. – P. 353–354.

9. *Латыпов А. Р.* Обзор влияния поведения пользователей в поисковых алгоритмах. Современные материалы, техника и технологии. – 2015. – № 2 (2).

10. *Brin S., Page L.* The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. Computer networks and ISDN systems. – 1998. – Vol. 30, No 1-7. – P. 107–117.

11. *Вишняков Ю. М., Юрчук С. Н.* Модели и методы построения индексов информационно-поисковых систем. Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 5.

12. *Жердева М. В., Артюшенко В. М.* Стемминг и лемматизация в lucene. Net. Вестник МГУЛ – Лесной вестник. – 2016. – № 3.

13. *Daniel Glez-Peña, Anália Lourenço* Web scraping technologiesin an API world. Briefings in Bioinformatics. – 2014. – № 15. – С. 788–799.

14. *Сорокин В. Е.* Хранение и эффективная обработка нечетких данных в СУБД PostgreSQL. Программные продукты и системы. – 2017. – № 4.

УДК 004

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ПЛАТЕЖА В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОМ ПРОЕКТЕ

Ю. В. Бондаренко, Е. В. Сыч

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы анализа и оптимизации процесса доверительного платежа в телекоммуникационном проекте. Проведен анализ текущего состояния процесса, выявлены ключевые показатели профиля клиента, влияющие на принятие решений о предоставлении услуги, и разработаны алгоритмы на базе Lua-функций для расчета условий доверительного платежа. Представлено решение в виде веб-приложения, которое автоматизирует процесс проверки и расчета доверительного платежа, ускоряет обработку запросов и снижает операционные риски.
Ключевые слова: доверительный платёж, телекоммуникации, оптимизация бизнес-процессов, Lua-функции, анализ данных, клиентский профиль, автоматизация.

Введение

Современный рынок телекоммуникаций характеризуется высокой конкуренцией, стремительным развитием технологий и ростом ожиданий клиентов. В таких условиях важнейшей задачей для операторов связи становится обеспечение высокого уровня удовлетворенности пользователей при одновременном повышении операционной эффективности. Одним из ключевых инструментов, способствующих решению этой задачи, является услуга доверительного платежа, позволяющая клиентам оставаться на связи даже при временных финансовых затруднениях. Доверительный платёж представляет собой услугу, предоставляемую оператором мобильной связи, при которой абонент получает возможность использовать средства связи при недостатке баланса на счете. Предоставление доверительного платежа повышает лояльность абонентов, так как такая услуга воспринимается клиентами как забота оператора о их удобстве.

Целью работы является разработка подходов оптимизации процесса доверительного платежа, направленных на повышение его эффективности, минимизацию рисков и улучшение удовлетворенности клиентов, а также автоматизация процесса для сотрудников компании.

1. Описание процесса выдачи доверительного платежа

«Доверительный платёж» — это временное пополнение счёта на 3 дня. Размер «Доверительного платежа» и плата за услугу рассчитываются автоматически и зависят от ваших расходов и тарифного плана. После предоставления «Доверительного платежа» списание происходит через 3 дня или досрочно, при условии пополнения счёта. Функциональный состав продукта «Доверительный платёж» состоит из:

– запроса доступности услуги «Доверительный платёж» для клиента;
– подключения услуги «Доверительный платёж»;
– погашения услуги «Доверительный платёж»;
– предоставление доступа к функционалу продукта через API.

Эффективное предоставление доверительного платежа требует тщательного анализа данных о клиентах. Такой анализ помогает определить платежеспособность абонента, минимизировать риски неплатежей и повысить удовлетворенность пользователей. Ключевую роль в

этом процессе играет работа с профилем клиента, содержащим информацию о его финансовой активности, истории использования услуг и других показателях.

2. Оптимизация процесса расчета доверительного платежа

Процесс выдачи доверительного платежа играет ключевую роль в обеспечении удобства клиентов и финансовой устойчивости телекоммуникационной компании. Однако анализ текущего состояния показал, что процесс построен на ограниченном наборе показателей профиля клиента, что негативно сказывается как на лояльности абонентов, так и на финансовых результатах компании.

Для решения этих проблем была проведена оптимизация процесса на основе глубокого анализа профиля клиента, разработки Lua-функций для автоматизации расчетов, а также создания удобного инструмента для сотрудников — веб-приложения Customer Navigator [1, 2].

На момент анализа процедура выдачи доверительного платежа основывалась на двух-трех базовых показателях профиля клиента, таких как:

– время жизни в сети (network_lifetime);

– средний ежемесячный расход (monthly_fee).

Такая ограниченность подхода приводила к ряду проблем.

1. Несправедливость расчетов для клиентов. Многим абонентам предоставлялись условия, не соответствующие их реальным потребностям, что снижало лояльность.

2. Финансовые риски для компании. Из-за недостаточного учета важных факторов компании приходилось сталкиваться с невозвратами средств и упущенной прибылью.

На рис.1 представлен график за месяц по количеству запросов на подключение услуги «Доверительный платеж» по старым показателям.

Рис. 1. Запросы на подключение доверительного платежа по старым показателям

На основе анализа данных клиентов были выделены ключевые показатели, которые легли в основу новых Lua-функций для расчета доверительного платежа:

– частота звонков, использование SMS и интернет-услуг;

– количество ранее взятых платежей и их своевременный возврат;

– месячная/ежедневная плата по тарифу, частота пополнений счета, подключенные дополнительные услуги, среднее значение трат абонента за 3 месяца;

– длительность сотрудничества с оператором, наличие абонента в определенной группировке.

На основе выявленных показателей были созданы Lua-функции, которые обеспечивают персонализированный расчет суммы доверительного платежа и расчет комиссии за предоставление услуги. Результат применения скриптов привел к ряду улучшений, а именно к повышению точности расчетов, удовлетворенности клиентов от услуги и росту прибыли компании. Увеличение роста запросов на подключение представлено на рис. 2.

Рис. 2. Запросы на подключение доверительного платежа по новым показателям

Оптимизация процесса выдачи доверительного платежа на основе глубокого анализа профиля клиента, разработки Lua-функций и внедрения веб-приложения Customer Navigator позволила добиться значительных улучшений. Комплексный подход к анализу данных и расчету условий помог сбалансировать интересы клиентов и компании. Клиенты получили удобную и справедливую услугу, а компания увеличила свою прибыль и снизила риски.

3. Программная реализация

Для удобства работы сотрудников был создан веб-инструмент Customer Navigator. Приложение предоставляет удобный интерфейс для выполнения различных задач [3]. Преимущества приложения заключаются в интуитивном интерфейсе. Сотрудникам не требуется глубоких технических знаний. Гибкость настройки дает возможность изменения условий таргетинга и расчетов в зависимости от изменений бизнес-процессов. Также автоматизация ключевых этапов снижает вероятность ошибок при принятии решений. Интерфейс веб-приложения представлен на рис. 3.

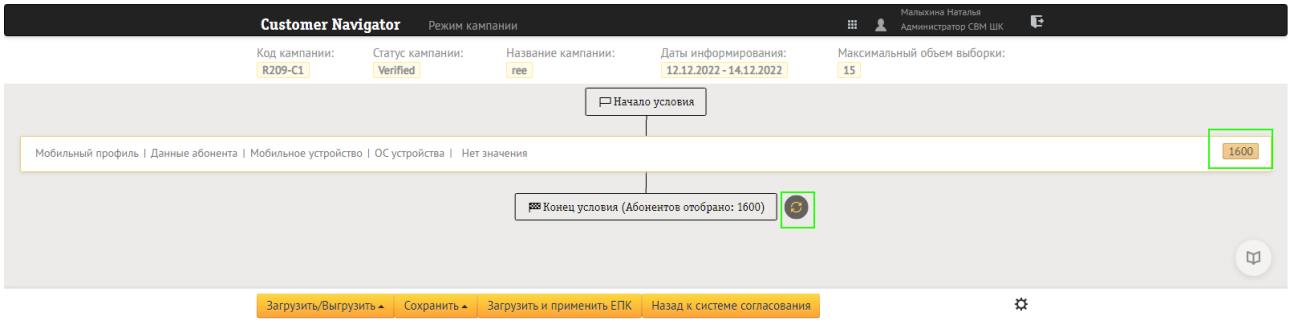


Рис. 3. Интерфейс веб-приложения

Данное решение позволило сотрудникам компании выбирать условия, проверять соответствие клиента критериям. Это решение минимизировало ручной труд и вероятность ошибок, повысив точность и скорость работы.

Заключение

В рамках работы был проведен анализ рынка телекоммуникационных услуг, выделены основные игроки, тенденции развития и специфика конкуренции, решена задача разработки и внедрения эффективных инструментов для улучшения процесса предоставления доверительного платежа. Для упрощения взаимодействия с системой и ускорения проверки клиентов было разработано приложение, позволяющее сотрудникам компании выбирать условия, проверять соответствие клиента критериям, а также рассчитывать сумму и комиссию предоставляемой услуги.

Литература

1. *Макаров М. С.* Реализация основных функций высокоуровневого языка программирования с дальнейшим преобразованием их в язык Lua / М. С. Макаров // Сборник трудов конференции «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» – Москва : Российский университет дружбы народов. – 2021.

2. *Раченко Т. А.* Инструменты управления бизнес-процессами телекоммуникационных компаний / Т. А. Раченко // Вестник науки – 2014. – С. 223–226.

3. *Сергеев М. А.* Программная реализация оптимизации бизнес-процессов в телекоммуникациях / М. А. Сергеев // Автоматизация и вычислительные системы. – 2020. – № 8. – С. 102–110.

УДК 004

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРОЦЕССА ПОДАЧИ ДЕКЛАРАЦИИ В СИСТЕМУ «НАЛОГОВЫЙ МОНИТОРИНГ» В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Ю. В. Бондаренко, П. С. Щетинина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена вопросам автоматизации процесса подачи декларации по доходам иностранных юридических лиц в систему «Налоговый мониторинг» в режиме реального времени. Представлено описание бизнес-процесса формирования отчетности для оперативного и корректного представления данных в витрину «Налогового мониторинга. Разработано программное обеспечение реализации механизма выгрузки инкрементальных данных во внешние системы из ERP-системы налогоплательщика.
Ключевые слова: налоговый мониторинг, автоматизация, подача декларации, налог на доходы иностранных юридических лиц.

Введение

В целях совершенствования контроля за правильностью исчисления, своевременностью и полнотой уплаты налогов и иных обязательных платежей в российском законодательства о налогах и сборах появился новый институт — налоговый мониторинг. Соответствующий раздел введен в Налоговый кодекс Российской Федерации (далее — НК РФ) Федеральным законом №348-ФЗ от 4 ноября 2014 года. Согласно внесенным изменениям с 1 января 2015 года налогоплательщикам предоставляется возможность перейти на особую форму налогового контроля — налоговый мониторинг.

В широком смысле налоговый мониторинг представляет собой специализированную систему постоянного наблюдения, оценки и прогноза изменения состояния налоговой системы государства [1–2]. Он представляет собой инструмент добровольного раскрытия информации налоговому органу. Налоговый мониторинг, как вид налоговой проверки, требует проведение работы в режиме реального времени за текущий период. Проверка правильности исчисления налогов в режиме онлайн проводится путем запроса документов (информации, разъяснений), изучения внутренних систем учета налогоплательщиков. Такой формат взаимодействия возможен при доверительном взаимодействии налоговых органов и налогоплательщиков. При этом налогоплательщики должны предоставлять к раскрытию информацию о своей деятельности.

Целью работы является автоматизация процесса предоставления декларации по налогам на доходы иностранных юридических лиц в систему налогового мониторинга, осуществляя принципы раскрытия информации в режиме реального времени.

1. Описание процессов налогового мониторинга

Налоговый мониторинг — это прежде всего внедрение онлайн- технологий. Участие компании в рамках налогового мониторинга возможно в случае соблюдения следующих поэтапных действий:

– оценить готовность компании к переходу на налоговый мониторинг (риски, контроли, информационные системы и база данных);

– доработать налоговые процессы, контроли, информационные системы для перехода на налоговый мониторинг;

– подготовить и подать пакет документов для перехода на налоговый мониторинг.

Витрина налогового мониторинга представлена на рис. 1.

Рис. 1. Витрина налогового мониторинга

Участники налогового мониторинга в зависимости от собственной технической подготовленности могут выбрать способ информационного взаимодействия с налоговой службой. В настоящий момент предусмотрено три варианта взаимодействия:

– доступ в учетную систему;

– доступ в аналитическую витрину данных (организация публикует информацию для налогового органа);

– обмен информацией по телекоммуникационным каналам связи (ТКС).

Доступ к данным разрешает налоговому органу в режиме реального времени отслеживать операции и оценивать корректность показателей отчетности, информация о системе внутреннего контроля организации позволяет быть уверенным в отсутствии у нее ошибок и неучтенных операций и оценить полноту и достоверность показателей налоговой отчетности.

Данные, собираемые в первичной учетной системе, должны быть своевременно и достоверно представлены во внешнюю систему, а затем в витрину «Налогового мониторинга». При этом, технология формирования деклараций должна обеспечивать принцип выгрузки данных в режиме реального времени. Для этого предусмотрен отдельный процесс, который позволяет:

– Автоматически собрать данные в системе, сформировав хранилище данных, отраженных в декларации;

– Сформировать представления, к которым возможно обращение внешних систем для выгрузки данных в витрину «Налогового мониторинга»

– Поддерживать процесс выгрузки данных в режиме реального времени, догружая во внешние системы инкрементальные данные.

Интеграционное взаимодействие при подаче НДИЮЛ через хранилища данных представлено на рис. 2.

2. Практическая реализация

Каждое из представлений налоговой формы формируется в первичной учетной системе для последующей передачи во внешние системы. Ядро механизма интеграции предусматривает два режима выгрузки данных объектов интеграции:

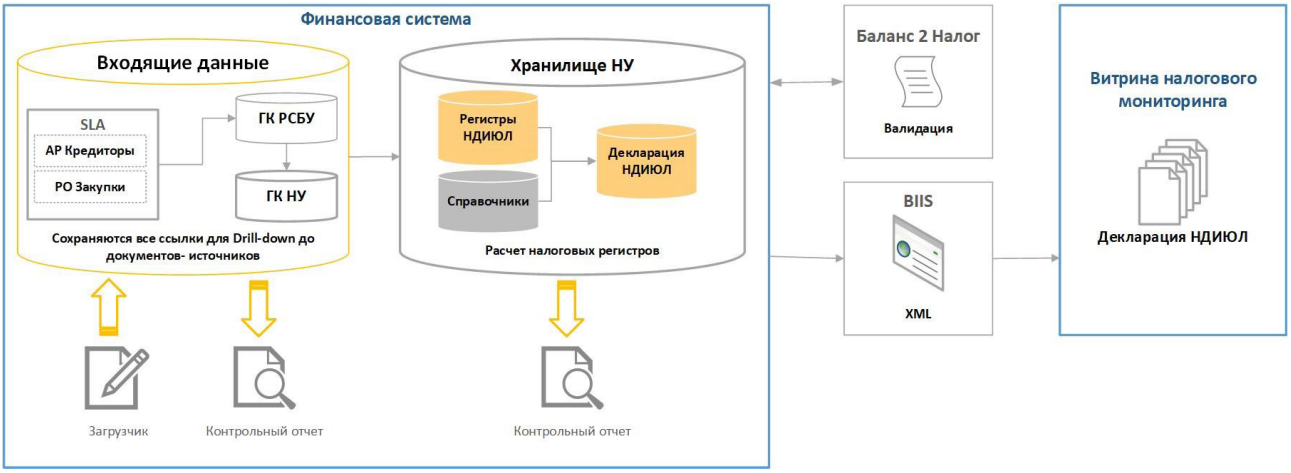


Рис. 2. Интеграционное взаимодействие при подаче НДИЮЛ через хранилища данных

– «Полная выгрузка» данных объекта интеграции, при котором выгрузка формируется выборкой записей таблицы данных объекта в соответствии с входными параметрами процесса интеграции, например, по номеру налоговой декларации или периоду;

– «Инкрементальная выгрузка» данных объекта интеграции, при котором в выгрузку попадают только записи таблицы данных объекта, измененные с момента последнего успешного интеграционного обмена. Использование режима инкрементальной выгрузки позволяет сократить объем передаваемых данных.

Для инкрементального режима реализован процесс отслеживания изменений данных. Текущая версия архитектуры интеграции предусматривает использование триггерной таблицы.

Триггерная таблица обладает рядом особенностей:

1) Триггерная таблица предназначена для регистрации изменений в таблицах данных.

2) Триггерная таблица ориентирована на реализацию быстрых триггеров таблиц данных, вставляющих записи в триггерную таблицу. Триггерная таблица имеет только один первичный ключ, используемый для доступа к конкретной записи этой таблицы.

3) Триггеры должны оказывать минимальное влияние на операции с таблицами, поэтому в коде триггеров предпочтительно использовать только значения полей базовой таблицы/представления и константы.

4) Триггерная таблица имеет следующие поля:

– Уникальный идентификатор записи триггерной таблицы. Заполняется из sequence.

– Текстовое поле с именем таблицы/представления, в которой произошло изменение данных.

– Поля для хранения значений ключевых полей, идентифицирующих измененную запись.

– Поле, в котором хранится код изменения — I (insert), U (update), D (delete).

5) В триггерной таблице могут присутствовать несколько записей для одной и той же записи таблицы данных. Например, запись таблицы данных была создана, затем запись была несколько раз изменена.

Запуская процесс инкрементальной выгрузки во внешнюю систему, отбираются данные триггерных таблиц. Этот механизм позволяет выгружать обновленные данные в режиме реального времени, поддерживая необходимые требования взаимодействия с витриной «Налогового мониторинга». Процесс выгрузки данных во внешние системы реализуется путем вызовов процедур интеграционного API.

В рамках работы над построением бизнес-процесса формирования отчетности для оперативного и корректного представления данных в витрину «Налогового мониторинга» был автоматизирован процесс подачи декларации, осуществляя принципы раскрытия информации

в режиме реального времени. Был разработан механизм выгрузки инкрементальных данных во внешние системы из ERP-системы крупнейшего налогоплательщика.

Заключение

В рамках работы над построением бизнес-процесса формирования отчетности для оперативного и корректного представления данных в витрину «Налогового мониторинга» в настоящем исследовании описан подход к автоматизации процесс подачи декларации, основанный на принципах раскрытия информации в режиме реального времени. Разработан механизм выгрузки инкрементальных данных во внешние системы из ERP-системы крупнейшего налогоплательщика.

Литература

1. *Зарудная А. М.* Налоговый мониторинг как инструмент налоговой цифровизации и перспективы его развития в Российской Федерации / А. М. Зарудная // Вестник науки. – 2023. – Т. 3, № 12 (69). – С. 89–95.

2. *Шелкунов А. Д.* К вопросу совершенствования налогового мониторинга / А. Д. Шелкунов // Закон. – 2024. – № 7. – С. 181–185.

УДК 005

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ С ДИНАМИЧЕСКОЙ КОРРЕКТИРОВКОЙ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Н. Ю. Борзых, Т. Е. Смоленцева, Е. Г. Бергер

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В статье представлена модель оценки эффективности, качества и надёжности при выборе стратегии проектирования из множества альтернатив с механизмом динамической корректировки весовых коэффициентов. Предложен математический аппарат для адаптивной настройки коэффициентов на основе анализа отклонений фактических показателей от плановых значений. Рассмотренная модель позволяет повысить точность оценки альтернативных стратегий проектирования в условиях изменяющейся проектной среды.

Ключевые слова: динамическая оценка эффективности, весовые коэффициенты, адаптивные модели, многокритериальная оптимизация, принятие решений, интегральные показатели, эффективность проектирования, корректировка коэффициентов, оценка качества проектов, проектные стратегии, FLQ-модель.

Введение

Современные проектные организации функционируют в условиях беспрецедентной динамичности внешней среды, характеризующейся постоянными изменениями требований заинтересованных сторон, технологических возможностей и рыночных условий [2]. В эпоху цифровой трансформации скорость изменений продолжает расти, создавая новые вызовы для систем управления проектами и процессов принятия решений.

Статические модели оценки эффективности, традиционно применяемые при выборе стратегий проектирования, демонстрируют существенные ограничения в современных условиях [6]. По данным исследования Project Management Institute за 2024 год, 11.4 % инвестиций в проекты расходуются нерационально из-за неэффективного управления и принятия решений. Приведенная статистика подчеркивает острую необходимость в разработке более совершенных инструментов оценки эффективности проектных решений.

Исследования Подиновского В.В. [1], Набатовой Д.С. [3] и других авторов в области многокритериальной оптимизации и теории принятия решений указывают на необходимость разработки адаптивных механизмов корректировки весовых коэффициентов. Их работы демонстрируют, что повышение точности оценки в динамично меняющихся условиях требует создания математически обоснованных механизмов адаптации моделей к изменениям внешней среды.

1. Материалы и методы

Разработанная модель оценки эффективности основана на интегральном показателе, позволяющем комплексно оценить различные аспекты проектной деятельности. В основу модели положен принцип многокритериальной оценки, учитывающий три ключевых аспекта, определяющих успешность любого проекта: финансовые затраты, временные ресурсы и качество результатов [5]. Выбор данных аспектов обусловлен их фундаментальным влиянием на результативность проектной деятельности и возможностью их количественной оценки. Для обеспечения корректности сравнения и агрегации различных показателей в единую метрику применяется процедура нормализации, приводящая все параметры к единой шкале измере-

ния. Интегральный показатель эффективности Z представлен в виде взвешенной суммы нормализованных показателей, что позволяет учесть относительную важность каждого аспекта в общей оценке эффективности проектного решения.

$$Z = \alpha \cdot F + \beta \cdot L + \gamma \cdot Q \to \min, \tag{1}$$

где F — нормализованный показатель финансовых затрат, отражающий все виды расходов на реализацию проекта

L — нормализованный показатель временных затрат, характеризующий длительность реализации проекта

Q — нормализованный показатель качества, оценивающий соответствие результатов требованиям

α, β, γ — весовые коэффициенты, определяющие относительную важность каждого аспекта

Весовые коэффициенты подчиняются ограничениям:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \end{cases}, \tag{2}$$

Данная система обеспечивает нормализацию весов и интерпретируемость результатов оценки. Единичная сумма коэффициентов позволяет рассматривать каждый коэффициент как долю влияния соответствующего показателя на общую оценку эффективности.

Взаимосвязь между компонентами модели отражена на FLQ-схеме (рис. 1).

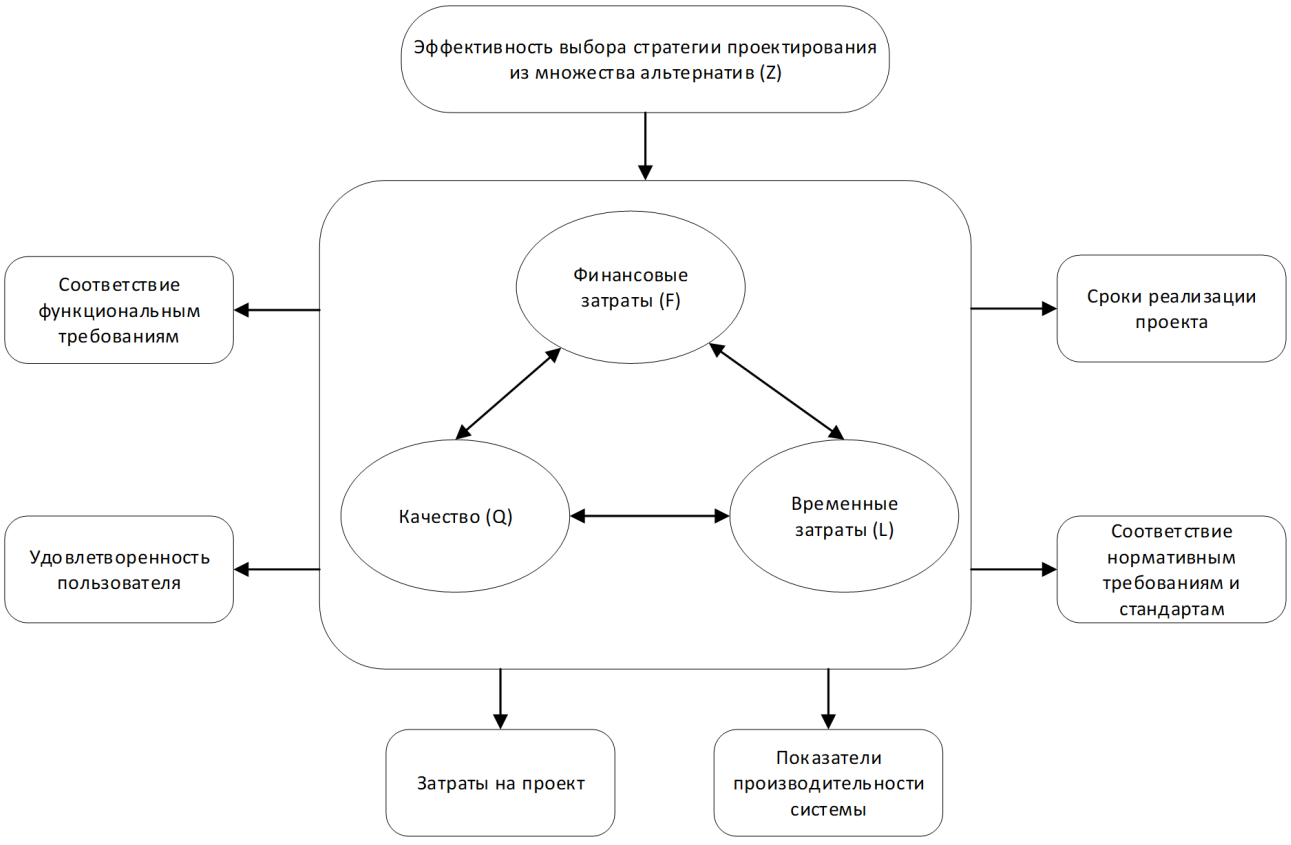


Рис. 1. FLQ-схема оценки проектных стратегий

Ключевой особенностью предложенной модели является механизм динамической корректировки весовых коэффициентов, который обеспечивает адаптивность оценки к изменяющимся условиям проектной среды [3, 5]. В отличие от традиционных подходов, использующих статические веса, разработанный механизм позволяет автоматически перестраивать систему

оценки в ответ на возникающие отклонения и изменения приоритетов. Корректировка весовых коэффициентов осуществляется на каждом временном шаге реализации проекта, что обеспечивает непрерывную актуализацию модели.

$$\alpha(t)=\alpha(t-1)+\Delta\alpha(t), \tag{3}$$

где $\alpha(t)$ — значение коэффициента на текущем шаге

$\alpha(t-1)$ — значение коэффициента на предыдущем шаге

$\Delta\alpha(t)$ — величина корректировки

Величина корректировки определяется на основе анализа отклонений фактических показателей от плановых значений:

$$\Delta\alpha(t)=k\cdot\frac{F_{факт}-F_{план}}{F_{план}}, \tag{4}$$

где k — коэффициент чувствительности, определяющий скорость реакции системы на отклонения

$F_{факт}$ — фактическое значение показателя

$F_{план}$ — плановое значение показателя

2. Результаты и обсуждение

Разработанная модель прошла апробацию при реализации проектов по созданию программно-аппаратных комплексов в ООО «Центр интеграции приложений». Исходные весовые коэффициенты были определены на основе экспертных оценок ключевых специалистов, анализа исторических данных по аналогичным проектам, приоритетов заинтересованных сторон.

На начальных этапах проекта были определены исходные весовые коэффициенты:

α (финансовые аспекты) = 0.4,

β (временные аспекты) = 0.3,

γ (качественные аспекты) = 0.3.

В процессе реализации проекта наблюдались отклонения фактических показателей затрат и сроков от плановых значений. Превышение бюджета на 15 % от плановых значений. Отставание от графика на 10 %. Снижение показателей качества на 5 %.

Превышение бюджета привело к корректировке коэффициента α согласно формулам (3) и (4):

$$\Delta\alpha=0.05\cdot(1.15-1)/1=0.075;$$
$$\alpha(t)=0.4+0.075=0.475.$$

Одновременно с этим произошла корректировка других коэффициентов для соблюдения условия $\alpha+\beta+\gamma=1$.

После нормализации всех коэффициентов получены значения:

$$\begin{cases}\alpha=0.475\\ \beta=0.275\\ \gamma=0.250\end{cases}$$

В результате динамической корректировки весовых коэффициентов модель адаптировалась к изменившимся условиям, повысив приоритет минимизации затрат. Что позволило своевременно принять меры по оптимизации бюджета и избежать критического превышения стоимости проекта.

Аналогичным образом модель реагировала на изменения в сроках и качестве проекта, адаптируя приоритеты оценки. В результате применения динамической модели удалось повы-

сить эффективность проектирования на 10 % и оптимизировать затраты на 8 % по сравнению с базовым сценарием.

Заключение

Разработанный механизм динамической корректировки коэффициентов представляет собой существенный шаг вперед в развитии методов оценки эффективности стратегий проектирования. Предложенная модель демонстрирует значительные преимущества по сравнению с традиционными подходами благодаря своей способности адаптироваться к изменениям проектной среды. Математическая обоснованность модели гарантирует строгое соблюдение условий нормализации весовых коэффициентов и обеспечивает устойчивость процесса корректировки при сохранении интерпретируемости результатов оценки.

Дальнейшее развитие модели может быть направлено на интеграцию с методами машинного обучения для повышения точности прогнозирования отклонений и расширение набора учитываемых факторов эффективности.

Литература

1. *Подиновский В. В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В. В. Подиновский. – Москва : Издательство Физматлит, 2007. – 64 с.

2. *Киселева И. А.* Методы оценки рисков и принятия решений в инвестиционных проектах в условиях экономической нестабильности / И. А. Киселева, М. С. Гаспарян, М. В. Карманов, В. И. Кузнецов // Journal of Management & Technology. – 2023. – Т. 23, № 1. – С. 57–68.

3. *Набатова Д. С.* Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений: учебник и практикум для вузов / Д. С. Набатова. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. – 292 с.

4. *Середенко Н. Н.* Сравнительный анализ многокритериальных методов принятия решений / Н. Н. Середенко, Ю. А. Периков, А. А. Дружаев // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2010. – № 1. – С. 83–86.

5. *Борзых Н. Ю.* Модель оценки эффективности многокритериального выбора стратегии проектирования проектов в организационных системах // Современные тенденции и практические решения в науке: Сборник статей Международной научнопрактической конференции, Москва, 30 июля 2024 г. – Москва: Международный центр «Новые научные исследования», 2024. – С. 12–19.

6. *Пономарева З. Р.* Модели и методы разработки и принятия управленческих решений // В сборнике: Проблемы и перспективы развития электроэнергетикии электротехники. Материалы V Всероссийской научно-практической (с международным участием) конференции, посвященной празднованию 55-летия КГЭУ. В 2-х томах. Казань, 2023. – С. 144–149.

УДК 519.8

ПОИСК ВСЕХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Ю. В. Бугаев, И. Ю. Шурупова

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия» им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина

Аннотация. В работе предлагается метод поиска всех решений закрытой задачи о назначениях. Потребность в их поиске возникает, например, при решении некоторых дискретных задач посредством максимизации функции Лагранжа. Суть метода состоит в сочетании модифицированного симплекс-метода с алгоритмом последовательного просмотра всех вершин графа. Разработана версия симплекс-метода, адаптированная для ускоренного решения задачи о назначениях. Также модифицирован известный алгоритм поиска в ширину на графе. Составлена программа для системы Matlab, реализующая предлагаемый метод.

Ключевые слова: задача о назначениях, поиск всех решений, двойственность, функция Лагранжа, субдифференциал, модифицированный симплекс-метод, базисное решение, зацикливание, обратная матрица, поиск в ширину на графе, структура данных типа «очередь».

Введение

Данная задача возникает в следующей ситуации. На практике помимо классической задачи о назначениях часто возникают некоторые ее изменения, связанные, например, с многокритериальностью или наличием дополнительных ограничений. Как показано в [1], эффективным методом решения подобных задач является использование механизма двойственности и поиск максимума функции Лагранжа

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}\geq 0}\ \min_{\mathbf{x}\in S} L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\boldsymbol{\lambda}\geq 0} q(\boldsymbol{\lambda}).$$

Значение функции $q(\boldsymbol{\lambda}) = \min\limits_{\mathbf{x}\in S} L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})$ определяется некоторым решением специальным образом составленной задачи о назначениях (она получается из исходной посредством преобразований). Как известно, для дискретных задач функция Лагранжа является кусочно-гладкой. В местах склейки ее градиент терпит разрыв и его направление не определяется однозначно. В данном случае разрыв обусловлен тем, что в этих точках задача о назначениях, определяющая функцию $q(\boldsymbol{\lambda})$, имеет несколько решений. В этом случае для определения направления поиска экстремума приходится использовать субдифференциал целевой функции, который определяется как конус, натянутый на векторы-градиенты функции Лагранжа, каждый из которых порождается одним частным решением задачи о назначениях. Поэтому для обоснованного определения направления поиска экстремума необходимо найти несколько, желательно все, решения задачи о назначениях при фиксированном $\boldsymbol{\lambda}$.

1. Описание метода

Изложение метода поиска начнем издалека. Пусть имеем задачу ЛП в канонической форме

$$f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0.$$

Согласно симплекс-методу, начиная с некоторого базиса происходит целенаправленный перебор базисных точек задачи путем замены одной базисной переменной на небазисную. Каждая новая базисная переменная x_J ищется по минимальному коэффициенту c_J в целевой функции для небазисных переменных. Если $c_J < 0$, то переход к новому базису позволит

уменьшить значение целевой функции и процесс поиска решения следует продложить. Если $c_J > 0,$ то найдено единственное оптимальное решение. Если же $c_J = 0,$ то смена базиса не изменит значение целевой функции, но позволит найти другие оптимальные решения. Проблема в том, что при обычной смене базиса по схеме симплекс-метода целевая функция монотонно уменьшается и возврат к старому базису невозможен. Если же значение целевой функции не меняется, то почти гарантированно применение схемы симплекс-метод приведет к зацикливанию. Поэтому перебор подходящих базисных точек должен осуществляется по принципу перебора вершин циклического графа. Например, это можно делать с помошью поиска в ширину, т. е. с использованием структуры данных типа «Очередь», см. алгоритм [2]:

```
ОЧЕРЕДЬ := ∅; v ⇒ ОЧЕРЕДЬ; НОВЫЙ[v] := ложь;
while ОЧЕРЕДЬ <> ∅ do
begin p ⇐ ОЧЕРЕДЬ; <Посетить p>;
   for u ∈ СПИСОК[p] do
      if НОВЫЙ[u] then
      begin u ⇒ ОЧЕРЕДЬ; НОВЫЙ[u] := ложь;
      end;
end.
```

Здесь граф представлен посредством списков инцидентности, согласно которому каждой вершине v соответствует СПИСОК[v] вершин, инцидентных v. Элемент булевского массива НОВЫЙ[v] равен ИСТИНА, если v еще не была посещена. Операции $v \Rightarrow$ОЧЕРЕДЬ и $p \Leftarrow$ОЧЕРЕДЬ означают соответственно запись и извлечение элементов из массива ОЧЕРЕДЬ.

В качестве вершин графа будем рассматривать базисные точки, в которых значение целевой функции постоянно и равно $f^{\min}$. Отличие исходного варианта алгоритма от предлагаемого в том, что в исходном варианте структуры СПИСОК и ОЧЕРЕДЬ содержат объекты одного типа — вершины графа, а в предлагаемом алгоритме в ОЧЕРЕДЬ заносятся базисные точки (векторы $\mathbf{P}$ с номерами соответствующих базисных переменных) и сопутствующие параметры, позволяющие восстановить базис $\mathbf{P}$ при откате алгоритма. СПИСОК состоит из номеров переменных, являющихся кандидатами в новый базис. Вместо массива НОВЫЙ для предотвращения зацикливания используется список КОРЗИНА уже просмотренных базисов

Предлагаемый алгоритм

```
ОЧЕРЕДЬ := ∅; V ⇒ ОЧЕРЕДЬ; V ⇒ КОРЗИНА;
while ОЧЕРЕДЬ <> ∅ do
begin P ⇐ ОЧЕРЕДЬ;
   < Перейти к базису P; вывести P ; составить СПИСОК[ P ]; >
   for x_J ∈ СПИСОК[P] do
   begin <Для x_J выбрать x_K; построить базис U = (x_J ⇔ x_K)>
   if  U ∉ КОРЗИНА then
      begin U ⇒ ОЧЕРЕДЬ; U ⇒ КОРЗИНА;
      end
   end
end
```

Замечание. Выбранному x_J может соответствовать несколько x_K. Рекомендуется рассмотреть все варианты нового базиса, т.е. перебрать и проверить все x_K из этого набора.

Для иллюстрации рассмотрим пример поиска.

Имеем задачу ЛП в канонической форме:

$$f = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_6 = 1 \\ x_j \ge 0 \end{cases}.$$

Начальный базис $(x_4, x_5, x_6) = (2, 1, 1)$, $f = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3$.
Новый базис $(x_4, x_1, x_6) = (1, 1, 1)$, $f = 2x_5 - 2x_2 - 2x_3 - 2$.
Новый базис $(x_2, x_1, x_6) = (1, 1, 0)$, $f = 2x_4 - 4$.

Целевая функция не содержит отрицательных коэффициентов, следовательно, оптимальное решение $\mathbf{A} = (1, 1, 1)$ найдено. Исходя из этого базиса начинаем обход оптимальной области. Граф, который следует при этом обойти, приведен на рис. 1.

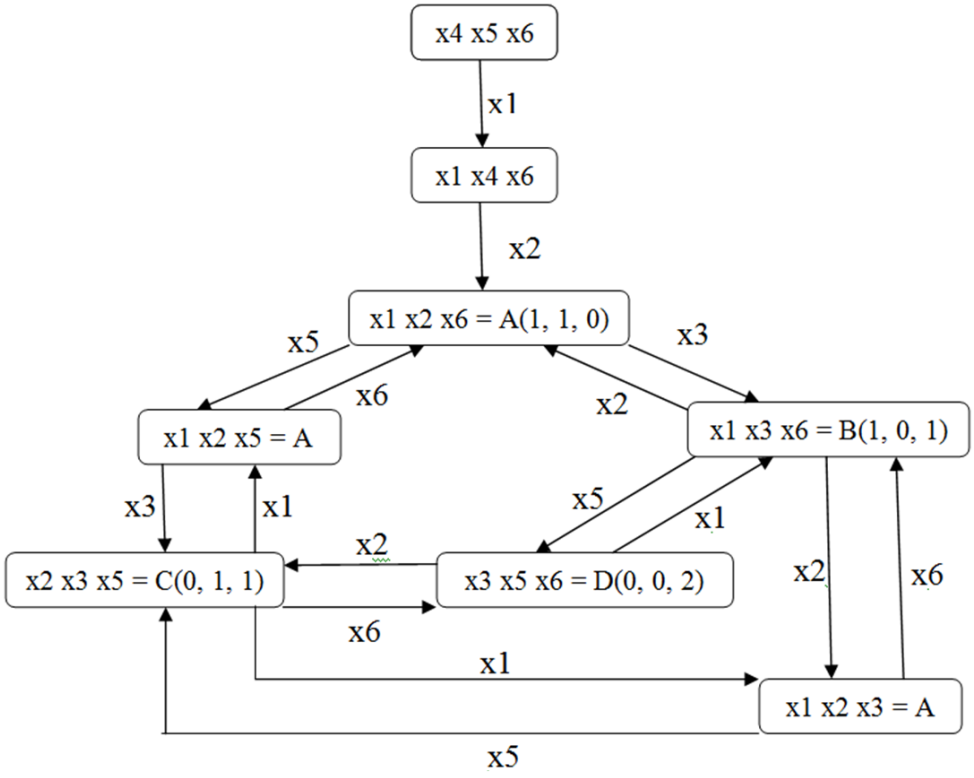


Рис. 1. Граф расположения оптимальных базисных точек

В результате такого обхода найдены 4 точки $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ с одинаковым значением $f^{\min} = -4$.

Теперь вернемся к главной теме — задаче о назначениях. Известно, что задача о назначениях — весьма частный вид задачи ЛП, поэтому в принципе ее можно решить обычным симплекс-методом. Сложность в том, что при формировании соответствующей задачи ЛП размерность используемых массивов существенно возрастает, поэтому симплекс-метод используется здесь только в учебных целях. Для современных компьютеров проблема затраты памяти давно не актуальна, вопрос состоит во влиянии больших объемов данных на быстродействие алгоритма (вычислительную сложность). Предлагается следующий способ ускорения процесса вычисления.

Прежде всего, отметим, что после сведения закрытой задачи о назначениях к задаче ЛП матрица $\mathbf{A}$ ограничений имеет размеры $(2n \times n^2)$, а ее ранг равен $2n - 1$. (Ниже данный факт доказывается.) Поэтому последнюю строку можно исключить.

Далее обратимся к так называемому модифицированному симплекс-методу. Матрицу системы ограничений представим в виде $\mathbf{A}=[\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$, где $\mathbf{B}$ — матрица базиса, $\mathbf{N}$ — матрица, столбцы которой соответствуют небазисным переменным. Соответственно $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}\mathbf{c_B}\\ \mathbf{c_N}\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{x_B}\\ \mathbf{x_N}\end{pmatrix}$.

Тогда справедливы соотношения

$$\mathbf{x_B}=-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{z}=\left(\mathbf{c_N}-\mathbf{N}^T(\mathbf{B}^{-1})^T\mathbf{c_B}\right)^T\mathbf{x_N}+\left((\mathbf{B}^{-1})^T\mathbf{c_B}\right)^T\mathbf{b} \tag{1}$$

$\mathbf{z}$ — вектор коэффициентов небазисных переменных целевой функции.

Суть модифицированного симплекс-метода состоит в использовании соотношений (1) для получения базисного решения и представления целевой функции. При смене базиса за счет перестановки столбцов меняются матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{N}$. Кроме того применяется эффективное преобразование матрицы $\mathbf{B}^{-1}$ на основе текущей матрицы $\mathbf{B}^{-1}$ и новой матрицы $\mathbf{B}$. Формулы преобразования имеют следующий вид [3].

Обозначим $\overline{\mathbf{B}}$ матрица нового базиса. Пусть r — номер столбца, которым отличаются $\overline{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{B}^{-1}$. Введем столбец $\mathbf{g}=\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{B}}^{<r>}$, где $\overline{\mathbf{B}}^{<r>}$ — r-й столбец матрицы $\overline{\mathbf{B}}$. Матрица нового базиса формируется по строкам:

$$\left(\overline{\mathbf{B}}^{-1}\right)_{<r>}=\begin{cases}\dfrac{1}{g_r}\left(\overline{\mathbf{B}}^{-1}\right)_{<r>}, \text{ если } i=r\\ \left(\overline{\mathbf{B}}^{-1}\right)_{<i>}-\dfrac{g_i}{g_r}\left(\overline{\mathbf{B}}^{-1}\right)_{<r>}, \text{ если } i\neq r\end{cases}, \ i=1,2,...,m. \tag{2}$$

Здесь $\left(\overline{\mathbf{B}}^{-1}\right)_{<i>}$ — i-я строка матрицы $\overline{\mathbf{B}}^{-1}$.

При большой размерности задачи о назначениях число столбцов матрицы $\mathbf{N}$ значительно больше размера квадратной матрицы $\overline{\mathbf{B}}^{-1}$. Поэтому, судя по формулам (1) основное машинное время тратится на перемножение матриц $\mathbf{B}^{-1}$ и $\mathbf{N}$. Умножения матрицы на столбец или строку требуют на порядок меньшего времени. Преобразования по формулам (2) по времени также сопоставимо с умножением на столбцы. Таким образом, для ускорения работы алгоритма заменим действие перемножения матриц на умножения матрицы на столбец или строку. Обозначим: $\mathbf{b},\mathbf{z}$ — векторы свободных членов канонической задачи ЛП и коэффициентов небазисных переменных целевой функции, получающихся при переходе к новому базису; $\overline{\mathbf{N}}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ — матрица коэффициентов, выражающих базисные переменные через небазисные; $\mathbf{T}^{<J>}$, $\mathbf{T}_{<K>}$ — J-й столбец и K-я строка произвольной матрицы $\mathbf{T}$, соответственно; a_{KJ} — ведущий элемент преобразования базиса.

Формулы ускоренного преобразования базиса будут иметь вид:

$$\begin{gathered}\overline{\mathbf{b}}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{b};\quad \overline{\mathbf{N}}^{<J>}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{N}^{<J>};\quad \overline{\mathbf{N}}_{<K>}=\mathbf{B}^{-1}_{<K>}\cdot\mathbf{N};\quad a_{KJ}=\overline{N}_{KJ};\\ \overline{\mathbf{z}}=\mathbf{z}-\left(\frac{z_J}{a_{KJ}}\right)\cdot\mathbf{N}_{<K>};\quad \overline{z_J}=-\left(\frac{z_J}{a_{KJ}}\right);\quad \overline{z}_0=\mathbf{c}_B^T\cdot\overline{\mathbf{b}}.\end{gathered} \tag{3}$$

Кроме того, если использовать M-метод при поиске начального базиса, то размерность задачи ЛП существенно увеличивается. Поэтому для задачи о назначениях нами для уменьшения размерности и ускорения счета предложен универсальный начальный допустимый базис, состоящий из следующих переменных:

$$x_{ii}=1, i=1,...,n;\quad x_{nj}=0, j=1,...,n-1.$$

Их расположение в матрице решений при $n=4$ представлено в табл. 1.

Таблица 1

Расположение переменных в начальном базисе

$x_{11}=1$			
	$x_{22}=1$		
		$x_{33}=1$	
$x_{41}=0$	$x_{42}=0$	$x_{43}=0$	$x_{44}=1$

Тогда начальная матрица $\mathbf{B}$ содержит следующие элементы:

$$B_{ij}=A_{i,(j-1)\cdot(n+1)+1};\ B_{i,\,j+n-1}=A_{i,n\cdot(n-1)+j},\ i=1,...,2n-1,\ j=1,...,n-1;\quad B_{i,2n-1}=A_{i,n^2}. \tag{4}$$

Соответственно, начальная матрица $\mathbf{N}$ содержит столбцы матрицы $\mathbf{A}$, которые не вошли в $\mathbf{B}$.

Для данного начального базиса найдены выражения элементов матрицы $\mathbf{B}^{-1}$:

$$\begin{gathered}B^{-1}_{i,i}=1;\ B_{i+n-1,\,i}=-1,\ B^{-1}_{2n-1,i}=1, i=1,...,n-1;\\ B^{-1}_{2n-1,j}=-1;\ B_{j-1,\,j}=1,\ j=n+1,...,2n-1;\ B^{-1}_{2n-1,n}=1.\end{gathered} \tag{5}$$

Остальные элементы матрицы $\mathbf{B}^{-1}$ равны 0.

В заключение докажем, что матрица $\mathbf{A}$ ограничений задачи ЛП имеет ранг равный $2n-1$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при использовании формул (4), (5) для вычисления элементов начальной матрицы $\mathbf{B}^{-1}$ выполняется равенство $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{I}$. Отсюда можно сделать следующие выводы.

1. Так как ранг произведения матриц не может быть больше ранга сомножителей то матрица $\mathbf{B}$ первоначального базиса не вырождена и $\mathbf{B}^{-1}$ ее обратная матрица.

2. Если умножить последние n строк полной матрицы ограничений закрытой задачи о назначениях на –1 и потом сложить их с первыми n строками, то получим нулевую строку. Значит, ранг матрицы не более $2n-1$. Но поскольку в ней нашелся базисный минор $\det\mathbf{B}$ порядка $2n-1$, то ее ранг в точности равен $2n-1$.

Заключение

По описанному методу была составлена соответствующая программа для системы Matlab. Тестовые расчеты показали, что при размерности задачи о назначениях $n\le 50$ данный «дважды модифицированный» симплекс-метод по быстродействию сопоставим с методом Мака [4]. Таким образом, предлагаемое сочетание ускоренного модифицированного симплекс-метода с поиском в ширину на графе позволяет найти все решения задачи о назначениях.

Литература

1. *Медведева О. А.* Модели и алгоритмы решения многокритериальной задачи о назначениях с дополнительными ограничениями / О. А. Медведева. Дисс…. канд.физ.-мат. наук. – Воронеж : 2013. – 157с.

2. *Липский В.* Комбинаторика для программистов / В. Липский; пер. с польск. – М. : Мир, 1988. – 213 с.

3. *Латипова А. Т.* Применение линейного программирования в исследовании социально-экономических процессов: учебное пособие / А. Т. Латипова; под редакцией А. В. Панюкова. – Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 123 с.

4. *Банди Б.* Основы линейного программирования / Б. Банди; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1989. – 176 с.

УДК 004.023+519.8

РАЗРАБОТКА ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ МУРАВЬИНОГО АЛГОРИТМА

В. Д. Вяткина, К. Г. Резников, Ю. В. Бондаренко

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена разработке веб-приложения для визуализации работы алгоритма муравьиных колоний (АМК) с локальной коррекцией феромонов для решения задачи коммивояжера. Графическая визуализация маршрутов муравьев, осуществленная с помощью библиотеки Two.js, обеспечивает наглядное представление динамики изменений в процессе итераций. Предлагаемый алгоритм в себя построение кратчайшего пути в графе распределения феромонов и отображение взаимодействия между муравьями в процессе поиска. Разработанный подход демонстрирует адаптивность к изменяющимся условиям задачи, что является важным аспектом для дальнейших исследований в области оптимизации и разработки эффективных алгоритмов для решения комбинаторных задач.
Ключевые слова: муравьиный алгоритм, локальная коррекция феромонов, задача коммивояжера, веб-приложение, визуализация.

Введение

В настоящее время алгоритмы, построенные на природных процессах, получили широкое признание в области вычислительной науки и оптимизации. Одним из таких алгоритмов является алгоритм муравьиных колоний (АМК), который имитирует поведение муравьев. Применим данный алгоритм к задаче коммивояжера, заключающаяся в нахождении кратчайшего маршрута, проходящего через заданный набор городов, представляет собой классическую проблему в области теории графов и оптимизации [1–4].

Сложность задачи коммивояжера возрастает с увеличением числа городов, что делает традиционные методы решения неэффективными. АМК предлагает альтернативный подход, основанный на коллективном поведении муравьев, позволяя находить приближенные решения за меньшее время. Однако для глубокого понимания работы данного алгоритма и его эффективности есть возможность визуализировать его процесс.

Существуют веб-приложения с использованием алгоритма муравьиных колоний, однако во многих из них отсутствует динамическая настройка параметров, не используются гибридные подходы с другими алгоритмами и не используются улучшенные правила обновления феромонов.

Данная статья посвящена разработке веб-приложения, которое позволяет наглядно демонстрировать работу алгоритма муравьиных колоний в задаче построения кратчайших маршрутов. Визуализация движения колонии муравьев и динамическое построение маршрутов позволяет наглядно следить за построением маршрутов в задаче коммивояжера.

Благодаря интерактивным элементам пользователи имеют возможность экспериментировать с параметрами алгоритма, что позволяет исследовать его поведение в различных начальных условиях и оценивать эффективность стратегий.

1. Алгоритм муравьиных колоний для визуализации движения муравьиных колоний

Рассмотрим этапы решения задачи с применением алгоритма системы муравьиных колоний, представленные на рис. 1.

После определения этапов решения формализуем их через математические модели и алгоритмические формулы. На каждом шаге, начиная с инициализации феромонов и заканчивая обновлением их уровней, можно выделить ключевые параметры, такие как интенсивность феромонов, вероятность выбора пути и критерии завершения. Эти параметры формализуются в виде уравнений, которые описывают поведение муравьев при поиске оптимального решения.

Для предпоследнего этапа решения, который заключается в выборе подходящего алгоритма машинного обучения, необходимо следовать пошаговому алгоритму.

Шаг 1. Инициализация параметров алгоритма муравьиных колоний:

– n — количество городов;

– m — количество муравьев в колонии;

– α — вес феромона;

– β — вес следа феромона и значимость при выборе маршрута;

– $\tau_{ij}(t)$ — количество феромона на пути из города i в j в момент времени t.

– $p_{ij}(t)$ — коэффициент испарения феромона на пути из города i в j в момент времени t.

Рис. 1. Этапы решения задачи при помощи муравьиных алгоритмов

Шаг 2. Установить начальное количество феромона $\tau_{ij}(0)$ некоторой константой для каждого пути (i, j).

Шаг 3. Распределить m муравьев по n городам случайным образом.

Шаг 4. Пока маршрут не завершится для каждого муравья, выполняется:

– выбрать город j для перехода с вероятностью $p_{ij}^k(t)$:

$$p_{ij}^k(t) = \frac{\tau_{ij}^{\alpha} * \eta_{ij}^{\beta}}{\sum_{u \in N_j^k} \tau_{iu}^{\alpha}(t) * \eta_{iu}^{\beta}(t)}$$

– отметить город j как посещенный в этот маршруте.

Шаг 5. Вычислить продолжительность пути L^k для муравья.

Шаг 6. Найти кратчайший маршрут среди всех муравьев, обновить глобальный кратчайший маршрут, если найден более короткий.

Шаг 7. Обновление количество феромона по формуле:

$$\tau_{ij}(t+n) = p * \tau_{ij}(t) + \triangle\tau_{ij}(t,t+n)$$

где
$$\triangle\tau_{ij}(t,t+n) = \sum_{k=1}^{m} \tau^{k}{}_{ij}(t,t+n) \quad (1)$$

$$\triangle\tau^{k}{}_{ij}(t,t+n) = \begin{cases} \frac{Q}{L^k} \\ 0 \end{cases} \quad (2)$$

где $\frac{Q}{L^k}$ есть путь из i в j.

Шаг 8. Если требуется продолжить алгоритм, то отчистить путь каждого муравья и перейти на шаг 2. В противном случае, кратчайший маршрут найден.

Для визуализации движения муравьиных колоний в задаче коммивояжера было разработано веб-приложение с использованием представленного алгоритма.

2. Практическая реализация

Веб-приложение реализовано на языке программирования JavaSctipt с использованием фреймворка Vue.js.

При выборе библиотеки для визуализации данных и создания интерактивных частей важно учитывать специфику задачи и его цели. Для создания графического интерфейса и визуализации движений муравьев был проведен анализ достоинств и недостатков библиотек для визуализации. (табл.1).

При реализации веб-приложения была использована библиотека Two.js. — инструмент для работы с векторной графикой и анимацией, что позволяет создавать визуальные эффекты [6, 7].

Основные аспекты использования Two.js в приложении:

– **Создание графики.** Позволяет создать линии маршрутов между городами, по которым движутся муравьи.

– **Анимация.** В веб-приложении применяется метод *request_Animation_Frame* для обновления позиции муравьев и отрисовки изменений на экране. Это позволяет создать плавную анимацию перемещения.

– **Управление элементами.** С помощью библиотеки предоставляется возможность динамически изменять положение городов.

Таблица 1

Сравнительный анализ библиотек для визуализации движения муравьев

Библиотека	Достоинства	Недостатки
d3.js	1. Позволяет создавать сложные и настраиваемые визуализации, включая интерактивные графики и диаграммы. 2. Широкие возможности по работе с данными, включая привязку данных к элементам DOM.	1. Сложность реализации; 2. При работе с большим количеством элементов производительность может снижаться.
p5.js	1. Имеет интуитивно понятный API; 2. Легкость реализации; 3. Реализация 2D визуализации.	1. Ограниченная функциональность для сложных графиков; 2. При работе с большим количеством элементов производительность может снижаться.

two.js	1. Имеет интуитивно понятный API; 2. Легкость реализации.	1. Ограниченная функциональность; 2. Отсутствие 3D поддержки.
three.js	1. Поддержка 3D визуализация; 2. Поддержка WebGL; 3. Широкий функционал для визуализации.	1. Сложность реализации.
cytoscape.js	1. Позволяет легко работать с графами и сетями. 2. Поддерживает различные форматы данных для импорта и экспорта сетей.	1. Ограниченные возможности для кастомизации визуализаций по сравнению с d3.js. 2. Может потребоваться время на изучение API для эффективного использования всех функций.

Корневая структура проекта веб-приложения организована с учетом удобства разработки и поддержки кода. Главным каталогом исходного кода является *src*. Внутри каталога *src* расположены следующие каталоги и файлы:

components — каталог компонентов Vue-приложения, реализующие основные функциональные блоки:

– Graph.js — компонент, отвечающий за визуализацию графа, на котором осуществляется поиск кратчайшего пути.

– AntColony.js — компонент, реализующий алгоритм муравьиных колоний, который управляет поведением муравьев и их взаимодействием с графом.

– Drawer.js — компонент, отвечающий за отрисовку элементов на экране и обновление визуализации в реальном времени.

App.vue — файл корневого компонента приложения, который объединяет все компоненты и управляет их состоянием.

Каждый компонент в каталоге ***components*** имеет четко определенные функции и отвечает за отдельные аспекты работы приложения. Это позволяет легко модифицировать и расширятьфункциональность проекта. Структура каталогов организована таким образом, чтобы обеспечить высокую степень переиспользуемости кода и поддерживать чистоту архитектуры.

Перейдем к практическому примеру работы приложения.

Рассмотрим пример работы веб-приложения для сетевого графика «вершина-город».

Координаты городов (x, y) задаются случайными числами в пределах от 0 до 400 с уникальным идентификатором. Таблица входных параметров приложения представлена в табл. 2.

Таблица 2

Входные параметры приложения

Количество городов	5
Количество муравьев	10
Вес феромона	1
След феромона	5
Коэффициент испарения	0,5
Количество итераций	10
Скорость	100

Скорость движения муравьев по умолчанию задана значением 100. Однако в веб-приложении реализовано управление скоростью по маршруту с помощью свойства класса и мето-

да установки значения. Это позволит динамически изменять скорость движения муравьев во время анимации.

Далее генерируются маршруты и обновляются феромоны. Результаты работы алгоритма передаются в компонент *Drawer.js* для отрисовки графика. Полученный результат представлен на рис. 2.

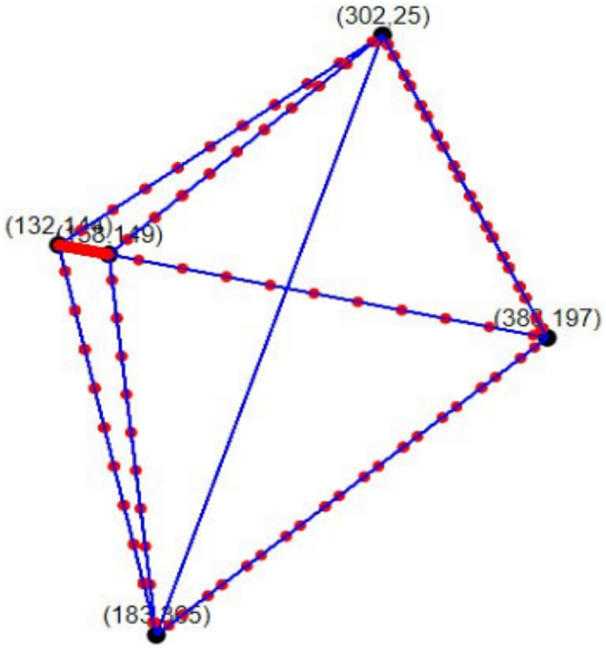


Рис. 2. Результат визуализации приложения

Приложение демонстрирует основные принципы работы алгоритма и предоставляет пользователю интерактивный интерфейс для наблюдения за процессом поиска оптимального решения.

Несмотря на эффективность представленного решения, существует множество других веб-реализаций, которые также предлагают различные подходы к визуализации муравьиного алгоритма. Проведем анализ и сравнение существующих веб-приложений, выделяя их сильные и слабые стороны.

Рассмотрены различные веб-приложения и проведен сравнительный анализ их ключевых аспектов в табл. 3.

Таблица 3

Сравнительная таблица достоинств и недостатков приложений

Проект	Достоинства	Недостатки
Aco-visualizer [8]	1. Возможность настройки параметров алгоритма и регулирования скорости движения муравьев. 2. Возможность динамического перемещения вершин графа. 3. На граф выведены расстояния между городами. 4. Вывод результата кратчайшего маршрута.	1. Отсутствие возможности загрузки пользовательских данных и сохранения результатов работы в файл. 2. Приложение использует простой муравьиный алгоритм. 3. Отсутствие анимации передвижения муравьев по маршрутам.

Visualisation of Ant Colony Optimisation [9]	1. Возможность настройки параметров алгоритма и регулирования скорости движения муравьев. 2. Возможность экспортировать значения координат городов в Excel-файл. 3. Реализована анимация передвижения муравьев по городам.	1. Отсутствие возможности загрузки пользовательских данных и сохранения результатов работы в файл. 2. Приложение использует простой муравьиный алгоритм. 3. Отсутствие визуализации значений координат городов и расстояний между ними.

На рис. 3 представлены результаты работы приложений Aco-visualizer и Visualisation of Ant Colony Optimisation соответственно.

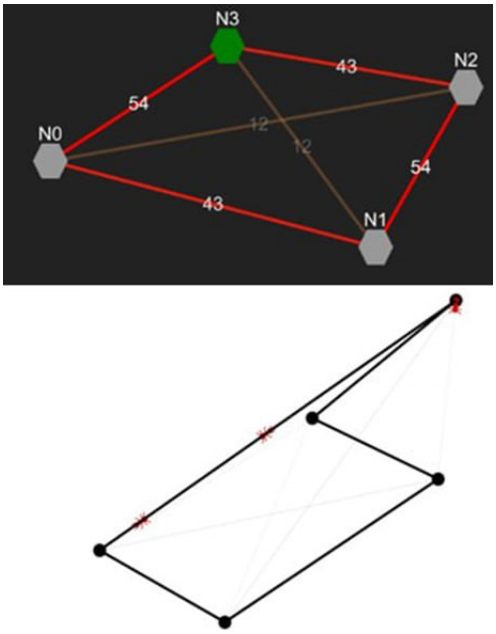


Рис. 3. Результат работы приложения Aco-visualizer и Visualisation of Ant Colony Optimisation

В веб-приложении выделен ряд преимуществ по сравнению в реализованными:

– Реализована возможность настройки параметров алгоритма и регулирования скорости движения муравьев.

– Реализована визуализация значений координат городов.

– Реализована анимация передвижения муравьев по городам.

– Вывод результата кратчайшего маршрута и его дистанция.

– Использование локальной корреляции, для ускорения работы алгоритма на больших данных.

Заключение

В результате исследования было разработано веб-приложение для визуализации работы алгоритма муравьиных колоний в задаче коммивояжера.

Рассмотрен процесс движения муравьев по вершинам графа. Описан алгоритм муравьиных колоний для вычисления кратчайшего пути в задачи коммивояжера. Проведен сравнительный анализ библиотек для визуализации движения муравьев.

Представлен пример работы алгоритма на входных данных. Проведен сравнительный анализ разработанных приложений для визуального решения задачи коммивояжера. Выделены преимущества и недостатки реализованных приложений.

Визуализация позволяет не только продемонстрировать эффективность алгоритма в поиске оптимальных маршрутов, но и облегчить восприятие его работы пользователями с разным уровнем подготовки.

Использование интерактивных элементов способствует глубокому погружению в процесс, что может быть особенно полезно в образовательных целях. Дальнейшие исследования могут сосредоточиться на улучшении алгоритма, интеграции дополнительных функций и расширении возможностей приложения, что позволит повысить его функциональность и адаптивность к различным задачам.

Литература

1. НОУ ИНТУИТ Муравьиные алгоритмы. Режим доступа: http://www.intuit.ru/studies/courses/14227/1284/lecture/24190?page=4. Дата обращения: 05.09.2024.

2. *Christofides N.* Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem / N. Christofides // Operations Research Forum. – Cham: Springer International Publishing, 2022. – Vol. 3, № 1. – P. 20.

3. *Wang Y.* Ant colony optimization for traveling salesman problem based on parameters optimization / Y. Wang, Z. Han // Applied Soft Computing. – 2021. – Vol. 107. – P. 107439.

4. *МакКоннелл Дж.* Основы современных алгоритмов / Дж. МакКоннелл. – Москва : Техносфера, 2004. – 368 с.

5. *Wu G.* Ensemble strategies for population-based optimization algorithms — a survey / G. Wu, R. Mallipeddi, P. N. Suganthan // Swarm and evolutionary computation. – 2019. – Vol. 44. – P. 695-711.

6. *Резников К. Г.* Разработка программного обеспечения для визуализации трехмерных поверхностей в веб-браузере / К. Г. Резников, С. Н. Медведев // Вестник ВГТУ. – Том 17, №6. – Воронеж : ВГТУ, 2021. – С. 13–19.

7. *Резников К. Г.* Разработка программного обеспечения для визуализации процессов полимеризации / К. Г. Резников, С. Л. Подвальный // Вестник ВГТУ. – Том 19, № 2. – Воронеж: ВГТУ, 2023. – С. 7–14.

8. Aco-visualizer. Режим доступа: https://github.com/cbussUOL/aco-visualizer?tab=readme-ov-file. Дата обращения: 04.09.2024.

9. Visualization of Ant Colony Optimization. Режим доступа: https://poolik.github.io/visual-aco/#/visualisation. Дата обращения: 04.09.2024.

УДК 004.02+519.8

РАЗРАБОТКА ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОДБОРА ПЕРСОНАЛА МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

К. Д. Вяткина, К. Г. Резников, Ю. В. Бондаренко

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье представлена разработка веб-приложения для интеллектуальной системы подбора персонала, основанной на модифицированном методе анализа иерархий (МАИ). Система предназначена для оптимизации процесса поиска сотрудников с учетом требований и возможностей сторон. Разработанное веб-приложение на языке программирования Java с использованием фреймворка Spring предоставляет интерактивный интерфейс для пользователей. При помощи системы пользователи могут задавать требования к вакансии, оценивать кандидатов по различным критериям, и получать результаты ранжирования кандидатов в реальном времени.
Ключевые слова: метод анализа иерархий, многокритериальная задача о назначениях, сетевая торговая организация, модификация метода анализа иерархий, веб-приложение.

Введение

В условиях современной конкурентной среды, поиск и подбор квалифицированного персонала стали критическим фактором успеха для любой организации. Успех бизнеса напрямую зависит от наличия сотрудников, способных эффективно решать поставленные задачи и вносить значительный вклад в достижение целей компании. При этом, для достижения устойчивого развития компании должна быть обеспечена не только удовлетворенность работодателя работой сотрудников, но и удовлетворенность сотрудников теми условиями труда, которые обеспечивает работодатель.

Традиционные методы подбора персонала зачастую сталкиваются с неспособностью обеспечить объективную оценку кандидатов и оптимальное соответствие их компетенций требованиям должности. Субъективность в оценке, неполное представление о кандидате и недостаточный учет специфических требований должности могут привести к неэффективному подбору персонала, потере времени и ресурсов, а также к снижению производительности, финансовых результатов и ослаблению конкурентных позиций компании [1, 2].

Существует ряд методов и алгоритмов, которые применяются для оценки качества принятых решений. Базовые концепции методов оценивания включают: метод парного сравнения альтернатив, ранжирования, классификации и численную оценку [3–5].

Для снижения субъективности в оценках и поиске структурированного подхода к подбору персонала, в данной статье представлена разработка веб-приложения интеллектуальной системы подбора персонала, которая использует метод анализа иерархий (МАИ) для объективной оценки кандидатов.

Рассмотрим модифицированный метод многокритериального анализа, который позволяет структурировать сложную задачу подбора персонала, за счет присвоения веса важности критериям, которые являются ключевыми для определенной должности.

1. Метод сопоставления требований и возможностей сторон

Для постановки задачи рассмотрим филиал торговой компании, которая представлена в городе некоторым множеством торговых точек. Каждый филиал имеет в своей команде раз-

личных специалистов. Будем предполагать, что в каждом филиале имеется ровно одна вакантная должность.

Пусть в филиале имеется n вакантных рабочих мест и n кандидатов на эти вакантные места. Задача состоит в том, чтобы распределить сотрудников по филиалам с учетом требований компании и предпочтений кандидатов (рис. 1).

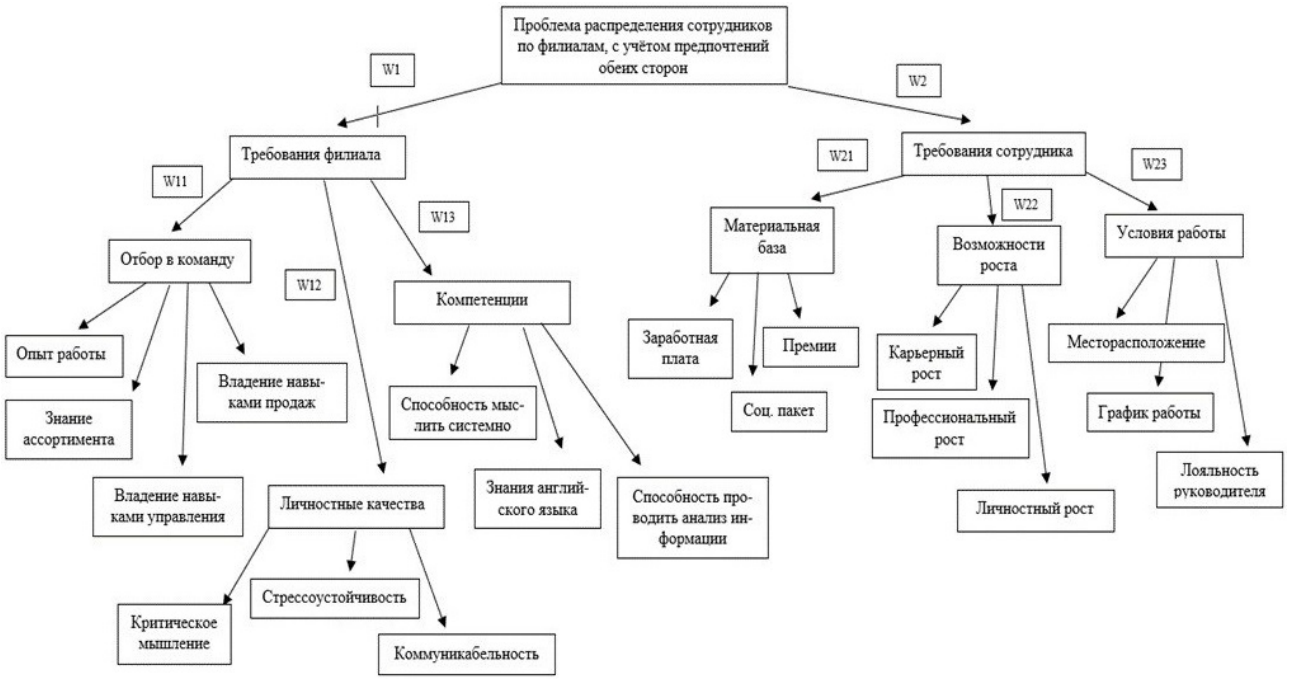


Рис. 1. Иерархия проблемы распределения сотрудников

Для формальной постановки многокритериальной задачи о назначениях необходимо определить ряд терминов, понятий и обозначений [2, 5].

Введем обозначение для первого множества и назовем его субъектами (сотрудниками):

$$P = \{P_1, P_2, .., P_i, .., P_n\}. \quad (1)$$

Второе множество:

$$M = \{M_1, M_2, .., M_j, .., M_n\}. \quad (2)$$

— объекты (вакантные места в филиалах).

Введем два множества оценок: a — множество критериев для оценки кандидатов; b — множество критериев для выбора кандидатов филиала.

Введем обозначения для критериев отбора для кандидата:

$$H = \{H_1, H_2, ..., H_a\}. \quad (3)$$

Критерии отбора, которые выдвигает кандидат для вакансии:

$$R = \{R_1, R_2, ..., R_b\}. \quad (4)$$

Тогда оценки кандидата P_i по критериям H будем обозначать:

$$H(P_i) = H_1(P_i), H_2(P_i), ..., H_a(P_i). \quad (5)$$

Оценки требований филиала M_j к кандидатам:

$$H(M_j) = H_1(M_j), H_2(M_j), ..., H_a(M_j). \quad (6)$$

Следовательно, оценки требований кандидата P_i по критериям R будет выглядеть следующим образом:

$$R(P_i) = R_1(P_i), R_2(P_i), ..., R_b(P_i). \quad (7)$$

А оценки возможностей филиала M_j по критериям R:

$$R\left(M_j\right) = R_1\left(M_j\right), R_2\left(M_j\right), ..., R_b\left(M_j\right). \quad (8)$$

Критериальным соответствием будет называться разница по одному из критериев между требованиями субъекта и возможностями объекта. Требования филиала и кандидата будут считаться выполненными, если:

$$R_b(P_i) \geq R_b(M_j) \quad (9)$$

$$\text{и } H_a(M_j) \geq H_a(P_i) \quad (10)$$

Назначением будет считаться любая пара $\{P_i, M_j\}$, которая составлена с помощью двух элементов, относящихся к разным первоначальным множествам. Будет существовать множество назначений:

$$\{P_i, M_j\}, i, j = 1, 2, .., n \quad (11)$$

для двух первоначальных множеств по n элементов: $P\{n\}, M\{n\}$. Пара, для которой обоюдные требования полностью выполнены по всем критериям называются *идеальным назначением.*

Первоначальная проблема многокритериального выбора представляется в виде многоуровневой иерархии, где на нулевом уровне находится описание проблемы выбора, на первом — основные критерии, по которым будут оцениваться альтернативы, на втором уровне подкритерии основных критериев (если они возможны) и т. д. На последнем уровне — возможный перечень альтернатив.

На втором этапе осуществляется определение приоритетов критериев и оценка каждой альтернативы согласно этим критериям для выбора наиболее предпочтительного варианта. Затем формируется матрица попарных сравнений для каждого критерия, сравнивающая текущий уровень с предыдущим.

Принцип сравнительных оценок. Для определения приоритетов критериев и получения оценок для альтернативных решений в методе многокритериального анализа решений (МАИ) применяется метод парных сравнений, что предполагает создание матриц для этих сравнений

$$W = \left\| w_{ij} \right\|, w_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \quad (12)$$

где w_i — вес i-го элемента иерархии.

Набор весовых коэффициентов w_i, $i = 1, \ldots, k$, вычисляемый по матрице парных сравнений, должен удовлетворять следующим условиям:

$$w_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \quad i, j = 1, .., k; \quad \sum_{i=0}^{k} w_i = 1. \quad (13)$$

На финальном этапе определяются собственные векторы матриц с помощью их собственных чисел, а далее проводится синтез глобальных приоритетов альтернатив относительно глобальной цели (проблемы). С помощью коэффициентов относительной важности общих и частных критериев определяются веса, которые далее будут использованы при расчете интегрального критерия.

В результате двухступенчатая иерархическая структура критериев выбора K (рис. 2), характеризующая альтернативы, сводится к одноступенчатой, далее все частные критерии объединяются в одно множество с целью упрощения индексов.

Следующим шагом в многокритериальной задаче о назначениях является использование абсолютных и относительных оценок элементов двух множеств. Относительные оценки предполагают просмотр параметров элементов сравнительных характеристик ориентировочных претендентов на вакансию.

Для определения степени сопоставления элементы первого множества соотносятся с элементами второго и наоборот. Полученные значения позволяют предположить качество назначений.

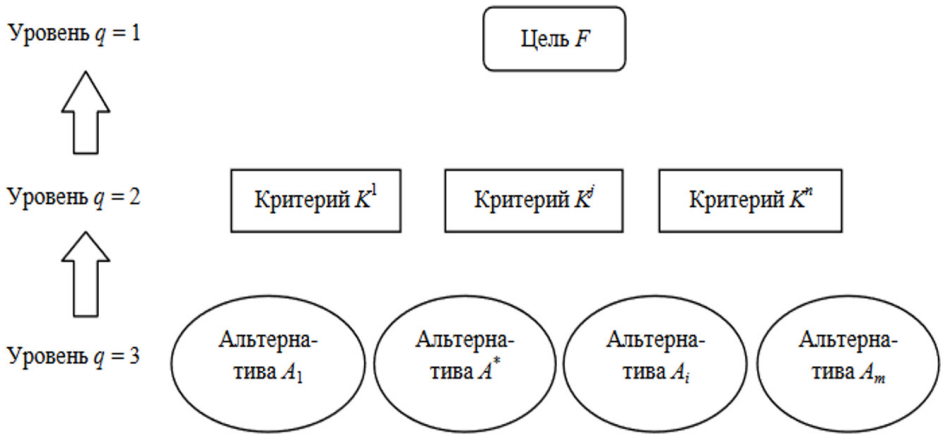


Рис. 2. Иерархическая структура проблемы выбора наилучшей альтернативы

Согласно установленным правилам, взаимосвязь между элементами субъектов и объектов может быть описана вектором соответствия:

$$T_{ij_k}(i, j = 1, 2, .., n), \tag{14}$$

k-е звено, которое демонстрирует уровень соответствия параметров элементов по k-му критерию. В конечном итоге, на этом этапе эквивалентным понятием «критериальное соответствие по k-му критерию» является компонент вектора соответствия, вычисляемый на основе следующего принципа:

$$T_{ij_k} = \left\{ \frac{0, \text{если } R_k(P_i) \geq R_k(M_j);}{r_k, \text{если } R_k(P_i) < R_k(M_j);} \right\}, \tag{15}$$

где $R_k(P_i)$ — требование элемента одного множества на шкале требований по k-му критерию;

$R_k(M_j)$ — соответствующие возможности элемента второго множества на шкале возможностей того же k-го критерия.

Предлагаемый подход к решению данной задачи основывается на сведении задачи к однокритериальной задаче о назначениях и последующим решении Венгерским методом.

2. Программная реализация веб-приложения

Веб-приложение интеллектуальной системы подбора персонала реализовано на языке программирования *Java* с использованием фреймворка *Spring*. Он позволяет обеспечить высокую производительность, гибкость и масштабируемость системы.

Веб-приложение доступно через браузер и работает по принципу «клиент-сервер»: исходный код приложения загружается с сервера на устройство пользователя, а затем интерпретируется и запускается в браузере. Благодаря использованию Java и Spring, система может работать на различных устройствах (компьютерах, смартфонах, планшетах), независимо от используемой операционной системы [6–8].

При разработке приложения учитывались ограничения веб-браузеров и вычислительной мощности устройств. Для организации структуры проекта и ускорения разработки использовался фреймворк Spring.

Spring предоставляет инструменты для структурирования приложения, управления зависимостями, обработки запросов и ответов, а также обеспечивает интеграцию с другими технологиями.

В результате, Spring в сочетании с Java позволяет создать мощное и гибкое веб-приложение, способное решать сложные задачи подбора персонала, с возможностью постоянного расширения и доработки.

Веб-приложение имеет следующий функционал:

– Добавление вакансий. Ввод информации о вакансиях, включая название, описание, требования и предпочтения;

– Ввод данных о кандидатах. Ввод информации о кандидатах, включая опыт работы и другие данные;

– Оценка кандидатов. Оценка кандидатов с помощью МАИ, включая ввод весов критериев и сравнительную оценку кандидатов по каждому критерию;

– Визуализация результатов. Отображение результатов оценки МАИ в виде диаграммы.

Веб-приложения имеет следующую структуру классов (рис. 3):

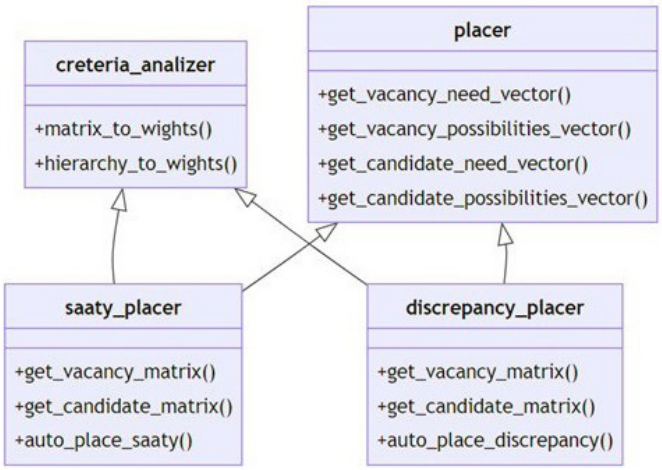


Рис. 3. Структура классов

Класс ***creteria_analizer*** содержит реализацию метода анализа иерархий.

– *matrix_to_wights* — преобразует матрицу попарных сравнений в веса признаков;

– *hierarchy_to_wights* — преобразует иерархию критериев в веса, используя их матрицы попарных сравнений.

Класс ***placer*** содержит общие методы для различных видов решений среди них:

– *get_vacancy_need_vector* — извлечение четверок (критерий, значение, минимальное допустимое значение, максимальное значение) для потребностей вакансии;

– *get_vacancy_possibilities_vector* — извлечение двоек (критерий, значение) для возможностей вакансии;

– *get_candidate_need_vector* — извлечение четверок (критерий, значение, минимальное допустимое значение, максимальное значение) для потребностей кандидата;

– *get_candidate_possibilities_vector* — извлечение двоек (критерий, значение) для возможностей кандидата.

Класс ***saaty_placer*** для решения задачи о назначениях. Используя метод анализа иерархий Саати, задача о назначениях сводится к однокритериальной задаче.

– *get_vacancy_matrix* — метод для сбора матрицы «удовлетворенности» вакансий (разница потребности вакансии и возможности кандидата, умноженная на все критерии);

– *get_candidate_matrix* — метод для сбора матрицы «удовлетворенности» кандидатов (разница потребности кандидата и возможности вакансии, умноженная на все критерии);

– *auto_place_saaty* — метод для сведения многокритериальной задачи к однокритериальной, с последующим решением Венгерским методом.

Класс ***discrepancy_placer*** для решения задачи о назначениях, используя для сведения к однокритериальной задаче минимальные и максимальные значения критериев.

– *get_vacancy_matrix* — метод для сбора матрицы «удовлетворенности» вакансий;

– *get_candidate_matrix* — метод для сбора матрицы «удовлетворенности» кандидатов;

– *auto_place_discrepancy* — метод для сведения многокритериальной задачи к однокритериальной задаче, с последующим решением Венгерским методом.

Для хранения данных и передачи их между компонентами была разработана архитектура базы данных (рис. 4).

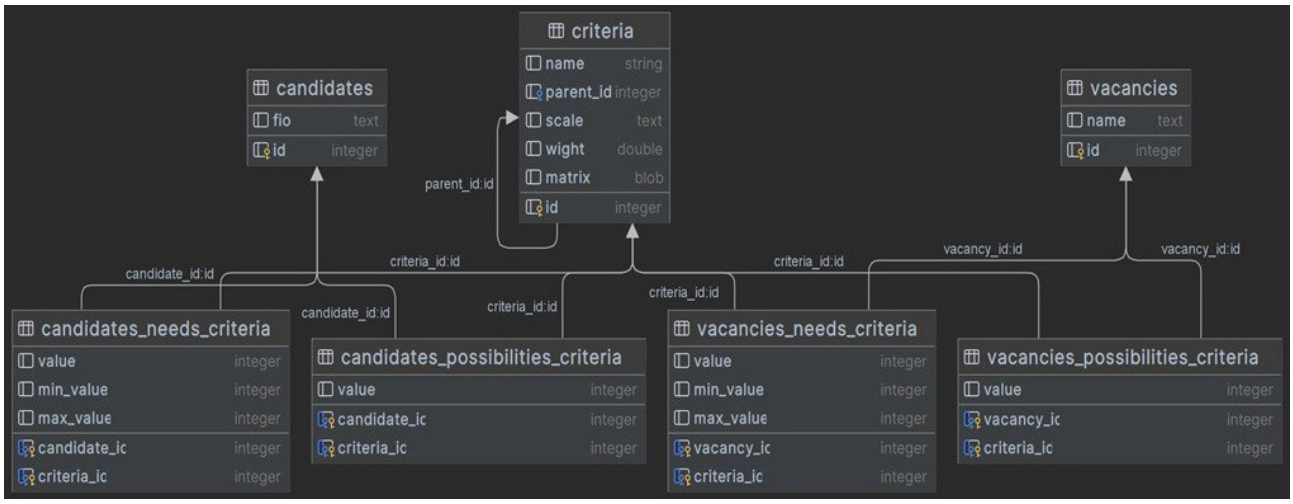


Рис. 4. Схема базы данных

3. Анализ и результаты работы веб-приложения

Рассмотрим пример работы веб-приложения для получения назначений кандидатов на должности. Требуется сформировать исходную матрицу, состоящую из оценки пар «$P_i - M_j$».

Для формирования матрицы соответствия кандидатов и должностей необходимо заполнить базу данных информацией о кандидатах и вакансиях. Для этого в стартовом окне программы предусмотрены две вкладки: «Кандидаты» и «Вакансии» (рис. 5).

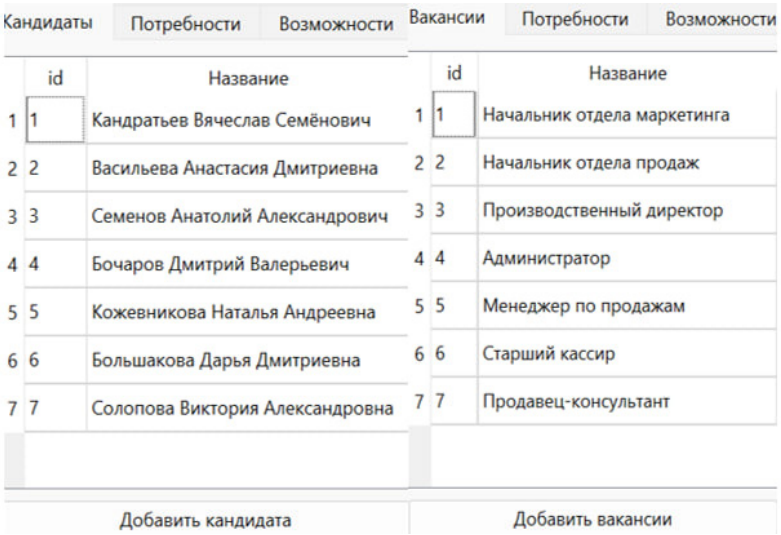


Рис. 5. Справочники «Кандидаты» и «Вакансии»

В системе реализована иерархическая структура критериев, которая позволяет учитывать как требования филиала, так и требования сотрудника (рис. 6). На первом уровне иерархии представлены две основные группы критериев: «Требования филиала» и «Требования сотрудника».

При выборе каждой из этих групп открывается второй уровень иерархии, который содержит шесть конкретных критериев, по которым будут оцениваться кандидаты (рис. 1).

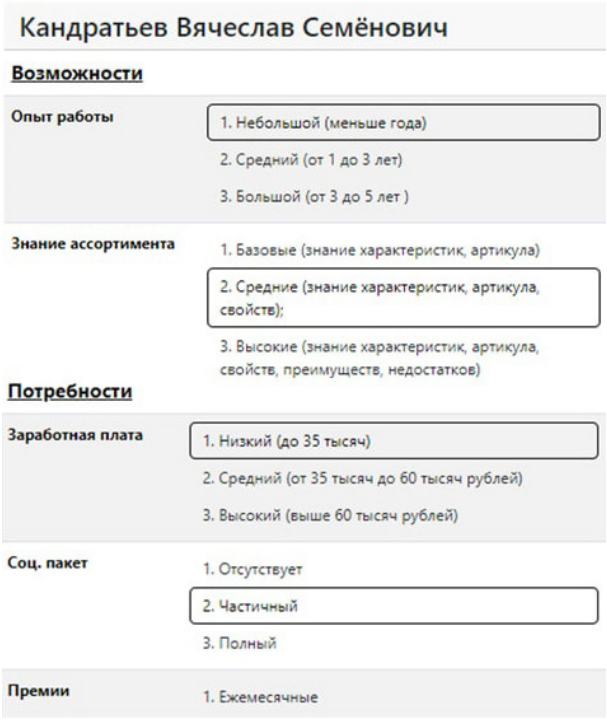


Рис. 6. Требования и возможности кандидата

Для оценки важности каждого критерия используется матрица парных сравнений. После заполнения матриц проводится расчет весовых коэффициентов для каждого критерия. На финальном этапе представляются результаты распределения в виде схемы (рис. 7).

Рис. 7. Схема идеального назначения

Для оценки функциональных возможностей разработанного веб-приложения предлагается сравнение с существующим одностраничным веб-приложением «Альтернатива» [8] (рис. 8).

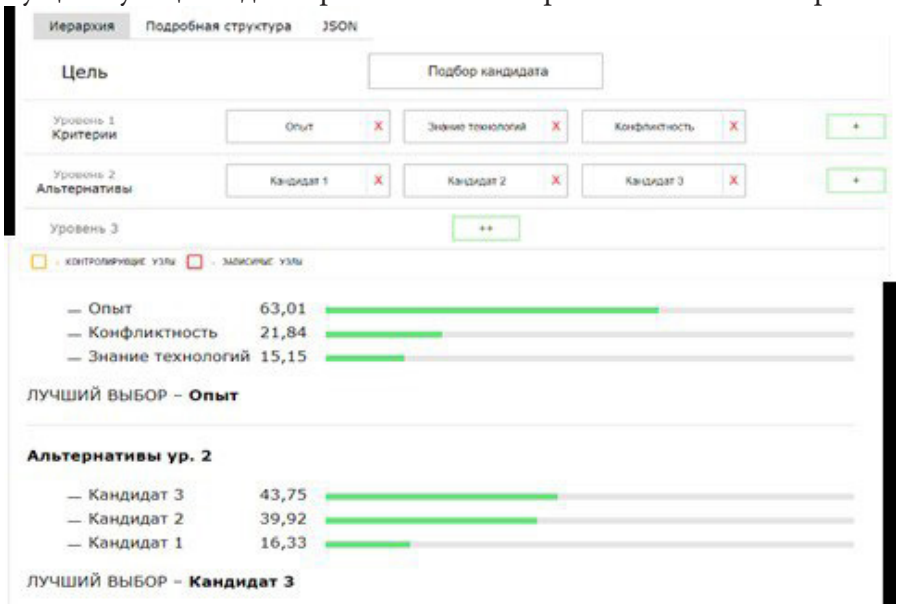


Рис. 8. Иерархическая структура и выбор наилучшего кандидата в приложении «Альтернатива»

Разработанное веб-приложение обладает значительно более развитой функциональностью по сравнению с веб-приложением «Альтернатива», обеспечивая более эффективный и гибкий подход к решению задачи подбора персонала.

Следует отметить, разработанное веб-приложение предоставляет возможность учета требований как со стороны вакансии, так и со стороны кандидата, что позволяет учитывать все важные факторы при подборе сотрудника. Веб-приложение «Альтернатива» ограничено в своей функциональности и не позволяет согласовывать предпочтения кандидата с возможностями вакансии.

Кроме того, разработанное веб-приложение использует многоуровневую иерархическую структуру критериев, что позволяет более глубоко анализировать соответствие кандидатов и вакансий. Иерархический подход обеспечивает более точную оценку и учитывает все важные приложение «Альтернатива» не предусматривает иерархическую структуру, что ограничивает возможности анализа и делает процесс подбора менее эффективным.

Также, разработанное веб-приложение имеет встроенную базу данных для хранения информации о кандидатах и вакансиях. Это позволяет систематизировать данные, создать историю подбора персонала и использовать информацию в будущем. Веб-приложение «Альтернатива» не имеет встроенной базы данных, что делает его менее функциональным и не позволяет сохранять информацию о кандидатах и вакансиях.

Таким образом, разработанное веб-приложение предлагает более развитый и гибкий инструмент для подбора персонала, который учитывает все важные аспекты процесса подбора и предоставляет пользователю более продвинутые возможности. Веб-приложение «Альтернатива» ограничено в своих функциях и не может обеспечить столь эффективный подбор персонала.

Заключение

В данной статье представлена разработка веб-приложения интеллектуальной системы подбора персонала, основанной на методе анализа иерархий (МАИ).

Разработанное веб-приложение предлагает комплексный подход к оценке кандидатов, учитывая множество критериев и их относительную важность. Система позволяет автоматизировать процесс оценки, минимизируя субъективные факторы и упрощая работу HR-специалистов.

В статье рассмотрен метод анализа иерархий, который представлен с использованием метода сопоставления требований и возможностей сторон. Этот подход позволяет структурировать процесс оценки, определять ключевые факторы успеха для конкретной должности и создавать весовую систему для объективной оценки кандидатов.

Метод сопоставления требований и возможностей сторон показал высокую эффективность при применении МАИ для подбора персонала, позволив создать объективную систему оценки кандидатов.

Результаты тестирования подтвердили практическую применимость разработанной системы. Система успешно прошла тестирование на входных данных и продемонстрировала способность оценивать кандидатов с высокой точностью.

Литература

1. *Бондаренко Ю. В.* Экспертно-тестовый механизм комплексной оценки кандидатов при подборе персонала / Ю. В. Бондаренко, И. В, Горошко, Е. В. Васильчикова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2020. – Т. 20, № 2. – С. 116–124.

2. *Бондаренко Ю. В.* Модели, алгоритм и программное обеспечение формирования команды сотрудников для филиалов сетевой торговой организации / Ю. В. Бондаренко, А. А. Баженова, К. Д. Вяткина // Проектное управление в строительстве. – 2022. – № 2(27). – С. 110–117.

3. *Корниенко В. П.* Методы многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности / В. П. Корниенко. – Москва : МАКС Пресс, 2018. – 296 с.

4. *Азарнова Т. В.* Модели и методы принятия решений: учебное пособие для вузов / Т. В. Азарнова, Ю. В. Бондаренко, Н. Б. Баева, Е. С. Дашкова, В. В. Ухлова. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020. – 310 с.

5. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решения, а также Хроника событий в Волшебных странах: учебник / О. И. Ларичев. – Москва : Логос, 2002. – 2-е изд. перераб. и доп. – 392 с.

6. *Резников К. Г.* Разработка программного обеспечения для визуализации трехмерных поверхностей в веб-браузере / К. Г. Резников, С. Н. Медведев // Вестник ВГТУ. – Том 17, № 6. – Воронеж : ВГТУ, 2021. – С. 13–19.

7. *Резников К. Г.* Разработка программного обеспечения для визуализации процессов полимеризации / К. Г. Резников, С. Л. Подвальный // Вестник ВГТУ. – Том 19, № 2. – Воронеж : ВГТУ, 2023. – С. 7–14.

8. Реализация приложения «Альтернатива». Режим доступа: https://alleaxxrmca.github.io/DssAlternativeV3/. Дата обращения: 15.10.2024.

УДК 004.3’14; 004.42; 53.08; 621.3.08

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ МОНИТОРИНГА И КОНТРОЛЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОСЕТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ОДНОПЛАТНЫХ GPS-СИНХРОНИЗИРОВАННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ С СИСТЕМОЙ ТОЧНОГО ВРЕМЕНИ

В. А. Казбанов, М. С. Курицкий, А. Н. Алещенко, В. М. Анискевич

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта

Аннотация. В статье предлагается эффективный и недорогой вариант создания высокоскоростной одноплатной измерительной установки для снятия показаний промышленной электросети. Особое внимание уделяется стабильности частоты осциллятора, достигаемой при помощи GPS-синхронизации и фазовой автоподстройки. Авторами также рассматривается теоретическая сторона процессов оптимизации энергетической инфраструктуры на примере технологии Smart Grid.
Ключевые слова: программно-аппаратный комплекс, ARM, STM32, GPS-синхронизированный АЦП, измерительная установка, измерение и обработка параметров электрического сигнала.

Введение

Нагрузка на современные энергосети растёт с каждым днём, что создаёт новые вызовы для мировой энергетики. К таким вызовам можно отнести и активный переход к экологически-чистым и возобновляемым источникам энергии, поскольку эффективность и надёжность этих источников остаётся главной нерешённой проблемой. Солнечные и ветряные источники по своей природе не могут выдавать стабильную и постоянную во времени мощность в сеть, тем самым провоцируя в худшем случае масштабные системные сбои и даже полные отключения целых участков сетей. Очевидным становится тот факт, что мировые промышленные электросети в текущем своём состоянии в полной мере не соответствуют подобного рода источникам энергии и нуждаются в существенной доработке, в том числе посредством внедрения в сеть информационных систем мониторинга и управления для своевременного обнаружения критических показателей и превентивного предотвращения аварийных ситуаций.

Одним из передовых направлений развития в данной области является технология так называемых «умных сетей» (Smart Grid), позволяющая оптимизировать производство, распределение и потребление электроэнергии [1]. Особое же внимание в процессе имплементации умных сетей уделяется использованию высокоточных измерителей различных параметров электрической сети в реальном времени. Такие устройства играют ключевую роль в повышении точности и надёжности измерений, критически важных для эффективного управления электроэнергией.

Авторами данной статьи предлагается недорогое, но эффективное решение частной задачи по снятию и обработке показаний реальной электрической сети на базе одноплатного GPS-синхронизированного измерителя с системой точного времени.

1. Технология Smart Grid и её возможности

Smart Grid или активно-адаптивные сети — это энергетическая инфраструктура, интегрирующая энергетические подсистемы, коммунальные сети, базы данных и управление бизнес-процессами. Внедрение такой интеллектуальной системы позволяет обеспечить рациональное потребление, оперативное изменение генерирующих мощностей, противоаварийное управление, энергосбережение, надежное и качественное обеспечение электроэнергией, ре-

гулирование потоков и объёмов энергоресурсов [1]. Идеология Smart Grid — формирование единой энергоинформационной системы, где диспетчерские функции, автоматические системы, принятие плановых и инвестиционных решений объединяются в самоорганизующейся адаптивной системе. Измерения с частотой в несколько десятков герц позволяют отслеживать изменения в работе и формировать динамику ожиданий [2].

Одним из образующих звеньев интеллектуальной сети является цифровая подстанция, представляющая собой вторичное оборудование электроподстанций — микропроцессорные терминалы, а также цифровой обмен данных между устройствами сети. Отличительными особенностями цифровых подстанций являются: встраивание в первичное оборудование интеллектуальных микропроцессорных устройств, применение локальных вычислительных сетей для коммуникации, цифровой способ доступа к информации, её обработке и передаче, автоматизация работы подстанции и процессов управления ею, а также использование оптических измерительных трансформаторов.

1.1. Показания электросети на участках генерации

Наглядно продемонстрировать необходимость применения технологии Smart Grid можно на примере небольшой солнечной электростанции. Поскольку фотовольтаика генерирует постоянный ток, а большинство потребителей используют переменный, необходимо осуществлять его преобразование с помощью инвертора. Некоторые инверторы по умолчанию обладают функционалом непрерывного мониторинга тока и напряжения, однако, в большинстве случаев измеряются лишь среднеквадратичные значения тока и напряжения. Наибольший же интерес в анализе поведения системы представляет именно форма сигналов [3]. Более того, инвертор в системах генерации постоянного тока является одним из слабых звеньев в цепи, и полагаться на его механизм автоподстройки довольно недальновидно. Возникает необходимость во внедрении внешней системы контроля измерений (рис. 1), которая позволит объективно замерять КПД преобразования, показания в различных участках цепи — как в участках с постоянным током, так и с переменным; в низковольтной и высоковольтной сетях. Такой подход даёт возможность получать более полную картину об электростанции и о сети в целом.

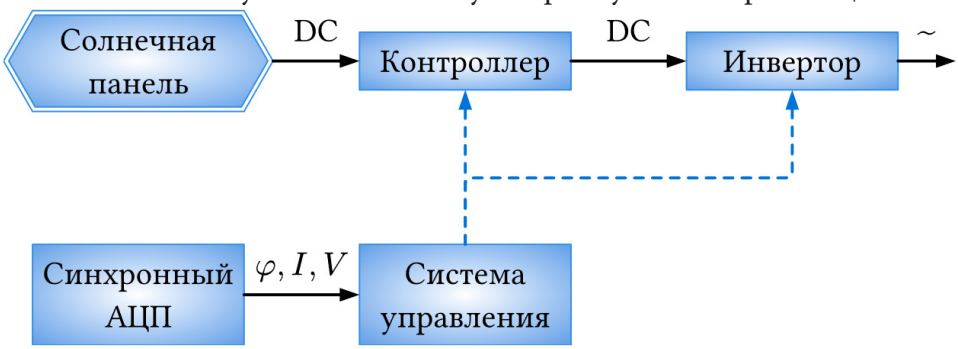


Рис. 1. Схема организации системы измерения и управления показателями солнечной панели, контроллера и инвертора. Контроллер согласует ВАХ солнечной панели и накопителя, а система управления поддерживает параметры выходного напряжения

Стоит отметить, что описываемая в данной статье измерительная установка не будет являться заменой для рассматриваемых инверторов, а наоборот будет дополнять и координировать их работу. Такого рода подход открывает возможность прогноза производства и потребления электроэнергии, управления зарядкой накопителей, процессом преобразования постоянного тока в переменный, наблюдения за состоянием системы, деградацией панелей и накопителей со временем.

1.2. Выявление событий и переходных процессов при помощи анализа токов и напряжений

Одной из важнейших целей непрерывного наблюдения за формой сигналов тока и напряжения является выявление переходных процессов. Большинство из них (довольно незначительных), наблюдаемых при измерении токов и напряжений, едва ли заметны на фоне более редких, но более явных, вызываемых индуктивной нагрузкой. Конечно же, не стоит забывать и про другие, зачастую более серьезные причины переходных процессов в сети, включая неисправности и сбои в работе оборудования. Так, резкое понижение напряжения тоже может вызывать переходной процесс [4]. Анализ отклика энергетической системы на такого рода переходы оказывается чрезвычайно полезен для многих систем управления и защиты, в том числе при анализе устойчивости, оценке надежности и построения моделей поведения системы при разных уровнях нагрузки. Мониторинг переходных процессов, вызываемых работой оборудования электростанции, позволяет заранее предупреждать о появляющихся в системе неисправностях, потенциально влекущих проблемы в будущем. Кроме того, такого рода наблюдения показывают, как система реагирует на нештатные режимы работы.

1.3. Балансировка генерируемой и потребляемой мощности

Процесс управления электросетями в том числе подразумевает непрерывные усилия по балансировке генерируемых и потребляемых электрических мощностей. Несоответствие между генерацией и потреблением значительным образом влияет на частоту электросети. Эффект разбалансировки между генерацией и потреблением нагляден на примере электромеханических процессов в турбинных генераторах: при потере значительной части генерации частота немедленно падает; при потере значительной части нагрузки — наоборот, очень быстро вырастает. Поскольку электросетевая магистраль — это одна большая цепь, перебой в одной её части может повлиять на частоту в пределах всей сети. Турбине генератора требуется несколько секунд, чтобы увеличить или уменьшить механический крутящий момент для компенсации скорости ротора. Некоторым генераторам может потребоваться выровнять уровень генерации для возвращения частоты в системе к норме. С помощью анализа сетевой частоты можно также проводить оценку инерции в энергосистемах [5], изучать влияния возобновляемых источников мощности на частотную реакцию [6], оценивать производительность электросети в процессе возвращения частоты к норме на протяжении пяти минут после потери генерирующих или нагрузочных мощностей [7].

1.4. Прогнозирование и моделирование поведения сети по измеряемым данным

Ввиду нелинейности электрических процессов в сетях, изменения в одной их части могут оказывать нелинейное воздействие на остальные. Так, добавление или отключение генерирующих или же нагрузочных мощностей может привести к непредсказуемым изменениям в распределении нагрузки, напряжении и частоте в сети. Для управления и оптимизации работы такой сложной нелинейной системы требуются высокоточные измерения параметров сети. Однако даже при использовании современного измерительного оборудования, едва ли можно достичь абсолютной точности измерений, ввиду различных факторов воздействия на систему. Это значит, что при прогнозировании поведения такой системы всегда будет присутствовать элемент неопределённости. К начальным условиям в такой системе относятся такие параметры сети, как начальная фаза тока, его амплитуда, напряжение, состояние самого генерирующего оборудования, и даже погодные условия. Малейшие изменения в этих параметрах могут привести к значительным отклонениям в работе всей системы, что делает точное прогнозирование её поведения очень сложной задачей, особенно при ручном управлении. Иными

словами, даже при наличии точных данных о текущем состоянии системы, долгосрочные прогнозы её поведения могут быть ненадёжными. Это особенно актуально при попытке предсказать поведение системы в условиях возникновения аварийных ситуаций или при интеграции большого количества возобновляемых источников энергии с переменной выработкой. Тем не менее, повышение точности измерений вышеперечисленных показателей является одним из наиболее важных факторов повышения точности прогноза поведения системы.

Путём интеграции умных сетей с системами на основе машинного обучения, можно значительно упростить процедуры накопления и анализа показаний. Кроме того, качественно обученные модели могут быть использованы для построения алгоритмов управления электроснабжением или же для устранения или предотвращения аварий, нивелируя человеческий фактор, зачастую приводящий к выходу из строя дорогостоящего оборудования или же к травмам персонала.

2. Проектирование печатной платы

Для точной синхронизации измеряемых показаний на протяженных участках сети необходимо обеспечивать точные временные метки с гранулярностью в единицы микросекунд или же в десятки наносекунд. Классические способы синхронизации времени при помощи сети Ethernet являются непригодными для такого рода задач, поскольку отставание временной метки, например, в протоколе NTP может варьироваться от нескольких десятков секунд до нескольких минут. Такая точность является неприемлемой для измерений даже в низком диапазоне частот. Самым точным стандартом времени в настоящий момент являются атомные часы. Однако, это довольно дорогая и сложная в обслуживании технология. Наиболее распространённым вариантом и следующим по точности являются системы GNSS (Глобальные Навигационные Спутниковые Системы). В такой конфигурации атомными часами оснащены уже сами спутники, которые далее передают сигналы, содержащие временные метки. Получая сигналы от нескольких спутников, приемник на Земле может вычислить собственное местоположение и текущее время с высокой точностью.

В современной промышленности в таких системах реального времени (СРВ) взамен полноценных ЭВМ всё чаще (ввиду растущей доступности и производительности) применяются микроконтроллеры — в целях мониторинга, обработки данных и выполнения специфичных функций. Микроконтроллеры должны удовлетворять следующим критериям: детерминированность (система должна гарантировать выполнение задач в определённые сроки), надежность и стабильность (СРВ часто используются в критических важных приложениях, где отказ может привести к серьёзным последствиям) поддержка многозадачности (многие СВР требуют одновременного выполнения нескольких задач), эффективная работа с прерываниями (способность быстро и эффективно обрабатывать прерывания является ключевой, поскольку позволяет оперативно реагировать на внешние события). Для удовлетворения данных требований в системах реального времени часто используются специализированные операционные системы реального времени (RTOS, например RTIC [8]), которые оптимизированы для работы с конкретной аппаратурой и обеспечивают необходимые механизмы планирования и управления ресурсами.

На данный момент пользователю доступно множество измерительных устройств, предоставляющих мгновенные значения различных показателей системы, однако не каждое такое устройство способно проводить непрерывную цифровую обработку и последующую агрегацию полученных показаний для анализа поведения системы и обнаружения систематических особенностей в её поведении. Такая задача требует не только высокой частоты дискретизации АЦП-модуля, но и скоростных каналов для передачи данных. У истоков такой измерительной цепочки всегда находится высокоскоростной АЦП, способный оцифровывать показания с частотой в десятки мегагерц. Такие скорости дискретизации достигаются за счет высокоско-

ростных каналов связи между АЦП и микроконтроллером, либо же путём размещения АЦП на кристалле самого контроллера, с использованием общей шины и памяти. Тем не менее, вычислительные ресурсы микроконтроллера являются весьма ограниченными, а поэтому любые задачи, включающие в себя работу с нецелочисленными значениями при помощи FPU (Floating Point Unit), в том числе ЦОС (цифровая обработка сигнала), чаще всего выполняются на стороне более мощного оборудования, занимающегося агрегацией показаний.

С точки зрения наилучшего соотношения производительности к энергопотреблению, очевидным выбором становятся микроконтроллеры с архитектурой ARM. В отличие от широко распространённой x86, она является более предпочтительной в условиях ограниченных ресурсов (например, в мобильных устройствах или же во встраиваемых системах управления [9]). В качестве канала связи для передачи измерений от микроконтроллера с бортовым АЦП до системы ЦОС на ЭВМ авторами настоящей статьи использовался протокол UART в скоростном режиме 3 Мбит/с. В качестве источника GPS-сигнала был взят модуль фирмы TopGNSS с чипом GN200G. Такие чипы поддерживают выход тактирующего сигнала 1PPS, необходимого для координации алгоритма программной фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Вслед за нарастающим фронтом сигнала 1PPS, GPS-модуль передаёт сообщение GPRMC, которое, согласно протоколу NMEA, содержит дату и время, соответствующие моменту перед передачей 1PPS [10].

Таким образом, экспериментальная установка включала в себя микроконтроллер STM32F103, преобразователь USB-TTL, GPS-приёмник и аналоговые компоненты (трансформатор, резисторы). Для управления измерителем была разработана программа микроконтроллера и агрегирующее ПО для ЭВМ на языке Rust [11]. В качестве агрегатора использовался одноплатный компьютер Raspberry Pi Compute Module 4. Более подробно программно-аппаратный комплекс на основе одноплатного компьютера Raspberry Pi описан авторами в работе [12].

Одним из наиболее очевидных видов помех в подобного рода установках являются электромагнитные наводки в соединительных проводах их компонентов. В случае плохих контактов или нестабильного уровня «земли», подобного рода помехи могут значительным образом зашумлять и искажать измеряемый сигнал. Кроме того, проблемным участком может также являться и высокоскоростной канал передачи данных между контроллером и конвертором уровня. В целях борьбы с перечисленными проблемами, особенно, в контексте увеличения числа элементов системы и усложнения их связей, было принято решение совместить все цифровые компоненты на одной общей печатной плате.

Процесс проектирования и разведения печатной платы является весьма трудоёмким ввиду следующих факторов: компоненты схемы должны быть размещены компактно, длины дорожек должны быть минимальными для снижения наводимых помех, а чувствительные к наводкам участки цепи (такие, как каналы АЦП) должны располагаться как можно дальше от источников высокочастотных помех (кристаллических осцилляторов, каналов UART, USB). Финальный вариант печатной платы с пинами для 10 каналов АЦП и тактового сигнала 1PPS показан на рис. 2.

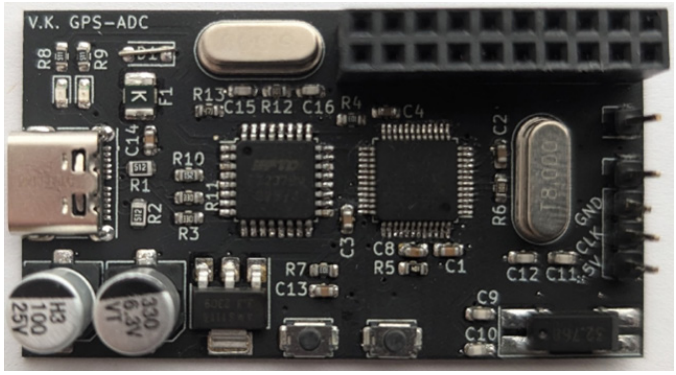


Рис. 2. Печатная плата-измеритель. Общий вид

3. Измерение показателей домашней сети

Наиболее простым и рациональным способом апробации установки с GPS-АЦП является измерение формы и амплитуды напряжения домашней сети 220В. На рис. 3 явно заметна несинусоидальная форма сигнала с искажениями в нарастающем и убывающем фронтах. В точках максимальных амплитуд также наблюдается «ворсистость» сигнала, потенциально связанная с импульсными источниками питания у некоторых потребителей.

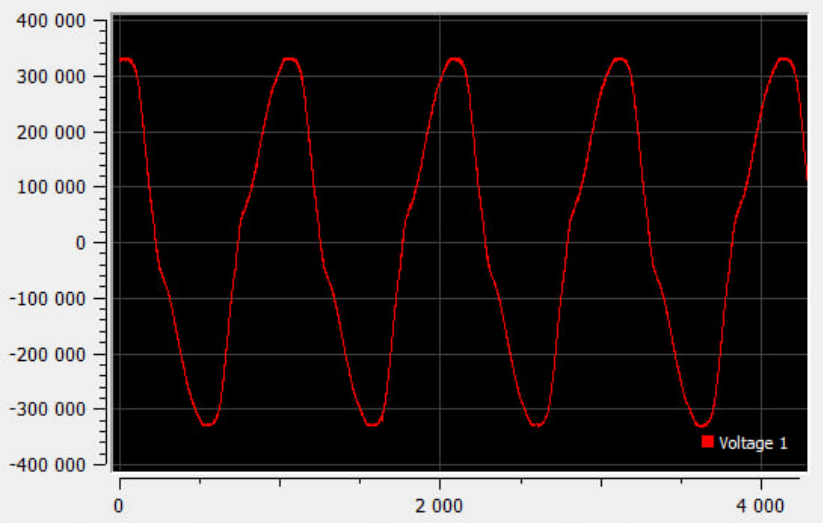


Рис. 3. Форма напряжения в домашней сети 220 В.
По горизонтали: отсчеты АЦП на максимально возможной частоте дискретизации с условием одновременной передачи сигнала по UART в 1024000 БОД. По вертикали: милливольты

Поскольку в измерительном процессе в данном эксперименте участвовал трансформатор напряжения 220-6 В, являющийся нелинейным индуктивным элементом цепи, были также проведены некоторые тривиальные исследования по измерению зависимости выходной формы сигнала в зависимости от различных форм и частот входного сигнала. Согласно теории, при полном отсутствии нагрузки на вторичной обмотке (т.е. при коэффициенте мощности трансформатора равном нулю), смещение фаз между входным и выходным напряжением составляет 90°. При увеличении же нагрузки на трансформатор, коэффициент должен асимптотически стремиться к единице, а сдвиг по фазе, соответственно, — к нулю (рис. 4). В проведённом эксперименте напряжение генератора подавалось на вторичную обмотку, и, соответственно, трансформатор работал в повышающем режиме. Напряжение генератора было 1В, частота сигнала 50 Гц. На практике также наблюдалось сильное падение входного напряжения генератора при приближении частоты сигнала к сетевой (50 Гц) и повышение до заданного в параметрах самого генератора при повышении частоты до области единиц и десятков килогерц.

Также в рамках апробации разработанной установки проводились исследования по одновременной многоканальной оцифровке нескольких сигналов из разных источников. Поскольку объединение сигналов от разных источников с общей землёй в некоторых случаях может приводить к их взаимной корреляции, в таком исследовании использовался иной подход. Вместо одного GPS-АЦП для чувствительных источников сигнала использовались несколько, подключенных к общему аппаратному агрегатору (Pi Compute Module или ПК). Проблема взаимной корреляции в таком случае устраняется за счёт независимой оцифровки сигналов раздельными АЦП, не связанными гальванически в пределах одной печатной платы.

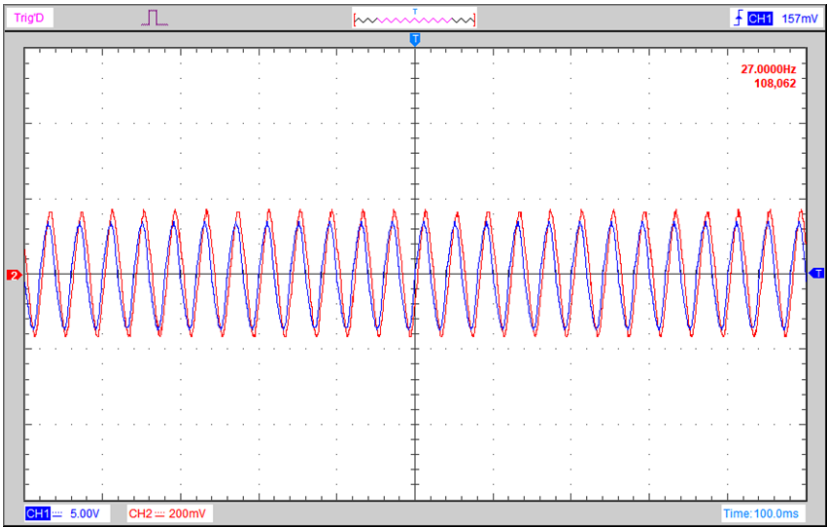


Рис. 4. Исследование зависимости выходного напряжения трансформатора от формы и частоты входного

Заключение

Подводя итог данного исследования, можно сказать, что отечественное производство действительно нуждается в комплексных программно-аппаратных решениях для оптимизации генерации и передачи электроэнергии. Авторами уже неоднократно было доказано, что разработка подобного рода установок с нуля, на основании открытых источников информации, является возможной и вполне реализуемой. Результатом настоящего исследования стало проектирование и создание собственной платы-измерителя с системой точного времени, совмещающей в себе все необходимые цифровые компоненты для снятия и передачи в агрегатор различных по своей природе физических показаний в условиях GPS-синхронизации. Что же касается практического интереса данной работы — он заключается вовсе не в деталях нормализации сигнала и не в процессе измерения показаний высоковольтных линий, а в непосредственной методике проектирования и изготовления такого рода измерительных устройств.

Литература

1. *Santoso S.* Power Quality Data Analytics: Tracking, Interpreting, and Predicting Performance / S. Santoso, D.D. Sabin // 2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting. – 2012.

2. *Глухов В. В.* Принципы Smart Grid в энергетической инфраструктуре города / В. В. Глухов, В. В. Скворцов // π-Economy. – 2010. – № 6 (112). – С. 55–59.

3. *Amin M.* The Case for Smart Grid. Funding a new infrastructure in age of uncertainty / M. Amin // Public Utilities Fortnightly. – 2015. – P. 24–32.

4. *Khaledian P.* Event-Based Analysis of Solar Power Distribution Feeder Using Micro-PMU Measurements / P. Khaledian, A. Aligholian, and H. Mohsenian-Rad // 2021 IEEE Power & Energy Society Innovative Smart Grid Technologies Conference (ISGT). – 2021.

5. Estimation of WECC System Inertia Using Observed Frequency Transients / D. P. Chassin [et al.] // IEEE Transactions on Power Systems. – 2005. – v. 20. – P. 1190–1192.

6. *Sharma S.* System Inertial Frequency Response Estimation and Impact of Renewable Resources / S. Sharma, S.-H. Huang, N. Sarma // 2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting. – 2011.

7. Analysis Power System Disturbances Based on Wide-Area Frequency Measurements / J. Dong [et al.] // Power Engineering Society General Meeting. – 2007.

8. «A concurrency framework for building real-time systems». RTIC: официальный сайт. – URL: https://rtic.rs/2/book/en (дата обращения: 21.11.2024).

9. *Micev M.* Optimal tuning of the novel voltage regulation controller considering the real model of the automatic voltage regulation system // M. Micev, M. Calasan, M. Radulovic // Heliyon. – 2023. – V. 9. – 17 p.

10. Разработка прототипа программно-аппаратного комплекса синхронно-векторных измерений на базе GPS-синхронизированного аналого-цифрового преобразователя / В. А. Казбанов, М. С. Курицкий, А. Н. Алещенко, В. М. Анискевич // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2023. – Т. 19, № 4. – С. 44–54.

11. «Rust – A language empowering everyone to build reliable and efficient software». Rust: официальный сайт. – URL: https://www.rust-lang.org (дата обращения: 21.11.2024).

12. *Казбанов В. А.* Разработка высокоскоростной вычислительной установки на базе энергоэффективной архитектуры arm64 для снятия и накопления физических показаний / В. А. Казбанов, М. С. Курицкий, А. Н. Алещенко, В. М. Анискевич // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4-6 декабря 2023 г. — Воронеж, 2024. — С. 1550–1557.

УДК 004.04

УСТРОЙСТВО ДЛЯ МОНИТОРИНГА СЕТЕВОГО ТРАФИКА И ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ УТЕЧЕК ДАННЫХ

В. Г. Ляликова, Г. И. Бурляев

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается разработка устройства для мониторинга сетевого трафика на базе микроконтроллера ESP8266. Устройство позволяет выявлять подозрительные соединения, анализировать данные в реальном времени и фиксировать результаты для последующего анализа. Преимущество устройства заключается в его компактности, низкой стоимости и доступности для малых и средних предприятий, которые не могут позволить себе дорогостоящие решения класса DLP и SIEM.
Ключевые слова: мониторинг трафика, ESP8266, утечка данных, сетевой анализ, безопасность.

Введение

Рост объема данных и усложнение сетевой инфраструктуры привели к увеличению числа утечек информации. Для мониторинга сетевой активности крупные компании используют системы класса DLP и SIEM, однако их стоимость делает их недоступными для малых организаций. Устройство на базе ESP8266 предлагает более экономичное решение этой проблемы.

ESP8266 — это микроконтроллер с поддержкой Wi-Fi, известный своей компактностью, низкой стоимостью и возможностью работы в сетях. Эти особенности делают его подходящей платформой для создания устройств, решающих задачи базового анализа сетевого трафика.

1. Методы и материалы

Устройство включает следующие компоненты: ESP8266 для подключения к Wi-Fi и анализа трафика, светодиоды для индикации состояний, зуммер для звукового оповещения, кнопку для управления, и SD-карту для записи логов. Использовалась среда Arduino IDE и библиотеки ESP8266WiFi и SD.

Программное обеспечение включает модули для подключения к сети, мониторинга трафика, индикации событий и записи логов. Основные этапы работы: инициализация устройства, подключение к сети, мониторинг активности, фиксация подозрительных событий и оповещение оператора.

1.1. Описание компонентов

Основной микроконтроллер ESP8266 обеспечивает подключение к Wi-Fi сети и базовый анализ трафика. Светодиоды выполняют роль индикаторов событий: подключение к сети, обнаружение угроз и нормальная работа. Зуммер служит для звукового уведомления оператора о подозрительных соединениях.

Кнопка позволяет сбросить индикацию и перезапустить устройство. SD-карта используется для записи логов, что упрощает последующий анализ выявленных угроз. Все компоненты выбирались с учетом минимизации затрат.

1.2. Реализация устройства

Программное обеспечение устройства включает алгоритмы для обработки сетевого трафика и индикации угроз. Основной функционал реализован с использованием Arduino IDE.

Устройство поддерживает базовые алгоритмы выявления аномалий, таких как избыточная активность IP-адресов или доступ к нестандартным портам.

Подключение компонентов осуществляется через GPIO пины ESP8266. Например, светодиоды подключены через резисторы, а зуммер управляется через ШИМ-сигнал. Для хранения данных используется интерфейс SPI.

В заключение подчеркивается, что разработанное устройство предлагает экономичное решение для базового мониторинга сетевой активности. Это особенно важно для организаций с ограниченным бюджетом, где необходимы недорогие альтернативы сложным DLP и SIEM системам.

Перспективы доработки включают внедрение более сложных алгоритмов анализа, интеграцию с облачными системами и повышение точности выявления угроз за счет использования моделей машинного обучения.

Применение ESP8266 в устройстве для мониторинга сетевого трафика обусловлено его функциональностью и низкой стоимостью. Этот микроконтроллер широко используется в IoT-проектах благодаря встроенной поддержке Wi-Fi, что позволяет минимизировать затраты на разработку и внедрение.

Утечки данных являются серьезной угрозой для современных организаций. Они приводят к значительным финансовым и репутационным потерям, а также к юридическим последствиям. Поэтому создание доступного и эффективного решения для мониторинга трафика является актуальной задачей.

1.3. Трудности разработки

Основные трудности разработки связаны с ограничениями вычислительных ресурсов ESP8266, что ограничивает возможности глубокого анализа трафика. Кроме того, интеграция дополнительных компонентов, таких как SD-карта и зуммер, требует оптимизации кода и схемы устройства.

Для обеспечения надежности устройства использовались стандартные подходы к программированию и тестированию. В процессе разработки особое внимание уделялось обработке ошибок, например, при потере соединения с сетью или сбойном чтении данных с SD-карты.

Алгоритм работы устройства предусматривает динамическое управление индикацией и записью данных. В случае обнаружения подозрительного трафика устройство инициирует звуковое и световое уведомление, а также записывает информацию о событии для последующего анализа.

Предложенное устройство является примером применения доступных технологий для решения актуальных задач информационной безопасности. Оно может использоваться не только в организациях, но и в учебных целях, позволяя студентам изучать основы сетевого мониторинга и защиты данных. Вместе с тем устройство имеет свои ограничения, которые могут быть устранены в рамках дальнейших исследований. Например, использование более мощных микроконтроллеров позволит расширить функциональность и повысить точность анализа.

Заключение

Разработанное устройство предоставляет базовые функции мониторинга сетевой активности с минимальными затратами. Оно может быть полезным для небольших организаций, где необходимо обеспечивать защиту данных. Для повышения эффективности планируется разработка более сложных алгоритмов анализа и интеграция с облачными сервисами.

Введение рассматривает актуальность применения компактных и экономичных решений для мониторинга сетевой активности. Современные киберугрозы требуют адаптации доступ-

ных технологий для обеспечения защиты данных. Выбор ESP8266 обусловлен его универсальностью и доступностью для небольших организаций.

Литература

1. *Столлингс У.* Защита сетей. Основы и принципы / У. Столлингс. – М. : Вильямс, 2015. – 576 с.

2. *Горяинов А. Н., Смирнов А. В.* Основы защиты информации в компьютерных сетях. – СПб. : Питер, 2018. – 352 с.

3. *Kurnikov V.* Introduction to ESP8266 and Its Applications in IoT // Journal of Embedded Systems. – 2020. – Vol. 35, No 2. – P. 45–60.

4. Arduino Project Handbook: 25 Practical Projects to Get You Started / M. Oxer, H. Newman. – No Starch Press, 2016. – 272 p.

5. Интернет-ресурсы: Arduino IDE [Электронный ресурс]. – URL: https://www.arduino.cc (дата обращения: 23.11.2024).

6. Интернет-ресурсы: ESP8266 SDK Documentation [Электронный ресурс]. – URL: https://www.espressif.com (дата обращения: 23.11.2024).

7. AlexGyver Technologies. Официальный сайт YouTube-канала AlexGyver Show, посвящённый Arduino проектам, урокам и блогу [Электронный ресурс]. – URL: https://alexgyver.ru

УДК 303.732, 681.51, 517.988, 517.5, 519.6

НОВЫЙ ОПЕРАТОР ПРОИЗВЕДЕНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

А. М. Минитаева

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация. В работе вводится новый оператор умножения решетчатых функций и предлагается формула его вычисления. Для предложенной формулы доказываются свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности нового оператора произведения решетчатых функций, свойства существования единственной единицы и единственного ноля. Предложенный оператор умножения решетчатых функций позволяет использовать формулу прямой разности произведения решетчатых функций по новому оператору, как сумму произведений по новому оператору прямой разности первой функции на вторую функцию и прямой разности второй функции на первую функцию. Внешний вид этой формулы становится схожим с формулой производной произведения непрерывных функций.

Ключевые слова: решетчатые функции, прямая разность, оператор умножения решетчатых функций, ряд Маклорена, разностные уравнения, системы управления с дискретным временем.

Введение

В системах управления с дискретным временем рассматриваются решетчатые функции времени $f(t)$, $t = nT$, $n = 0,1,2,...$ или, в сокращенной записи, $f[n]$, определенные на дискретном множестве действительных чисел с шагом T ($T \in \mathbb{R}, T > 0$), который называется периодом повторения [9].

Например, в системе разностных уравнений линейной системы управления, которая записывается известным уравнением $x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$ в матричной форме, речь идет о первой прямой разности решетчатой функции:

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n], \tag{1}$$

которая служит аналогом первой производной $f'(t)$ непрерывной функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что функция $\Delta f[n]$ — тоже решетчатая, поэтому для нее также можно найти прямую разность, обозначив ее $\Delta^2 f[n]$. Аналогом второй производной $f''(t)$ является вторая прямая разность:

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n].$$

Справедливо рекуррентное соотношение $\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n]$. Применяя метод математической индукции, легко получить выражение для k-й прямой разности решетчатой функции:

$$\Delta^k f[n] = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f[n+k-j], \tag{2}$$

где $C_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ — число сочетаний из k по j (биномиальные коэффициенты).

Аналогом неопределенного интеграла непрерывной функции $\int f(t) = F(t) + C$, $F'(t) = f(t)$, находящего совокупность всех ее первообразных $\{F(t)\}$, служит сумма:

$$\sigma[n] = \sum_{j=0}^{n-1} f[j] + C, n = 0,1,2,...,$$

где C — произвольная постоянная; $\sigma[n]$ — неполная сумма (аналог первообразной) для решетчатой функции $f[n]$.

К сожалению, первая прямая разность (1) не обладает свойствами производной непрерывной функции. Например, в общем случае:

$$\Delta(f[n]g[n]) = \Delta f[n]g[n] + \Delta g[n]f[n] + \Delta f[n]\Delta g[n], \tag{3}$$

где последний член $\Delta f[n]\Delta g[n]$ отличает прямую разность произведения решетчатых функций от производной произведения непрерывных функций [2, 4]:

$$\big(f(t)g(t)\big)' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t).$$

Замечание 1. Применение численных методов к анализу нелинейных систем управления с непрерывным временем по своей сути означает замену непрерывных функций решетчатыми, поэтому при решении численными методами систем нелинейных дифференциальных уравнений член $\Delta f[n]\Delta g[n]$ из выражения (2) дает дополнительную погрешность в вычислениях [1, 3, 5].

Цель данной работы — предложить такой новый оператор умножения решетчатых функций, который позволит избавиться от «лишнего» члена в прямой разности произведения решетчатых функций:

$$\Delta(f[n]\overset{\tau}{\times} g[n]) = \Delta f[n]\overset{\tau}{\times} g[n] + \Delta g[n]\overset{\tau}{\times} f[n], \tag{4}$$

где $\overset{\tau}{\times}$ — бинарный оператор, определенный на бесконечном множестве решетчатых функций. Назовем этот оператор τ — умножением (или тау-умножением) решетчатых функций.

Использование тау-умножения позволит применять методы решения дифференциальных уравнений для решения разностных уравнений, например, сделает возможным осуществлять тау-разложение решетчатых функций в ряд Тейлора, использовать тау-интегрирование по частям решетчатых функций, применять тау-преобразование Лапласа к решетчатым функциям [6–8].

1. Оператор тау-умножения решетчатых функций

Для достижения цели работы предложенная формула (или алгоритм) вычисления тау-произведения решетчатых функций должна соответствовать ряду условий, объединим их в формализованную задачу работы.

Постановка задачи. Тау-умножение $f[n]\overset{\tau}{\times} g[n]$ должно соответствовать следующим требованиям:

1. Прямая разность тау-произведения решетчатых функций должна иметь схожий с производной произведения непрерывных функций вид (4) $\Delta(f[n]\overset{\tau}{\times} g[n]) = \Delta f[n]\overset{\tau}{\times} g[n] + \Delta g[n]\overset{\tau}{\times} f[n]$;
2. При стремлении периода повторения к нулю тау-произведение должно стремиться к обычному произведению непрерывных функций: $\lim\limits_{T\to 0} f[n]\overset{\tau}{\times} g[n] = \big|_{t=nT} f(t)g(t)$, где $f(t) = \big|_{t=nT} \lim\limits_{T\to 0} f[n]$ и $g(t) = \big|_{t=nT} \lim\limits_{T\to 0} g[n]$;
3. Тау-умножение должно обладать переместительным, сочетательным и распределительным относительно сложения свойствами;
4. Должен существовать единственный такой операнд тау-умножения, как «единица», тау-произведение которого с любой решетчатой функцией дает саму эту функцию;
5. Должен существовать единственный такой операнд тау-умножения, как «ноль», тау-произведение которого с любой решетчатой функцией дает сам этот «ноль».

С целью удобства записи некоторых выражений введем следующие обозначения:

$\frac{d_f}{dt}$ — это оператор для произведения непрерывных функций $f(t)g(t)$, который применяется только к функции $f(t)$, например, $\frac{d_f}{dt}\big(f(t)g(t)\big) = g(t)\frac{d}{dt}f(t) = f'(t)g(t)$, $\frac{d_f^2}{dt}\big(f(t)g(t)\big) = f''(t)g(t)$ и для произвольного порядка $\frac{d_f^n}{dt}\big(f(t)g(t)\big) = f^{(n)}(t)g(t)$;

Δ_f — это аналогичный оператор для решетчатых функций, который применяется только к функции $f[n]$, например, $\Delta_f\big(f(t)g(t)\big) = g[n]\Delta f[n]$, $\Delta_f^2\big(f(t)g(t)\big) = g[n]\Delta^2 f[n]$ и для произвольного порядка конечной разности $\Delta_f^k\big(f(t)g(t)\big) = g[n]\Delta^k f[n]$;

I — это единичный оператор для умножения решетчатой функции на скаляр и тау-умножения решетчатых функций, например, $If[n] = f[n]$;

$\exp(X) = e^X$ — это оператор комбинации экспоненты с оператором X;

$f'[n] = \frac{\Delta f[n]}{T} = \frac{f[n+1]-f[n]}{T}$ — это отношение первой прямой разности к периоду повторения, и $f'(t) = \Big|_{t=nT} \lim\limits_{T\to 0} f'[n]$ по определению производной непрерывной функции для $f(t) = \Big|_{t=nT} \lim\limits_{T\to 0} f[n]$, а для конечной разности произвольного порядка $f^{(k)}[n] = \frac{\Delta^k f[n]}{T^k}$.

Заметим также, что

$$e^{at} = \Big|_{t=nT} \lim_{T\to 0} e^{anT} = \lim_{T\to 0}(1+aT)^n, \tag{5}$$

т. е. пусть непрерывной функции $f(t) = e^{at}$ соответствует решетчатая функция $f[n] = (1+aT)^n$.

Определим соответствующую решетчатую функцию и для непрерывной функции $f(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$t^k = \Big|_{t=nT} \lim_{T\to 0}(nT)^k = \lim_{T\to 0} k!C_n^k T^k, \tag{6}$$

т. е. пусть непрерывной функции $f(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$ соответствует решетчатая функция $f[n] = k!C_n^k T^k, k \in \mathbb{N}$.

Для нахождения формулы, удовлетворяющей перечисленным в постановке задачи требованиям, разложим произведение непрерывных функций в ряд Маклорена:

$$f(t)g(t) = \exp\Big(t\Big(\frac{d_f}{dt} + \frac{d_g}{dt}\Big)\Big)\big(f(t)g(t)\big), \tag{7}$$

где $\exp\Big(t\Big(\frac{d_f}{dt} + \frac{d_g}{dt}\Big)\Big)$ — это сокращенная форма оператора $1 + \sum\limits_{j=1}^{\infty}\Big(t\Big(\frac{d_f}{dt} + \frac{d_g}{dt}\Big)\Big)^j \Big/ j!$.

Заменим в выражении (7) непрерывные функции $f(t), g(t)$ на решетчатые функции $f[n]$, $g[n]$, оператор $\exp(at)$ на $(1+aT)^n$ и операторы $\frac{d_f}{dt}, \frac{d_g}{dt}$ на $\frac{\Delta_f}{T}, \frac{\Delta_g}{T}$, при этом будем иметь в виду, что мы обозначили $\frac{\Delta}{T}y[n] = y'[n]$:

$$\tau[k] = f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] = \left(T\Big(\frac{\Delta_f}{T} + \frac{\Delta_g}{T}\Big) + I\right)^k (f[n]g[n]) = (\Delta_f + \Delta_g + I)^k \big(f[n]g[n]\big). \tag{8}$$

Применив полученный левый оператор $(\Delta_f + \Delta_g + I)^k$, получим:

$$\begin{aligned}\tau[k] = f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] = f[0]g[0] + C_k^1(g[0]\Delta f[0] + f[0]\Delta g[0]) + \\ + C_k^2(g[0]\Delta^2 f[0] + 2\Delta f[0]\Delta g[0] + f[0]\Delta^2 g[0]) + \ldots\end{aligned} \tag{9}$$

Применив формулу сочетаний к биномиальным коэффициентам внутри скобок и выражение (2) для прямой разности произвольного порядка, получаем выражение:

$$\tau[k] = f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \Delta^i f[0] \Delta^{j-i} g[0] = \sum_{i,j} (-1)^{k-i-j} C_k^{i,j} f[i] g[j], \tag{10}$$

где $C_k^{i,j} = \dfrac{k!}{i!\,j!(k-i-j)!}$.

Замечание 2. Для выражения (7) мы использовали разложение в ряд Тейлора в точке 0, поэтому выражения (8)–(10) справедливы для значений аргумента +0. Нетрудно распространить приведенные выкладки и на разложение в ряд Тейлора в произвольной точке $t_0 = n_0 T$, тогда выражение (7) изменится на $f(t)g(t) = \exp\left((t-t_0)\left(\dfrac{d_f}{dt} + \dfrac{d_g}{dt}\right)\right)\big(f(t)g(t)\big)$, а выражения (8)–(10) соответствующим образом необходимо изменить для $n = n_0$ вместо $n = 0$.

2. Свойства оператора тау-умножения

Докажем, что предлагаемая формула тау-умножения (10) удовлетворяет всем пяти требованиям решаемой задачи.

2.1. Прямая разность тау-произведения

Теорема 1. *Для двух решетчатых функций первая прямая разность их тау-произведения представляется суммой тау-произведения второй функции и первой прямой разности первой функции с тау-произведением первой функции и первой прямой разности второй функции по выражению (4):*

$$\Delta(f[n] \overset{\tau}{\times} g[n]) = \Delta f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] + \Delta g[n] \overset{\tau}{\times} f[n].$$

Доказательство. Используя выражение (9) для каждого слагаемого правой части, получим:

$$\begin{aligned} \Delta f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] + \Delta g[n] \overset{\tau}{\times} f[n] &= \Delta f[n] g[n] + C_k^1 (\Delta^2 f[n] g[n] + \Delta f[n] \Delta g[n]) + \ldots + \\ &+ f[n] \Delta g[n] + C_k^1 (f[n] \Delta^2 g[n] + \Delta f[n] \Delta g[n]) + \ldots = \\ \Delta f[n] g[n] + f[n] \Delta g[n] + C_k^1 (g[n] \Delta^2 f[n] &+ 2\Delta f[n] \Delta g[n] + f[n] \Delta^2 g[n]) + \ldots = \\ = 0 \cdot f[n] g[n] + C_k^0 (\Delta f[n] g[n] + f[n] \Delta g[n]) &+ C_k^1 (g[n] \Delta^2 f[n] + 2\Delta f[n] \Delta g[n] + f[n] \Delta^2 g[n]) + \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Запишем полученное выражение в виде суммы, которая после преобразований соответствует выражению (10) для прямой разности тау-произведения решетчатых функций $\Delta(f[n] \overset{\tau}{\times} g[n])$:

$$\begin{aligned} &0 \cdot f[n] g[n] + C_k^0 (\Delta f[n] g[n] + f[n] \Delta g[n]) + C_k^1 (g[n] \Delta^2 f[n] + 2\Delta f[n] \Delta g[n] + f[n] \Delta^2 g[n]) + \ldots = \\ &= 0 + \sum_{j=1}^{k} C_k^{j-1} \sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^i \Delta^i f[n] \Delta^{j-i-1} g[n] = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \Delta^i (\Delta f[n] + f[n]) \Delta^{j-i} (\Delta g[n] + g[n]) - \\ &- \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \Delta^i f[n] \Delta^{j-i} g[n] = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \Delta^i (f[n+1]) \Delta^{j-i} (g[n+1]) - \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \Delta^i f[n] \Delta^{j-i} g[n] = \\ &= f[n+1] \overset{\tau}{\times} g[n+1] - f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] = \Delta(f[n] \overset{\tau}{\times} g[n]) \end{aligned} \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем $\Delta f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] + \Delta g[n] \overset{\tau}{\times} f[n] = \Delta(f[n] \overset{\tau}{\times} g[n])$, значит, выражение (4) справедливо, и теорема 1 доказана, т. е. требование 1 для тау-произведения выполняется.

2.2. Предел тау-произведения при стремлении периода повторения к нулю

Теорема 2. $\lim\limits_{T\to 0} f[n]\overset{\tau}{\times} g[n]=\big|_{t=nT} f(t)g(t)$.

Доказательство. Так как $f(t)=\big|_{t=nT} \lim\limits_{T\to 0} f[n]$ и $g(t)=\big|_{t=nT} \lim\limits_{T\to 0} g[n]$,

$$\lim_{T\to 0} f[n]\overset{\tau}{\times} g[n]=\big|_{t=nT} = \lim_{T\to 0}\left(T(\frac{d_f}{dt}+\frac{d_g}{dt})+I \right)^k (f[n]g[n]) =$$

$$= \lim_{T\to 0} I^k (f[n]g[n]) = \lim_{T\to 0}(f[n]g[n]) = f(t)g(t).$$

Таким образом, при стремлении периода повторения к нулю тау-произведение стремится к обычному произведению непрерывных функций.

2.3. Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность

Теорема 3. *Тау-умножение коммутативно:* $f[n]\overset{\tau}{\times} g[n] = g[n]\overset{\tau}{\times} f[n]$.

Доказательство. В силу того, что правая часть равенства (9) содержит только стандартные скалярные произведения значений решетчатых функций, а стандартное скалярное произведение коммутативно, имеем

$$\tau[k] = f[n]\overset{\tau}{\times} g[n] = f[0]g[0] + C_k^1(g[0]\Delta f[0] + f[0]\Delta g[0]) +$$

$$+C_k^2(g[0]\Delta^2 f[0] + 2\Delta f[0]\Delta g[0] + f[0]\Delta^2 g[0]) + \ldots =$$

$$= g[0]f[0] + C_k^1(f[0]\Delta g[0] + g[0]\Delta f[0]) + C_k^2(f[0]\Delta^2 g[0] + 2\Delta g[0]\Delta f[0] + g[0]\Delta^2 f[0]) + \ldots =$$

$$= g[n]\overset{\tau}{\times} f[n],$$

т. е. тау-умножение обладает свойством коммутативности (подчиняется переместительному закону).

Теорема 4. *Тау-умножение ассоциативно:* $(g[n]\overset{\tau}{\times} f[n])\overset{\tau}{\times} y[n] = g[n]\overset{\tau}{\times}(f[n]\overset{\tau}{\times} y[n])$.

Доказательство. Согласно выражению (8)

$$(g[n]\overset{\tau}{\times} f[n])\overset{\tau}{\times} y[n] = (\Delta_\tau + \Delta_y + I)^k \left(\left((\Delta_g + \Delta_f + I)^k \left(g[n]f[n] \right) \right) y[n] \right),$$

где $\tau[n] = f[n]\overset{\tau}{\times} g[n]$.

Заметим, что

$$\Delta_\tau \left(\Delta_f (f[n]g[n]) y[n] \right) = \Delta_\tau (g[n]y[n]\Delta f[n]) = \Delta_\upsilon (g[n]y[n]\Delta f[n]) = \Delta_\upsilon \left(\Delta_f (f[n]y[n]) g[n] \right),$$

где $\upsilon[n] = f[n]\overset{\tau}{\times} y[n]$.

Поэтому, раскрывая скобки и последовательно применяя операторы в любой комбинации количества раз, получим равенство:

$$(\Delta_\tau + \Delta_y + I)^k \left(\left((\Delta_g + \Delta_f + I)^k \left(g[n]f[n] \right) \right) y[n] \right) = (\Delta_\upsilon + \Delta_g + I)^k \left(\left((\Delta_y + \Delta_f + I)^k \left(y[n]f[n] \right) \right) g[n] \right) =$$

$$= g[n]\overset{\tau}{\times}(f[n]\overset{\tau}{\times} y[n]).$$

Таким образом, $(g[n]\overset{\tau}{\times} f[n])\overset{\tau}{\times} y[n] = g[n]\overset{\tau}{\times}(f[n]\overset{\tau}{\times} y[n])$, т. е. тау-умножение обладает свойством ассоциативности (подчиняется сочетательному закону).

Теорема 5. *Тау-умножение обладает распределительным относительно сложения свойством:* $f[n]\overset{\tau}{\times}(g[n] + y[n]) = f[n]\overset{\tau}{\times} g[n] + f[n]\overset{\tau}{\times} y[n]$.

Доказательство. Подставим в (9) сумму решетчатых функций вместо второй решетчатой функции и раскроем скобки, а также используем свойство прямой разности произвольного порядка $\Delta^k(g[n]+y[n])=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j(g[n+k-j]+y[n+k-j])=\Delta^k g[n]+\Delta^k y[n]$ для суммы функций:

$$f[n]\overset{\tau}{\times}(g[n]+y[n])=f[0](g[0]+y[0])+C_k^1((g[0]+y[0])\Delta f[0]+f[0]\Delta(g[0]+y[0]))+$$
$$+C_k^2((g[0]+y[0])\Delta^2 f[0]+2\Delta f[0]\Delta(g[0]+y[0])+f[0]\Delta^2(g[0]+y[0]))+\ldots=$$
$$=g[0]f[0]+C_k^1(f[0]\Delta g[0]+g[0]\Delta f[0])+C_k^2(f[0]\Delta^2 g[0]+2\Delta g[0]\Delta f[0]+g[0]\Delta^2 f[0])+\ldots+$$
$$+y[0]f[0]+C_k^1(f[0]\Delta y[0]+y[0]\Delta f[0])+C_k^2(f[0]\Delta^2 y[0]+2\Delta y[0]\Delta f[0]+y[0]\Delta^2 f[0])+\ldots$$
$$=g[n]\overset{\tau}{\times}f[n]+y[n]\overset{\tau}{\times}f[n]=f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]+f[n]\overset{\tau}{\times}y[n],$$

Поэтому $f[n]\overset{\tau}{\times}(g[n]+y[n])=f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]+f[n]\overset{\tau}{\times}y[n]$, т. е. тау-умножение подчиняется дистрибутивному закону (обладает распределительным относительно сложения свойством).

Из теорем 3–5 следует, что тау-умножение коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно.

2.4. Существование единственной единицы

Теорема 6. $f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]=f[n]$ *тогда и только тогда, когда* $g[n]=1[n]$, $(1[n]=1,\forall n\in\mathbb{N}_0)$.

Доказательство. Если $g[n]=1[n],(1[n]=1,\forall n\in\mathbb{N}_0)$, то

$$f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]=(\Delta_f+\Delta_g+I)^k\left(f[n]g[n]\right)=(\Delta_f+\Delta_g+I)^k\left(f[n]1[n]\right)=I^k(f[n])=f[n].$$

Если $f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]=f[n]$, то

$f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]=f[n]=f[n]1[n]=I^k\left(f[n]1[n]\right)=(\Delta_f+\Delta_{const}+I)^k\left(f[n]1[n]\right)=f[n]\overset{\tau}{\times}1[n]$, т. е. $g[n]=1[n]$.

Для операции тау-умножения существует единица, причем единственная. Таким образом, требование 4 для тау-произведения о существовании единственной единицы выполняется.

2.5. Существование единственного ноля

Теорема 7. $f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]=f[n]$ *тогда и только тогда, когда* $g[n]=0[n]$, $(0[n]=0,\forall n\in\mathbb{N}_0)$.

Доказательство. Если $g[n]=0[n]$, $(0[n]=0,\forall n\in\mathbb{N}_0)$, то

$$f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]=(\Delta_f+\Delta_g+I)^k\left(f[n]0[n]\right)=(\Delta_f+\Delta_g+I)^k\left(0\right)=0=0[n].$$

Если $f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]=0[n]$, то

$f[n]\overset{\tau}{\times}g[n]=0[n]=0=(\Delta_f+\Delta_g+I)^k\left(0\right)=(\Delta_f+\Delta_g+I)^k\left(f[n]0[n]\right)=f[n]\overset{\tau}{\times}0[n]$, т. е. $g[n]=0[n]$.

Для операции тау-умножения существует ноль, причем единственный. Значит, для тау-произведения подтверждено существование единственного ноля и требование 5 удовлетворено.

Заключение

Предложен новый оператор умножения решетчатых функций, который позволяет взглянуть на задачи системного анализа и теории управления с нового ракурса — дифференциаль-

ные уравнения (в том числе и нелинейные [10, 11]) становятся эквивалентными рекуррентным (без какого-либо округления), конечно, для определенного класса функций (аналитические справа от нуля). Дискретные задачи в целом с помощью описанного подхода предположительно возможно решать с привлечением методов для непрерывных функций, что будет являться темой дальнейших исследований.

Литература

1. *Минитаева А. М.* Многомодельный подход к прогнозированию нелинейных нестационарных процессов в задачах оптимального управления / А. М. Минитаева // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 года / Воронежский государственный университет. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2023. – С. 1564–1571. – EDN BABZFS.

2. *Минитаева А. М.* Математическая модель и метод принятия решений в экономических системах на основе глубокого обучения / А. М. Минитаева // Искусственный интеллект в автоматизированных системах управления и обработки данных: Сборник статей II Всероссийской научной конференции. В 5-ти томах, Москва, 27–28 апреля 2023 года. – Москва: Издательский дом КДУ, «Добросвет», 2024. – С. 42–49.

3. *Минитаева А. М.* Новый оператор тензорного произведения и анализ нелинейных систем с полиномиальными функциями пространства состояний / А. М. Минитаева // Информационно-технологический вестник. – 2024. – № 3(41). – С. 3–14.

4. *Минитаева А. М.* Обзор подходов к несмещенной оценке коэффициентов авторегрессии / А. М. Минитаева // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2024 : Сборник трудов XIV Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2024, Москва, 17–20 июня 2024 года / Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – Москва : Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2024. – С. 3779–3783. – DOI 10.25728/vspu.2024.3779.

5. *Шайхутдинов А. А.* Методы и аспекты прогнозного моделирования нелинейных нестационарных процессов / А. А. Шайхутдинов // Информационно-технологический вестник. 2024. Т. 40. № 2. С. 66–76.

6. *Golovina A. M.* Asymptotic behavior of the eigenvalues of the laplacian with two distant perturbations on the plane (the case of arbitrary multiplicity); [асимптотика собственных значений оператора лапласа с двумя разбегающимися возмущениями на плоскости (случай произвольной кратности)] // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. – 2023. – Т. 108, № 3. – С. 4–19. doi: 10.18698/1812-3368-2023-3-4-19

7. *Покровский И. Л.* Задача на собственные значения для оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 10. – С. 1363–1370. doi: 10.1134/S0012266118100075

8. *Галанин М. П., Сорокин Д. Л.* Решение внешних краевых задач для уравнения Лапласа // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 7. – С. 890–899. doi: 10.1134/S0012266120070083

9. *Спасенов А. Ю., Досько С. И., Шептунов С. А. [и др.]* Идентификация режима управления с использованием структурно-параметрического анализа временных рядов // Труды Международной конференции «Управление качеством, транспортная и информационная безопасность, информационные технологии», ИТ и ИБ 2022. – 2022. – С. 307–310. doi: 10.1109/ITQMIS56172.2022.9976514

10. *Канатников А. Н.* Новые критерии устойчивости положений равновесия дискретных систем // Труды 14-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелиней-

ных систем управления» (Пятницкая конференция), 2018 г., СТАБ 2018. – 2018. – С. 1–3. doi: 10.1109/СТАБ.2018.8408361

11. *Lapin A. V., Zubov N. E., Proletarskii A. V.* Generalization of ackermann formula for a certain class of multidimensional dynamic systems with vector input // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. – 2023. – Т. 109, № 4. – С. 18–38. doi: 10.18698/1812-3368-2023-4-18-38

УДК 519.85+517.977.52

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЧИСТКИ ВОДОЁМОВ ОТ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОРГАНИЧЕСКИМИ ОТХОДАМИ

А. И. Петренко

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается задача минимизации затрат на очистные мероприятия для снижения уровня отходов и дефицита растворённого кислорода в водоёмах. Для поиска оптимального управления используется принцип максимума Понтрягина, позволяющий определить наилучшие стратегии очистки. Исследуется влияние стоимостного коэффициента на параметры модели для различных типов водных объектов. Результаты демонстрируют зависимость оптимальных значений концентрации токсических веществ, дефицита кислорода и общих затрат от вида водоёма и коэффициента стоимости, подчеркивая важность учёта этих особенностей при планировании экологических мероприятий.
Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, модель очистки воды, краевая задача, локально-оптимальный процесс, минимизация, целевой функционал, сопряжённые функции, условия трансверсальности, точка переключения.

Введение

Загрязнение водоёмов органическими отходами является одной из наиболее острых экологических проблем с которой сталкиваются современные экосистемы. Антропогенное воздействие на различные водные объекты приводит к ухудшению качества воды. В частности, это происходит из-за накопления органических веществ, что, в свою очередь, вызывает критический дефицит растворённого кислорода, необходимого для экосистемы, а это ставит под угрозу биологическое разнообразие и устойчивость водоёмов.

В условиях увеличивающегося негативного воздействия на экосистемы и ограниченных ресурсов важным становится эффективное управление процессом очистки воды от загрязняющих веществ. В данной работе рассматривается математическая модель, описывающая взаимодействие между водой, растворённым кислородом и органическими загрязнителями.

Целью работы является поиск оптимального решения для управления процессом очистки и анализ затрат на очистные технологии в различных водоёмах.

1. Решение задачи с помощью принципа максимума Понтрягина

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим вопрос о минимизации суммарных затрат на проведение работ по очистке водных объектов и уменьшении концентрации отходов и дефицита кислорода в течение рассматриваемого периода времени T. Задача оптимального управления будет иметь вид

$$J(u) = \int_0^T (au(t) + x_1(t) + x_2(t))dt \to \inf \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 - u \\ \dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = L_0 \\ x_2(0) = D_0 \end{cases} \tag{3}$$

$$0 \le u(t) \le u_0 \tag{4}$$

где a — коэффициент, характеризующий стоимость работ в единицу времени; k_1 — коэффициент отбора кислорода (1/день); k_2 — коэффициент реаэрации (1/день); $x_1(t)$ — концентрация отходов; $x_2(t)$ — дефицит кислорода; $u(t)$ — функция управления изменением концентрации отходов, удовлетворяющая ограничению на управление (4), u_0 — максимальное количество отходов, удалённых из единицы объёма в единицу времени.

В данной работе будут рассмотрены большие реки с медленным течением $(k_2 = 0.198)$, слабопроточные или стоячие водоёмы $(k_2 = 0.146)$ и малые реки с быстрым течением $(k_2 = 0.802)$, подверженные загрязнению токсическими веществами $(k_1 = 0.0103)$.

1.2. Решение задачи

Для задачи (1)–(4) составим функцию Понтрягина

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda_0) = -\lambda_0(au(t) + x_1(t) + x_2(t)) - \lambda_1(t)(k_1 x_1(t) + u(t)) + \lambda_2(t)(k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)).$$

Пусть $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ — локально-оптимальный процесс в задаче оптимального управления (1)–(4). Тогда выполняется условие максимума

$$H(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \lambda(t), \lambda_0) = \max_{0 \le u(t) \le u_0} H(t, \tilde{x}(t), u(t), \lambda(t), \lambda_0) = [-\lambda_0 \tilde{x}_1(t) - \lambda_0 \tilde{x}_2(t) - \lambda_1(t) k_1 \tilde{x}_1(t) +$$

$$+\lambda_2(t) k_1 \tilde{x}_1(t) - \lambda_2(t) k_2 \tilde{x}_2(t)] + \max_{0 \le u(t) \le u_0} [-\lambda_0 au(t) - \lambda_1(t) u(t)]$$

Поскольку первое слагаемое от $u(t)$ не зависит, будем искать максимум от выражения

$$-\lambda_0 au(t) - \lambda_1(t) u(t) \to \max_{0 \le u(t) \le u_0} \tag{5}$$

Сопряжённые функции $\lambda_i(t), i = \overline{1,2}$ определяются по формуле $\lambda_i'(t) = -\dfrac{\partial H(t)}{\partial x_i}, i = \overline{1,2}$ и удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = \lambda_0 + k_1 \lambda_1(t) - k_1 \lambda_2(t) \\ \lambda_2'(t) = \lambda_0 + k_2 \lambda_2(t) \end{cases}$$

Так как в задаче оптимального управления правый конец свободен, то условия трансверсальности принимают вид $\lambda_i(T) = 0, i = \overline{1,2}.$

Таким образом, краевая задача принципа максимума представима в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 - \tilde{u} \\ \dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = L_0 \\ x_2(0) = D_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1' = \lambda_0 + k_1 \lambda_1 - k_1 \lambda_2 \\ \lambda_2' = \lambda_0 + k_2 \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1(T) = 0 \\ \lambda_2(T) = 0 \end{cases}$$

где $\tilde{u}(t)$ с учётом (5) задаётся соотношением

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_0, & \text{если } -\lambda_0 a - \lambda_1(t) > 0 \\ 0, & \text{если } -\lambda_0 a - \lambda_1(t) < 0 \\ [0, u_0], & \text{если } -\lambda_0 a - \lambda_1(t) = 0 \end{cases}$$

здесь

$$\lambda_1(t) = \frac{-k_2^2 e^{k_1(t-T)} + k_1^2 e^{k_2(t-T)} - k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2 (k_1 - k_2)}.$$

Согласно исследованиям, для нерегулярного случая решений нет. Поэтому будут рассмотрены регулярные решения. Возьмём $\lambda_0 = 1$.

2. Исследование подходов к заданию управления

Изучим различные варианты задания управления.

1) Рассмотрим случай, когда $\tilde{u}(t) = u_0,\ t \in [0,T]$, он возможен только тогда, когда на всём отрезке $[0,T]$ выполняется неравенство $-a > \lambda_1(t)$. Согласно результатам проведённых исследований, данное неравенство не выполняется на всём временном интервале.

2) Пусть $\tilde{u}(t) = 0,\ t \in [0,T]$. Управление принимает данное значение, если справедливо неравенство $-a < \lambda_1(t)$. Данное неравенство выполняется на всём отрезке только при больших значениях стоимостного коэффициента, например, в случае $a = 28$. Это позволяет сделать вывод о том, что при высокой стоимости очистных работ смысла в их проведении нет.

3) На основе данных, полученных в п. 1) и 2), задача имеет точку переключения. Возможен только случай, когда

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_0, [0,\tau] \\ 0, [\tau, T] \end{cases}$$

Для того, чтобы определить точку переключения τ, необходимо решить уравнение

$$\lambda_1(\tau) = -a \tag{6}$$

Для коэффициента, характеризующего стоимость работ в единицу времени были рассмотрены значения $a = 0.01;\ a = 1;\ a = 6$. После численного решения уравнения (6) были получены результаты, которые приведены в табл.1.

Таблица 1

Значения τ при различных значениях a и k_2

a	0.01	1	6
$\tau, (k_2 = 0.198)$	29.99	28.9997	23.9436
$\tau, (k_2 = 0.146)$	29.99	28.9998	23.9557
$\tau, (k_2 = 0.802)$	29.99	28.9989	23.8718

Для построения графиков изменения концентрации отходов и дефицита кислорода необходимо, чтобы до момента τ рассматривалась система с управлением, описываемая системой (2), а после — система без управления вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2 \end{cases}$$

В данной системе влияние управляющего воздействия отсутствует, и это уравнение описывает естественное поведение системы. Следует отметить, что построенные траектории должны быть непрерывны в момент времени τ.

3. Оценка результатов при различных значениях параметров k_2 и a

Для слабопроточных и стоячих водоёмов были построены графики изменения концентрации отходов и дефицита кислорода при различных значениях стоимостного коэффициента (рис. 1–3). Это позволило выявить, что чем выше данный коэффициент, тем меньше временной интервал на котором осуществляется управление.

Для всех трёх видов водных объектов, рассматриваемых в данной работе, были найдены конечные значения концентрации отходов и дефицита кислорода, а так же посчитан целевой функционал $J(u) = \int_0^{\tau} (au(t) + x_1(t) + x_2(t))dt + \int_{\tau}^{T} (x_1(t) + x_2(t))dt$. Результаты представлены в табл. 2–4.

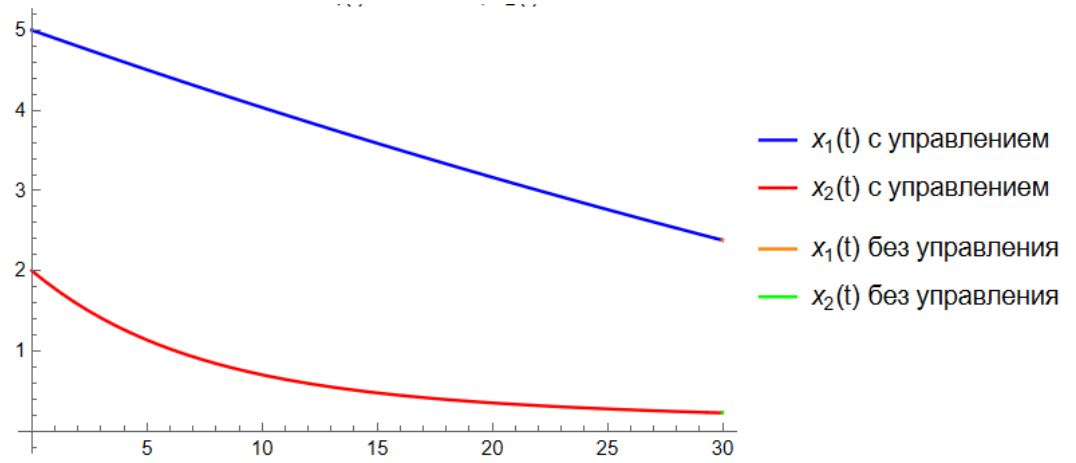


Рис. 1. Графики $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *при* $a = 0.01;\ u_0 = 0.05$

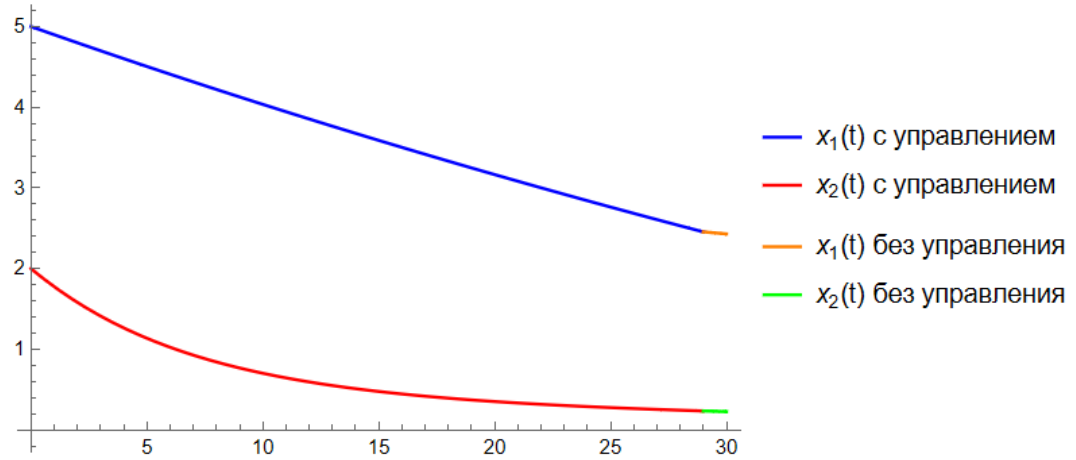


Рис. 2. Графики $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *при* $a = 1;\ u_0 = 0.05$

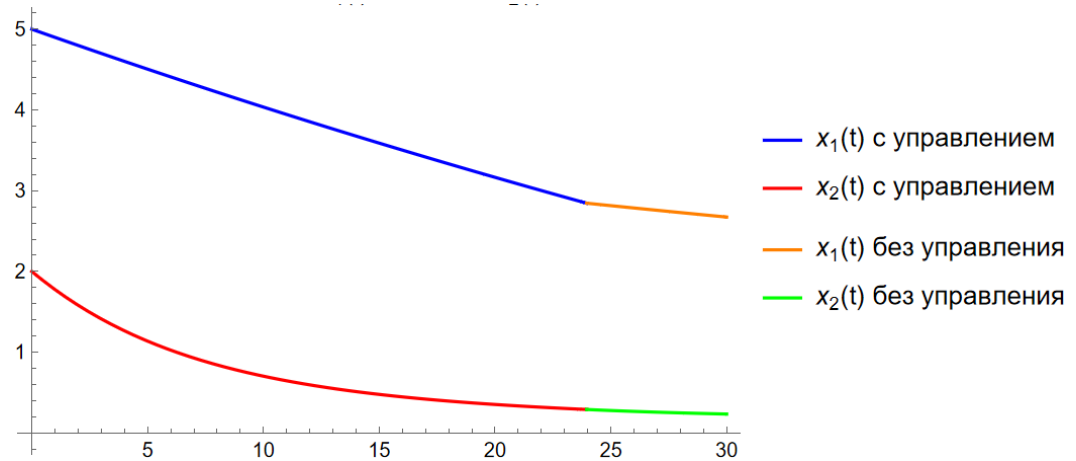


Рис. 3. Графики $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *при* $a = 6;\ u_0 = 0.05$

Таблица 2

Значения $x_1(t)$, $x_2(t)$ *и* $J(u)$ *при различных значениях a для больших рек с медленным течением*

Коэффициент a	Концентрация отходов	Дефицит кислорода	Функционал
0.01	2.38102	0.148993	123.705
1	2.43028	0.149234	125.165
6	2.67409	0.155423	131.785

Таблица 3

Значения $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $J(u)$ при различных значениях a для слабопроточных или стоячих водоёмов

Коэффициент a	Концентрация отходов	Дефицит кислорода	Функционал
0.01	2.38102	0.226654	128.516
1	2.43027	0.226898	129.976
6	2.67352	0.233654	136.598

Увеличение стоимостного коэффициента приводит к росту общих затрат на очистные работы, что, в свою очередь, не снижает концентрацию отходов и не устраняет дефицит кислорода, а наоборот, приводит к ухудшению этих показателей.

Таблица 4

Значения $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $J(u)$ при различных значениях a для малых рек с быстрым течением

Коэффициент a	Концентрация отходов	Дефицит кислорода	Функционал
0.01	2.38102	0.0317816	112.552
1	2.43032	0.0319818	114.012
6	2.67746	0.0348396	120.626

В малых реках наблюдается наименьшее значение функционала по сравнению со слабопроточными водоёмами и большими реками при одинаковых коэффициентах. Дефицит кислорода в малых реках также значительно ниже, нежели в двух других видах водоёмов. При этом концентрация отходов примерно одинакова для различных водных объектов.

Заключение

Проведённые в данной работе исследования позволили выявить, что высокая стоимость очистных работ не всегда оправдана. Стоит отметить, что чем выше стоимостный коэффициент, тем меньше времени требуется для управления процессом. Однако, его увеличение не приводит к улучшениям в состоянии экосистем, а способствует росту затрат и ухудшению качества воды.

Кроме того, анализ показал, что малые реки отличаются лучшими показателями дефицита и требуют меньших ресурсов на проведение очистных мероприятий, нежели слабопроточные водоёмы, затраты на очистку которых самые высокие в сравнении с остальными рассматриваемыми типами водных объектов.

Таким образом, для достижения оптимального результата в области очистки водоёмов необходимо учитывать как экономические, так и экологические факторы, а также выбирать и применять технологии для очищения вод с учётом особенностей конкретного типа водоёма.

Литература

1. *Андреева Е. А.* Вариационное исчисление и методы оптимизации: учеб. пособие / Е. А. Андреева, В. М. Цирулёва. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2001. – 576 с.

2. Исследование операций. В 2 т. Т. 2. Модели и применения / Р. Браун, Р. Мэзон, Э. Фламгольц [и др.]; отв. ред. Дж. Моудера. – Москва : Мир, 1981. – 677 с.

3. *Местецкий Л. М.* Математические модели в экологии: учеб. пособие / Л. М. Местецкий. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 1997. – 40 с.

4. *Пэнтл Р.* Методы системного анализа окружающей среды / Р. Пэнтл. – Москва : Мир, 1979. – 214 с.

УДК 004.75

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СЕТЕЦЕНТРИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО И ЭМЕРДЖЕНТНОГО ИНТЕЛЛЕКТА

М. А. Принев

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье дается понятие децентрализованного и эмерджентного интеллекта в сложных многоагентных системах (МАС), приводится обоснование оптимальности использования технологий МАС для реализации интеллектуальных децентрализованных систем, раскрывается сущность самоорганизованных систем и значения самоорганизации в возникновении эмерджентности системы, рассматривается сетецентрическая концепция многоагентных систем и свойства, присущие недетерминированной интеллектуальной системе умных сервисов, описывается гипотеза возникновения эмерджентного интеллекта в сложных самоорганизующихся системах.
Ключевые слова: децентрализованный интеллект, эмерджентность, самоорганизация, эмерджентный интеллект, многоагентные технологии, сетецентрическая концепция, автономный агент, интеграционные решения, адаптивность, распределенность, киберфизическая система.

Введение

В настоящее время информационные технологии занимают ведущее положение во всех сферах деятельности и немаловажное место среди них занимает искусственный интеллект (ИИ). Понятие ИИ подразумевает «комплекс технологических решений, позволяющий имитировать когнитивные функции человека (включая самообучение, поиск решений без заранее заданного алгоритма и достижение инсайта) и получать при выполнении конкретных практически значимых задач обработки данных результаты, сопоставимые, как минимум, с результатами интеллектуальной деятельности человека» [1]. Динамичное развитие ИИ происходит в значительной степени за счет развития технологий больших данных и глубокого обучения на основе нейронных сетей, в которых достигнуты большие успехи в обработке естественных языков, оптимизации сложных вычислений, методах восприятия и представления знаний и в других областях. Таким образом, в современных условиях наибольшее развитие получает так называемый централизованный ИИ.

Одной из важнейших задач, решения которой ждут от ИИ, является автоматизация процессов принятия решений в условиях существенных неопределенностей и дефицита информации в режиме реального времени. Это становится особенно актуальным для Интернета вещей, киберфизических и роботизированных систем, для приложений глобальной логистики, децентрализованной экономики и других областей, которые формально описываются сетевыми структурами с большим числом узлов и сложными динамическими связями разной семантики, то есть многоагентными системами (МАС) [2]. Свойства систем, позволяющие рассматривать МАС как децентрализованный ИИ, а также признаки и критерии проявления эмерджентного интеллекта в недетерминированных системах являются актуальными вопросами для научных исследований.

1. Многоагентные технологии для реализации децентрализованного интеллекта

Технология и архитектура МАС и автономного агента (АА) [3] являются оптимальными для разработки приложений с использованием децентрализованного интеллекта. Это обе-

спечивается структурированием МАС по принципу сетецентрического управления («равный с равным»), что означает уход от строгой иерархии и центрирования системы, повышением требований к интеграции между агентами и сервисами, а также базовыми свойствами самих АА, актуальными для использования в децентрализованных системах. Такими свойствами являются:

– автономность АА;

– про-активное поведение АА;

– интерактивность АА.

Автономность агента позволяет не только решать поставленные задачи без внешнего контроля и вмешательства, но и контролировать действия и внутреннее состояние агента самим АА. Про-активное поведение агента дает ему возможность при управлении своим поведением принимать во внимание не только информацию, полученную им из внешнего мира, но и предысторию своих действий и состояний внешней среды (генерировать сообщения и посылать их другим агентам даже при отсутствии входных событий). Интерактивность АА определяет способность агентов оказывать то или иное влияние друг на друга. Эти свойства позволяет обеспечить детерминированность системы. Таким образом, МАС, сформированная из АА способна генерировать решение сложных задач.

В системе децентрализованного ИИ, основанного на парадигме МАС, в каждом автономном узле (кластере) сети существует АА, который управляет внутренним поведением и состоянием программных или аппаратных компонент кластера, взаимодействуя при этом с агентами других узлов МАС посредством обмена сообщениями в асинхронном режиме, то есть является представителем своего кластера во внешней, по отношению к узлу, среде. При этом АА получает динамически обновляемую информацию из внешней среды, формирует пул информации в собственном кластере, обрабатывает информацию от ограниченного числа соседних агентов или пересылает информацию другому АА. При этом существенно сокращаются ресурсные и временные затраты на обработку информации, подобно тому, как это происходит в архитектуре распределенных и периферийных вычислений [2, 4].

В сетецентрической концепции МАС важное значение приобретают интеграционные решения, которые должны обеспечить децентрализованную систему функциональными возможностями для реализации основных этапов работы с сообщениями в режиме асинхронности, а именно, надежную работу при отправке, обработке и получении сообщений, а также функционирование логистических каналов для доставки сообщений. Благодаря асинхронному принципу работы, обеспечивается высокий уровень надежности, так как при транспортировке информация хранится в промежуточном независимом хранилище, бесшовность работы независимых элементов системы, которые гарантированно получают необходимые сообщения в нужное время, не вступая в непосредственный контакт друг с другом, что служит также и гомогенизации приложений, так как обеспечивает кроссплатформенность и языковую интеграцию [5, 6].

Таким образом, для реализации децентрализованного ИИ необходима технология МАС, представляющая из себя недетерминированную интеллектуальную систему умных сервисов. Подобная система должна обладать следующими свойствами [7]:

– открытость — это возможность вводить новые сервисы в работающую систему, а также осуществлять вывод сервисов из эксплуатации без остановки и перезапуска, при этом возможности динамического установления связи и появления взаимодействия между сервисами должны осуществляться в соответствии со специальными протоколами;

– распределенность — это свойство обеспечивает непрерывную, параллельную и асинхронную работу всех сервисов, при этом все сервисы могут вызываться другими сервисами как напрямую, так и проактивно, то есть быть инициироваться событиями, сгенерированны-

ми системой в соответствии с внутренним ее состоянием, а также критериями и ограничениями, зависящими от предпочтений в принятии решений;

– адаптивность — это способность системы изменять структуру или функции под действием внешних факторов для повышения своей эффективности, в частности, способность адаптивно реагировать на события, отвечая на изменение внешних условий, частично изменять внутренние критерии;

– самоорганизация — способность сервисов системы самостоятельно устанавливать локальные связи и в ходе работы пересматривать их при изменении ситуации.

Самоорганизация является основополагающим свойством МАС, позволяющим реализовать децентрализованный ИИ при помощи многоагентных технологий. Самоорганизация в МАС представляет собой совокупность внутренних процессов локальных взаимодействий компонент системы и множество отношений между компонентами системы, которые определяют структуру их взаимодействия в динамике функционирования. Таким образом, самоорганизация системы можно интерпретировать как процесс, ведущий к возникновению, поддержанию и изменению организации системы без явного внешнего управления, причем изменения возникают только за счет внутренних взаимодействий, а сам процесс является динамическим. Самоорганизация обладает следующими свойствами [2, 8]:

– автономность — отсутствие управления со стороны внешней среды, глобальный порядок, который возникает в системе за счет внутренних локальных взаимодействий ее компонент;

– эмерджентность — появление у системы свойств, не присущих её элементам в отдельности или несводимость свойств системы к сумме свойств её компонент;

– диссипация — рассеяние энергии в неустойчивых состояниях при отсутствии внешних возмущений; что приводит к переходам в стабильные состояния с эмерджентными свойствами;

– нелинейная динамика — неустойчивость и чувствительность к начальным состояниям и к малым изменениям параметров, когда при их малых флуктуациях в некоторых критических точках пространства состояний поведение системы может меняться значительно, и это свойство не может быть выведено из свойств отдельных компонент;

– множественность устойчивых состояний (аттракторов, точек притяжения);

– избыточность компонент системы и их взаимодействий, что влечет нечувствительность к их выходу из строя (отказоустойчивости);

– адаптивность — способность изменять свое поведение и переходить в новое устойчивое состояние с изменением структуры системы;

– сложность, обусловленная большим числом компонент и эмерджентностью ее глобальных свойств и поведения;

– простота правил взаимодействия компонент, влекущих за собой сложное поведение системы, не вытекающее из правил взаимодействия;

– наличие иерархии — самоорганизующаяся система описывается не менее, чем на двух уровнях: на уровне локальных взаимодействий компонент и на глобальном уровне, где проявляются эмерджентные свойства.

В настоящее время преобладают централизованные технологии с использованием ИИ, однако, появляется все больше запросов на использование децентрализованного ИИ, например, технологии периферических вычислений, мобильная робототехника, группы беспилотных аппаратов, вычисления на устройствах «интернета вещей» [9]. Децентрализованный искусственный интеллект опирается на технологию МАС, что подразумевает сетецентрический подход, при котором множество распределенных узлов сети активно взаимодействуют с друг другом для решения общих задач. Топология сети при этом является динамической, что влечет за собой задачу построить коммуникацию сети с динамической маршрутизацией сообщений. Еще одной задачей является обеспечение устойчивости и адаптивности децентрализованных алгоритмов управления. Использование в МАС различных сенсорных данных ставит пробле-

му слияния гетерогенных данных, получаемых системой от сети сенсоров. Для решения этих задач могут быть применены методы агрегирования (усреднения) информации об объектах в системе в целом или какой-то ее части, формирования кластерных структур (коалиций) в процессе функционирования больших сложных сетевых систем (групп роботов, роботизированных устройств, агентов) с локальными взаимодействиями [2, 10]. Эффективным решением могут стать децентрализованные алгоритмы, включающие протоколы переговоров, построенных на базе метода компенсаций. В основу этого метода положены индивидуальные функции удовлетворенности и бонусы/штрафы программных агентов. Эти функции регулируют эластичность агентов по отношению к взаимным уступкам при разрешении выявленных конфликтов в процессе переговоров [2, 11].

2. Эмерджентный интеллект

Эмерджентность является особым свойством самоорганизующейся МАС, это динамическое появление глобального порядка, структуры, свойства как интегрального результата локальных взаимодействий элементов системы. В качестве примера эксперимента по выявлению эмерджентных свойств МАС можно привести Модель MANTA, ориентированную на создание программной среды для реализации «социальных вычислений» [12].

Система MANTA состоит из агентов трех типов: агенты (сотрудники: матка, рабочие муравьи, мужские особи), зависимые агенты (личинки на разных стадиях развития, коконы), «физические» агенты (свет, влажность, мусор, погибшие муравьи). Агенты могут создавать стимулы в окружающей среде, которые обладают свойством вызывать реакцию определенных групп других агентов, при этом могут существовать агенты, не реагирующие на конкретный стимул. Имитационные эксперименты проводились с использованием модели, воспроизводящей лабораторные условия, в которых изучался естественный социогенез, при этом форма лабораторного гнезда была такой же, как на рис. 1.

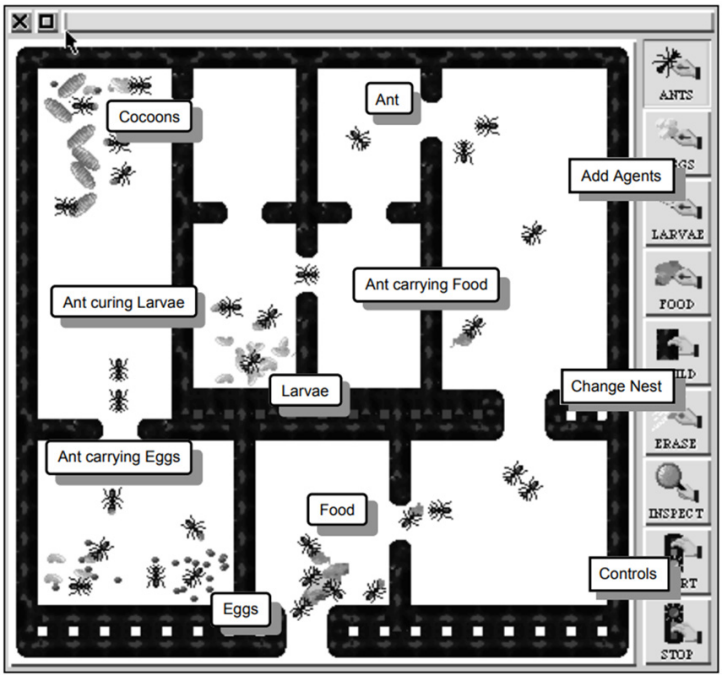


Рис. 1. Имитационное гнездо [12]

Цель эксперимента — определить, какую стратегию развития используют королева и первые рабочие, которые преуспели в создании колонии. Под эмерджентной стратегией исследо-

ватели понимали глобальное долгосрочное поведение, которое с точки зрения наблюдателя выглядит как стратегия, но которое не было закодировано в поведении агентов. На рис. 2. представлен график одного из удачных экспериментов, на котором выявлена связь между линиями развития яиц и личинок, не запрограммированная разработчиками.

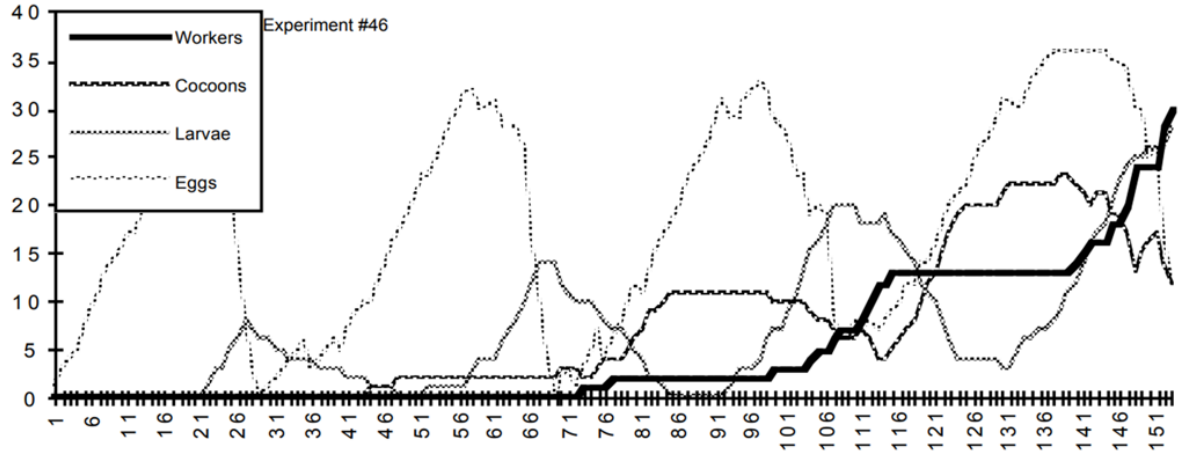


Рис. 2. Пример демографической эволюции колонии [12]

Для подтверждения возникновения эмерджентной стратегии поведения агентов была проведена серия экспериментов, которая подтвердила устойчивость возникшей связи и опровергла ее случайное единичное проявление.

Именно самоорганизация и эмерджентность порождают эволюционное развитие, зависимость от предыстории событий, появление новых качеств системы, которые не были заложены в алгоритмы ее компонентов. Таким образом эмерджентный интеллект можно определить, как спонтанную недетерминированную цепочку согласованных изменений состояний агентами, находящими решение новой проблемы или повышающими ценность уже имеющегося решения, возникающую реактивно (под действием внешних событий) или проактивно (из внутренних причин или мотивов). Понятие эмерджентного интеллекта и характеристика принципов его построения впервые были опубликованы в [13], где анализировалась работа МАС логистической компании и были выявлены волновые нелинейные эффекты, нехарактерные для детерминированного программирования. Эти эффекты выражались в периодических колебаниях, резонансных явлениях и катастрофах в расписании и логистических маршрутах компании, которые оказались проявлением самоорганизации и эмерджентности агентов системы и не были заложены в алгоритмы их деятельности. Изучение таких эффектов, даже деструктивных позволит моделировать в самоорганизующихся системах творческие акты с непрерывным переходом от порядка к хаосу, и наоборот.

Гипотеза существования нового класса децентрализованных систем ИИ, систем эмерджентного интеллекта является перспективным направлением в научных исследованиях. Основными задачами, требующими проработки для реализации эмерджентного интеллекта при помощи технологии МАС являются такие, как: алгоритмы и технологии самоорганизации, методологии создания систем ЭИ, модели, методы и алгоритмы коллективного принятия решений в ЭИ, компоненты инструментария для создания систем ЭИ, сетецентрическая платформа и экосистема умных сервисов [2].

Заключение

Сетецентрическая парадигма позволяет использовать технологии МАС для реализации децентрализованного интеллекта. Разработка недетерминированной интеллектуальной системы умных сервисов должна обеспечить решение следующего комплекса задач:

– построение коммуникации сети с динамической маршрутизацией сообщений;

– обеспечение устойчивости и адаптивности децентрализованных алгоритмов управления;

– оптимизация слияния гетерогенных данных, получаемых системой.

Многоагентные системы, обладающие самоорганизацией, являются сложными динамическими системами, в которых возникает явление эмерджентности. В рамках научных исследований идея ЭИ является перспективным направлением, в котором решаются такие актуальные задачи, как:

– условия и предпосылки возникновения явления эмерджентности в недетерминированных системах;

– алгоритмы и технологии самоорганизации;

– методологии создания систем ЭИ;

– модели, методы и алгоритмы коллективного принятия решений в ЭИ;

– компоненты инструментария для создания систем ЭИ.

Исследование условий возникновения эмерджентности в сложных самоорганизующихся МАС позволит подтвердить гипотезу существования нового класса децентрализованных систем ИИ и реализовать эмерджентный интеллект, как управляемое эволюционное развитие сложных интеллектуальных киберфизических и роботизированных систем.

Литература

1. ГОСТ Р 59277-2020. Национальный стандарт Российской Федерации. Системы искусственного интеллекта. Классификация систем искусственного интеллекта (утвержден и введен в действие приказом Росстандарта от 23.12.2020 № 1372-ст). Москва : Стандартинформ, 2021.

2. *Городецкий В. И.* Децентрализация, самоорганизация и эмерджентный интеллект – цифровой взрыв умных технологий / В. И. Городецкий, О. Н. Граничин, П. О. Скобелев // Материалы общих заседаний 15-й Мультиконференции по проблемам управления : Материалы конференции, Санкт-Петербург, 04–06 октября 2022 года. – Санкт-Петербург: «Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2022. – С. 40–54. – EDN WRECHZ.

3. *Леденева Т. М.* Многоагентные системы: модели агентов и постановки задач, обеспечивающие их характерные свойства (часть 1) / Т. М. Леденева, М. А. Принев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2024. – № 3. – С. 50–73. – DOI 10.17308/sait/1995-5499/2024/3/50-73. – EDN GHJMUH.

4. *Zhang Y.* Mobile Edge Computing. Simula SpringerBriefs on Computing. – 2022. – Vol. 6. – 113 p.

5. *Принев М. А.* Проблемы выбора и исследования эффективности способа интеграции распределенных систем / М. А. Принев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 года / Воронежский государственный университет. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2023. – С. 889–893. – EDN UXKLWG.

6. *Принев М. А.* Цифровая экосистема как перспективное решение для повышения надежности работы мультиагентных систем управления / М. А. Принев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года. – Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 1589–1595. – EDN TKHGLH.

7. *Городецкий В. И.* Концептуальная модель цифровой платформы для кибер-физического управления современным предприятием. Часть 1. Цифровая платформа и цифровая экосисте-

ма / В. И. Городецкий, В. Б. Ларюхин, П. О. Скобелев // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 6. – С. 323–332. – DOI 10.17587/mau.20.323-332. – EDN FNFLIN.

8. *Городецкий В. И.* Самоорганизация и многоагентные системы. I. Модели многоагентной самоорганизации / В. И. Городецкий // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2012. – № 2. – С. 92–120. – EDN OWWXXZ.

9. *Cao L.* Decentralized AI: Edge Intelligence and Smart Blockchain, Metaverse, Web3, and DeSci. IEEE Intelligent Systems, June 2022, P. 6 – 19

10. *Granichin O., Uzhva D., Volkovich Z.* Cluster Flows and Multiagent Technology. Mathematics 2021, 9, 22. – URL: https://doi.org/10.3390/math9010022 (дата обращения 25.10.2024).

11. Rzevski G., Skobelev P. Managing Complexity, 1st ed.; WIT Press : London, UK; Boston, MA, USA, 2014. – 216 p.

12. *Drogoul Alexis, Corbara Bruno, Lal Steffen.* MANTA: New Experimental Results on the Emergence of (Artificial) Ant Societies. Artificial Societies: The Computer Simulation of Social Life. – 2001. – URL: https://www.researchgate.net/publication/2465419_MANTA_New_Experimental_Results_on_the_Emergence_of_Artificial_Ant_Societies (дата обращения 25.10.2024).

13. *Rzevski George, Skobelev Petr.* 01 – 16 IJEIT 2007 Vol-12 Emergent-Intelligence-in-Large-Scale-Multi-Agent-Systems // International Journal of Information and Communication Technologies in Education. – 2007. – 1. 64. – URL: https://www.researchgate.net/publication/360456803_01_-_16_IJEIT_2007_Vol-12_Emergent-Intelligence-in-Large-Scale-Multi-Agent-Systems (дата обращения 25.10.2024).

УДК 007.3, 658.5

ИЗМЕНЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ, БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ПРИ ВНЕДРЕНИИ ПРАКТИК ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Ю. С. Прохоров

Центральная дирекция здравоохранения – филиал ОАО «РЖД»

Аннотация. Рассматриваются процессы изменения организационной структуры, бизнес-процессов, организационной культуры машиностроительных предприятий при реализации проектов цифровой трансформации. Предложены практические подходы, которые могут быть использованы управленческими органами предприятий для выполнения организационных изменений. Рассмотрены инструменты контроля реализации проектов цифровой трансформации, позволяющие своевременно корректировать дорожные карты проектов, достигая стратегических целей предприятия.
Ключевые слова: цифровая трансформация, машиностроительное предприятие, проект цифровой трансформации, портфель проектов цифровой трансформации, показатели эффективности, бизнес-процессы, организационная структура, организационная культура.

Введение

На сегодняшний день внедрение практик цифровой трансформации машиностроительных предприятий подразумевает глубокое изменение организационных структур и ключевых бизнес-процессов предприятия при поддержке трансформируемой организационной культуры.

Основной эффект от цифровой трансформации зачастую зависит не столько от внедрения новых цифровых технологий, таких как искусственный интеллект, использование больших данных, интернета вещей и других, а от глубокого преобразования процессов, организационных структур и организационной культуры предприятия. В качестве таких эффектов можно рассматривать появление новых продуктов с цифровыми свойствами, кардинальное сокращение сроков вывода продукции на рынок, что в конечном итоге ведет к достижению стратегических целей предприятия.

В статье предложены практические шаги по подготовке, согласованию и утверждению концепции цифровой трансформации предприятия, которые могут быть использованы управляющими органами компании. Также предложен алгоритм формирования портфеля проектов цифровой трансформации и необходимые организационные изменения для поддержки его выполнения.

В данной статье рассматриваются все ключевые этапы цифровой трансформации предприятия, начиная с разработки концепции, управления проектами ее реализацией и заканчивая самим изменением бизнес-процессов и оценкой достигнутых результатов выполненных проектов.

1. Подготовка, согласование и утверждение концепции цифровой трансформации

Процесс цифровой трансформации начинается с подготовки концепции, которая станет основой для дальнейших действий.

Цели и способы реализации цифровой трансформации зависят от глобального позиционирования предприятия, его стратегических целей и направлений изменения бизнес-процессов. Для подтверждения выбранных подходов и ключевых точек приложения усилий по цифровой

трансформации, перед разработкой и утверждением самого документа «Концепция цифровой трансформации» необходимо рассмотреть и утвердить эти подходы внутри предприятия.

Концепция цифровой трансформации определяет [1]:

1. Ее цели и задачи в целом;

2. Ключевые объекты цифровой трансформации, необходимые изменения, задачи и измеримые результаты;

3. Целевую архитектуру деятельности предприятия на основе внедренных средств и технологий, основные компоненты (цифровые платформы) и ключевые вехи создания цифровой архитектуры;

4. Систему управления реализацией стратегии, включая методические подходы, технологии и организационное обеспечение;

5. Первоочередные стратегические мероприятия и инициативы (проекты).

Этап подготовки данного документа включает в себя следующие действия, которые могут быть взяты за основу управляющими органами предприятия:

1. Анализ текущего состояния предприятия:

– Определение уровня цифровой зрелости;

– Выявление сильных и слабых сторон текущей бизнес-модели;

– Анализ внешней среды, включая конкурентный ландшафт и ключевые технологические тренды в отрасли, в которой работает предприятие.

2. Формулировка целей с сфере цифровой трансформации:

– Постановка стратегических целей цифровой трансформации;

– Определение ключевых показателей эффективности (KPI), которые позволят оценить успех внедрения.

3. Разработка концепции:

– Формирование основного видения цифрового будущего предприятия;

– Выбор приоритетных направлений для внедрения цифровых технологий.

4. Согласование и утверждение документа:

– Обсуждение концепции с ключевыми заинтересованными сторонами;

– Внесение правок с учетом их предложений;

– Утверждение концепции на уровне руководства предприятия.

На этом этапе важно вовлечь сотрудников всех уровней, поскольку цифровая трансформация влияет на всю организацию. Прозрачность процессов и чёткое объяснение целей помогают снизить возможное сопротивление организационным изменениям.

Рассмотрим возможный способ формулировки целей и задач цифровой трансформации, он состоит из проведения двух стратегических сессий. На рис. 1 приведены ключевые вопросы, которые должны быть рассмотрены на этих сессиях и ожидаемые их результаты.

Если на предприятии нет зрелой стратегической функции, способной возглавить организацию и проведение стратегической сессии, то тогда целесообразно нанять внешнего методолога для выполнения этих работ.

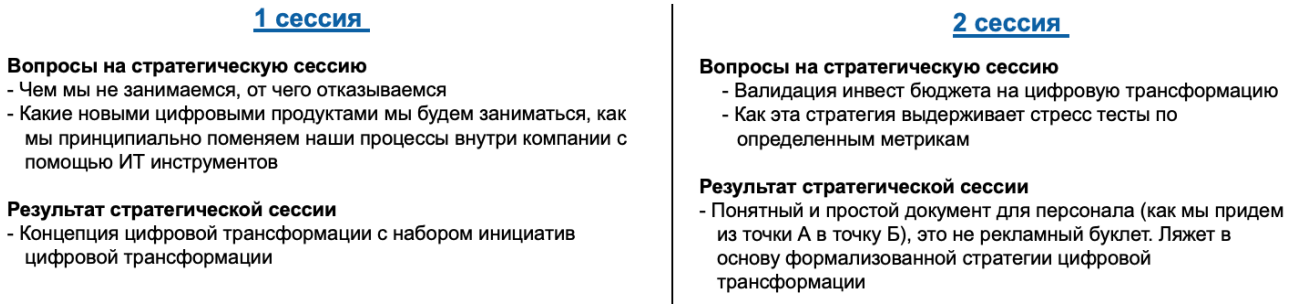


Рис. 1. Ключевые вопросы и ожидаемые результаты проведения стратегических сессий

После проведения этих двух стратегических сессий, и всех указанных выше шагов на предприятии появляется подтвержденная высшим руководством концепция цифровой трансформации, которая должна быть реализована в дальнейшем с помощью выполнения ряда подтвержденных проектов цифровой трансформации, алгоритм формирования будет рассмотрен в следующем разделе.

2. Формирование портфеля проектов цифровой трансформации и управление им

После утверждения концепции на предприятии начинается формирование портфеля проектов для ее реализации. Этот этап включает в себя следующие шаги:

1. Идентификация проектов:

– Определение инициатив, соответствующих целям цифровой трансформации;

– Учет факторов: их срочность, стратегическая важность, потенциальный эффект от их внедрения.

2. Расстановка приоритетов проектов (приоритезация):

– Оценка проектов по критериям: ROI, риски, требуемые ресурсы, временные затраты;

– Создание дорожной карты реализации каждого проекта с учетом их взаимосвязей и влияния друг на друга.

3. Управление портфелем проектов:

– Назначение ответственных лиц за каждый проект в соответствии с ролями, принятыми в нормативной документации предприятия;

– Выбор использования методов проектного управления (например, Agile, Waterfall) для координации действий и выполнения проектов.

4. Мониторинг и контроль проектов и портфеля в целом:

– Постоянная оценка выполнения задач;

– Обновление приоритетов и корректировка дорожной карты на основе текущих результатов.

В общем случае алгоритм выбора стратегических инициатив (проектов) для реализации представлен на рис.2.

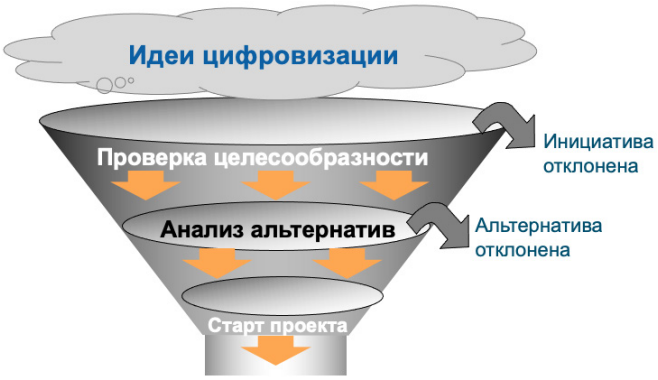


Рис. 2. Алгоритм выбора стратегических инициатив (проектов) для реализации

Эффективное управление портфелем проектов позволяет сосредоточиться на стратегически значимых инициативах, минимизировать риски и максимально использовать доступные ресурсы предприятия.

Таким образом после этого этапа, на предприятии сформирован портфель проектов цифровой трансформации, назначены ответственные за их реализацию, и внедрены постоянные инструменты отслеживания прогресса. Но этого зачастую не достаточно для их успешной реализации, и в компании требуется проведение организационных изменений для поддержки выполнения портфеля проектов, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

3. Типовые изменения бизнес-процессов, оргструктуры, организационной культуры

Цифровая трансформация предполагает масштабные организационные изменения внутри предприятия, направленные на поддержку успешного выполнения портфеля проектов. Эти организационные изменения проводятся в трех ключевых областях:

1. Бизнес-процессы:

– Оптимизация процессов за счёт автоматизации и внедрения цифровых технологий;

– Внедрение новых процессов, свойств продукта, ориентированных на потребителя, и создание омниканальных взаимодействий с ним на этапах обслуживания продукции.

2. Организационная структура:

– Переход к более гибким моделям управления, децентрализация принятия решений;

– Создание новых ролей, таких как Chief Digital Officer, аналитик данных;

– Создание новых органов управления для реализации цифровой трансформации. Пример возможной реализации этих органов управления представлен на рис. 3. и должен быть зафиксирован в Корпоративной системе управления проектами [2].

Рис. 3. Органы управления проектами

3. Организационная культура:

– Развитие цифровой грамотности сотрудников;

– Внедрение культуры инноваций, экспериментов и готовности к изменениям;

– Снижение иерархичности, повышение уровня открытости и вовлечённости сотрудников в новые процессы.

Возможные точки приложения управленческих усилий могут быть сконцентрированы на ключевых компонентах пропагандируемых ценностей необходимых для успешного внедрения проектов, которые указаны на рис. 4 [3].

Изменения в этих областях позволяют предприятию адаптироваться к новым условиям рынка, быстрее реагировать на изменения и создавать ценность для потребителей продукции.

4. Оценка результативности и эффективности цифровой трансформации

Оценка результативности цифровой трансформации — ключевой этап, который позволяет измерить успех внедряемых и внедренных изменений. Рассмотрим различные подходы к его оценке:

1. Ключевые показатели эффективности (KPI):

– Финансовые: рост выручки, сокращение затрат, увеличение рентабельности;

Рис. 4. Компоненты ценности организационной культуры

– Операционные: скорость выполнения процессов, уровень автоматизации, снижение количества ошибок.

На рис. 5 представлена схема показателей. Предложенная система показателей направлена на сквозную каскадную систему установки показателей как самой ЦТ так и показателей отдельных функциональных подразделений и их участия во вкладе в результаты отдельных проектов цифровой трансформации [3].

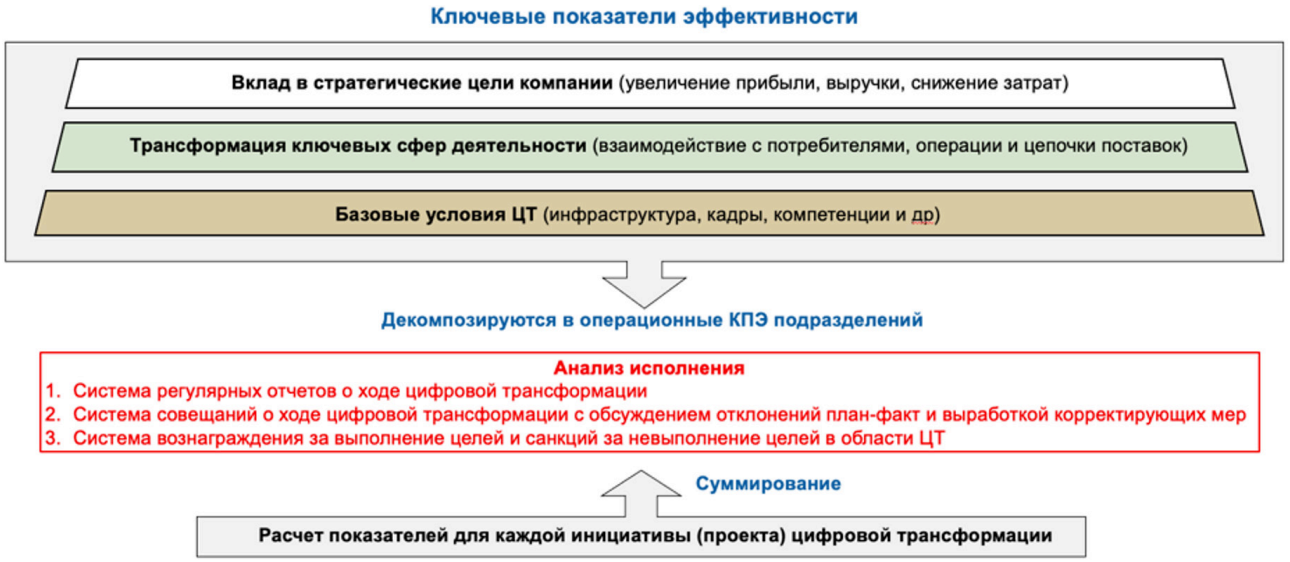


Рис. 5. Ключевые показатели эффективности

2. Качественные показатели:
– Уровень удовлетворенности потребителя продукции;
– Уровень вовлечённости сотрудников;
– Снижение сопротивления изменениям.

3. Инструменты оценки:

– Регулярные отчёты и аналитика данных;

– Проведение опросов среди клиентов и сотрудников;

– Использование систем мониторинга, таких как BI-платформы.

4. Корректировка стратегии:

– На основе полученных данных анализируются сильные и слабые стороны внедренных решений;

– Вносятся изменения в стратегию цифровой трансформации.

Эффективная оценка позволяет определить успех цифровой трансформации и скорректировать дальнейшие действия, обеспечивая долгосрочные преимущества для предприятия.

Заключение

Таким образом, можно констатировать, что цифровая трансформация — это комплексный процесс, который требует не только внедрения новых технологий, но и изменений в подходах к управлению, внутренних бизнес-процессах и корпоративной культуре предприятия. Успех таких изменений определяется наличием четкой бизнес стратегии, сформированной, согласованной и утвержденной концепцией цифровой трансформации, эффективным управлением проектами ее реализации и готовностью самого предприятия адаптироваться к рыночным вызовам.

Предприятия, которые инвестируют в проекты цифровой трансформации, получают значительные конкурентные преимущества: увеличивают свою операционную эффективность, улучшают клиентский опыт и развивают инновационный потенциал своих продуктов. Однако, чтобы достичь этих целей, важно постоянно анализировать промежуточные результаты всех выполняемых проектов, вовремя корректировать подходы и вовлекать в эти изменения сотрудников на всех уровнях управления.

Цифровая трансформация — это не разовое событие, а постоянный процесс, который должен стать частью долгосрочной стратегии предприятия. Только в этом случае можно добиться устойчивого роста и успешной адаптации к динамично меняющимся условиям цифрового мира.

Таким образом, предложенные подходы позволяют управляющим органам машиностроительных предприятий применяя их, достигать стратегических целей и быстро адаптироваться к рыночным вызовам.

Литература

1. *Прохоров Ю. С.* Цифровая трансформация группы ОСК. Оценка подходов к ее реализации / Ю. С. Прохоров, А. А. Егорова // Морской вестник. – 2020. – №1. – С.15–16.

2. *Сооляттэ А. Ю.* Управление проектами в компании: методология, технологии, практика : учебник / А. Ю. Сооляттэ; МФПУ «Синергия» – Москва : Изд-во МФПУ «Синергия» 2012. – 815 с.

3. *Прохоров Ю. С.* Об организационных подходах к подготовке, обоснованию и подтверждению результатов проектов цифровой трансформации машиностроительных предприятий дискретного типа производства / Ю.С. Прохоров // Электронный научный журнал «ИТ-Стандарт». – 2024. – № 2. – С. 14–23.

УДК 005.5

АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ И МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В КОНТЕКСТЕ ГЕНЕРАЦИИ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ОБЪЕКТАМИ С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ ВХОДНОГО НАБОРА ДАННЫХ

М. А. Пучкова

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В статье рассматривается возможность применения алгоритмов и методов решения задач оптимизации в контексте генерации связей между объектами с учетом особенностей входного набора данных. Выявлены ключевые особенности применения алгоритмов и методов решения задач оптимизации, в том числе методов линейного программирования. Рассмотрены различные типы связей между объектами, отражающих их зависимости, ограничения и взаимоотношения в процессе поиска оптимального решения. В работе предложен подход для решения задачи оптимального распределения дисциплин (задач) между преподавателями (исполнителями), учитывающий особенности входного набора данных.

Ключевые слова: методы оптимизации, алгоритмы оптимизации, генерация связей, связи между объектами, рекомендательные связи, семантическая связь, линейное программирование, динамическое программирование.

Введение

Алгоритмы и методы решения задач оптимизации представляют собой основу для эффективного и рационального управления ресурсами, процессами и принятием решений в различных сферах. Такие методы предназначены для поиска наилучшего (оптимального) решения в условиях ограниченных ресурсов и множественных критериев, что делает их неотъемлемым инструментом в математическом моделировании, экономике, инженерии и управлении. Применение таких методов и алгоритмов направлено на повышение эффективности деятельности, рациональное распределения ресурсов, принятие обоснованных решений, а также решение сложных практических задач, которые могут включать элементы неопределенности и изменяющиеся условия, таких как маршрутизация, проектное планирование, распределение и управление запасами и т. д.

1. Ключевые особенности применения алгоритмов и методов решения задач оптимизации

Существующие модели и методы, используемые для поддержки принятия управленческих решений в различных условиях, крайне разнообразны. Каждый из методов оптимально решает свои типы задач, что определяет область их применения в планировании, управлении и оптимизации различных процессов. Так, например, линейное программирование (далее — ЛП) является методом оптимизации, направленным на максимизацию или минимизацию линейной целевой функции, при соблюдении набора линейных ограничений. ЛП стало развиваться в первую очередь в связи с решением задач экономики, с поиском способов оптимального распределения и использования ресурсов [1].

Динамическое программирование (далее — ДП) является методом оптимизации, решающим сложные задачи, разбивая их на подзадачи и решая каждую один раз для многократного использования результата. ДП является принципом последовательного анализа протекающего во времени процесса [2]. ДП эффективно работает с задачами, где есть рекурсивная структура и перекрывающиеся подзадачи, например, задачи нахождения кратчайшего пути,

управления запасами и распределения ресурсов. Его ключевая идея заключается в сохранении результатов для оптимизации вычислений, что позволяет сократить время, затрачиваемое на процесс принятия решения.

Сетевые методы планирования и управления (CPM, PERT) необходимы для организации и контроля сложных проектов, позволяя оптимизировать сроки и ресурсы путем анализа зависимости задач и критических путей. CPM (Critical Path Method) определяет критический путь (последовательность задач, влияющих на общую длительность проекта) и помогает минимизировать сроки завершения. PERT (Program Evaluation and Review Technique) оценивает вероятное время выполнения проектов с неопределенностью во времени задач [3,4].

Результаты сравнения случаев применения линейного программирования, динамического программирования и сетевых методов планирования и управления приведены в табл. 1. Рассмотрены возможные варианты применения, типы задач, особенности и ограничения, а также приведены примеры использования для каждого метода.

Таблица 1

Применение некоторых методов и алгоритмов оптимизации

Метод	**Случаи применения**	**Тип задачи**	**Особенности и ограничения**	**Примеры использования**
Линейное программирование	Оптимизация в условиях ограниченности ресурсов	Задачи с линейными ограничениями	Ограничено линейностью функций, необходимо наличие ограничений	Оптимизация распределения ресурсов (транспортные задачи, задачи планирования производства, логистика)
Динамическое программирование	Оптимизация сложных задач с подзадачами, зависящими от предыдущих состояний	Задачи с рекурсивной структурой	Подходит для задач с перекрывающимися подзадачами, требующих оптимизации на каждом этапе	Задачи управления запасами, маршрутизация, вычисление кратчайших путей, оптимизация рекурсивных процессов
Сетевые методы планирования и управления	Планирование и контроль последовательности выполнения операций	Проектные задачи с временными ограничениями	Необходимы данные о взаимосвязях между задачами, зависимости и продолжительность задач	Управление проектами (методы CPM, PERT), планирование и контроль сроков выполнения проектных задач

В зависимости от типа задачи и области применения используются разнообразные методы линейного программирования. Например, симплекс-метод, называемый также методом последовательного улучшения плана, является итеративным алгоритмом для решения задач линейного программирования, который находит оптимальное решение целевой функции на множестве допустимых значений [5]. Он включает в себя начальное базисное решение, итеративный процесс и проверку оптимальности, т. е. метод останавливается в случае отсутствия возможности улучшения значения целевой функции, то есть найдено оптимальное решение. Данный метод эффективен для задач с большим числом переменных и ограничений, часто применим в экономике, логистике и планировании.

Задача о назначениях — это задача комбинаторной оптимизации, в которой требуется оптимально распределить *n* заданий (или объектов) между *n* исполнителями (или ресурсами) таким образом, чтобы минимизировать (или максимизировать) общие затраты или время выполнения. К особенностям задачи о назначениях относится простота ограничений, когда каждое задание назначается одному исполнителю, и каждый исполнитель выполняет одно задание.

Таблица 2

Особенности применения методов линейного программирования

Метод	**Случаи применения**	**Тип задачи**	**Особенности и ограничения**	**Примеры использования**
Симплекс-метод	Итеративный метод для решения общих задач линейного программирования	Оптимизация линейной функции	Универсален для различных задач ЛП; требует больших вычислений для объемных задач	Производство, логистика, планирование ресурсов
Транспортная задача	Специализированный метод для оптимизации затрат на перевозку между пунктами поставки и потребления	Оптимизация распределения ресурсов	Подходит для задач с фиксированными источниками и пунктами назначения	Логистика, цепи поставок, распределение товаров
Задача о назначениях	Метод распределения заданий (или ресурсов) по агентам с минимальными затратами или максимальной эффективностью	Задача оптимального распределения	Применим для задач, где количество агентов совпадает с количеством задач	Управление персоналом, планирование производственных задач, задачи распределения ролей

Рассмотренные методы решают задачи оптимизации, но имеют разные структуры и ограничения, что делает каждый метод подходящим для специфических задач в управлении и распределении ресурсов.

2. Генерация связей между объектами, как основной элемент алгоритма поддержки принятия решений

Для успешного решения различных задач оптимизации необходимым условием является наличие связей между объектами. В задачах оптимизации устанавливаются различные типы таких связей, отражающие их зависимости, ограничения и взаимоотношения в процессе поиска оптимального решения. Основные типы связей представлены на рис. 1.

При решении задачи о назначениях формируются прямые/однозначные связи, которые связывают один объект с другим, устанавливая отношение «один к одному». Однако, такие связи являются жестко формализованными, не адаптирующимися под динамично меняющиеся условия. Кроме того, используемые в данной задаче показатели являются числовыми (измеримыми). При этом в некоторых организационных структурах существуют задачи, решение которых не представляется возможным в условиях жёсткой формализации. В таких случаях исследуемые показатели не статичны и подвержены изменениям, исходя из входного набора данных, что влечет за собой изменение матриц соответствий и дальнейшей перегенерации связей.

Так, например, в работе [6] для решения задачи оптимального распределения учебной нагрузки предложен подход, основанный на выявлении связей между преподавателем и дисци-

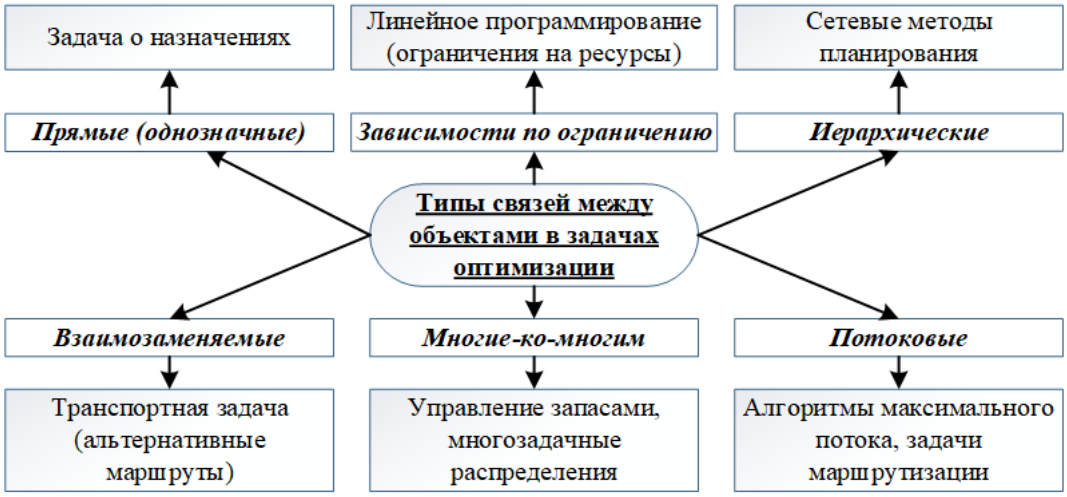


Рис. 1. Типы связей между объектами в задачах оптимизации

плиной, а также генерирующий разноуровневые рекомендации возможных связей. Решение данной задачи не предусматривает прямой численной формализации и имеет свои особенности, такие как динамическая структура, разнородность входных данных, а также изменяющийся набор входных данных при установлении связей, необходимость применения экспертной оценки и другие. Основой для формирования рекомендательных связей между преподавателем и дисциплиной выступают ключевые слова (рис. 2.).

Рис. 2. Подход к формированию связей на основе ключевых слов

Стоит отметить, что особенность входного набора данных, способного охарактеризовать область «задача» (в случае распределения нагрузки исходными данными определены рабочие программы дисциплин), влечет за собой необходимость генерации семантической связи, переводимой в числовую с применением технологий искусственного интеллекта. Решение задачи обработки таких входных данных для последующего формирования совокупности ключевых слов и генерации связей актуально не только при распределении педагогической нагрузки, но и в отношении поиска исполнителя для выполнения задачи, характеризующейся технически заданием, или подбора и оценки кандидата с учетом требований должностной инструкции. Таким образом, предложенный подход, основанный на генерации разноуровневых рекомендаций возможных связей и учитывающий особенности входного набора данных, применим в различных сферах, в том числе при реализации кадровой политики и осуществлении проектной деятельности.

Заключение

Существующие методы решения задач оптимизации имеют разные структуры и ограничения, что делает каждый метод подходящим для специфических задач в управлении и распределении ресурсов. Для успешного решения различных задач оптимизации необходимым условием является наличие связей между объектами. При этом в некоторых организационных структурах существуют задачи, решение которых не представляется возможным в условиях жёсткой формализации, характерной для существующих моделей и методов, используемых для поддержки принятия управленческих решений. В связи с чем предложен подход, основанный на генерации разноуровневых рекомендаций возможных связей и учитывающий особенности входного набора данных, применение которого актуально в сфере образования, управления персоналом и проектной деятельности.

Литература

1. *Кудашов В. Н.* Основы линейного программирования / В. Н. Кудашов, Е. Г. Селина. – Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2020. – 42 с.

2. *Коган Д. И.* Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация: Учеб. пособие. / Д. И. Коган. – Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2004. – 258 с.

3. *Бородачёв С. М.* Теория принятия решений: учебное пособие / С. М. Бородачёв. – Екатеринбург: Изд-во Урал, ун-та, 2014. – 124 с.

4. *Смоленцева Т. Е.* Графовая модель данных в задаче выбора направления дальнейшего обучения / Т. Е. Смоленцева, А. В. Калач, Р. С. Толмасов // Вестник Воронежского института ФСИН России. – 2022. – № 3. – С. 116–120.

5. Математическое программирование: теория и методы: учебное пособие / Н. В. Гредасова, А. Н. Сесекин, А. Ф. Шориков, М. А. Плескунов; Мин-во науки и высш. образования РФ. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2020 – 200 с.

6. Концепция формирования инструментария генерации связей «преподаватель–дисциплина» в структуре организаций высшего образования / М. А. Пучкова, Т. Е. Смоленцева, Е. В. Калач // Вестник Воронежского института ФСИН России. – 2024. – № 3. – С. 93–99.

УДК 004.02

КОНЦЕПЦИЯ ИНТЕГРИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ХРАНЕНИЯ И ДОСТАВКИ ЛИЧНЫХ ВЕЩЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФРАСТРУКТУРЫ МАРКЕТПЛЕЙСОВ

Е. В. Смоленцев

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. Статья посвящена разработке и анализу концепции интегрированной системы хранения и доставки личных вещей с использованием инфраструктуры маркетплейсов. Рассмотрены исторические предпосылки, текущее состояние рынка, а также преимущества и вызовы реализации подобного подхода. Особое внимание уделено синергии логистических технологий и удобства для потребителей. Экономические аспекты в рамках работы не рассматриваются. Материалы статьи будут полезны специалистам в области логистики и разработчикам сервисов хранения.
Ключевые слова: системы хранения, службы доставки, логистика, self-storage, индивидуальное складское хранение, sharing-economy, экономика совместного потребления, маркетплейсы, интеграция, хранение личных вещей, доставка личных вещей, системный анализ.

Введение

Проблема хранения личных вещей остается одной из актуальных для современного общества, особенно в условиях урбанизации и стремительного роста плотности населения в крупных городах. Традиционные решения, такие как аренда складов или использование гаражных помещений, зачастую оказываются неэффективными из-за высоких затрат, неудобства расположения и отсутствия гибкости. В последние десятилетия наблюдается бурное развитие электронной коммерции и сопутствующих ей логистических сервисов, что открывает новые возможности для создания инновационных решений в области хранения личных вещей.

Одним из таких решений является интеграция услуг хранения с инфраструктурой маркетплейсов, что позволяет объединить преимущества развитых сетей пунктов выдачи заказов с современными технологиями управления запасами и доставки. Данная концепция представляет собой синергию двух важных элементов современной экономики: удобства для конечного потребителя и эффективности логистических операций.

Цель настоящей статьи заключается в разработке и анализе концепции интегрированной системы хранения и доставки личных вещей с использованием инфраструктуры маркетплейсов. В рамках исследования будут рассмотрены исторические предпосылки возникновения подобных сервисов, современное состояние рынка, а также преимущества и вызовы, связанные с реализацией данной концепции. Полученные результаты могут способствовать созданию новых эффективных и востребованных сервисов, способных значительно улучшить качество жизни городских жителей и повысить конкурентоспособность компаний, предоставляющих услуги хранения и логистики.

Предпосылки к изменению рынка услуг хранения

Эволюция услуг хранения личных вещей тесно связана с развитием общества и изменением образа жизни людей. В последние десятилетия возросшая урбанизация привела к тому, что горожане столкнулись с острой нехваткой личного пространства для хранения вещей. Этот тренд стал катализатором появления новых решений, направленных на удовлетворение потребностей в хранении личных вещей.

До появления современных технологий и цифровых платформ основным способом хранения были традиционные методы, такие как аренда складов, гаражей или квартир. Эти решения имели ряд недостатков, включая высокую стоимость, неудобства, связанные с доступом к местам хранения, и низкую гибкость в использовании.

Появление sharing economy (экономики совместного потребления) также сыграло важную роль в развитии услуг хранения. Люди стали активнее делиться ресурсами, что открыло путь для создания совместных проектов, таких как каршеринг, краткосрочная аренда жилья и, конечно, услуги хранения.

Одной из таких услуг стало индивидуальное складское хранение, также известное как self-storage. Оно представляет собой аренду небольших помещений, таких как боксы, комнаты или ячейки, предназначенные для хранения личных вещей граждан, например, мебели и одежды, а также имущества предпринимателей, включая документацию, технику и товары. Этот формат услуг существует в России более десяти лет, но особенно заметный рост интереса к нему произошел за последние несколько лет, когда количество компаний, предоставляющих подобные услуги, увеличилось вдвое. [1]

Хотя рынок услуг хранения еще молод, его потенциал огромен. Спрос на услуги хранения личных вещей продолжает расти вместе с урбанизацией и переходом к цифровому образу жизни. Исторически мы видим движение от изолированных и дорогих решений к более доступным и удобным сервисам, которые используют существующие ресурсы и технологии.

Переход к цифровым технологиям и сотрудничеству с крупными игроками на рынке электронной коммерции открывает новые возможности для создания комплексных решений, которые смогут удовлетворить запросы современных пользователей.

Современное состояние рынка

В последние годы наблюдается рост популярности индивидуальных складских помещений высокого качества, особенно отапливаемых. Наиболее востребованным форматом является мини-склад площадью 4 квадратных метра. [1] По данным консалтинговой компании NF Group, объем складского рынка в Московском регионе составляет 24 млн кв. м. Общая площадь рынка складов индивидуального хранения в Москве превышает 233 000 кв. м, что на 11 % больше, чем годом ранее, говорится в отчете Ассоциации компаний индивидуального хранения (АКИХ). Наибольшим спросом склады формата self-storage пользуются у физических лиц — 88 %, на юридических лиц приходится 12 % [2].

Повышенный интерес к индивидуальным хранилищам со стороны населения обусловлен массовым сносом гаражных конструкций, которые ранее активно использовались для размещения ненужных вещей. Дополнительный импульс росту спроса придает отказ многих строительных компаний от возведения балконов и кладовых в новых домах ради снижения стоимости жилья. [1]

На рис. 1 показана динамика структуры строительства различных типов квартир за период с 2000 по 2024 годы. Данные свидетельствуют о том, что доля малогабаритного жилья в общем объеме строящегося фонда значительно увеличилась — к 2024 году почти 85 % всего вводимого жилья составляли однокомнатные и двухкомнатные квартиры. Важно подчеркнуть, что в 2000 году их удельный вес составлял лишь половину от общего объема предложений.

Учитывая отсутствие перспектив значительного улучшения уровня жизни в ближайшее время, можно прогнозировать сохранение текущих тенденций в жилищном строительстве. Это означает, что доминирование компактных жилых помещений в структуре строительной отрасли будет стимулировать увеличение спроса на индивидуальные хранилища. При этом низкий уровень жизни населения также служит препятствием для развития сектора индивидуальных складов. [4] Из-за скромных доходов люди часто не могут позволить себе допол-

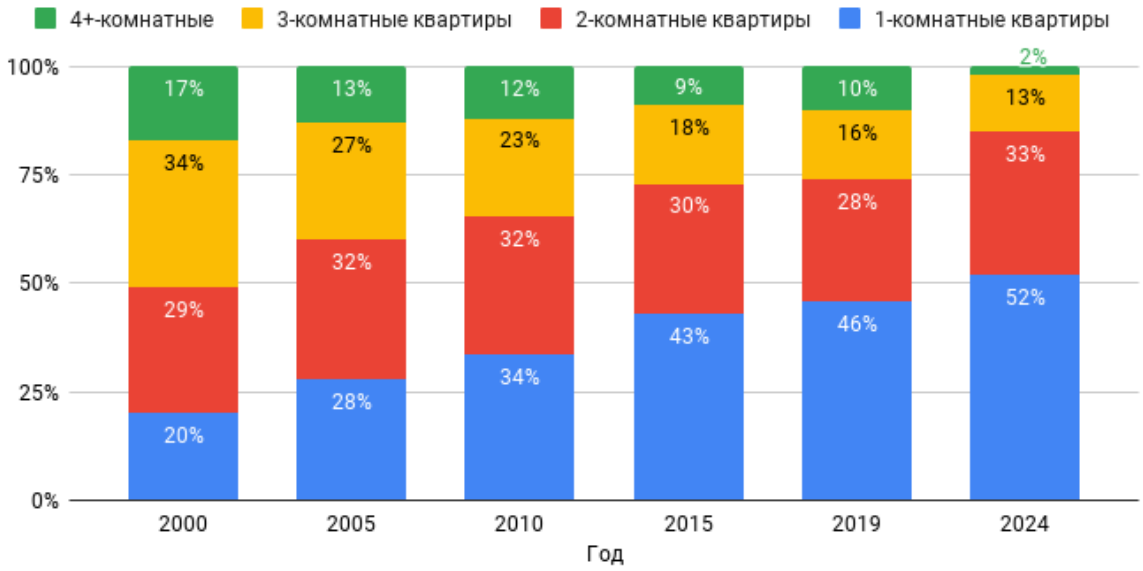


Рис. 1. Квартирография жилищного строительства по данным АО «ДОМ.РФ» [3] (составлено автором)

нительные траты на аренду складских помещений. В случае необходимости они стараются найти более экономичные способы хранения, такие как использование гаражей или аренда пространства совместно с другими людьми.

Одной из интересных тенденций последнего времени стала концепция совместного использования пространства (shared economy). [5] Такие проекты демонстрируют высокий потенциал, однако пока не получили широкого распространения из-за отсутствия необходимой инфраструктуры и стандартов качества. Еще одной важной тенденцией является интеграция услуг хранения с инфраструктурой маркетплейсов. Некоторые компании начинают предлагать услуги доставки личных вещей через свои пункты выдачи заказов. Это позволяет пользователям экономить время и деньги, объединяя процессы покупки в одном месте. Тем не менее, такие инициативы находятся на начальной стадии развития и требуют дополнительных исследований и доработок.

При этом рост рынка электронной коммерции оказывает значительное влияние на логистическую отрасль, особенно в сегменте курьерских служб и сетей пунктов выдачи заказов (ПВЗ). Однако, несмотря на общий рост рынка электронной торговли, доля рынка, приходящаяся на независимые логистические компании (рис. 2), снижается. [6] Это объясняется тем, что многие крупные маркетплейсы предпочитают использовать собственные службы доставки и строят свои монобрендовые сети ПВЗ.

Таким образом, современный рынок услуг хранения характеризуется высоким уровнем конкуренции и разнообразием предложений, но при этом существует значительная неудовлетворенная потребность в качественных и доступных услугах для частных лиц.

Преимущества и вызовы интеграции с маркетплейсами

Интеграция услуг хранения личных вещей с инфраструктурой маркетплейсов представляет собой многообещающую концепцию, обладающую рядом существенных преимуществ.

Несмотря на очевидные преимущества, интеграция с маркетплейсами сопряжена с рядом вызовов, которые необходимо учитывать при разработке и внедрении такой системы.

Таким образом, интеграция услуг хранения с инфраструктурой маркетплейсов обладает значительным потенциалом, но требует внимательного подхода к преодолению возникающих трудностей.

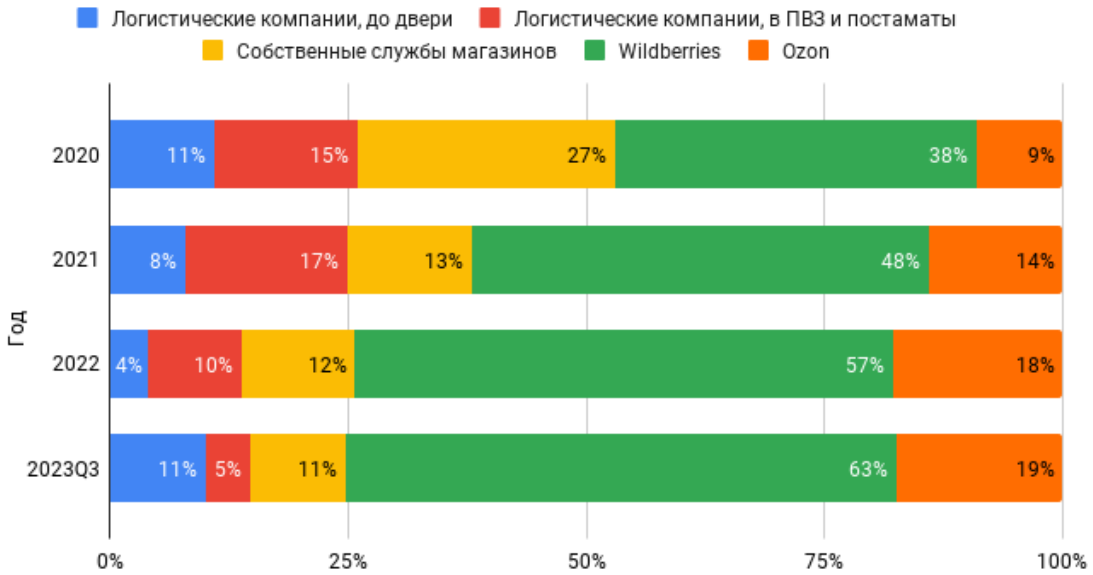


Рис. 2. Каналы доставки на рынке логистики для eCommerce, 2020-2023Q3 по данным ООО «Дейта Инсайт» [6] (составлено автором)

Таблица 1

Преимущества интеграции с маркетплейсами

Преимущество	**Комментарий**
Удобство для пользователей	Использование пунктов выдачи заказов маркетплейсов в качестве мест хранения позволяет пользователям совмещать процессы получения покупок и сдачи/ получения личных вещей в одном месте. Это сокращает временные и транспортные затраты, делая услугу более доступной и привлекательной.
Расширение ассортимента услуг	Маркетплейсы могут предложить своим клиентам дополнительный сервис, увеличивая лояльность и удерживая аудиторию. Это также открывает новые возможности для кросс-продаж и увеличения среднего чека.
Оптимизация логистических процессов	Объединение потоков товаров и личных вещей позволяет эффективнее использовать имеющиеся ресурсы, снижая затраты на доставку и обработку. Автоматизация процессов хранения и доставки способствует повышению скорости и точности выполнения заказов.
Доступ к большой сети пунктов выдачи	Многие маркетплейсы имеют обширную сеть пунктов выдачи заказов (ПВЗ), что обеспечивает широкое покрытие территории и облегчает доступ к услуге для максимального количества пользователей.

Таблица 2

Вызовы интеграции с маркетплейсами

Вызов	**Комментарий**
Технические сложности	Интеграция двух независимых систем (маркетплейса и сервиса хранения) требует тщательной проработки и тестирования. Необходимо обеспечить совместимость программного обеспечения, безопасность передачи данных и бесперебойную работу всех элементов системы.
Регуляторные барьеры	Вопросы безопасности хранения личных вещей и защиты данных пользователей должны соответствовать действующим нормам законодательства. Это потребует разработки соответствующих политик и процедур, а также прохождения необходимых сертификаций и лицензирований.
Управление рисками	Хранение личных вещей связано с повышенным риском потерь, повреждений и краж. Необходимо предусмотреть механизмы страхования, контроля доступа и мониторинга, чтобы минимизировать вероятность возникновения инцидентов.

Экономическая эффективность	Разработка и внедрение такой системы требуют значительных начальных инвестиций. Важно правильно рассчитать экономику проекта, чтобы убедиться в его прибыльности и привлекательности для инвесторов.
Пользовательский опыт	Успех интеграции во многом зависит от восприятия и доверия пользователей. Необходимо тщательно продумать пользовательский интерфейс и процесс взаимодействия с системой, чтобы сделать его максимально простым и интуитивно понятным.

Перспективы развития и масштабирования

Развитие и расширение интегрированной системы хранения и доставки личных вещей через инфраструктуру маркетплейсов открывает широкие возможности для дальнейшего совершенствования и адаптации к изменениям на рынке. Рассмотрим основные направления возможного развития и перспективы масштабирования:

Географическое расширение. Одним из главных направлений развития является увеличение охвата территорий. Расширение сети пунктов выдачи заказов маркетплейса и складских помещений позволит предоставлять услуги хранения в большем количестве регионов, делая их доступными для большего числа пользователей

Развитие дополнительных сервисов. Помимо базового сервиса хранения, можно предложить дополнительные услуги, такие как страхование вещей, упаковка и доставка крупногабаритных грузов. Это позволит быть конкурентноспособными на рынке и привлечь новых клиентов, предлагая комплексное решение для всех нужд в области хранения и логистики.

Взаимодействие с другими игроками рынка. Партнерства с транспортными компаниями, страховыми организациями и поставщиками упаковочных материалов могут значительно усилить позиции на рынке. Совместные усилия позволят оптимизировать процессы, уменьшить затраты и предложить более конкурентоспособные условия для пользователей.

Перспективы для развития и расширения интегрированной системы весьма позитивные. Грамотное использование новых технологий, расширение географии присутствия и предложение дополнительных сервисов создадут прочную базу для устойчивого роста и успеха на рынке.

Заключение

В результате проведенного исследования были выявлены ключевые аспекты и перспективы концепции интеграции услуг хранения личных вещей с инфраструктурой маркетплейсов. Разработка и внедрение такой системы открывает множество возможностей для повышения удобства и доступности услуг хранения, что отвечает текущим потребностям городского населения.

Таким образом, интеграция услуг хранения с инфраструктурой маркетплейсов представляет собой перспективное направление, способное изменить привычные модели использования и хранения личных вещей. Дальнейшее развитие и адаптация к местным условиям могут сделать такую систему лидером на рынке, обеспечивая высокое качество и доступность услуг для миллионов пользователей.

Литература

1. Рынок складской недвижимости: итоги 2021 года и влияние санкций 2022 года // Группа «ДЕЛОВОЙ ПРОФИЛЬ» : [сайт]. – 2022. – URL: https://delprof.ru/press-center/open-analytics/rynok-skladskoy-nedvizhimosti-itogi-2021-goda-i-vliyanie-sanktsiy-2022-goda/ (дата обращения: 02.11.2024).

2. Склады индивидуального хранения в Москве заполнены на 85% // АО «НФ Групп» : [сайт]. – 2023. – URL: 2.https://kf.expert/news/sklady-individualnogo-khraneniya-v-moskve-zapolneny-na-85 (дата обращения: 04.11.2024).

3. Квартирография жилищного строительства// Единая информационная система жилищного строительства : [сайт]. – 2024. – URL: https://наш.дом.рф/аналитика/квартирография (дата обращения: 28.10.2024).

4. *Барашев М. Н., Дворникова М. И.* Self-Storage склады как инновационный продукт архитектурно-строительного комплекса России // Экономика строительства и природопользования. – 2021. – № 1 (78). – С. 5–11.

5. *Чернухина Г. Н.* Трансформация и тенденции потребления в современной шеринговой модели бизнеса // Современная конкуренция. – 2020. – № 3 (79).

6. Маркетинговое исследование Логистика интернет-торговли России в 2023. Мнения и ожидания // ООО «Дейта Инсайт» : [сайт]. – 2023. – URL: https://datainsight.ru/DI_ecom_logistics_opinions_expectations_2023 (дата обращения: 13.11.2024).

УДК 303.732.4, 530.12, 514.7, 517.986, 530.1

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ЛЮБОЙ ПРИРОДЫ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНОГО РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

А. А. Шайхутдинов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация. В статье рассматривается расширение пространства Минковского с использованием комплексного исчисления и экстраполяцией метрического тензора на измерения более широкой сигнатуры. Исследуется введение новых измерений скорости и массы, ортогональных времени и пространству, и гипотеза их замкнутости. Формулируется подход к созданию единой теории происхождения измерений, частиц и Вселенной, обсуждаются математические доказательства, связанные с топологией и механикой, и их физическая интерпретация. Показано, что построенная математическая модель хорошо подходит для обобщения систем любой природы.
Ключевые слова: системный анализ, пространство Минковского, метрический тензор, комплексное исчисление, гипотеза Пуанкаре, колмогоровское количество информации, теория всего.

Введение

В специальной теории относительности [3] принята геометрическая интерпретация пространственно-временного континуума в виде четырехмерного псевдоевклидова пространства с сигнатурой *(1, 3)* — более высокой по одному из направлений, чем у метрического тензора трехмерного евклидова пространства *(0, 3)* — называемого пространством Минковского [11]. Инвариант в виде интервала в нем выражается через метрику континуума квадратом пространственно-временного расстояния [1, 19]:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \tag{1}$$

где g_{ij} — элементы матрицы метрического тензора, которая в инерциальной системе отсчета имеет вид:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$x^1, x^2, \ldots, x^n$ — локальные координаты (измерения).

В матрице (2) первый столбец (и первая строка) соответствует одному временному измерению, остальные — трем пространственным. Чтобы в ней отличить временное измерение от пространственных локальную координату времени в (1) обычно записывают, как x^0, имея в виду, что $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ соответствуют трем пространственным измерениям, а $x^0 = t$ — одному временному.

Для матрицы (2) формула (1) записывается в виде:

$$s^2 = c^2(t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2 - (z_1 - z_0)^2, \tag{3}$$

где $c = \text{const}$ — это константа скорости света, t — время, x, y, z — декартовы координаты евклидова пространства.

Так как x, y, z — это координаты пространства R^3, в котором их вектор $\vec{r} = (x, y, z)$ имеет длину $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, используют также компактную запись матрицы метрического тензора:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

которая имеет сигнатуру *(1, 1)* и квадратичную форму сигнатуры *(1, –1)*.

Допустима компактная запись инварианта (3) в виде:

$$ds^2 = d(c^2t^2) - dr^2, \tag{5}$$

где можно нормализовать время, поделив его на константу c, или произведя замену $\tau = ct$. Тогда выражение (5) записывается формулой:

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2. \tag{6}$$

Отметим также, что в (2) и (4) допустима замена 1 на –1 (и –1 на 1), квадратичные формы сигнатуры (1, –1) и (–1, 1) с точностью до знака равнозначны для пространства и времени.

Геометрически пространство координаты τ (и t) является ортогональным дополнением к пространству векторной координаты r [6]. Ортогональное дополнение подпространства R^3 векторного четырехмерного псевдоевклидова пространства-времени, включающего также одномерное подпространство времени T, — это и есть подпространство времени: $R^3 = T^{\perp}$. В данной статье мы доказали гипотезу возможности экстраполировать такую ортогональность измерений с целью попытки объяснения их происхождения, расширив метрический тензор в инерциальной системе отсчета и пространство Минковского с помощью комплексного исчисления. Выстраиваемая математическая модель будет опираться на моментальные значения скорости v и других физических величин, поэтому дальнейший учет в ней ускорения тоже будет допустим, т. к. по определению тензора для метрического тензора всегда задан закон преобразования координат [24].

1. Векторное произведение единичных ортогональных векторов

В трехмерном евклидовом пространстве векторное произведение двух векторов представляет собой вектор, ортогональный каждому из перемножаемых векторов (рис. 1).

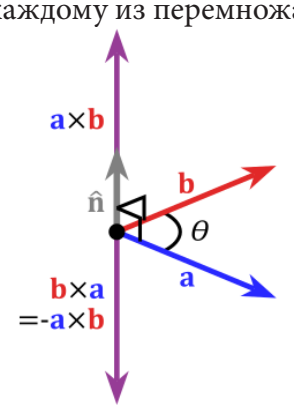


Рис. 1. Векторное произведение векторов

Если $|a| = |b| = |c| = 1$ и $\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c} \perp \vec{a}$, то:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}, \tag{7}$$

где все три вектора имеют единичную длину и ортогональны друг другу. Каждый вектор при этом может иметь свою единицу измерения в физическом смысле.

Например, для световой волны (фотона), распространяющейся (прямолинейно двигающегося) в евклидовом пространстве, векторы скорости распространения фронта волны (скорости света), электрической и магнитной индукции ортогональны друг другу [12] (рис. 2).

При этом векторы скорости света, электрической и магнитной индукции принадлежат евклидову пространству [12]: $\{\vec{E}, \vec{B}, \vec{c}\} \subset R^3$.

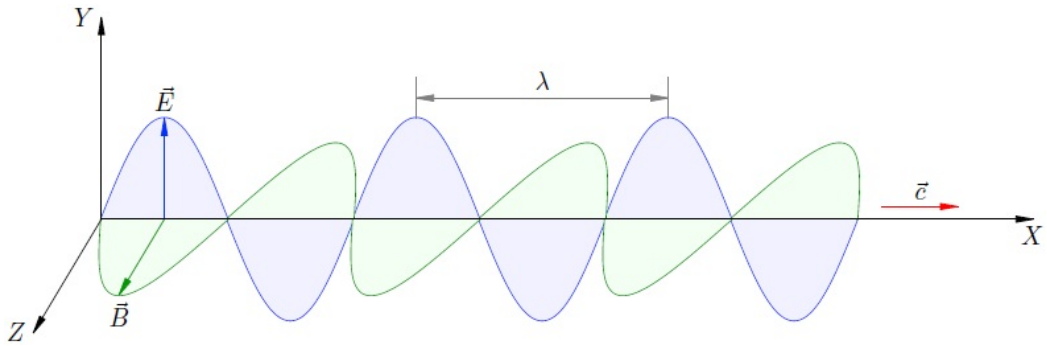


Рис. 2. Электромагнитная волна

Если нормализовать все три этих вектора до единичной длины $(\vec{e},\vec{b},\vec{c})$, то векторное произведение каждых двух из них соответствует физической интерпретации (электромагнитной теории). Аналогично выражению (7) можно записать:

$$\vec{c}=\vec{e}\times\vec{b}\Leftrightarrow\vec{e}=\vec{b}\times\vec{c}\Leftrightarrow\vec{b}=\vec{c}\times\vec{e}. \tag{8}$$

Далее, как показали выше, мы будем работать со скалярными физическими величинами, как с векторными (как с координатными векторами), имея в виду их нормализацию до единичной длины координатного вектора и принадлежность континууму с более широкой сигнатурой и метрическим тензором более широкого ранга, потому что их векторизация невозможна в евклидовом пространстве R^3 с сигнатурой *(0, 3)* и псевдоевклидовом пространстве-времени с сигнатурой *(1, 3)*.

2. Комплексное исчисление для расширенного пространства Минковского

Заметим, что в (2) и (4) квадрат отрицательного элемента равен положительному $(-1)^2=1$, а в комплексном исчислении $i^2=-1$ для комплексной плоскости и $j^2=-i$ для комплексного трехмерного пространства.

Так как степени мнимой единицы i повторяются в цикле с периодом 4, а степени j — в цикле с периодом 8, мы можем комплексно расширить матрицу метрического тензора (4) в виде:

$$\hat{g}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & (-1)^2\end{pmatrix}, \tag{9}$$

до размерности 4×4 для расширенного пространства Минковского, применив метод математической индукции:

$$\hat{g}=\begin{pmatrix}i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{10}$$

или в виде квадратичной формы сигнатуры $(i,-1,-i,\ 1)$, и до размерности 8×8 для расширенного пространства Минковского в виде квадратичной формы сигнатуры:

$$(j,-i,-ij,-1,-j,i,ij,\ 1). \tag{11}$$

В расширенном пространстве по матрице метрического тензора (10) при этом измерения, которые соответствуют соседним столбцам (например, с элементами i и –1), соотносятся друг с другом, как соотносятся в физике пространство и время — измерения, соответствующие соседним столбцам (с элементами –1 и 1) в матрице метрического тензора (9).

Матрица метрического тензора (9) при этом диагонально и по вертикальным/горизонтальным индексам замкнута сама на себя, т. к. степени –1 повторяются в цикле с периодом 2. Ле-

вый крайний столбец считается соседним правому крайнему. Первая строка считается соседней с последней строкой. Применяя аналогичную логику к матрице метрического тензора (10) и квадратичной форме сигнатуры (11), можно утверждать и об их замкнутости на себя.

3. Гиперплоскость одновременности и мировая линия

Мировая линия — это путь (в топологическом смысле) частицы в четырехмерном пространственно-временном континууме. На рис. 3 три разные мировые линии изображают путешествие с тремя разными постоянными скоростями в пространстве-времени с одномерным пространством x.

Угол наклона каждой линии на рисунке 3 соответствует скорости v объекта в скалярном выражении. Путь (*равномерное движение*) по мировой линии на рис. 3 измеряется с помощью скалярного значения скорости $v = dx / dt$ или $v = dr / dt$ в наших обозначениях. Каждому значению времени t соответствует свое значение пространственной координаты x (или r) При этом скорость v ограничена сверху максимальным значением — скоростью света c.

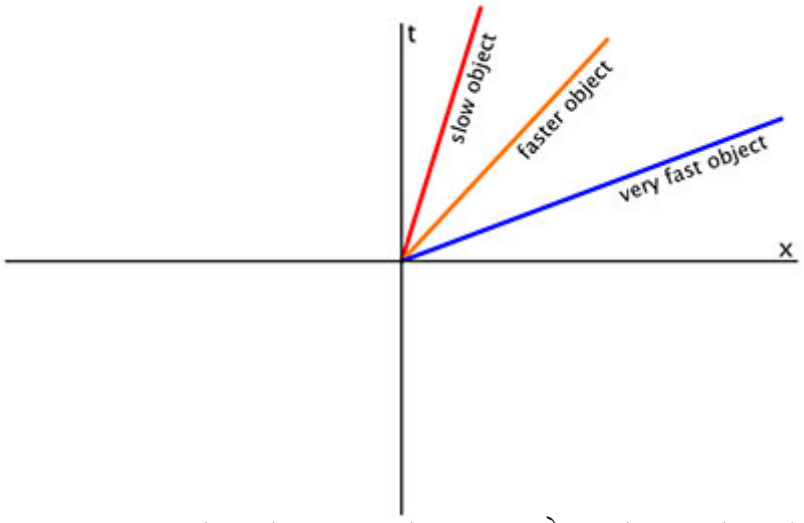


Рис. 3. Мировые линии в пространстве-времени с одномерным пространством x

На рис. 4 показаны мировая линия (слева), мировой лист (в центре) и мировой объём (справа) для частиц, струн/суперструн и бран соответственно.

Гиперплоскостью одновременности для четырехмерного пространства времени называют евклидово подпространство R^3 пространственно-временного континуума в определенный момент времени t.

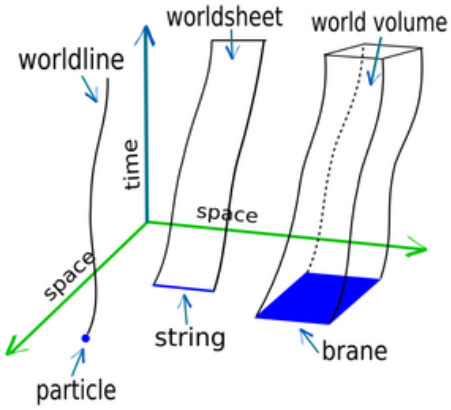


Рис. 4. Мировая линия, мировой лист и мировой объём в пространстве-времени с двухмерным пространством space²

Путь по мировой линии измеряется с помощью интервала по формулам (1), (3), (5) и (6), которые используют значения элементов матриц метрического тензора (2), (4) и (9).

Теперь мы можем измерять путь четырехмерного пространства времени в расширенном пространстве Минковского с матрицей метрического тензора (10). На рис. 5 показано новое ортогональное и пространству, и времени измерение h.

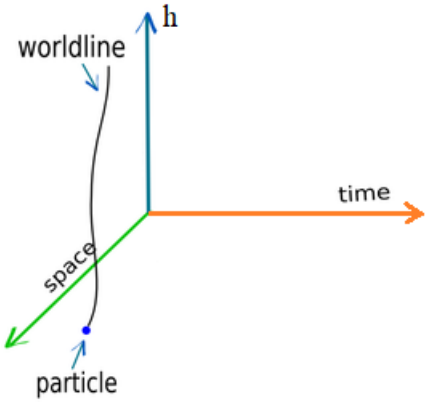


Рис. 5. Мировая линия в континууме с более широкой сигнатурой

Далее мы покажем, что h — это измерение скорости, и в действительности скорость — это не вектор в евклидовом пространстве R^3, коллинеарный вектору пути для равномерного прямолинейного движения (как мы привыкли считать в ньютоновской механике и специальной теории относительности [3, 26]), а координатный вектор-измерение, которой лежит в этом континууме с более широкой сигнатурой *(1,3,1)*, чем у четырехмерного пространственно-временного континуума *(1,3)*.

Определение 1. Назовем *гиперкубом односкоростности* «плоскость» space-time на рис. 5, подразумевая $space = R^3$. Каждому значению h соответствует свое значение-состояние пространства-времени.

4. Механика, динамика, гравитация и топология в расширенном пространстве Минковского

Метрический тензор одномерного пространства без времени — это симметричное тензорное поле ранга *(0,1)* на гладком многообразии, его матрица $\hat{g} = (1)$ является подматрицей — вырезанным элементом на пересечении второго столбца и второй строки матрицы метрического тензора (9).

Метрический тензор двухмерного пространства-времени — это симметричное тензорное поле ранга *(1,1)* на гладком многообразии, его матрица является подматрицей — вырезанными элементами на пересечении второго и четвертого столбцов и второй и четвертой строк матрицы метрического тензора (10).

Пусть в (10) второму и четвертому столбцам со значениями –1 и 1 соответствуют измерения пространства и времени:

$$\hat{g} == \begin{pmatrix} & \vec{r} & & \vec{t} \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

а одному из столбцов с пропущенными заголовками соответствует измерение $\vec{h}$. Сигнатура матрицы метрического тензора (12) имеет вид *(1,1,1,1)* или *(1,3,1,1)*, если расширить r в 3 пространственных измерения.

Определение 2. *Равносечным течением* времени назовем аналогичное рис. 3 изменение времени по оси h в координатах h и t, как измененение координаты x (или r) — называется равномерным движением $(dt/dh = \text{const})$ по (вдоль) оси t на рис. 3 в координатах t и x $(dx/dt = dr/dt = v = \text{const})$.

Теорема 1. *Путь частицы по мировой линии пространства-времени в континууме с более широкой сигнатурой лежит вдоль оси координатного вектора скорости $\vec{v}$, ортогонального координатным векторам времени $\vec{t}$ и пространства $\vec{r}$, а мера равносечного течения времени определяется скалярным значением пространственной координаты частицы в пространстве.*

Доказательство. Так как для равномерного прямолинейного движения в скалярном выражении $r = vt$, запишем векторное произведение, как мы показали это геометрически допустимым в выражении (8):

$$\vec{r} = \vec{v} \times \vec{t}, \tag{13}$$

где $\vec{r}$ — координатный вектор пространства, $\vec{v}$ — координатный вектор скорости, $\vec{t}$ — координатный вектор времени.

На рис. 5 для координатных векторов единичной длины с точностью до знака минус (которую можно устранить, развернув на рис. 5 ось h в обратном направлении):

$$\overrightarrow{space} = \vec{h} \times \overrightarrow{time}. \tag{14}$$

где $\overrightarrow{space}$ — координатный вектор пространства, $\vec{h}$ — координатный вектор добавленного нами измерения h, $\overrightarrow{time}$ — координатный вектор времени.

Так как $\overrightarrow{space} = \vec{r}$ и $\overrightarrow{time} = \vec{t}$, из (13) и (14) получаем $\vec{h} = \vec{v}$.

Выражение (14), как мы показали в (8), равносильно выражению $\overrightarrow{time} = \overrightarrow{space} \times \vec{h} = \overrightarrow{space} \times \vec{v}$ или в скалярном выражении $t = rv$ (что не имеет физического смысла в классическом пространстве-времени Минковского — пространстве с более узкой сигнатурой, чем мы рассматриваем), то есть $r = dt/dv$ — пространственная координата r частицы в пространстве — определяет меру *равносечного течения* времени вдоль оси $\vec{v} = \vec{h}$ точно так же, как и сама скорость $v = dr/dt$ определяет меру *равномерного движения*. ▪

Аналогично теореме 1 можно показать, что и время определяет меру изменения скорости по пространственной координате $t = dv/dr$ (рис. 6).

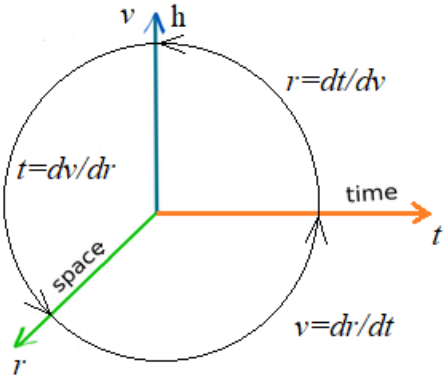


Рис. 6. Соотношения между измерениями пространства, скорости, времени

Так как матрица метрического тензора (10), как мы говорили выше, по вертикальным/горизонтальным индексам замкнута сама на себя, то не важно, какому из столбцов с пропущенными заголовками поставить в соответствие измерение скорости v (в любом случае этот столбец окажется между столбцами для пространства r и времени t). Пусть это будет третий

столбец, а первый столбец соответствует некоему базовому измерению, координатный вектор которого обозначим $\vec{1}$ (единица со знаком вектора):

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \vec{1} & \vec{r} & \vec{v} & \vec{t} \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Любое одномерное пространство (одно измерение) является связным, односвязным, компактным многообразием без края.

Гипотеза Пуанкаре, сформулированная в 1904 г., в 2002–2003 гг. была доказана Григорием Перельманом [13–15] и в 2006 г. подтверждена математическим сообществом: «Всякое связное, односвязное, компактное трехмерное многообразие без края гомеоморфно сфере S^3».

Следствиями доказательства гипотезы Пуанкаре являются замкнутость евклидова пространства R^3 на себя и возможность утверждать замкнутость любого одномерного пространства (одного измерения) на себя. Таким образом, окружность на рис. 6 может иллюстрировать четвертое измерение $\vec{1}$, и так же можно замкнуть в окружности измерения r, v, t. Эти окружности имеют конечный размер (длину окружности и/или диаметр) в пространстве еще более широкого ранга, чем мы рассматриваем.

Чем, например, геометрически объясняется наличие ограничения сверху физической величины скорости максимальным значением в виде скорости света c. Также физиками и астрономами с помощью данных, полученных спутником «Планк», определена масса Вселенной [17] — ограничение сверху физической величины массы m максимальным значением, часть которого составляет т. н. *темная материя*, не участвующая в электромагнитном взаимодействии и поэтому недоступная прямому наблюдению (понятие исторически связано с проблемой скрытой массы [21]). Доказательством Перельмана гипотезы Пуанкаре математически подтверждается ограничение сверху физической величины пространственного расстояния r максимальным значением — экспериментально это можно подтвердить, например, «кругосветным путешествием» (аналогичным эксперименту Фернана Магеллана для поверхности Земли [16]) по Вселенной, направив космический зонд в космос таким образом, чтобы он двигался по прямой даже в искривленном гравитацией пространстве-времени, несмотря на гравитационные помехи, и через некоторое время пронаблюдав его возвращение к Земле со стороны, обратной первоначальному направлению.

Запишем физические формулы механики, динамики и гравитационного потенциала [12] в виде векторных произведений, как мы показали возможным в выражении (8), под каждой физической величиной подразумевая отдельное измерение:

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{t}, \tag{16}$$

где $\vec{v}$ — координатный вектор измерения скорости, $\vec{a}$ — координатный вектор измерения ускорения, $\vec{t}$ — координатный вектор измерения времени.

$$\vec{r} = \vec{v} \times \vec{t}, \tag{17}$$

где $\vec{r}$ — координатный вектор измерения расстояния (пространства), $\vec{v}$ — координатный вектор измерения скорости, $\vec{t}$ — координатный вектор измерения времени.

$$\vec{F} = -\vec{\Pi} \times \vec{r}, \tag{18}$$

где $\vec{F}$ — координатный вектор измерения силы гравитации, $\vec{\Pi}$ — координатный вектор измерения гравитационного потенциала, $\vec{r}$ — координатный вектор измерения расстояния (пространства).

$$\vec{F} = \vec{m} \times \vec{a}, \tag{19}$$

где $\vec{F}$ — координатный вектор измерения силы, $\vec{m}$ — координатный вектор измерения массы, $\vec{a}$ — координатный вектор измерения ускорения.

$$\vec{p} = \vec{m} \times \vec{v}, \tag{20}$$

где $\vec{p}$ — координатный вектор измерения импульса, $\vec{m}$ — координатный вектор измерения массы, $\vec{v}$ — координатный вектор измерения скорости.

$$\vec{1} = \vec{\Pi} \times \vec{r}, \tag{21}$$

где $\vec{1}$ — координатный вектор измерения безразмерной в классическом пространстве Минковского и классической гравитационной теории величины, $\vec{\Pi}$ — координатный вектор гравитационного потенциала, $\vec{r}$ — координатный вектор измерения расстояния (пространства).

В формулах (16)–(21) каждые три физических величины представляют собой отдельные взаимоортогональные измерения, которые можно рассматривать в пространствах R^3 (каждую формулу в своем).

Теорема 2. *В матрице метрического тензора (15)* $\vec{1} = \vec{m}$.

Доказательство. Из (16) и (17):

$$\vec{r} = \vec{a} \times \vec{t} \times \vec{t} = \vec{a} \times \vec{t}^{\,2}. \tag{22}$$

Из (18) и (22):

$$\vec{F} = -\vec{\Pi} \times \vec{r} = -\vec{\Pi} \times \vec{a} \times \vec{t}^{\,2}. \tag{23}$$

Из (19) и (23):

$$\vec{m} \times \vec{a} = -\vec{\Pi} \times \vec{a} \times \vec{t}^{\,2}. \tag{24}$$

или

$$\vec{m} = -\vec{\Pi} \times \vec{t}^{\,2}. \tag{25}$$

Из (18) и (21):

$$\vec{F} = -\vec{1}. \tag{26}$$

Выражение (26) уже позволяет утверждать, что в матрице метрического тензора (15) измерение $\vec{1}$ может означать силу F, т. к. можно произвести замену $-\vec{1}$ на $\vec{1}$, направив эту ось в противоположном текущему направлении.

Произведение силы гравитации F, действующей на массу m, расположенную на расстоянии r от центра поля гравитационного потенциала Π, равно произведению массы на гравитационный потенциал Π в этой точке (на расстоянии r): $rF = m\Pi$.

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{m} \times \vec{\Pi}. \tag{27}$$

Отсюда и из (19):

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{\Pi}. \tag{28}$$

Выражение (18), как мы показали возможным в (8), можно переписать в виде:

$$\vec{\Pi} = -\vec{F} \times \vec{r}. \tag{29}$$

Отсюда и из (19):

$$\vec{\Pi} = -\vec{m} \times \vec{a} \times \vec{r}. \tag{30}$$

Отсюда и из (28):

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{a} &= -\vec{m} \times \vec{a} \times \vec{r}, \\ -(\vec{a} \times \vec{r}) &= -\vec{m} \times \vec{a} \times \vec{r}. \end{aligned} \tag{31}$$

Из (31) получаем:

$$\vec{1} = \vec{m}. \tag{32}$$

■

Таким образом, по теореме 2 матрица метрического тензора (15) соответствует континууму масса-пространство-скорость-время:

$$\hat{g} == \begin{pmatrix} \vec{m} & \vec{r} & \vec{v} & \vec{t} \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Матрица метрического тензора (33) позволяет сформулировать и использовать в ней расширенную специальную теорию относительности, основанную на комплексном исчислении.

Метрический тензор массы-скорости — это симметричное тензорное поле ранга *(1,1)* на гладком многообразии, его матрица является подматрицей — вырезанными элементами на пересечении первого и третьего столбцов и первой и третьей строк матрицы метрического тензора (33). Континуум масса-скорость можно сравнить с двухмерным пространством-временем, он также имеет матрицу метрического тензора (9).

Любые два измерения, соответствующие соседним столбцам матрицы метрического тензора (33), относятся друг к другу так же, как время и пространство в специальной теории относительности.

Согласно Перельману [13–15], как мы писали выше, любое измерение является замкнутым и гомеоморфно окружности в пространстве более высокого/широкого ранга.

Матрица метрического тензора (33) может объяснять происхождение измерений так же, как из измерений пространства и времени мы исторически произвели (сформулировали определение соответствующей новой/производной физической величины) измерение скорости, на практике измеряя ее скалярной величиной.

5. Происхождение измерений

Экстраполируя теоремы 1 и 2 в прямом и обратном направлениях по различным физическим величинам в виде измерений, можно заполнить пропущенные заголовки столбцов в матрице метрического тензора 8×8 (и более высоких размерностей по степеням двойки), основанной на комплексном исчислении, и сформулировать так называемую *Теорию всего*, объясняющую все виды физических взаимодействий, происхождение частиц и Вселенной. Матрица размером 8×8 метрического тензора с сигнатурой *(1,1,1,1,1,1,1,1)*, построенная по квадратичной форме сигнатуры (11):

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} & \vec{v} & & \vec{r} & & \vec{m} & & \vec{t} \\ j & & & & & & & \\ & -i & & & & & & \\ & & -ij & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -j & & & \\ & & & & & i & & \\ & & & & & & ij & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Учитывая колмогоровский рекурсивно-фрактальный подход к измерению количества информации [22], можно говорить об информационном измерении. Информационное (логическое) измерение *{True, False}* или *{1, 0}* тоже топологически является связным, односвязным, компактным многообразием без края. Применяя метод математической дедукции, можно записать матрицу метрического тензора с сигнатурой *(1, 1)* для Большого взрыва:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \varnothing & \overrightarrow{bool} \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где $\varnothing = 0^0$ — состояние (измерение) Вселенной до Большого взрыва (пустота), $\overrightarrow{bool} = 0^1$ — информационное (логическое) измерение.

Энтропия тоже имеет максимальное значение [2]. Принцип максимальной энтропии — это понятие теории вероятности, представляющее собой утверждение, что распределение вероятностей, которое наилучшим образом отражает текущее состояние данных — это распределение с наибольшей информационной энтропией [7]. Таким образом, энтропия — это тоже одно из базовых измерений.

Максимальная энтропия означает, что каждый элемент системы находится в максимальной степени неопределенности, равной 1, а система — в степени, равной числу её элементов (например, количество частиц для Вселенной, которое ограничено).

Построенная математическая модель подходит для систем любой природы. Например, Карл Маркс в своем труде [8] рассматривал взаимосвязь четырех измерений: масса (товар), капитал (деньги), труд (человеческие ресурсы) и время. Эти измерения могут быть заголовками столбцов матрицы метрического тензора (10):

$$\hat{g} == \begin{pmatrix} \vec{m} & \vec{\$} & \overrightarrow{HR} & \vec{t} \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где $\vec{\$}$ — это измерение капитала (денежное), $\overrightarrow{HR}$ — человеческих ресурсов, измеряемых для экономических систем [25] в виде произведения HRt, т. е. произведения количества людей на затраченное ими на труд время с помощью измерения времени в человеко-часах (или трудоднях для одного человека).

Заключение

Мы предложили расширение классической модели пространства Минковского, включив в нее измерения с более широкой сигнатурой, которые описывают ортогональные координатные векторы скорости и массы. Доказано, что путь частицы в таком континууме связан с новыми измерениями, которые можно трактовать как координаты скорости и массы. Мы также показали, что аналогичная замкнутость измерений, подтвержденная для трёхмерных многообразий в гипотезе Пуанкаре, может быть применена к более сложным физическим моделям. Экстраполируя наши результаты, мы предложили возможный подход к созданию теории, объясняющей происхождение частиц и Вселенной в рамках единой математической модели. Критика теорий струн [27], суперструн [5] и бран [18] с позиции предложенной обобщенной математической модели измерений основана на различиях в подходах к описанию многомерного пространства, к понятию измерений и на интерпретации природы этих измерений (включая комплексные координаты), а также на несоответствии принципу бритвы Оккама (вводятся дополнительные сущности). Тем не менее, для окончательного подтверждения предложенной гипотезы (*Теории всего*) необходимы дополнительные исследования и экспериментальная проверка на большом адронном коллайдере [4].

Построенная математическая модель подходит для системного анализа [9, 23–25], потому что хорошо обобщает системы любой природы: геометрические, физические, экономические [8, 10, 25] и другие.

Литература

1. *Birrell N. D., Davies P.C.W.* Quantum Fields in Curved Space. Cambridge University Press, 1982. – 354 p.

2. *Clausius R.* Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen [On the Mov-ing Force of Heat and the Laws which can be Deduced from it for the Theo-ry of Heat itself] // Annalen der Physik. – 1850. – Vol. 155, No 3. – P. 368–397.

3. *Einstein A.* Fundamental Ideas and Methods of the Theory of Relativity 1920.

4. *Evans L., Bryant P.* LHC Machine // Journal of Instrumentation. – 2008. – Vol. 3. S08001.

5. *Gross D., Witten E.* Possible third-order phase transition in the large-*N* lattice gauge theory // Phys. Rev. D. – 1980. – Vol. 21. 446.

6. *Hawking S.* A Brief History of Time. Bantam Books, 1988. – 256 p.

7. *Jaynes E. T.* Information Theory and Statistical Mechanics // Physical Review. – 1957. – Vol. 106, No 4. – P. 620–630.

8. *Marx K.* Das Kapital. Kritik der politischen Ökonomie [Capital: A Critique of Political Economy] 1867, 1885, 1894.

9. *Minitaeva A.* Analysis of the Multi-Criteria Decision-Making Problem Under Conditions of Heterogeneous Interval Uncertainty // Proceedings – 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA 2022). 2022. DOI: 10.1109/SUMMA57301.2022.9974092

10. *Minitaeva A. M.* Multimodel Approach to Forecasting Nonlinear Nonstationary Processes in Optimal Control Problems // Proceedings of the 2024 6th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE 2024). 2024.

11. *Minkowski H.* Raum und Zeit [Space and Time] // Physikalische Zeitschrift. – 1908–1909. – Vol. 10. – P. 75–88.

12. *Penrose R.* The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Uni-verse. Alfred A. Knopf, 2004. – 1136 p.

13. *Perelman G.* The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications (англ.) // ArXiv.org 2002. ISSN 2331-8422 arXiv:math/0211159

14. *Perelman G.* Ricci flow with surgery on three-manifolds (англ.) // ArXiv.org 2003. ISSN 2331-8422 arXiv:math/0303109

15. *Perelman G.* Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds (англ.) // ArXiv.org 2003. ISSN 2331-8422 arXiv:math/0307245

16. *Pigafetta A.* Relazione del primo viaggio intorno al mondo [Report of the First Voyage Around the World]. 1524. Ed. Ramusio G. B., Navigazioni e viaggi, Venice, 1550.

17. Planck Collaboration. Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters // Astronomy & Astrophysics. – 2020. – Vol. 641. A6.

18. *Polchinski J.* Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges // Physical Review Letters. – 1995. – Vol. 75. – P. 4724–4727.

19. *Rovelli C., Smolin L.* Loop Space Representation of Quantum General Relativity // Nuclear Physics B. – 1990. – Vol. 331. – P. 80–152.

20. *Song X., Salvati F., Gaikwad C., Halpern N. Y., Arvidsson-Shukur D. R. M., Murch K.* Agnostic Phase Estimation // Phys. Rev. Lett. – 2024. – Vol. 132. 260801.

21. *Zwicky F.* Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln [The Redshift of Extragalactic Nebulae] // Helvetica Physica Acta. – 1933. – Vol. 6. – P. 110–127.

22. *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Пробл. передачи информ. – 1965. – Т. 1, № 1. – С. 3–11.

23. *Минитаева А. М., Шайтура С. В.* Системный анализ и разработка методики моделирования нелинейных нестационарных процессов в системе поддержки принятия решений // Информационно-технологический вестник. – 2023. – № 3(37). – С. 54–64. EDN ACWQAM.

24. *Минитаева А. М.* Новый оператор тензорного произведения и анализ нелинейных систем с полиномиальными функциями пространства состояний // Информационно-технологический вестник. – 2024. – № 3(41). – С. 3–14. EDN AAECDU.

25. *Минитаева А. М.* Математическая модель и метод принятия решений в экономических системах на основе глубокого обучения // Искусственный интеллект в автоматизированных системах управления и обработки данных : Сборник статей II Всероссийской научной конференции. В 5-ти томах, Москва, 27–28 апреля 2023 года. Москва: Издательский дом КДУ, «Добросвет», 2024. – С. 42–49. EDN YTVUVK.

26. *Пенроуз Р.* Путеводитель по теории относительности. – Москва : Мир, 2002. – 589 с.

27. *Полчински Дж.* Теория струн. Том 1. – Москва : ИКИ РАН, 2002. – 432 с.

УДК 519.72

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ КАДРОВОГО ПОТЕНЦИАЛА СОТРУДНИКА IT-КОМПАНИИ

А. И. Шашкин, М. Ю. Леденев

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье предложен подход для выбора претендентов на должность в IT-компании с учетом квалификационных требований, который базируется на формировании обобщенной (комплексной) оценки, при этом частные оценки претендентов являются лингвистическими. Рассматриваются свойства лингвистического оператора порядкового взвешенного агрегирования, важные для процедуры выбора. Приведен иллюстративный пример, демонстрирующий эффективность подхода.
Ключевые слова: управление персоналом, задача выбора, агрегирование информации, лингвистическая информация.

Введение

В настоящее время в связи с уходом ряда международных IT-компаний происходит перепрофилирование отечественных компаний и появление новых. В условиях высокой конкуренции потребность в высококвалифицированных сотрудниках значительно выросла. Кроме того, на рынке IT-услуг возникают новые вызовы, что предполагает появление особых квалификационных требований к кадрам. Следует заметить, что успешность современных IT-компаний во многом определяется кадровым потенциалом. Тщательный подбор, обдуманные назначения и поощрение повышения квалификации заинтересованных сотрудников являются залогом создания эффективного работоспособного высокопрофессионального коллектива [1]. На этапе подбора персонала необходимо определить квалификационные требования к работникам по занимаемым должностям и осуществить поиск кандидатов с соответствующим уровнем необходимых характеристик. Для грамотного управления кадровым потенциалом компании целесообразно использовать автоматизированные системы управления персоналом, которые функционируют на стыке информационных технологий и HR-процессов [2]. Специализированные программные средства, обладающие необходимым функционалом, позволяют составлять собственные базы резюме и вакансий компании, упорядочивают работу с ними, помогают в проведении тестов и интервьюировании при приеме на работу и позволяют оперативно принимать решения на основании обработанной информации.

Формальная постановка задачи заключается в следующем: пусть вакантная должность предусматривает некоторый перечень квалификационных требований, и на эту должность претендуют m кандидатов, квалификация которых определяется оценками в некоторой шкале степени соответствия критериям, сформированным на основе требований. Необходимо проранжировать кандидатов с учетом их соответствия вакантной должности.

По функциональной направленности системы, автоматизирующие управление человеческими ресурсами, можно разделить на [2]:

– системы, в которых генерируются знания об управлении компанией в форме базы знаний;

– программы стимулирования сотрудников, осуществляющие подбор и адаптацию персонала, планирование карьеры;

– программы формирования квалификационных требований;

– программы для формирования аналитических отчетов по кадрам в составе многофункциональных систем;

– системы группового анализа персонала и выявления тенденций развития организации в целом;

– комплексные системы, отражающие движение кадров внутри фирмы, формирующие оптимальное штатное расписание.

Среди существующих программных приложений, в функционал которых входит подбор кадров, отметим следующие [3]:

– *Рекрутер*, которая позволяет автоматизировать процессы поиска и отбора персонала, вести учет кандидатов, вакансий, рассчитывать затраты на подбор персонала, автоматизировать проведение конкурсного отбора;

– *E-Staff Рекрутер*, предназначенная для рекрутинговых агентств и служб подбора персонала в организациях и включающая следующие функции: работа с кандидатами, интервью, прием на работу или отклонение, прохождение испытательного срока, планирование событий и заданий;

– *SAP Human Resources*, в состав которой входят следующие модули: PD (планирование и профессиональный рост персонала) и PA (администрирование персонала и расчет зарплаты) — модульная структура данной системы дает возможность ее поэтапного внедрения;

– *Oracle Human Resources Analyzer* позволяет автоматизировать табельный учет компании, рекрутинг кадров, анализ деловых качеств работников компании, прогнозирование своевременного повышения квалификации сотрудников, составление плана продвижения по службе работников.

Внедрение подобных систем дает компании возможность достичь следующих результатов: сокращение времени для принятия решений; качественное улучшение принимаемых решений; сокращение расходов на руководство кадрами; наиболее результативное использование профессиональных качеств конкретного сотрудника.

В настоящее время увеличился спрос на специализированные данные о персонале, помогающие планировать спрос на квалифицированные кадры, осуществлять продуманный рекрутинг, назначать и сохранять в штате талантливых и высококвалифицированных сотрудников. Эта тенденция обусловливает актуальность приложений, связанных с разработкой моделей оценки персонала.

Цель статьи заключается в формировании оценочной модели для претендентов на вакантные должности с учетом квалификационных требований.

1. Теоретическая база исследования

Рассмотрим формальную постановку задачи [4], которая относится к известной в теории принятия решений *задаче выбора*: пусть X — заданное множество объектов оценивания; $A_i(x) = a_i$ — частная оценка объекта x, в качестве которой может выступать оценка по i-му критерию (показателю), или оценка, полученная от i-го эксперта; $(a_1, ..., a_n)$ — векторная оценка объекта $x \in X$, тогда его обобщенная оценка может быть получена путем агрегирования компонент векторной оценки в соответствии с определенным принципом

$$\alpha(x) = Agg(a_1, a_2, ..., a_n),$$

где $Agg(\cdot)$ — оператор агрегирования, формализующий некоторую стратегию агрегирования. Скалярная оценка $\alpha(x)$ называется *обобщенной* (*групповой*, *комплексной*, *интегральной*). В основе ее формирования лежит понятие оператора агрегирования. В настоящее время существует значительное количество классов операций и функций агрегирования, среди которых наиболее распространены операции осреднения. Для учета значимости аргументов используют весовые коэффициенты. Однако вектор весов может быть получен на основе формализации принципа «нечеткого большинства» с помощью лингвистических кванторов [5]. Данный под-

ход порождает класс операторов агрегирования OWA (Ordered Weighted Averaging Aggregation Operator) [6]. Их отличительной особенностью является наличие ряда числовых характеристик, которые позволяют целенаправленно сформировать процедуру оценивания. Среди таких характеристик отметим следующие: *orness* — близость к дизъюнктивной стратегию агрегирования, *andness* — близость к конъюнктивной стратегии агрегирования; *tradeoff* — уровень компенсационных свойств; *entropy* — равномерность учета всех критериев (показателей).

Перечисленные числовые характеристики позволяют оценить источники информации. Например, опыт показывает, что эксперт, склонный к риску, при оценивании в большей степени учитывает лучшие свойства объекта оценивания — такая позиция называется оптимистической. Эксперт-пессимист имеет тенденцию в своих суждениях опираться на худшие свойства объекта. Склонность к риску можно охарактеризовать величиной $orness(W)$: чем ближе эта величина к 1, тем в большей степени позиция эксперта оптимистична. Еще одна особенность *OWA*-агрегирования заключается в том, что данный оператор может быть обобщен на случай лингвистической информации [5, 7]. Предположим, что оценки объекта формируются в лингвистической шкале S и $a_i \in S \ \ (i = \overline{1,n})$, а веса $w_i \in [0,1] \ \ (i = \overline{1,n})$ являются количественными.

Лингвистический порядковый оператор осреднения (*LOWA-оператор*), ассоциированный с вектором весов W, где $w_i \in [0,1]$ и $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, определяется правилом [6]

$$\Phi_W(A) = C^n\left\{\left(w_k, b_k\right), k = \overline{1,n}\right\} = w_1 \otimes b_1 \oplus \left(1 - w_1\right) \otimes C^{n-1}\left\{\left(\lambda_k, b_k\right), k = \overline{2,n}\right\},$$

где $B = (b_1, ..., b_n)$ — вектор, полученный из вектора оценок $A = (a_1, ..., a_n)$ упорядочением по невозрастанию лингвистических термов; $\lambda_k = \dfrac{w_k}{\sum_{m=2}^{n} w_m} \ \ (k = \overline{2,n})$ — нормированный вектор весов, полученный после удаления максимального веса w_1, $\sum_{m=2}^{n} \lambda_m = 1$; C^n, C^{n-1} — выпуклые комбинации $n(n-1)$ термов соответственно.

При $n = 2$ выпуклая комбинация лингвистических термов $b_1 = S_j$ и $b_2 = S_i \ \ \left(j \geq i\right)$ определяется правилом

$$C^2\left\{\left(w_1, b_1\right), \left(w_2, b_2\right)\right\} = w_1 \otimes b_1 \oplus w_2 \otimes b_2 = S_k,$$

где $k = \min\{T, i + round(w_1 \cdot (j - i))\}$, $round$ соответствует операции округления.

Заметим, что для нахождения весов могут использоваться те же методы, что и для операторов, ориентированных на количественную информацию.

Обратный LOWA-оператор (*I-LOWA*) — это порядковый оператор, для которого B — это вектор лингвистических оценок A, упорядоченный по неубыванию. При $n = 2$

$$C^2\left\{\left(w_1, b_1\right), \left(w_2, b_2\right)\right\} = w_1 \otimes S_j \oplus w_2 \otimes S_i = S_k,$$

где $S_i, S_j \in S, \ \ j \leq i, \ \ k = \min\{T, i - round(w_1(i - j))\}$.

Оператор *I-LOWA* будем обозначать его через $\Phi_{\mathrm{W}}^{-1}(A)$.

2. Свойства лингвистического оператора осреднения

Рассмотрим некоторые *свойства LOWA-оператора*, которые он наследует от *OWA*-оператора, заметив при этом, что I-LOWA-оператор обладает тем же набором свойств.

1. $\Phi_W(A)$ *является оператором осреднения.*

Заметим, что если k — результирующий индекс в выпуклой комбинации двух лингвистических оценок a_i и a_j, причем $i \leq j$, то $i \leq k \leq j$. Это означает, что

$$a_i \leq \Phi_W\left(a_i, a_j\right) \leq a_j.$$

В случае n аргументов

$$\min\{a_1,...,a_n\} \le \Phi_W(A) \le \max\{a_1,...,a_n\},$$

что характеризует *LOWA*-оператор как оператор осреднения, поскольку данное неравенство является определяющим свойством этого класса операторов.

2. *LOWA — коммутативный оператор*, т. е.

$$\Phi_W(A) = \Phi_W(\pi(A)),$$

где $\pi(A)$ — произвольная перестановка элементов множества A. Свойство коммутативности обеспечивается упорядочением компонентов векторной оценки по невозрастанию (для $\Phi_W^{-1}(A)$ — по неубыванию). Учитывая это свойство, можно записать $\Phi_W(A) = \Phi_W(B)$, оговаривая, что B — вектор, полученный из вектора оценок A упорядочением по невозрастанию лингвистических термов.

3. *LOWA — идемпотентный оператор*. При $n = 2$ справедливость данного свойства вытекает из того факта, что при $i = j$

$$k = \min\{T, i + round(w(j-i))\} = \min\{T, i\} = i,$$

т. е., если $a_i = a_j = a$, то $\Phi_W(a_i, a_j) = a$.

Учитывая рекурсивное определение выпуклой комбинации, можно заключить о справедливости данного свойства для n аргументов.

4. *LOWA-оператор не является ассоциативным*.

Приведем пример. Пусть лингвистическая шкала определена в виде

$$S = \{S_0 = N, S_1 = VL, S_2 = L, S_3 = M, S_4 = H, S_5 = VH, S_6 = P\}.$$

Зададим вектор весов $W = (0.3, 0.7)$ и проверим справедливость равенства

$$\Phi_W(\Phi_W(VL, M), VH) = \Phi_W(VL, \Phi_W(M, VH)).$$

Вычислим левую часть выражения.

$$\Phi_W(VL, M) = L = S_2,$$

так как $B = (M, VL)$, $j = 3$, $i = 1$, то

$$k = \min\{6, 1 + round(0.3 \cdot (3-1))\} = \min(6, 2) = 2.$$

Далее $\Phi_W(L, VH) = M = S_3$, так как $B = (VH, L)$, $j = 5$, $i = 2$,

$$k = \min\{6, 2 + round(0.3 \cdot (5-2))\} = \min(6, 3) = 3.$$

С другой стороны, $\Phi_W(M, VH) = H = S_4$, так как $B = (VH, M)$, $j = 5$, $i = 3$,

$$k = \min\{6, 3 + round(0.3 \cdot (5-3))\} = \min(6, 4) = 4.$$

Затем $\Phi_W(VL, H) = L = S_2$, так как $B = (H, VL)$, $j = 4$, $i = 1$,

$$k = \min\{6, 1 + round(0.3 \cdot (4-1))\} = \min(6, 2) = 2.$$

Таким образом,

$$\Phi_W(\Phi_W(VL, M), VH) = S_3 \ne S_2 = \Phi_W(VL, \Phi_W(M, VH)).$$

5. $\Phi_W(A)$ *монотонно возрастает по каждому аргументу*. Пусть $A^1 = (a_1^1, ..., a_n^1)$ и $A^2 = (a_1^2, ..., a_n^2)$ — два упорядоченных по невозрастанию вектора лингвистических оценок, таких, что $\forall i = \overline{1, n}$ $(a_i^1 \ge a_i^2)$, тогда для любого фиксированного вектора весов W $\Phi_W(A^1) \ge \Phi_W(A^2)$.

Данное свойство доказывается индукцией по числу аргументов.

Пусть $n = 2$, $a_1^1 = S_j$, $a_2^1 = S_i$, $a_1^2 = S_p$, $a_2^2 = S_q$. Ясно, что $j \ge p$, $i \ge q$. Взяв произвольное $w_1 \in [0,1]$, имеем $j \cdot w_1 \ge p \cdot w_1$ и $i \cdot (1 - w_1) \ge q \cdot (1 - w_1)$, тогда

$$j \cdot w_1 + i \cdot (1 - w_1) \ge p \cdot w_1 + q \cdot (1 - w_1).$$

Округляя, получим

$$round\left(j\cdot w_1+i\cdot(1-w_1)\right)\geq round\left(p\cdot w_1+q\cdot(1-w_1)\right)\Leftrightarrow$$

$$round\left((j-i)\cdot w_1+i\right)\geq round\left((p-q)\cdot w_1+q\right).$$

Так как $i\in\mathbb{Z}^+$ и $(j-i)\cdot w_1>0,$ то

$$i+round\left((j-i)\cdot w_1\right)\geq q+round\left((p-q)\cdot w_1\right),$$

откуда $\Phi_W(A^1)\geq\Phi_W(A^2),$ т. е. для $n=2$ свойство доказано.

Предположим, что свойство является истинным для $(n-1),$ т. е.

$$\Phi_W\left(a_1^1,...,a_{n-1}^1\right)\geq\Phi_W\left(a_1^2,...,a_{n-1}^2\right),$$

где $a_1^1\geq...\geq a_{n-1}^1,$ $a_1^2\geq...\geq a_{n-1}^2,$ тогда для n аргументов имеем

$$\Phi_W(A)=w_1\otimes a_1^1\oplus(1-w_1)\otimes C^{n-1}\left\{\left(\lambda_k,a_k^1\right),k=\overline{2,n}\right\},$$

$$\Phi_W(B)=w_1\otimes a_1^2\oplus(1-w_1)\otimes C^{n-1}\left\{\left(\lambda_k,a_k^2\right),k=\overline{2,n}\right\}.$$

Так как

$$C^{n-1}\left\{\left(\lambda_k,a_k^1\right),k=\overline{2,n}\right\}=\Phi_W(a_2^1,a_3^1,...,a_n^1)$$

и

$$C^{n-1}\left\{\left(\lambda_k,a_k^2\right),k=\overline{2,n}\right\}=\Phi_W(a_2^2,a_3^2,...,a_n^2),$$

то в соответствии с гипотезой

$$\Phi_W\left(a_2^1,a_3^1,...,a_n^2\right)\geq\Phi_W\left(a_2^2,a_3^2,...,a_n^2\right),$$

Пусть $\Phi_W(a_2^1,a_3^1,...,a_n^2)=S_j,$ $\Phi_W(a_2^2,a_3^2,...,a_n^2)=S_i,$ причем $S_j\geq S_i.$ Так как $a_1^1\geq a_1^2,$ а $a_1^1\geq S_j,$ $a_1^2\geq S_i,$ то

$$\Phi_W\left(A^1\right)=\Phi_W\left(a_1^1,S_j\right),\quad\Phi_W\left(A^2\right)=\Phi_W\left(a_1^2,S_i\right).$$

Так как для $n=2$ свойство справедливо, т. е. $\Phi_W(a_1^1,S_j)\geq\Phi_W(a_1^2,S_i),$ то $\Phi_W(A^1)\geq\Phi_W(A^2),$ что и требовалось доказать.

Таким образом, оператор $\Phi_W,$ ассоциированный с вектором весов $W,$ обладает свойствами коммутативности, идемпотентности, монотонности, но не является ассоциативным.

3. Иллюстративный пример

Предположим, что сотрудники отдела разработки программного обеспечения Иванов И. И. и Петров П. П. претендуют на должность JavaDeveloperlead. Требуется определить наиболее подходящего кандидата. К данной должности в компании предъявляются требования к владению определенными компетенциями. Для оценки кандидатов на должность сформирована лингвистическая шкала, которая соответствует лингвистической переменной *Уровень соответствия требованиям*. Данная шкала имеет вид

$$S=\left\{VL-\text{очень низкий},\ L-\text{низкий},\ M-\text{средний},\ H-\text{высокий},\ VH-\text{очень высокий}\right\}.$$

Предположим, что в рамках процедуры претенденты получили оценки, представленные в следующей таблице.

Таблица

Оценки претендентов

Информационные технологии	**Java**	**SQL**	**C#**	**Python**	**Linux**	**MSOffice**	**PHP**	**Zabbix**
Иванов И. И.	VH	H	L	H	M	M	M	L
Петров П. П.	H	H	M	M	H	M	VH	VH

Для формирования весов использовалась функция квантификации $Q(x) = x^2$, которая задает лингвистический квантор *большинство*, а, следовательно, при формировании обобщенной оценки учитывается *большинство* частных оценок. Согласно [6], весовые коэффициенты рассчитывались по формуле $w_i = \frac{2i-1}{n^2}$ $(i = \overline{1,n})$. В результате использования лингвистического оператора Φ_W получены обобщенные оценки претендентов Иванов И. И. — М, Петров П. П. — Н. Таким образом, Петров П. П. является наиболее подходящим претендентом на должность.

Заключение

Предложенный подход планируется использовать при разработке модуля управления персоналом автоматизированной системы управления проектами.

Литература

1. *Волкова Л. П.* Социологические исследования в управлении персоналом: учебное пособие / Л. П. Волкова – Воронеж : Изд-во Воронежского гос. ун-та, 2008. – 264 с.

2. *Кибанов А. Я.* Основы управления персоналом: учебник: 3-е изд., перераб. и доп / А. Я. Кибанов. – М. : ИНФРА-М, 2014. – 448 с.

3. *Баскина Т. В.* Техники успешного рекрумента / Т. В. Баскина. – М. : Альпина Бизнес Букс, 2008. – 211 с.

4. *Броневич А. Г.* Нечеткие модели анализа данных и принятия решений / А. Г. Броневич, А. Е. Лепский. – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2022. – 264 с.

5. *Леденева Т. М.* Обработка нечеткой информации / Т. М. Леденева. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2006. – 233 с.

6. *Леденева Т. М.* Обзор основных классов операторов порядкового взвешенного агрегирования / Т. М. Леденева, И. Н. Левкина // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Серия : Системный анализ и информационные технологии. – 2022. – № 1. – С. 5–31.

7. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 798 с.

УДК 519.72

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ ПРОГРАММНЫХ МОДУЛЕЙ

М. М. Шишов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье предложен подход для распределения программных модулей между тестировщиками, который основан на оптимизационной модели. В качестве целевой функции выступает максимизация вероятности обнаружения ошибки. Рассмотрено обобщение данной модели на случай, когда исходная информация задана приближенно в форме нечетких чисел. В качестве основного метода решения задачи выступает метод максимального элемента. Приведен иллюстративный пример, демонстрирующий эффективность подхода.

Ключевые слова: распределение ресурсов, задача математического программирования, метод максимального элемента, нечеткие числа.

Введение

Зачастую современные программные продукты разрабатываются в сжатые сроки и при ограниченных бюджетах, что обусловливает необходимость контроля их качества на всех этапах жизненного цикл. В связи с этим имеет смысл говорить о важности тестирования в общем процессе разработки программного обеспечения. Можно выделить три основные тенденции. Во-первых, растет понимание необходимости промышленных методов тестирования, в частности с применением специальных средств автоматизации. Во-вторых, идет поиск возможностей для оптимизации затрат на выполнение данных работ с точки зрения общей организации процесса, в том числе с использованием модели аутсорсинга. В-третьих, развивается такое направление, как исследовательское тестирование, под которым подразумевается способ проверки продукта без определенного набора тестов, когда на первый план выходит творческий подход и максимальное использование возможностей человеческого мышления. Для данного вида тестирования важен опыт работы тестировщика, который позволяет использовать различные методы тестирования и выбирать наиболее подходящий для каждого сценария проверки. При этом противники данного метода считают его бессистемным и ненаучным по сравнению с традиционным тестированием по документации.

В данной статье предлагается оптимизационная модель распределения программных модулей между тестировщиками с целью минимизации затрат времени. Для решения задачи используется метод максимального элемента [5], особенностью которого является то, что решение многомерной задачи с n переменными, сводится к последовательному решению n задач с одной переменной, т. е. осуществляется декомпозиция исходной задачи на несколько взаимосвязанных подзадач меньшей размерности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу, которая относится к классу задач распределения ресурсов [3, 4] (в нашем случае под ресурсами подразумеваются тестировщики).

Пусть имеется программное обеспечение включает N программных модулей, при этом в модуле i может быть допущена ошибка, априорная вероятность которой равна p_i $\left(\sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \ \textit{или} \ \sum_{i=1}^{N} p_i = 100\,\% \right)$. Для тестирования разработанного программного обеспечения

привлекается команда из M тестировщиков. Необходимо таким образом распределить N модулей между M тестировщиками, чтобы вероятность обнаружения ошибки была максимальной. Тестировщики имеют равную эффективность, а уровень их квалификации задан вектором $(w_1,...,w_N)$, где w_i — вероятность обнаружения ошибки i-м тестировщиком.

Заметим, что при распределении возможны следующие ситуации:

- $N = M$, т. е. количество модулей равняется количеству QA тестировщиков;
- $N > M$, т. е. количество модулей больше, чем количество QA тестировщиков;
- $N < M$, т. е. количество модулей меньше, чем количество QA тестировщиков.

В данной статье рассмотрим первый вариант. Предположим, что все тестировщики упорядочены списком, и индекс i соответствует порядковому номеру тестировщика в списке; x_i — количество модулей, назначенных тестировщику i для поиска ошибки. Вероятность того, что тестировщик i найдет хотя одну ошибку в x_i выделенных ему модулях равна $1-(1-w_i)^{x_i} = 1-\varepsilon_i^{x_i}$. Тогда вероятность обнаружения ошибки равна $F(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i(1-\varepsilon_i^{x_i})$, где $X = (x_1,...,x_S)$.

Формальная постановка задачи имеет вид

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i\left(1-\varepsilon_i^{x_i}\right) \to \max$$

при линейном ограничении на его компоненты

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \le M,$$

и при дополнительных условиях для всех $i = \overline{1,N}$ вида

$$\begin{cases} x_i \in \{0,1,...,K\}, \\ 0 \le \varepsilon_i \le 1, \\ p_i \ge 0. \end{cases}$$

2. Метод максимального элемента

Для решения данной задачи применим *метод максимального элемента* [5], который включает следующие шаги:

1) Положить $F_0 = 0$ (начальное значение целевой функции), $t = 1$ (t — количество итераций, модулей). Вычислить компоненты вектора $(\Delta_i^t)_S$ по формуле

$$\Delta_i^t = p_i w_i \ \left(i = \overline{1,N}\right)$$

2) Найти

$$\Delta_{\max}^t = \max_{1 \le i \le N}\left\{\Delta_i^t\right\}.$$

Пусть $\Delta_{\max}^t$ — значение оценки для $i = l_t$, тогда назначить текущего в списке тестировщика на модуль l_t. Если таких элементов несколько, то из них берется любой.

3) Увеличить счетчик итераций t. Исключить тестировщика l_t, сформировав текущий вектор $x^{(t)}$ с компонентами $i = \overline{1,N}$ по правилу

$$x_i^t = \begin{cases} x_i^{(t-1)}, & \text{если } i \ne l_t, \\ 0, & \text{если } i = l_t, \\ x_i^{(t-1)} + 1, & \text{если } i > l_t. \end{cases}$$

4) Вычислить текущее значение целевой функции

$$F_t = F_{t-1} + \Delta_{\max}^t.$$

5) Проверить условие $t \le K$: да — перейти к шагу 6, нет — перейти к шагу 7.

6) Пересчитать компоненты текущего вектора $(\Delta_i^t)_S$ согласно правилу

$$\Delta_i^t = \begin{cases} \Delta_i^{t-1}, & \text{если } i \ne q, \\ \Delta_i^{t-1}\varepsilon_i, & \text{если } i = q. \end{cases}$$

7) Перейти к пункту 2.

8) Останов: найдено распределение модулей между тестировщиками в форме вектора $x^{(t)}$, при этом значение целевой функции равно F_t.

3. Задача оптимального распределения ресурсов в условиях неопределенности

Заметим, что исходная информация в данной задаче может быть приближенной. В этом случае для ее формализации целесообразно использовать понятие нечеткого числа [1].

Пусть U — некоторое универсальное множество, x — элемент множества U, α — некоторое свойство. Нечетким подмножеством A множества U называется множество упорядоченных пар вида $A = \{(x / \mu_A(x))\}_{x \in U}$, где $\mu_A(x)$ — функция принадлежности, которая принимает свои значения в линейно упорядоченном множестве M и определяет степень принадлежности элемента x к подмножеству A.

Нечеткая переменная задается кортежем $\langle \gamma, A, U \rangle$, где γ — название переменной, A — нечеткое подмножество универсального множества U с функцией принадлежности μ_A, т. е. представляет собой нечеткое подмножество заданного универсального множества с именем.

Если $U = \mathbb{R}$, то нечеткая переменная называется нечеткой величиной.

Нечетким числом $\tilde{\alpha}$ назовем нечеткую величину, функция принадлежности $\mu_{\tilde{\alpha}}$ которой является выпуклой и унимодальной на $\mathbb{R}$. Пусть α — точка экстремума функции принадлежности $\mu_{\tilde{\alpha}}$ (модальное значение), тогда нечеткое число можно рассматривать как функцию распределения значений высказывания «x приблизительно равно α».

Простейшим нечетким числом является треугольное нечеткое число с функцией принадлежности

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha - x}{l}, & \text{если } \alpha - l \le x \le \alpha, \\ 1 - \dfrac{x - \alpha}{r}, & \text{если } \alpha \le x \le \alpha + r, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

где l — левый коэффициент неопределенности; r — правый коэффициент неопределенности.

Так как, функция μ зависит от трех параметров α, l, r, поэтому треугольное нечеткое число с модальным значением a обозначается тройкой (α, l, r).

Пусть $\alpha \in (0,1]$, тогда α-срезом нечеткого множества A называется обычное множество $A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \ge \alpha\}$.

α-срез представлен на рис. 1.

α-срез треугольного нечеткого числа имеет следующий вид:

$$T_\alpha = (a, l, r)_\alpha = [a - l(1-\alpha), a + r(1-\alpha)].$$

Общая методика решения задач с нечеткими параметрами [2] сводится к заданию параметра α,

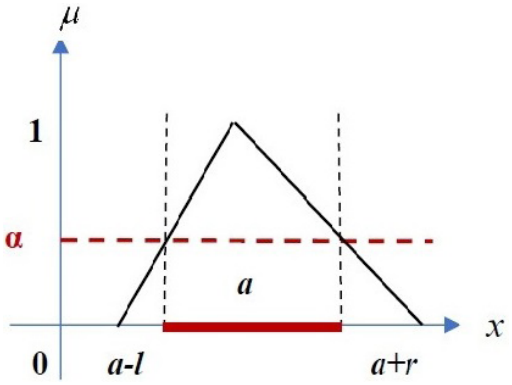


Рис. 1. α срез нечеткого числа (α, l, r)

что позволяет от нечетких чисел перейти к интервальным, а затем, выбрав на интервале определенное значение произвольно или с учетом дополнительной информации, перейти к решению четкой задачи с использованием известных методов и алгоритмов. В нашем случае процедура решения нечеткой задачи сводится к реализации следующих шагов:

1. Формализация исходной информации на основе нечетких чисел, определение их α-срезов.
2. Формирование нечеткой и интервальной постановок задачи.
3. Выбор конкретных значений параметров из α-срезов нечетких чисел.
4. Решение задачи методом максимального элемента.
5. Анализ решений при различных значениях α.

Предположим, что априорная вероятность p_i нахождения ошибки в i-м программном модуле и вероятность w_i обнаружения ошибки i-м тестировщиком являются нечеткими треугольными числами с функциями принадлежности μ_{p_i} и μ_{w_i} соответственно. Это означает, что вероятность нахождения ошибки в i-м модуле приблизительно равна p_i, а вероятность обнаружения ошибки i-м тестировщиком приблизительно равна w_i.

Соответственно, целевая функция будет иметь следующий вид:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{S}\mu_{p_i}\left(1-\left(1-\mu_{w_i}\right)^{x_i}\right)\to\max,$$

при линейном ограничении на его компоненты

$$\sum_{i=1}^{N}x_i\le M,$$

и при дополнительных условиях для всех $i=\overline{1,N}$ вида

$$\begin{cases}x_i\in\{0,1,...,K\},\\0\le\varepsilon_i\le 1,\\p_i\ge 0.\end{cases}$$

4. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим иллюстративный пример. Предположим, что необходимо произвести тестирование 5 программных модулей. Априорные вероятности нахождения ошибки в i-м модуле в процентах приблизительно равны (14, 7, 29, 33, 17) и $\sum_{i=1}^{N}p_i=100$. Имеется команда из 5 тестировщиков, которые имеют равную эффективность, а уровень их квалификации задан вектором (0.51, 0.85, 0.24, 0.69, 0.35), где w_i — приблизительная вероятность обнаружения ошибки i-м тестировщиком. α-срезы заданы (0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1). Требуется распределить 5 модулей между 5 тестировщиками, чтобы вероятность обнаружения ошибки была максимальной. Для формализации приближенной информации зададим параметры нечетких чисел в виде: $l=0,1$, $r=0.05$. Тогда, например, вероятность нахождения ошибки в первом проекте приблизительно равна 14 формально представляется нечетким числом «приблизительно 14», или формально $T(14,0.1,0.05)$. В табл. 1 представлена декомпозиция данного нечеткого числа.

С остальными нечеткими числами поступим идентично.

Таблица 1

Левые и правые границы треугольного числа T(14,0.1,0.05)

$p_1=14$						
α	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\underline{T}(\alpha)$	13.9	13,92	13,94	13,96	13,98	14
$\overline{T}(\alpha)$	14.05	14,04	14,03	14,02	14,01	14

Найдем левые и правые границы нечеткого треугольного числа $T(0,51,0.1,0.05)$, т. е. вероятность нахождения ошибки 1-м тестировщиком приблизительно равна 0.51. Результаты представлены в табл. 2. С остальными числами поступим идентично.

Таблица 2

Левые и правые границы треугольного числа T(0,51,0.1,0.05)

$w_1 = 0,51$						
α	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\underline{T}(\alpha)$	0.41	0.43	0.45	0.47	0.49	0.51
$\overline{T}(\alpha)$	0.56	0.55	0.54	0.53	0.52	0.51

Нетрудно заметить, что при значении $\alpha = 1$ получим первоначальное число.

Для реализации алгоритма распределения ресурсов разработан программный комплекс на языке программирования Python 3 [6] с использованием GUI фреймворка Tkinter для разработки оконного приложения. Результаты работы программного комплекса представлены в табл. 3 и табл.4.

Таблица 3

Решение задачи при $\underline{T}(\alpha)$

α	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$F(x)$	42.47	43.86	45.39	46.91	48.41	49.88
Цепочка назначений	4,4,1,2,5	4,4,1,2,3	4,4,1,2,3	4,4,1,3,2	4,4,1,3,2	4,1,4,3,2
Точное решение	[1.1.0.2.1]	[1.1.1.2.0]	[1.1.1.2.0]	[1.1.1.2.0]	[1.1.1.2.0]	[1.1.1.2.0]

Таблица 4

Решение задачи при $\overline{T}(\alpha)$

α	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$F(x)$	53.93	53.13	52.33	51.52	50.7	49.88
Цепочка назначений	4,3,1,5,4	4,3,1,5,4	4,3,1,4,5	4,3,1,4,5	4,1,3,4,5	4,1,4,3,2
Точное решение	[1.0.1.2.1]	[1.0.1.2.1]	[1.0.1.2.1]	[1.0.1.2.1]	[1.0.1.2.1]	[1.1.1.2.0]

Наибольшее значение целевой функции получим при значения $r = 0.05$ и $\alpha = 0$. В этом случае значение $F(x) = 53,93$. Цепочка назначений выглядит следующим образом: $4 \to 3 \to 1 \to 5 \to 4$, т. е. это последовательность номеров программных модулей для поиска ошибки. Что касается точного решения [1.0.1.2.1], то для того, чтобы вероятность обнаружения ошибки была максимальной, необходимо одного тестировщика назначить на первый модуль, одного на третий, двух на четвертый и одного на пятый.

Заключение

Таким образом, в данной работе была рассмотрена задача оптимального распределения ресурсов, метод максимального элемента и его модификация с использованием нечетких чисел. Рассмотрен модельный подход к проблеме оптимального распределения ресурсов. На языке программирования Python 3 [6] реализована программа поиска оптимального решения. Проведены численные эксперименты и выполнен анализ и проверка полученных результатов.

Литература

1. *Леденева Т. М.* Обработка нечеткой информации / Т. М. Леденева. – Воронеж : Изд-во Воронежского государственного университета, 2006. – 232 с.

2. *Мелькумова Е. М.* О решении некоторых задач нечеткого математического программирования / Е. М. Мелькумова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2009. – № 2. – С. 17–22.

3. *Юдин Д. Б.* Задачи и методы линейного программирования. Математические основы и практические задачи / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – Москва : Либроком, 2010. – 322 с.

4. *Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы / Т. Саати. – Москва : Наука, 2012. – 979 с.

5. *Берзин Е. А.* Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Е. А. Берзин. – Москва : Советское радио, 1974. – 304с.

6. *Мэтиз Э.* Изучаем Python. Программирование игр, визуализация данных, веб-приложения / Э. Мэтиз. – СПб. : Питер, 2017. – 496 с.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Abduolimova Gulzurakhon Mirzakomilovna — PhD of Andijan State University.
E-mail: abduolimova81@inbox.ru.

Dolimova Guluzro Jasurbek qizi — Master of Andijan State University.
E-mail: dolimovaguluzro@gmail.com

Hadish Fessehatsion Gebreslasie — PhD Student, Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia.
E-mail: rhadishfe@gmail.com

Kuzenkov Oleg Anatolyevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis at Nizhny Novgorod State University named after N. I. Lobachevsky.
E-mail: oleg.kuzenkov@itmm.unn.ru

Medvedev Alexander Viktorovich — PhD student at Nizhny Novgorod State University named after N. I. Lobachevsky.
E-mail: a.medvedev.unn@gmail.com

Obidinova Ranokhon Ganijon qizi — Master of Andijan State University.
E-mail: odilovaranoxon27@gmail.com

Sharipova Sorakhon Tokhirjon qizi — Student of Andijan State University.
E-mail: sh.sorakhon0809@gmail.com

Аббуд Халиль — магистрант, Воронежский государственный университет.

Абдугаппарова Шаходат Найибжановна — стажёр кафедры прикладной математики и механики Андижанского государственного университета.
E-mail: shahodatabdugapparova@gmail.com

Абдуолимова Гулзурахон Мирзакомиловна — старший преподаватель, доктор философии (PhD), Андижанский государственный университет.
E-mail: abduolimova81@inbox.ru

Азарнова Татьяна Васильевна — д-р техн. наук, проф., профессор кафедры математических методов исследования операций Воронежского государственного университета.
E-mail: ivdas92@mail.ru

Азнаурьянц Александр Александрович — директор ООО «ДИДЖИТАЛ».
E-mail: a.a.aznauryants@alldigital.life

Акатьев Ярослав Алексеевич — ассистент кафедры Практической и Прикладной Информатики (ППИ).
E-mail: akatev@mirea.ru

Акулова Анна Евгеньевна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: aakulovaa03@gmail.com

Александрова Екатерина Дмитриевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: kate.102020@yandex.ru

Алещенко Алексей Николаевич — канд. техн. наук, доц., доцент образовательно-научного кластера «Институт высоких технологий» Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: AAleshchenko@kantiana.ru

Али Исмаил — соискатель, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»

Аллилуева Алина Викторовна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: lina_allilyeva@mail.ru

Ал-Хафаджи Исра М. Абдаламир — аспирант кафедры корпоративных информационных систем Института информационных технологий, МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия; Ассистент факультета естественных наук, Университет Мустансирия, Багдад, Ирак.
E-mail: misnew6@gmail.com

Ананьев Александр Владиславович — д-р техн. наук, доц., доцент кафедры наземных систем комплексов воздушной разведки ВУНЦ ВВС «Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина».
E-mail: Ananyev-Alexandr@yandex.ru

Андрианова Елена Гельевна — канд. техн. наук, доц., доцент кафедры Корпоративных Информационных Систем МИРЭА – Российского Технологического Университета.
E-mail: andrianova@mirea.ru

Андрюкова Вероника Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН.
E-mail: veran@list.ru

Анискевич Вячеслав Михайлович — заведующий лабораторией конструкторского бюро Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: anis-1vm@rambler.ru

Ануфриев Даниэль Дмитриевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: anufrieff.daniel777@yandex.ru

Арзамасцев Александр Анатольевич — д-р техн. наук, проф., профессор кафедры математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета, научный сотрудник тамбовского филиала Федерального государственного автономного учреждения «Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С. Н. Федорова».
E-mail: arz_sci@mail.ru

Арикова Кристина Георгиевна — студент, МИРЭА – Российский технологический университет.
E-mail: arikova.kristina2015@yandex.ru

Артемов Михаил Анатольевич — д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: artemov_m_a@mail.ru

Аснина Наталия Георгиевна — канд. техн. наук., доцент кафедры систем управления и информационных технологий в строительстве, Воронежский государственный технический университет.
E-mail: andrey050569@yandex.ru

Астахова Ирина Федоровна — д-р техн. наук, проф., профессор кафедры Воронежского государственного университета.
E-mail: astachova@list.ru

Атаян Ася Михайловна — старший преподаватель кафедры Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем Донского государственного технического университета.
E-mail: atayan24@mail.ru

Афаг Гусейнова Физули — д-р философии по математике, преподаватель кафедры дифференциальных и интегральных уравнений, Бакинский государственный университета.
E-mail: huseynova.bsu@gmail.com

Афанасьев Александр Александрович — канд. физ.-мат. наук, главный специалист по моделированию АО КБХА.

Балашева Светлана Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры Математических методов исследования операций факультета ПММ Воронежского государственного университета.
E-mail: svetlana-bal77@yandex.ru

Баранников Илья Андреевич — ассистент кафедры радиоэлектронных устройств и систем, Воронежский государственный технический университет.
E-mail: ia.barannikov@yandex.ru

Баркалова Вероника Максимовна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: barkalovamaksimovna@gmail.com

Баскаков Анатолий Григорьевич — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры системного анализа и управления Воронежского государственного университета.
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Башкарев Владимир Александрович — соискатель кафедры математической физики и информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: bashkarev.edu@yandex.ru

Башлыков Данила Максимович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: danilabashlykov9@gmail.com

Бексаев Илья Александрович — магистрант, Ульяновский государственный университет.
E-mail: beksaevi89@gmail.com

Белова Юлия Валериевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математика и информатика» Донского государственного технического университета.
E-mail: yvbelova@yandex.ru

Белоусова Елена Петровна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры системного анализа и управления Воронежского государственного университета.
E-mail: e.p.belousova@gmail.com

Бергер Екатерина Геннадьевна — канд. экон. наук, доц., доцент кафедры практической и прикладной информатики МИРЭА – Российского технологического университета.
E-mail: berger@mirea.ru

Бердников Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., заведующий лабораторией Экологической масс-спектрометрии Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург.
E-mail: asberd@yandex.ru

Бирюкова Елена Витальевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: lenabir68@gmail.com

Бирючинская Татьяна Яковлевна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры экономического анализ, статистики и прикладной математики Воронежского государственного аграрного университета имени Петра I.
E-mail: bir_tat@mail.ru

Богачева Виктория Эдуардовна — аспирант, Тульский государственный университет.
E-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

Богданов Андрей Николаевич — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова, доцент кафедры ФН-1 Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.
E-mail: bogdanov @imec.msu.ru

Богданова Анастасия Петровна — аспирант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет.
E-mail: anstasia_pankova@mail.ru

Богданова Софья Борисовна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института.
E-mail: sonjaf@list.ru

Богушов Владислав Юрьевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: vlad_bogushov@mail.ru

Бомбина Алина Дмитриевна — студент, Тульский государственный университет.
E-mail: abonitskaya2003@mail.ru

Бондаренко Денис Вадимович — аспирант, Донской государственный технический университет.
E-mail: denis.bondarenko.dev@gmail.com

Бондаренко Юлия Валентиновна — д-р. техн. наук, проф., профессор кафедры математических методов исследования операций Воронежского государственного университета.
E-mail: bond.julia@mail.ru

Боницкая Ольга Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доцент института прикладной математики и компьютерных наук, Тульский государственный университет.
E-mail: olga_bonitskay@mail.ru

Борзунов Сергей Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: sborzunov@gmail.com

Борзых Никита Юрьевич — аспирант, МИРЭА — Российский технологический университет.
E-mail: allyru@yandex.ru

Борисов Сергей Викторович — канд. техн. наук, начальник лаборатории ВУНЦ ВВС «ВВА».
E-mail: myth7np7nikit@gmail.com

Бугаев Юрий Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математики военно-воздушной академии.
E-mail: y_bugaev@mail.ru

Бузуверов Алексей Дмитриевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: alexeybuzuverov@gmail.com

Булатов Юрий Николаевич — старший преподаватель кафедры математики, информатики, физики и методики обучения Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Буляница Антон Леонидович — д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., ведущий научный сотрудник лаборатории Информационно-измерительных био- и хемосенсорных микросистем Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург.
E-mail: antbulyan@yandex.ru

Буркин Игорь Михайлович — д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры «Вычислительной механики и математики» Тульского государственного университета.
E-mail: i-burkin@yandex.ru

Бурков Александр Эдуардович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: zergon455@gmail.com

Бурляев Григорий Иванович — студент, Воронежский государственный университет.

Бутузова Дарья Олеговна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: darya.butuzowa@yandex.ru

Буховец Алексей Георгиевич — д-р техн. наук, проф., профессор кафедры экономического анализ, статистики и прикладной математики Воронежского государственного аграрного университета имени Петра I.
E-mail: abuhovets@gmail.ru

Бухтояров Александр Сергеевич — аспирант кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: bukhtoyarov_as@amm.vsu.ru

Быкова Мария Игоревна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет.
E-mail: bykova_mi@amm.vsu.ru

Василевский Дмитрий Александрович — аспирант 1-го курса кафедры ТИИ РТУ МИРЭА.
E-mail: dmitryvasilevscky@mail.ru

Вахитов Рауль Айдарович — студент 2-го курса кафедры прикладной математики и информатики Новгородского государственного университет им. Ярослава Мудрого.
E-mail: s256721@std.novsu.ru

Верёвкина Диана Сергеевна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: diana_ver04@mail.ru

Верлин Александр Андреевич — преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: alexandrverlin@mail.ru

Верховский Александр Сергеевич — магистрант, Ульяновский государственный университет.
E-mail: codezer020022@gmail.com

Войнова Вероника Сергеевна — студент, Астраханский государственный архитектурно-строительный университет.
E-mail: nikavoino@gmail.com

Воронина Ирина Евгеньевна — д-р техн. наук, доц., профессор кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: irina.voronina@gmail.com

Воронов Владимир Дмитриевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: vova.voronov.2002@bk.ru

Воротилина Анастасия Игоревна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: an_vorotilina@mail.ru

Ворсунов Андрей Александрович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: chuvooooo@gmail.com

Вяткина Виктория Дмитриевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: victoria.vyatkina@mail.ru

Вяткина Ксения Дмитриевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: ksenia_vyatkina.01@bk.ru

Гагарин Юрий Евгеньевич — канд. техн. наук, доц, зав. кафедрой Программного обеспечения ЭВМ, информационных технологий Калужского филиала Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.
E-mail: gagarin_ye@bmstu.ru

Гагарина Светлана Николаевна — канд. экон. наук, доцент кафедры экономики и управления Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского.
E-mail: g_ug@mail.ru

Гамбаров Александр Айварович — магистрант, МИРЭА – Российский технологический университет.
E-mail: alexander.gambarov@mail.ru

Гамилов Ярослав Васильевич — студент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова.
E-mail: gamilov.y@edu.narfu.ru

Гаркавенко Галина Валериевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ Воронежского государственного университета.
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Гладков Сергей Октябринович — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института.
E-mail: sglad51@mail.ru

Глазков Дмитрий Сергеевич — аспирант, Воронежский государственный технический университет.
E-mail: glazckov.mitia@yandex.ru

Глуховский Максим Витальевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: maxim1770@gmail.com

Глушаков Виталий Евгеньевич — инженер, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина».
E-mail: vitalikgl@gmail.com

Глушакова Татьяна Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: glushakovatn11@gmail.com

Голобоков Олег Сергеевич — аспирант, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.
E-mail: 1995g.o.s@gmail.com

Горяйнов Виталий Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры прикладной математики и механики Воронежского государственного технического университета.
E-mail: gorvit77@mail.ru

Гребенкин Сергей Дмитриевич — инженер кафедры строительной механики Воронежского государственного технического университета.
E-mail: serg.grebionkin@yandex.ru

Гриднев Сергей Юрьевич — д-р техн. наук, профессор кафедры строительной механики Воронежского государственного технического университета.
E-mail: gridnev_s_y@rambler.ru

Грошев Илья Александрович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: hdhduudidi@gmail.com

Грязнева Елена Анатольевна — старший преподаватель Липецкого государственного педагогического университета имени П. П. Семенова-Тян-Шанского.
E-mail: gryazneva_ea@mail.ru

Гузев Михаил Александрович — д-р физ.-мат. наук, акад., проф., директор Института прикладной математики ДВО РАН.
E-mail: guzev@iam.dvo.ru

Гусев Павел Юрьевич — канд. техн. наук, доц., и.о заведующего кафедры искусственного интеллекта и цифровых технологий, проректор по цифровому развитию Воронежского государственного технического университета.
E-mail: pgusev@cchgeu.ru

Дегилевич Егор Алексеевич — аспирант, Институт проблем машиноведения Российской академии наук, руководитель направления по инжинирингу и конструированию оборудования ООО «Газпромнефть — Промышленные Инновации».
E-mail: DegilevichEgor@gmail.com

Дедов Дмитрий Васильевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail:dima.dedov2015@yandex.ru

Дежин Виктор Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования Воронежского государственного технического университета.
E-mail: viktor.dezhin@mail.ru

Демидов Николай Андреевич — магистрант, МИРЭА – Российского технологического университета.
E-mail: nick.a.demidov@rambler.ru

Демидова Ирина Александровна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: annelm57@mail.ru

Демидова Ирина Сергеевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: demidova.ira@yandex.ru

Демидова Лилия Анатольевна — д-р тех. наук, проф., профессор кафедры корпоративных информационных систем института информационных технологий МИРЭА – Российского технологического университета.
E-mail: liliya.demidova@rambler.ru

Денисов Никита Викторович — студент 4-го курса кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: faraneys.up@gmail.com

Деста Окбамикаель Гебремескель — преподаватель, Колледж Май-Нефхи (наука), Асмара, Эритрея.
E-mail: desta@amm.vsu.ru

Джабаров Артём Максимович — студент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова.
E-mail: dzhabarov.a@edu.narfu.ru

Долгих Родион Сергеевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: forge0047@gmail.com

Долженков Сергей Сергеевич — аспирант, МИРЭА – Российский технологический университет.

Долимова Гулузро Жасурбек кизи — магистрант, Андижанский государственный университет.
E-mail: dolimovaguluzro@gmail.com

Дробышева Анастасия Вячеславовна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: dav_19_001@mail.ru

Дудаков Сергей Михайлович — д-р физ.-мат. наук, доц., декан факультета прикладной математики и кибернетики Тверского государственного университета, профессор факультета математики Высшей школы экономики.
E-mail: sergeydudakov@yandex.ru

Дудина Юлия Валериевна — канд. техн. наук, доцент института прикладной математики и компьютерных наук, Тульский государственный университет.
E-mail: yulia81p@mail.ru,

Дудич Михаил Олегович — студент, Амурский государственный университет.
E-mail: dudich_m_o@mail.ru

Дудко Ольга Владимировна — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования Института автоматики и процессов управления ДВО РАН.
E-mail: dudko@iacp.dvo.ru

Дятчина Анастасия Владимировна — аспирант Воронежского государственного технического университета.
E-mail: thenochnaya@mail.ru

Евсеев Федор Александрович — аспирант Инженерной школы цифровых технологий Югорского государственного университета.
E-mail: fedor_evseev@rambler.ru

Евсеева Мария Михайловна — студент кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.
E-mail: marya.ews@yandex.ru

Евсеенко Владислав Юрьевич — магистрант, Воронежского государственного университета.
E-mail: vlad.evseenko.2001@mail.ru

Евстрапов Анатолий Александрович — д-р техн. наук, ст. науч. сотр., директор Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург.
E-mail: an_evs@mail.ru

Едемский Владимир Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, доц., заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Новгородского государственного университет им. Ярослава Мудрого.
E-mail: vladimir.edemsky@novsu.ru

Елисеев Андрей Владимирович — канд. техн. наук, доц. кафедры математики Иркутского государственного университета путей сообщения, доц. кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении Иркутского национального исследовательского университета.
E-mail: eavsh@ya.ru

Еремин Алексей Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных систем Санкт-Петербургского государственного университета.
E-mail: a.eremin@spbu.ru

Ермаков Андрей Михайлович — канд. техн. наук, доц., доцент кафедры «Теплотехника и энергетическое машиностроение» Казанского национального исследовательского технического университета им. А. Н. Туполева — КАИ.
E-mail: AMErmakov@kai.ru

Ермакова Татьяна Владимировна — канд. техн. наук, доц., доцент кафедры Прикладной математики и информационных технологий Калининградского государственного технического университета.
E-mail: tatyana.ermakova@klgtu.ru

Ермилов Егор Павлович — студент Самарского национального исследовательского университета им. академика С. П. Королёва.
E-mail: astraZero_0309@outlook.com

Есипов Иван Владимирович — старший преподаватель Российского Технологического Университета – МИРЭА.
E-mail: esipov@mirea.ru

Ефимов Константин Николаевич — старший преподаватель кафедры физической и вычислительной механики механико-математического факультета Томского государственного университета.
E-mail: ekn@mail.tsu.ru

Ефремов Максим Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преп. кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: mefremov@relex.ru

Желавский Михаил Александрович — магистрант кафедры эксплуатации и управления аэрокосмическими системами Государственного университета аэрокосмического приборостроения.
E-mail: zma_114@outlook.com

Желтиков Никита Владимирович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: nik.zheltikov.26@gmail.com

Журавлев Владимир Евгеньевич — аспирант 1-го года обучения кафедры корпоративных информационных систем РТУ МИРЭА.
E-mail: vovcrane@mail.ru

Загородных Евгения Александровна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: evgeniazagorodnykh@mail.ru

Закиров Арслан Фидаилевич — аспирант кафедры «Теплотехника и энергетическое машиностроение» Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева — КАИ.
E-mail: zaf@npp-risal.ru

Замятин Игорь Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры Математических методов исследования операций Воронежского государственного университета.
E-mail: zamyatin@amm.vsu.ru

Затонская Валентина Витальевна — студент кафедры прикладной математики Липецкого государственного технического университета.
E-mail: zatonskaya.valentina@yandex.ru

Захарова Александра Александровна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: SashaZakharova27042004@mail.ru

Землянухин Роман Михайлович — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: zemlyanukhin3751@yandex.ru

Зенкова Наталья Александровна — канд. психол. наук, доц., доцент кафедры математического моделирования и информационных технологий Тамбовского государственного университета имени Г. Р. Державина.
E-mail: natulin@mail.ru

Зимин Владимир Николаевич — д-р техн. наук, проф., ст. науч. сотр., заведующий кафедрой «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н. Э. Баумана.
E-mail: zimin@bmstu.ru

Зубков Евгений Вячеславович — старший преподаватель института физико-математических наук и информационных технологий Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: evgenyzubkov@mail.ru

Иванищева Ольга Ивановна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, факультет ПММ.
E-mail: ivanischeva_oi@mail.ru

Иванников Кирилл Сергеевич — канд. техн. наук, директор научно-производственного комплекса специального программного обеспечения АО НПП «Радар ммс».
E-mail: Ivannikov991@gmail.com.

Ильичева Александра Николаевна — ассистент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования Волгоградского государственного университета.
E-mail: maltseva@volsu.ru

Исаматова Евгения Михайловна — магистрант кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета.
E-mail: evgenia.isamatova@yandex.ru

Истратов Александр Дмитриевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: sanyok.istratov@bk.ru

Ишанов Сергей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор института физико-математических наук и информационных технологий Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: SIshanov@kantiana.ru

Ищенко Евгений Алексеевич — ассистент кафедры радиоэлектронных устройств и систем, Воронежский государственный технический университет.
E-mail: kursk1998@yandex.ru

Кабанцова Лариса Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системного анализа и управления факультета ПММ Воронежского государственного университета.
E-mail: dlju@yandex.ru

Казбанов Виктор Алексеевич — аспирант образовательно-научного кластера «Институт высоких технологий» Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: kazbanov2000@yandex.ru

Калач Андрей Владимирович — д-р хим. наук, проф., начальник кафедры безопасности информации и защиты сведений, составляющих государственную тайну ФКОУ ВО Воронежский институт ФСИН России; профессор кафедры прикладной математики Российского технологического университета МИРЭА.
E-mail: kalach_a@mirea.ru

Калитвин Владимир Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры математики и физики Липецкого государственного педагогического университета.
E-mail: kalitvin@gmail.com

Каменских Анна Александровна — канд. техн. наук, доц. каф. ВММБ Пермский национальный исследовательский политехнический университет.
E-mail: anna_kamenskih@mail.ru

Камышанов Алексей Игоревич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: leshakamyshanovnaruto@gmail.com

Каплиева Наталья Алексеевна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: kaplieva@amm.vsu.ru

Каратаева Полина Михайловна — старший преподаватель Образовательно-научного кластера «Институт высоких технологий» Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: PKarataeva@kantiana.ru

Карлов Борис Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры информатики Тверского государственного университета.
E-mail: bnkarlov@gmail.com

Карташов Андрей Александрович — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: kartashovandrey1337@gmail.com

Каспер Дмитрий Валериевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: jasper13122@gmail.com

Катасонова Галия Рузитовна — канд. техн. наук, доц., доцент кафедры экономики данных Санкт-Петербургского университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.
E-mail: 1366galia@mail.ru

Каширина Ирина Леонидовна — д-р техн. наук, доц., профессор кафедры математических методов исследования операций ЭВМ Воронежского государственного университета, проф. кафедры ТИИ РТУ МИРЭА.
E-mail: kash.irina@mail.ru

Каширская Ирина Ивановна — ст. преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: irkashir@mail.ru

Кашко Василий Васильевич — аспирант кафедры Автоматизированных и вычислительных систем Воронежского государственного технического университета.
E-mail: vasya.kashko@mail.ru

Кащенко Николай Михайлович — д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор института физико-математических наук и информационных технологий Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: kaschtschenko@mail.ru

Кенина Екатерина Сергеевна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: adres.elektronnoj.pochti@gmail.com

Киреева Лилия Андреевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: Lilya_Kireeva01@mail.ru

Кирнос Дмитрий Сергеевич — курсант, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

Кликунова Анна Юрьевна — старший преподаватель кафедры информационных систем и компьютерного моделирования Волгоградского государственного университета.
E-mail: klikunova@volsu.ru

Клименко Константин Сергеевич — аспирант кафедры информационной безопасности Воронежского государственного университета инженерных технологий.
E-mail: kostik449@mail.com

Клименко Юрий Алексеевич — преподаватель кафедры информационных технологий Воронежского института высоких технологий.
E-mail: klm71165@mail.ru

Клюев Илья Алексеевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: ilya-klyuev-2002@mail.ru

Ковалев Алексей Викторович — д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета.
E-mail: kovalev@amm.vsu.ru

Ковтанюк Лариса Валентиновна — д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, главный научный сотрудник Института автоматики и процессов управления ДВО РАН.
E-mail: lk@iacp.dvo.ru

Козлов Виктор Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета.
E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

Козлов Владимир Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой строительной механики Воронежского государственного технического университета.
E-mail: vakozlov@cchgeu.ru

Козлова Анастасия Викторовна — аспирант кафедры строительной механики Воронежского государственного технического университета.
E-mail: svirya_93@mail.ru

Кокоровец Марина Евгеньевна — студент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета.
E-mail: mkokorovetz@gmail.com

Колодежнов Владимир Николаевич — д-р. техн. наук, проф., профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин. Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина».
E-mail: kvn117@mail.ru

Комков Андрей Алексеевич — студент кафедры КБ-2 «Информационно-аналитические системы кибербезопасности» Института кибербезопасности и цифровых технологий МИРЭА – Российского технологического университета.
E-mail: komkov_a@mirea.ru

Комнатный Ростислав Юрьевич — аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета.
E-mail: kru@virovrn.ru

Кондусов Николай Игоревич — преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: kondusovnikolay@yandex.ru

Конева Вера Александровна — аспирант кафедры Высшей и прикладной математики ВШИТАС Северного (Арктического) федерального университета им. М. В. Ломоносова.
E-mail: koneva.v@edu.narfu.ru

Коноваленко Оксана Вячеславовна — ассистент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования Волгоградского государственного университета.
E-mail: oksana_konovalenko@volsu.ru

Корнева Оксана Олеговна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: kornieva03@mail.ru

Коровина Виолетта Сергеевна — магистрант кафедры информационных технологий и прикладной математики Кубанского государственного университета.
E-mail: arcane0103@gmail.com

Корольков Олег Геннадьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: korolkov@amm.vsu.ru

Косенко Иван Михайлович — аспирант кафедры математической физики и информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: kosenko.edu@yandex.ru

Костина Любовь Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системного анализа и управления Воронежского государственного университета.
E-mail: kostinalubov@bk.ru

Котенко Владислав Сергеевич — аспирант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: lunarar@yandex.ru

Кочкин Андрей Сергеевич — аспирант кафедры физики Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова.
E-mail: andre211@mail.ru

Кравцова Маргарита Сергеевна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: kravtsovarita2003@mail.ru

Кривошей Юрий Дмитриевич — студент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета.
E-mail: ps-4-2015@yandex.ru

Крынецкий Борис Алексеевич — аспирант кафедры прикладной математики института информационных технологий РТУ МИРЭА.
E-mail: kryneckij@mirea.ru

Куатхина Дарья Борисовна — студент бакалавриата Высшей школы автоматизации и робототехники Института машиностроения, материалов и транспорта Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.
E-mail: dkuatkhina@mail.ru

Кубрякова Юлия Евгеньевна — студент, Воронежский государственный университет.

Кувшинов Тимофей Алексеевич — магистрант кафедры «Информационные системы и технологии» Ярославского государственного технического университета.
E-mail: timofeykuvshinovcontact@gmail.com

Кудаев Артём Геннадьевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: vkag03@mail.ru

Кудрявцев Олег Евгеньевич — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры исследования операций и высшей математики Южного федерального университета.
E-mail: koe@sfedu.ru

Кузнецов Сергей Федорович — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры высшей математики Воронежского государственного университета инженерных технологий.
E-mail: sfs134@mail.ru

Кузнецова Инна Юрьевна — старший преподаватель кафедры интеллектуальных и многопроцессорных систем Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета.
E-mail: ikuznecova@sfedu.ru

Кузнецова Карина Андреевна — курсант Воронежский институт ФСИН России.
E-mail: karina.kuzneczova.2003@bk.ru

Кузькин Венедикт Михайлович — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института общей физики им А. М. Прохорова РАН.
E-mail: kumiov@yandex.ru

Кузьмин Николай Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования Волгоградского государственного университета.
E-mail: nikolay.kuzmin@volsu.ru

Кулагина Елена Валерьевна — врач-офтальмолог тамбовского филиала Федерального государственного автономного учреждения «Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С.Н. Федорова».
E-mail: irina-kulagin2015@yandex.ru

Курбатов Виталий Геннадьевич — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры системного анализа и управления Воронежского государственного университета.
E-mail: kv51@inbox.ru

Кургалин Сергей Дмитриевич — д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой цифровых технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: kurgalin@bk.ru

Курицкий Михаил Сергеевич — аспирант образовательно-научного кластера «Институт высоких технологий» Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: Mix-Mux@yandex.ru

Курчавов Павел Максимович — выпускник аспирантуры кафедры «Информационно-аналитические системы кибербезопасности» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет».
E-mail: aakvs@yandex.ru

Кутузов Иван Владимирович — ассистент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.
E-mail: kutuzovi@bmstu.ru

Кучеренко Дарья Владимировна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: 21dvk12@mail.ru

Кушев Вадим Олегович — доц., канд. пед. наук, доцент института компьютерных наук и технологий Пермского государственного национального исследовательского университета.
E-mail: vadimk@psu.ru

Ладыкин Николай Владимирович — аспирант кафедры математической физики и информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: ladykin.edu@yandex.ru

Лаптева Анастасия Александровна — канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования Института автоматики и процессов управления ДВО РАН.
E-mail: lanastal@mail.ru

Лапшина Марина Геннадьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и физики Липецкого государственного педагогического университета.
E-mail: marina.lapsh@yandex.ru

Ларин Игорь Александрович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: LarinIgor@gmail.com

Лебедев Данила Васильевич — магистрант, Воронежский государственный лесотехнический университет. E-mail: danilavlebedev@gmail.com

Левина Любовь Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры прикладной математики Липецкого государственного технического университета.
E-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Левченко Анастасия Андреевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: asia.levchenko@gmail.com

Леденев Максим Юрьевич — аспирант, Воронежский государственный университет.
E-mail: maximledenyov@gmail.com

Леденева Татьяна Михайловна — д-р техн. наук, проф., профессор кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Лемина Ольга Сергеевна — преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: mail.olga.shipilova@gmail.com

Лепендин Александр Вячеславович — аспирант, Воронежский государственный университет.
E-mail: lepend1n8691@gmail.com

Литвинов Даниил Алексеевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: daniillitvinov.ru@gmail.com

Личагина Анастасия Дмитриевна — студент Российского Технологического Университета – МИРЭА.
E-mail: lichagina@mirea.ru

Логинова Екатерина Александровна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета.
E-mail: loginova@vsu.ru

Лукин Олег Валерьевич — аспирант кафедры информационных технологий Ульяновского государственного университета.
E-mail: oleg.lukin.v@mail.ru

Любимова Ольга Николаевна — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор Политехнического института и Института математики и компьютерных технологий ДВФУ.
E-mail: lyubimova.on@dvfu.ru

Любопытнов Максим Владиславович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: max-03-02@mail.ru

Ляликова Виктория Геннадиевна — канд. физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный университет.
E-mail: vikalg@yandex.ru

Ляхов Лев Николаевич — д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета, профессор кафедры математики, информатики, физики Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина.
E-mail: levnlya@mail.ru

Лященко Татьяна Владимировна — аспирант кафедры Интеллектуальных и многопроцессорных систем Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета.
E-mail: t.lyashchenko@tmei.ru

Мазуров Леонид Александрович — студент, Воронежский государственный университет.

Максимова Елена Александровна — д-р техн. наук, доц., профессор кафедры КБ-2 «Информационно-аналитические системы кибербезопасности» Института кибербезопасности и цифровых технологий МИРЭА – Российского технологического университета.
E-mail: maksimova@mirea.ru

Максимова Надежда Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, и.о. заведующего кафедрой математического анализа и моделирования Амурского государственного университета.
E-mail: knnamursu@mail.ru

Малыгина Юлия Владимировна — старший преподаватель кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета.
E-mail: ymkahavren@gmail.com

Маркин Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета.
E-mail: markin.nikram@yandex.ru

Марьясин Олег Юрьевич — канд. техн. наук, доц., доцент кафедры кибернетики Ярославского государственного технического университета.
E-mail: maryasin2003@list.ru

Масленников Владимир Владимирович — старший преподаватель кафедры корпоративных информационных систем института информационных технологий МИРЭА – Российского технологического университета.
E-mail: vldmsn@yahoo.com

Масловская Анна Геннадьевна — д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор, лаборатория анализа данных и биоинформатики, Университет Иннополис.
E-mail: a.maslovskaya@innopolis.ru

Матвеева Мария Валерьевна — ст. преп. кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: marie.matveeva@gmail.com

Матвиенко Олег Викторович — д-р физ.-мат. наук, профессор, Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томский государственный университет.
E-mail: matvolegv@mail.ru

Мегралиев Яшар Топуш — д-р математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений, Бакинский государственный университета.
E-mail: yashar_aze@mail.ru

Медведев Сергей Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: s_n_medvedev@mail.ru

Меденников Виктор Иванович — д-р техн. наук, ст. науч. сотр., ведущий научный сотрудник ФИЦ «Информатика и управление» РАН.
E-mail: dommed@mail.ru

Меджидов Руслан Гусенович — преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: ihatedamnmails@gmail.com

Мельников Артем Михайлович — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: m1lord18@mail.ru

Мельников Вадим Митрофанович — старший преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: vmmelnikov@gmail.com

Мельников Максим Олегович — аспирант кафедры математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина.
E-mail: melnikov.maxx@yandex.ru

Меркулов Илья Алексеевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: ilya.merkulovv@gmail.com

Минаева Надежда Витальевна — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета.
E-mail: nminaeva@yandex.ru

Минитаева Алина Мажитовна — канд. техн. наук, доцент кафедры Компьютерные системы и сети Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.
E-mail: minitaeva@bmstu.ru

Миронов Артем Сергеевич — соискатель, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования Иркутского государственного университета путей сообщения.
E-mail: art.s.mironov@mail.ru

Миронов Кирилл Витальевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: kirill16.02mironow@mail.ru

Митин Григорий Владиславович — аспирант кафедры КИС. Российский технологический университет – МИРЭА.
E-mail: grigory.mitin@mail.ru

Мороз Любовь Игоревна — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования сложных физических и биологических систем Амурского государственного университета.
E-mail: lubovep@mail.ru

Морошкин Никита Андреевич — аспирант кафедры корпоративных информационных систем МИРЭА — Российского технологического университета.
E-mail: seed.suboty@gmail.com

Москалев Павел Валентинович — д-р физ.-мат. наук, доц. профессор кафедры прикладной математики Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»; профессор кафедры прикладной математики и механики Воронежского государственного технического университета.
E-mail: moskaleff@mail.ru

Мурашкин Евгений Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, с.н.с., Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.
E-mail: murashkin@ipmnet.ru

Мягков Александр Сергеевич — аспирант кафедры прикладной математики Московского государственного технологического университета «СТАНКИН».
E-mail: almyagkov99@yandex.ru

Нагибин Никита Сергеевич — аспирант, Московский авиационный институт.
E-mail: nikita.nagibin@bk.ru

Некрасов Константин Сергеевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: const.nekrasoff@yandex.ru

Нестеров Сергей Анатольевич — д-р. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Южного математического института – филиала ВНЦ РАН.
E-mail: 1079@list.ru

Никитенко Ульяна Вячеславовна — ст. преподаватель кафедры Программного обеспечения ЭВМ, информационных технологий Калужского филиала Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.
E-mail: nikitenkouv@bmstu.ru

Никитина Алла Валерьевна — д-р техн. наук, профессор кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» Донского государственного технического университета.
E-mail: nikitina.vm@gmail.com

Никифорова Ольга Юрьевна — ст. преподаватель кафедры высшей математики Воронежского государственного университета инженерных технологий.
E-mail: niki22@mail.ru.

Никольникова Полина Алексеевна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: nikolnikova03@mail.ru

Никулин Дмитрий Александрович — студент, Воронежский государственный университет.

Носов Антон Андреевич — аспирант обучения направления информатика и информационные процессы Воронежского государственного университета.
E-mail: nosow1234562@mail.ru

Носов Юрий Олегович — аспирант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет.
E-mail: ura.4132@yandex.ru

Нуне Тигабу Абера — аспирант кафедры высшей математики НИУ МГСУ.
E-mail: tigabera2004@gmail.com

Обидинова Раънохон Ганижон кизи — магистрант, Андижанский государственный университет.
E-mail: odilovaranoxon27@gmail.com

Оганисян Валерия Араратовна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: lera.oganisyan@mail.ru

Окороков Максим Витальевич — аспирант кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.
E-mail: maxik_okorokov@mail.ru

Олейникова Светлана Александровна — д-р. техн. наук, проф., профессор кафедры Автоматизированных и вычислительных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: s.a.oleynikova@gmail.com

Опалихина Ольга Викторовна — канд. техн. наук, доц., доцент кафедры высшей математики и механики Государственного университета аэрокосмического приборостроения.
E-mail: sokosapsa@mail.ru

Осипенко Игорь Николаевич — аспирант кафедры информационных технологий Ульяновского государственного университета.
E-mail: i.osipenko@ritg.ru

Палкина София Александровна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: mail.soffya@mail.ru

Панеш Асхад Асланович — научный сотрудник лаборатории дифференциальных уравнений и алгоритмической оптимизации Адыгейского государственного университета.
E-mail: panesh01@gmail.com

Панов Александр Владимирович — канд. техн. наук, доц. кафедры корпоративных информационных систем Института информационных технологий, МИРЭА – Российский технологический университет.
E-mail: Iks.ital@yandex.ru

Пантелеев Игорь Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования Воронежского государственного технического университета.
E-mail: Panteleevignk@yandex.ru

Панченко Галина Леонидовна — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института автоматики и процессов управления ДВО РАН.
E-mail: panchenko@iacp.dvo.ru

Парамонов Александр Александрович — аспирант кафедры прикладной математики института информационных технологий РТУ МИРЭА.
E-mail paramonov_a@mirea.ru

Паршенкова Юлия Анатольевна — ассистент кафедры КБ-2 «Информационно- аналитические системы кибербезопасности» РТУ МИРЭА.
E-mail: parshenkova@mirea.ru

Пастернак Юрий Геннадьевич — д-р техн. наук, профессор кафедры радиоэлектронных устройств и систем, Воронежский государственный технический университет.
E-mail: pasternakyg@mail.ru

Пеньков Виктор Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета.
E-mail: vbpenkov@mail.ru

Пеньков Никита Алексеевич — д-р техн. наук, доц., доцент кафедры ВУНЦ ВВС «ВВА».
E-mail: myth_np_nikit@mail.ru

Переселков Алексей Сергеевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: aspereselkov@yandex.ru

Переселков Сергей Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой математической физики и информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: pereselkov@yandex.ru

Пестов Константин Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информатики и информационных таможенных технологий Владивостокского филиала Российской таможенной академии.
E-mail: kopestov@yandex.ru

Петренко Ангелина Игоревна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: angelinka_petrenko@bk.ru

Петров Артем Евгеньевич — аспирант 1-го года обучения кафедры математического анализа и прикладной математики Курского государственного университета.
E-mail: petrof.281513@gmail.com

Петрухнова Галина Викторовна — кан. техн. наук, доц., доцент кафедры автоматизированных и вычислительных систем Воронежского государственного технического университета.
E-mail: gvpetruhnova@mail.ru

Печкарев Валентин Алексеевич — адъюнкт кафедры средств воздушного базирования и робототехнических комплексов ВУНЦ ВВС «Военно-воздушной академии им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина».
E-mail: Arturstrogisov6991@gmail.com

Писарцов Михаил Андреевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: moskow23741@gmail.com

Плетнев Арсений Артурович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: pletnyov.arseny@yandex.ru

Подвальный Семен Леонидович — д-р техн. наук, проф., профессор кафедры автоматизированных и вычислительных систем Воронежского государственного технического университета.
E-mail: spodvalny@yandex.ru

Поздняков Даниил Александрович — аспирант 1-го года обучения кафедры математических методов исследования операций Воронежского государственного университета.
E-mail: daniil.pozdnyakov.00@mail.ru

Полеводин Игорь Юрьевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: igor.polevodin@gmail.com

Полянская Ксения Евгеньевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: polyanskaiaksenia@gmail.com

Попов Александр Леонидович — д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.
E-mail: popov@ipmnet.ru

Попов Иван Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры Высшей и прикладной математики Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова.
E-mail: i.popov@narfu.ru

Попов Михаил Иванович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: mihail_semilov@mail.ru

Попова Елена Олеговна — аспирант Института автоматики и процессов управления ДВО РАН.
E-mail: polenao@bk.ru

Постолова Дарья Вадимовна — магистрант, Южный федеральный университет.
E-mail: postolova@sfedu.ru

Преображенский Андрей Петрович — д-р техн. наук, проф., профессор кафедры информационных технологий Воронежского института высоких технологий.
E-mail: app@vivt.ru

Преображенский Юрий Петрович — канд. техн. наук, доцент кафедры информационных технологий Воронежского института высоких технологий.
E-mail: app@vivt.ru

Прибытков Юрий Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры радиофизики Воронежского государственного университета госуниверситет, физический факультет.
E-mail:pribun2001@mail.ru

Принев Мечислав Александрович — аспирант 2-го курса кафедры Вычислительной Математики и Прикладных Информационных Технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: metshislav@rambler.ru

Проняева Софья Михайловна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: proniaewa.sofya2016@yandex.ru

Проскурин Дмитрий Константинович — канд. техн. наук, ректор Воронежского государственного технического университета, Воронежский государственный технический университет.
E-mail: rector@cchgeu.ru

Прохоров Юрий Сергеевич — аспирант, МИРЭА – Российский технологический университет, начальник службы информационных технологий центральной дирекции здравоохранения – филиала ОАО «РЖД».
E-mail: prokh@prokh.ru

Проценко Егор Владимирович — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: protsenko@amm.vsu.com

Пугачев Николай Сергеевич — аспирант 2 курса кафедры математических методов исследования операций Воронежского государственного университета.
E-mail: pugachev1997@bk.ru

Пучкова Мария Алексеевна — аспирант 4-го года обучения кафедры практической и прикладной информатики МИРЭА — Российского технологического университета.
E-mail: puchkova@mirea.ru

Рагозина Виктория Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования Института автоматики и процессов управления ДВО РАН.
E-mail: ragozina@vlc.ru

Радаев Юрий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф., в.н.с., Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.
E-mail: radayev@ipmnet.ru

Расторгуева Анастасия Игоревна — научный сотрудник, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина».
E-mail: airuccee08@rambler.ru

Рахимов Даниэль Рустамович — аспирант 4-го курса кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н. Э. Баумана.
E-mail: danrus1996@gmail.com

Рахимов Ихтиёржон Бахтиёржонович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: rahimov@amm.vsu.ru

Рахимова Римма Ильгизаровна — аспирант 1-го года обучения кафедры высшей математики Ульяновского государственного педагогического университета имени И. Н. Ульянова.
E-mail: rakhimova_ri@mail.ru

Резников Константин Георгиевич — преподаватель кафедры математического обеспечения ЭВМ Воронежского государственного университета.
E-mail: rkg@reznikovk.ru

Релина Маргарита Андреевна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: margaret.relina@gmail.com

Решетов Виктор Олегович — аспирант Воронежского государственного университета.
E-mail: vityareshetov@yandex.ru

Решетов Сергей Владимирович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: sergresh333@mail.ru

Рогозин Роман Евгеньевич — канд. техн. наук, доцент кафедры радиоэлектронных устройств и систем, Воронежский государственный технический университет.
E-mail: reus.kaf@cchgeu.ru

Россихина Лариса Витальевна — д-р техн. наук, доц., профессор кафедры Информационных технологий Академии Управления МВД России.
E-mail: rossihina_lv@mail.ru

Рощупкин Сергей Александрович — канд. физ.-мат. наук, доц., и.о. директора института цифровых технологий и математики Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина.
E-mail: roshupkinsa@mail.ru

Рудаков Дмитрий Алексеевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: dm.a.rudakov@yandex.ru

Русаков Алексей Михайлович — старший преподаватель кафедры КБ-2 «Информационно-аналитические системы кибербезопасности» Российского технологического университета – МИРЭА.
E-mail: rusakov_a@mirea.ru

Рябчиков Андрей Андреевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: asdfgdcx@mail.ru

Сабитов Камиль Басирович — д-р физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник Стерлитамакского филиала Уфимского университета науки и технологий.
E-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Саввина Елена Игоревна — студент 2-го курса кафедры электропривода, автоматики и управления в технических системах Воронежского государственного технического университета.
E-mail: lena.savvina09@mail.ru

Савельева Инга Юрьевна — д-р физ.-мат. наук, доц., заведующая кафедрой прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.
E-mail: inga.savelyeva@bmstu.ru

Савкин Дмитрий Александрович — доцент Образовательно-научного кластера «Институт высоких технологий» Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: DSavkin@kantiana.ru

Салахов Ришат Ризович — канд. техн. наук, доц., директор совместного Германо-российского инжинирингового центра «Машиностроение» Казанского национального исследовательского технического университета им. А. Н. Туполева — КАИ.
E-mail: RRSalakhov@kai.ru

Санина Елизавета Львовна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета.
E-mail: sanina08@mail.ru

Сауляк Андрей Фёдорович — студент 2-го курса кафедры информационных систем и информационной безопасности Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова.
E-mail: saulyak.a.f@edu.narfu.ru

Свиридов Андрей Сергеевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: and.swiridow2014@yandex.ru

Седых Ирина Александровна — д-р техн. наук, доц., профессор кафедры автоматизированных систем управления Липецкого государственного технического университета.
E-mail: sedykh-irina@yandex.ru

Семенов Арсений Владимирович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: Arsemenov51@yandex.ru

Семин Евгений Александрович — канд. экон. наук, доц., доцент кафедры экономического анализ, статистики и прикладной математики Воронежского государственного аграрного университета имени Петра I.
E-mail: 113ghz@mail.ru

Сидельникова Светлана Романовна — студент 4-го курса кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: sidel.sveta@gmail.com

Сидоркин Олег Анатольевич — канд. техн. наук, доц., заместитель начальника кафедры ВУНЦ ВВС «ВВА».
E-mail: major282006@yandex.ru

Сиротин Данила Сергеевич — аспирант 1-го года обучения кафедры информационных систем и компьютерного моделирования Волгоградского государственного университета.
E-mail: d.sirotin@volsu.ru

Скалько Юрий Иванович — канд. физ.-мат. наук, доц., профессор кафедры вычислительной физики Московского физико-технического института.
E-mail: skalko@mail.mipt.ru

Скворцов Роман Витальевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: skromansk@gmail.com

Скиданов Роман Евгеньевич — аспирант 4-го года обучения кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: zzzkvidi4@gmail.com

Скобельцын Сергей Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.
E-mail: skbl@rambler.ru

Слузова Наталья Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова, доцент кафедры методологии научных исследований Северного государственного медицинского университета.
E-mail: n.sluzova@narfu.ru

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент Высшей школы механики и процессов управления Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, мл. науч. сотр. Лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения Российской академии наук.
E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Смирнова Лариса Андреевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: larisa.smirnova.2002@gmail.com

Смоленцев Евгений Васильевич — студент 3-го курса кафедры КБ-9 «Предметно-ориентированные информационные системы» МИРЭА – Российского технологического университета.
E-mail: evsmolentsev@gmail.com

Смоленцева Владислава Владимировна — студент 5-го курса кафедры экономики Российского государственного университета социальных технологий.
E-mail: smoltan@bk.ru

Смоленцева Татьяна Евгеньевна — д-р техн. наук, доц., заведующий кафедры при-кладной математики МИРЭА — Российского технологического университета.
E-mail: smolenceva@mirea

Соколов Андрей Александрович — аспирант 4-го курса, ассистент кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.
E-mail: Zokolof@yandex.ru

Соколова Марина Юрьевна — д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета.
E-mail: socolova-m-u@yandex.ru

Солдатенко Илья Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.
E-mail: soldis@tversu.ru

Сотников Александр Дмитриевич — д-р. техн. наук, проф., профессор кафедры экономики данных Санкт-Петербургского университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.
E-mail: adsotnikov@mail.ru

Спорыхин Анатолий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, профессор., профессор кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета.
E-mail: anatoli.sporyhin@yandex.ru

Ставицкая Екатерина Петровна — старший преподаватель Образовательно-научного кластера «Институт высоких технологий» Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта.
E-mail: ENovikova@kantiana.ru

Старостенков Михаил Дмитриевич — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры физики Алтайского государственного технического университета им. И. И. Ползунова.
E-mail: genphys@mail.ru

Сташ Айдамир Хазретович — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики Адыгейского государственного университета.
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Струков Сергей Юрьевич — аспирант кафедры строительной механики Воронежского государственного технического университета.
E-mail: strukov.sy@mail.ru

Струкова Вероника Ивановна — аспирант 1-го курса каф. ВММБ Пермский национальный исследовательский политехнический университет.
E-mail: veloiv_pstu@mail.ru

Субботин Артем Михайлович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: subbotin-2000@mail.ru

Сумин Александр Иванович — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина».
E-mail: sumin_ai@mail.ru

Сумина Рита Семеновна — канд. техн. наук, доц., доцент кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина».
E-mail: rsumina@mail.ru

Сухорукова Анастасия Владимировна — Воронежский государственный университет
E-mail: zlato_vlaska08@mail.ru

Сухорукова Елена Владимировна — канд. пед. наук, доц., заведующая кафедрой математики, информатики, физики Балашовского института (филиала) Саратовского государственного университета.
E-mail: sewaster@gmail.com

Сырых Александр Сергеевич — аспирант первого года обучения Воронежского государственного университета.
E -mail: zsyryhz@mail.ru

Сыч Екатерина Владимировна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: katrin-s-2000@mail.ru

Таволжанский Александр Валентинович — аспирант кафедры искусственного интеллекта и цифровых технологий Воронежского государственного технического университета.
E-mail: tavolzhanskij.a@yandex.ru

Тарасов Владимир Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц., Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН.
E-mail: vntarasov@dm.komisc.ru

Тарасов Вячеслав Сергеевич — ассистент Российского технологического университета МИРЭА.
E-mail: slavatarasov207@gmail.com

Теников Кирилл Андреевич — аспирант 3-го года обучения кафедры физики Алтайского государственного технического университета им. И. И. Ползунова.
E-mail: gugolpleks@mail.ru

Тетерин Николай Николаевич — ассистент кафедры прикладной математики ИИТ РТУ МИРЭА.
E-mail: nikolai_teterin9@mail.ru

Тимошенко Юрий Константинович — д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет.
E-mail: yutim@phys.vsu.ru

Типикина Фатима Гусейновна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: tipikina2016@yandex.ru

Толмасов Руслан Сергеевич — канд. техн. наук, доц., доцент кафедры КБ-9 «Предметно-ориентированных систем» МИРЭА – Российский технологический университет.
E-mail: tolmasov@mirea.ru

Толстых Полина Евгеньевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: polinka.t21@yandex.ru

Точилин Александр Сергеевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: alexgerggot@gmail.com

Третьяков Дмитрий Алексеевич — канд. техн. наук, доцент Высшей школы автоматизации и робототехники Института машиностроения, материалов и транспорта Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.
E-mail: dmitry.tretyakov93@yandex.ru

Тростин Василий Львович — канд. хим. наук, доц., доцент кафедры математических и естественно-научных дисциплин Института пищевых технологий и дизайна — филиала Государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный инженерно-экономический университет».
E-mail: kaf.esnd@yandex.ru

Трофименко Елена Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ Воронежского государственного университета.
E-mail: evtrof@ gmail.com

Тукмаков Дмитрий Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, проф., научный сотрудник лаборатории механики сплошных сред ИММ КазНЦ РАН.

Украинский Алексей Сергеевич — студент, Воронежский государственный университет.

Усикова Валерия Алексеевна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: lerausikova@gmail.com

Усков Даниил Геннадьевич — аспирант первого года обучения Воронежского государственного университета.
E-mail: uskov.dan@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования Воронежского государственного технического университета.
E-mail: nat-uskova@mail.ru

Ускова Ольга Федоровна — канд. техн. наук, доц., профессор, Воронежский государственный университет.
E-mail: sunny.uskova@mail.ru

Утенкова Мария Александровна — студент 4-го курса кафедры КБ-2 «Информационно-аналитические системы кибербезопасности» Института кибербезопасности и цифровых технологий МИРЭА — Российского технологического университета.
E-mail: utenkova@mirea.ru

Ухина Ксения Сергеевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: ksenia.kanishewa@yandex.ru.

Ухлова Вера Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры математических методов исследования факультета прикладной математики, информатики и механики операций Воронежского государственного университета.
E-mail: Ukhlova@amm.vsu.ru

Ушакова Анастасия Константиновна — аспирант кафедры систем управления и информационных технологий в строительстве, Воронежский государственный технический университет.
E-mail: ushakova_nastena@mail.ru

Фабрикантов Олег Львович — д-р мед. наук, проф., директор тамбовского филиала Федерального государственного автономного учреждения «Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С. Н. Федорова».
E-mail: fabr-mntk@yandex.ru

Федоров Сергей Михайлович — канд. техн. наук, доцент кафедры радиоэлектронных устройств и систем, Воронежский государственный технический университет.
E-mail: zar36@yandex.ru

Федотов Егор Дмитриевич — мл. науч. сотр. Якутского отделения регионального научно образовательного центра «Дальневосточный центр математических исследований».
E-mail: egorfedotov2011@gmail.com

Филатова Александра Вячеславовна — магистрант, Тульский государственный университет, программист ООО «Фидесис».
E-mail: filatovasasha-1@mail.ru

Филонов Дмитрий Владимирович — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: dvfilonova@mail.ru

Фирсанова Наталия Сергеевна — аспирант ММФ Томского государственного университета.
E-mail: firnataliya@yandex.ru

Фомченкова Мария Александровна — магистрант, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва.
E-mail: fomchenkova.ma@ssau.ru

Фролов Александр Леонидович — канд. физ.-мат. наук, доц., профессор кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина».
E-mail: al-frol@yandex.ru

Фролова Оксана Александровна — канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: oksanafrola@yandex.ru

Хади Ая Алнур — аспирантка 1-го года кафедры Сопротивления материалов НИУ МГСУ.
E-mail: ayaalnourhadi775@hotmail.com

Хакимова Зиля Наильевна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры математики Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского.
E-mail: vka@mil.ru

Харитонов Александр Евгеньевич — аспирант 1-го года обучения кафедры автоматизированных систем управления Липецкого государственного технического университета.
E-mail: airbbox@gmail.com

Хафизов Ильдар Равилевич — аспирант кафедры «Теплотехника и энергетическое машиностроение» Казанского национального исследовательского технического университета им. А. Н. Туполева — КАИ.
E-mail: IRKhafizov@kai.ru

Хворостинина Елизавета Павловна — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: hvorostininael@gmail.com

Холодова Алина Евгеньевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: skyalien1216@gmail.com

Холоша Евгений Александрович — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: kholosha@amm.vsu.ru

Хоперсков Александр Валентинович — д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой информационных систем и компьютерного моделирования Волгоградского государственного университета.
E-mail: khoperskov@volsu.ru

Худобин Александр Дмитриевич — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: 2001kad@mail.ru

Худяков Артём Александрович — аспирант 1-го года обучения кафедры математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета.
E-mail: 9hardenedhunter@gmail.com

Челюбеев Дмитрий Анатольевич — ведущий инженер Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.

Черемискин Александр Валерьевич — аспирант 1-го года обучения кафедры математических методов исследования операций Воронежского государственного университета.
E-mail: alex.cher.work@gmail.com

Черкасов Илья Сергеевич — аспирант ММФ Томского государственного университета.
E-mail: ilyacherkas@mail.ru

Черникова Анастасия Сергеевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.
E-mail: chernikova-an@mail.ru

Чернышов Александр Данилович — д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры высшей математики Воронежского государственного университета инженерных технологий.
E-mail: chernyshovad@mail.ru

Чернышов Максим Карнельевич — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ Воронежского государственного университета.
E-mail: mkch69@gmail.com

Чернядьева Наталья Алексеевна — учитель математики МБОУ СОШ №19, г. Белово, Кемеровская область.
E-mail: Natalya_chernydeva@mail.ru

Черняев Дмитрий Евгеньевич — аспирант, Воронежский государственный университет.
E-mail: dcherhtc@gmail.com.

Чикина Ангелина Андреевна — врач-офтальмолог тамбовского филиала Федерального государственного автономного учреждения «Национальный медицинский исследовательский центр «Межотраслевой научно-технический комплекс «Микрохирургия глаза» имени академика С. Н. Федорова».
E-mail: angelinavasil4enko@yandex.ru

Чистяков Александр Евгеньевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» Донского государственного технического университета.
E-mail: cheese_05@mail.ru

Чурсин Виктор Юрьевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: 4pupil@mail.ru

Шабунин Иван Юрьевич — студент 4-го курса кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета.
E-mail: IvanShabunin379@yuandex.ru

Шайхутдинов Артур Анисович — ассистент кафедры Компьютерные системы и сети Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Руководитель проекта ООО «Феникс».
E-mail: artur@shaikhutdinov.ru

Шаляпин Павел Владимирович — сотрудник Оперативно-поискового бюро МВД России.
E-mail: pavelshalaypin@mail.ru

Шарипова Сорахон Тохиржон кизи — студент Андижанский государственный университет.
E-mail: sh.sorakhon0809@gmail.com.

Шаров Иван Михайлович — студент 4 курса кафедры КБ-9 «Предметно-ориентированных систем» МИРЭА — Российский технологический университет.
E-mail: sharov@mirea.ru

Шашкин Александр Иванович — д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета.
E-mail: shashkin@amm.vsu.ru

Швецов Михаил Юрьевич — студент, Воронежский государственный университет.
E-mail: mihail2001sh@mail.ru

Шебуняева Снежана Андреевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: sshebunyaeva2000@mail.ru

Шевкун Иван Александрович — аспирант, мл. науч. сотр., лаборатория математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет.
E-mail: smallwood13@gmail.com

Шестаков Кирилл Николаевич — магистрант, Физико-математический институт Пермского государственного национального исследовательского университета.
E-mail: zeldaone@mail.ru

Шишов Максим Михайлович — аспирант, Воронежский государственный университет.
E-mail: m.m.shishov@mail.ru

Шиян Валерий Игоревич — старший преподаватель кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета.
E-mail: shiyanvi@yandex.ru

Шкерин Алексей Леонидович — ассистент кафедры прикладной математикиРоссийского технологического университета МИРЭА.
E-mail: shkerin@mirea.com

Шмелев Михаил Александрович — кафедра цифровых технологий Воронежского государственного университета.
E-mail: shmelev1996@mail.ru

Шоть Антон Владимирович — аспирант, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта.
E-mail: AVShot@stud.kantiana.ru

Шурупова Ирина Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доц., старший преподаватель кафедры математики военно-воздушной академии.
E-mail: i_shur@mail.ru

Щеглова Юлия Дмитриевна — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета.
E-mail: scheglova@gmail.com

Щербатюк Александр Федорович — д-р тех. наук, чл.-корр. РАН, главный научный сотрудник Института автоматики и процессов управления.
E-mail: alex-scherba@yandex.ru

Щетинина Полина Сергеевна — магистрант, Воронежский государственный университет.
E-mail: sh.polli2000@yandex.ru

Эгамов Альберт Исмаилович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобаческого.
E-mail: albert810@yandex.ru

Экерт Никита Андреевич — аспирант 4-го года обучения кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета. Научный руководитель Воронина Ирина Евгеньевна.
E-mail: ekertn7@gmail.com

Яковлев Александр Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета.
E-mail: yakovlev@amm.vsu.ru

Содержание

ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В НАУКЕ, ТЕХНИКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

Абдугаппарова Ш. Н. Производство валичного оборудования для использования в лабораториях элитных семеноводческих хозяйств 4

Борзунов С. В., Кургалин С. Д. Развитие направления квантовых вычислений на кафедре цифровых технологий Воронежского государственного университета 7

Сиротин Д. С., Кузьмин Н. М., Хоперсков А. В. Анализ эффективности параллельной реализации метода TreeCode для вычислительных систем с общей памятью 12

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Gebreslasie H. F. The dirichlet problem for a certain pseudo-differential equation 17

Medvedev A. V., Kuzenkov O. A. Modeling language competition taking into account the variability of language prestige 21

Абдуолимова Г. М., Шарипова С. Т., Обидинова Р. Г., Долимова Г. Ж. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков 31

Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Костина Л. Н., Ускова Н. Б. Операторы монодромии в исследовании дифференциальных операторов с неограниченным периодическим операторным коэффициентом 34

Белоусова Е. П. Об одной модели с малым параметром 38

Бердников А. С., Буляница А. Л., Евстрапов А. А. Численно-аналитический алгоритм решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом коллокаций на примере уравнения Матье 42

Богданова С. Б., Гладков С. О. К вопросу об уравнении эволюты кривой 50

Булатов Ю. Н. Четное, нечетное и полное J-преобразования Бесселя 56

Буркин И. М. Об одной экстремально мультистабильной динамической системе с континуумом сосуществующих скрытых хаотических аттракторов 61

Верёвкина Д. С. Математическая модель лейкоза. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом сеток 66

Грязнева Е. А. Фундаментальное решение k-полигармонического оператора Киприянова при условии нечетной размерности трансцендентного псевдоевклидова пространства ... 77

Евсеев Ф. А. О некоторых квазигидродинамических уравнениях 80

Еремин А. С. Функционально-непрерывные методы для уравнений второго порядка 86

Захарова А. А. Экспоненциальный метод коллокации Гегенбауэра для решения МГД-уравнения Фолкнера — Скана 93

Калитвин В. А., Лапшина М. Г. Интегрирование преобразования Радона — Киприянова по всем плоскостям, проходящим через данную точку 100

Курбатов В. Г. Ограниченные решения линейной динамической системы 104

Литвинов Д. А., Кабанцова Л. Ю. Стохастическая модель боевых действий Ланчестера 106

Логинова Е. А., Черникова А. С. Асимптотические представления тепловых потоков неоднородной задачи теплопроводности на плоскости с трещиной 110

Ляхов Л. Н., Рощупкин С. А., Санина Е. Л. Средние функции, порожденные обобщенным $\mathbb{T}$-сдвигом 114
Мегралиев Яшар, Гусейнова Афаг Нелинейные обратные задачи для псевдогиперболического уравнения четвёртого порядка 120
Писарцов М. А. Компьютерная программа для решения систем дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге — Кутты 124
Плетнев А. А. Решение задачи теплопроводности в плоскости с разрезом по лучу 129
Сабитов К. Б. Определение напряженно-деформированного состояния упругопластического вращающегося диска под действием температурного поля 132
Сташ А. Х., Панеш А. А. Об управлении существенными счетными спектрами показателей колеблемости и блуждаемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем 136
Федотов Е. Д. Априорные оценки задачи Коши для однородной системы уравнений высокого порядка в частных производных с дробной производной Герасимова — Капуто по времени 140
Хакимова З. Н. Интегрирование мультипликативных классов обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью дискретных инвариантов 146
Чурсин В. Ю. О явной формуле для решения одной краевой задачи с интегральным краевым условием 151

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ, РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ

Аббуд Халиль Автоматизированное выявление рака молочной железы с помощью нейронной сети 155
Азарнова Т. В., Позднякoв Д. А. Применение методов машинного обучения в технологиях виртуальной реальности 160
Арзамасцев А. А., Фабрикантов О. Л., Зенкова Н. А., Кулагина Е. В. Мультимодельный подход к разработке системы искусственного интеллекта для классификации снимков оптической когерентной томографии 165
Арзамасцев А. А., Фабрикантов О. Л., Зенкова Н. А., Чикина А. А. Модели искусственного интеллекта для предоперационного расчета интраокулярных линз 173
Бирюкова Е. В., Воронина И. Е. Анализ тональности для моделирования нарратива: русскоязычный текст и SentiArt 180
Василевский Д. А., Каширина И. Л. Обзор методов применения искусственного интеллекта в траекторной обработке радиолокационной информации 183
Демидова И. С. Сравниетльный анализ моделей машинного обучения для выявления ценообразующих факторов стоимости ноутбука 191
Демидова Л. А., Журавлев В. Е. Оптимизация кубических сплайнов для активации скрытого слоя машин экстремального обучения при решении задачи классификации текстов 197
Дудич М. О., Максимова Н. Н. Чат-бот на основе нейронной сети для определения заболевания легких 204
Есипов И. В., Личагина А. Д., Шкерин А. Л. Исследование качества воды в разных районах москвы с применением искусственного интеллекта 210

Замятин И. В., Некрасов К. С. Динамическая оптимизация скорости миграции данных в многопараметрической среде с использованием методов машинного обучения 217
Камышанов А. И. Применение Tensorflow Framework в системе интеллектуального поиска в сети интернет с использованием ИИ..... 224
Карташов А. А. Применение алгоритмов машинного обучения в системах защиты от спама 228
Кашко В. В., Олейникова С. А. Влияние архитектуры глубокой нейронной сети на функционирование алгоритма градиента стратегии исполнитель-критик A2C 233
Кенина Е. С. Сравнительный анализ методов машинного обучения в задаче определения фейковых новостей 239
Клименко К. С. Использование свёрточной нейронной сети для сегментации спутниковых снимков лесных массивов..... 245
Кувшинов Т. А., Марьясин О. Ю. Классификация сердечных аритмий с использованием сверточной нейронной сети..... 249
Ларин И. А. Детекция опор линий электропередач: нейросетевой подход..... 257
Лепендин А. В., Азарнова Т. В. Прогнозирование в условиях неполных данных..... 262
Миронов К. В. Применение нейронной сети для повышения эффективности использования средств радиоэлектронной борьбы: методы и способы ее обучения 269
Никольникова П. А. Искусственный интеллект в мобильных приложениях: новые горизонты..... 275
Пеньков Н. А., Сидоркин О. А., Борисов С. В., Али И., Кирнос Д. С. Анализ стандартных протоколов для диагностики специальных транспортных средств на основе технологии PASS-THRU и CAN-стандарта промышленной сети..... 283
Петров А. Е. Применение нейронных сетей для улучшения качества передачи данных по цифровым каналам связи..... 287
Расторгуева А. И. Развитие технологии дополненной реальности посредством интеграции с нейронными сетями 292
Решетов В. О., Арзамасцев А. А. Графовые нейронные сети, их особенности и возможные области применения 295
Решетов С. В. Сравнительный анализ моделей машинного обучения для выявления ценообразующих факторов стоимости автомобиля..... 302
Рябчиков А. А. Автоматизация программирования с использованием методов искусственного интеллекта 308
Солдатенко И. С. Модели возможностно-вероятностной оптимизации с ограничениями по вероятности и возможности при использовании слабейшей треугольной нормы 312
Субботин А. М., Каширина И. Л. Исследование и разработка методов повышения точности семантической сегментации на основе калибровки вероятностных оценок глубоких нейронных сетей 320
Тетерин Н. Н., Смоленцева В. В. Концептуальный подход классификации деструктивного поведения с применением технологий искусственного интеллекта..... 326
Типикина Ф. Г. Аналитика рынка труда и занятости на основе применения методов искусственного интеллекта 330
Худобин А. Д., Воронина И. Е. Подход к решению задачи классификации слухов в интернет-новостях 334

Худяков А. А., Арзамасцев А. А. Системы искусственного интеллекта для анализа изображений в области офтальмологии 341
Черемискин А. В., Каширина И. Л. Алгоритм постобработки для повышения точности сегментации мультифазных КТ-изображений 345
Черняев Д. Е., Ворсунов А. А., Лебедев Д. В. Использование нейросети Whisper для распознавания медицинской терминологии и улучшения ранней медицинской диагностики 350
Шиян В. И., Кокоровец М. Е., Кривошей Ю. Д. Сравнительный анализ архитектур нейронных сетей для классификации новостных статей 359
Экерт Н. А., Воронина И. Е. Использование больших языковых моделей для оценки отзывов на программные продукты 365
Яковлев А. Ю., Релина М. А., Комнатный Р. Ю. О регрессионном моделировании в задаче об управлении плоским четырехзвенном механизмом с приводом 373

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Аллилуева А. В. Идентификация геометрических элементов растрового изображения с использованием преобразования Хафа 381
Ананьев А. В., Иванников К. С., Печкарев В. А. Модель и методика выбора оптимального маршрута в сетевых структурах на основе теории рисков 385
Арикова К. Г. Формализация злоумышленных воздействий на объект защиты 392
Артемов М. А., Бухтояров А. С., Верлин А. А., Кондусов Н. И., Лемина О. С. Математическое моделирование упругопластического состояния диска. Условие Ишлинского 396
Атаян А. М., Белова Ю. В., Чистяков А. Е. Параллельные алгоритмы для численного моделирования динамики популяций фитопланктона в морских экосистемах с учётом кислородного режима 404
Баранников И. А., Ищенко Е. А., Пастернак Ю. Г., Проскурин Д. К., Фёдоров С. М. Линза полусферической формы из метаматериала для построения двух поляризационных многолучевых антенн 410
Баранников И. А., Ищенко Е. А., Пастернак Ю. Г., Проскурин Д. К., Фёдоров С. М. Метаматериальная линза Люнеберга цилиндрической формы для создания многолучевых антенн 415
Баранников И. А., Ищенко Е. А., Пастернак Ю. Г., Проскурин Д. К., Фёдоров С. М. Многослойная линза для построения многолучевых антенн с возможностью сканирования по двум координатам 421
Башкарев В. А., Переселков С. А., Кузькин В. М., Переселков А. С. Анализ частотной зависимости структуры 2D-голограмм источника звука в гидроакустическом волноводе 426
Бексаев И. А. Построение математической модели перевернутого маятника на подвижной основе 433
Богданова А. П. Анализ работы опорной части с шаровым сегментом при реализации вязкоупругой задачи 440
Бондаренко Д. В., Никитина А. В., Белова Ю. В. Исследование динамики промысловой рыбы-детритофага в акватории Азовского моря с использованием моделей взаимной регуляции 446

Буховец А. Г., Бирючинская Т. Я., Семин Е. А. Фазовые состояния в системах фрактальных структур 452
Верховский А. С. Построение и анализ математических моделей электрической цепи в пространстве состояний 456
Гагарин Ю. Е., Никитенко У. В., Гагарина С. Н. Учет погрешности информации в задаче о максимальном потоке 465
Глазков Д. С., Гребенкин С. Д., Козлов В. А. Компьютерное моделирование здания с комбинированным вантовым покрытием при расчете на устойчивость к прогрессирующему разрушению 468
Глуховский М. В. Система поддержки принятия решений для определения демографической ситуации в России 476
Глушакова Т. Н., Меркулов И. А. Зависимость коэффициентов кубического сплайна от величины шага при экстраполяции 483
Глушакова Т. Н., Меркулов И. А. Сравнение результатов прогнозирования статистических данных разными методами 487
Гусев П. Ю., Таволжанский А. В. Исследование поведения качества прогнозирования временных рядов в условиях различных способов замены недостающих значений 493
Дежин В. В. Исследование внутреннего трения при изгибных колебаниях винтовой дислокации, взаимодействующей с точечными дефектами, в диссипативном кристалле 497
Демидова Л. А., Масленников В. В. Матрица плотности на базе операторов Гейзенберга — Вейля и Паули как способ преобразования состояний многоуровневых квантовых систем 504
Деста О. Г., Быкова М. И., Тимошенко Ю. К. Численный анализ влияния размера нанокристалла серебра на его пространственную структуру в рамках модели Саттона — Чена 509
Дятчина А. В., Олейникова С. А. Моделирование выполнения стохастического проекта в условиях коррекции решения его отдельных задач 512
Ермаков А. М., Салахов Р. Р., Хафизов И. Р., Закиров А. Ф. Численное моделирование стратегий утилизации теплоты воздуха выводимого из салона электробуса 519
Ермилов Е. П. Анализ дефекта трещины с применением атомистического и континуального подходов при помощи метода молекулярной динамики 525
Иванищева О. И., Левченко А. А. Исследование температурного поля неоднородного тела в гармоническом потоке тепла 530
Ильичева А. Н., Кликунова А. Ю., Хоперсков А. В. Метод построения цифровых моделей рельефа пойм крупных рек 535
Истратов А. Д. Пентестинг информационной системы 540
Ишанов С. А., Савкин Д. А., Каратаева П. М., Шоть А. В. Ставицкая Е. П. Численное исследование нестационарных процессов и структур в среднеширотной ионосфере в различных гелиогеофизических условиях 544
Калач А. В., Парамонов А. А., Шкерин А. Л., Смоленцева Т. Е., Кузнецова К. А. Разработка цифрового двойника тропического циклона по упрощённой модели 552
Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Зубков Е. В., Ставицкая Е. П. Численное исследование неустойчивости дрейфового типа в области верхнего фронта экваториальных плазменных пузырей 556

Кликунова А. Ю., Коноваленко О .В. Интеграция гидродинамического и нейросетевого моделирования для восстановления параметров гидравлического сопротивления потоку воды 562
Конева В. А. Локальные параболические базисные сплайны 567
Коровина В. С. Моделирование онтологий для анализа потребностей работодателей 570
Котенко В. С. Использование коллективного интеллекта в интерактивных генетических алгоритмах 575
Кудаев А. Г., Чернышов М. К. Оценка сложности работы различных алгоритмов решения нонограмм 579
Кудрявцев О. Е., Постолова Д. В. Вычисление цен барьерных опционов с помощью нейросетей 583
Кузнецова И. Ю., Чистяков А. Е. Регуляризованная модель гидродинамики для моделирования процесса транспорта взвеси в мелководном водоеме 589
Кузькин В. М., Переселков С. А., Косенко И. М., Переселков А. С. Моделирование 2D-голограмм высокочастотного источника на векторно-скалярных каналах приемника 595
Миронов А. С., Елисеев А. В. Управление взаимодействием элементов вибрационных технологических систем с учетом структуры силовых возмущений 604
Мороз Л. И., Масловская А. Г. Численный алгоритм для реализации модели переключения поляризации в тонких сегнетоэлектрических пленках: дробно-дифференциальный подход 612
Морошкин Н. А. Применение конкурентого коэволюционного алгоритма на основе символьной регрессии для оптимизации структуры регулярного выражения 161
Москалев П. В., Мягков А. С. Билогистическая аппроксимация функций мощности перколяционных кластеров на ограниченных неравномерно взвешенных квадратных решетках с (1, 0)-окрестностью 620
Никитина А. В., Лященко Т. В. Численная реализация на мвс математической модели гидробиологических процессов для исследования актуального сценария внезапной депрессии активно распространяющихся видов планктона и промысловых рыб при попадании в мелководный водоем загрязняющих веществ 626
Носов Ю. О. Описание математических моделей материалов применяемых в мостостроительной деятельности на диапазоне рабочих температур 633
Нуне Тигабу Абера Оценка изменчивости модуля деформации грунта на основе данных СРТ 639
Опалихина О. В., Желавский М. А. Особенности расчета на прочность и жесткость фланцевых соединений высоковакуумных систем 644
Осипенко И. Н., Лукин О. В. Применение модифицированного фильтра Калмана для устранения автокоррелированного шума в изображениях перед обучением автоэнкодеров 653
Палкина С. А., Бондаренко Ю. В. Формирование модели оценки кандидатов для процедуры подбора персонала в IT-проект 659
Пантелеев И. Н. Анализ образования и горения газовых облаков в атмосфере при аварийных выбросах 663
Парамонов А. А., Калач А. В., Кузнецова К. А. Применение алгоритма обработки анализа видеоряда динамики тропического циклона 666

Переселков С. А., Кузькин В. М., Косенко И. М., Переселков А. С. Численный эксперимент по разрешению сигналов в нерегулярном океаническом волноводе голографическим методом 673

Попов М. И. Сравнение неявных конечно-разностных схем для неоднородного бигармонического уравнения в задаче об изгибе прямоугольной пластины, защемленной по контуру 680

Пугачев Н. С. Реализация алгоритма одновременной локализации и картографии с использованием среды симуляции Gazebo для робота ROIN RTS 100 685

Рахимова Р. И. Построение и анализ дискретной стохастической модели системы управления электрокардиостимулятором 691

Савельева И. Ю., Кутузов И. В. Двухпараметрическая нелокальная модель теплопроводности 699

Савельева И. Ю., Соколов А. А., Евсеева М. М. Стационарная теплопроводность в составном кольцевом слое с учетом эффекта пространственной нелокальности 705

Седых И. А., Харитонов А. Е. Анализ основных цветовых моделей при шумоподавлении изображения 712

Семенов А. В., Леденева Т. М. Экспериментальное сравнение характеристик алгоритмов поиска кратчайшего пути 719

Скалько Ю. И., Гриднев С. Ю., Минаева Н. В. Численные алгоритмы решения начально-краевых задач для системы уравнений упругой динамики на разрывных базисных функциях..... 724

Слузова Н. А. Устойчивость решений двумерной модели роста биомассы водорослей..... 731

Смирнова Л. А. Рекомендательная система для продажи жилого помещения..... 737

Сыроватка В. Н. Модель реального составного опциона при многостадийных ниокр с барьерами эффективности 745

Точилин А. С., Петрухнова Г. В., Подвальный С. Л. Булевы операции над мешами 750

Усикова В. А. Приблизительные решения для инфекции вируса гепатита В во время противовирусной терапии с анализом устойчивости и применением метода гомотопического анализа Ляо 755

Филонов Д. В. Формальная верификации криптографических протоколов 762

Фомченкова М. А. Анизотропные линейно упругие материалы: теоретические и конечно-элементные решения механики разрушения анизотропных сред..... 766

Швецов М. Ю. Выявление беспилотных летательных аппаратов с использованием радарных систем, основанных на программно-определяемом радио..... 771

Шевкун И. А., Масловская А. Г. Вариация режимов роста бактериальных колоний в реакционно-диффузионной модели: учет стохастических процессов и эффекта запаздывания..... 778

Шмелев М. А. Пределы теории матчинга на основе нечетких предпочтений 783

Щербатюк А. Ф., Кузькин В. М., Переселков С. А., Ладыкин Н. В. Результаты численного эксперимента по навигации группы специализированных подводных аппаратов с лидером 788

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ, ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Акулова А. Е. Использование графовых баз данных для анализа информационной системы ... 796

Александрова Е. Д., Каширская И. И. Проектирование веб-приложения для подготовки к ЕГЭ по информатике ... 804

Ануфриев Д. Д., Мельников В. М. Методы поиска подвижных объектов: анализ и реализация ... 808

Богушов В. Ю., Воронов В. Д., Каспер Д. В., Скворцов Р. В. Приложение для моделирования биосистем как инструмент для исследования поведения экосистем ... 815

Бузуверов А. Д. Сравнительный анализ архитектурных подходов к объектно-реляционному отображению в C++ 14 ... 820

Бутузова Д. О., Трофименко Е. В. Сравнение производительности библиотек AR Foundation и Vuforia ... 825

Войнова В. С. Анализ цифровых инструментов для проектирования систем водоснабжения ... 830

Воротилина А. И., Каширина И. Л. Разработка мобильного приложения для поддержки принятия клинических решений при эндоскопическом гемостазе язвенных гастродуоденальных кровотечений ... 834

Гамбаров А. А., Демидов Н. А., Андрианова Е. Г. Сравнительный анализ данных об активностях студентов в разных циклах обучения программированию на основе инструментов кластерного анализа ... 839

Гамилов Я. В., Попов И. Н. Вычисление коэффициентов биномиального разложения многочлена в СКМ Maple ... 846

Грошев И. А. Эффективная маршрутизация и управление метаданными в системах хранения на базе Telegram ... 851

Денисов Н. В., Каплиева Н. А. BLoC и Cubit во Flutter: управление состоянием приложения 855

Джабаров А. М., Сауляк А. Ф., Попов И. Н. Многочленное шифрование ... 861

Евсеенко В. Ю., Трофименко Е. В. Моделирование субъективного игрового опыта при построении лабиринтов в компьютерных играх ... 867

Желтиков Н. В. Основы, принципы и особенности Liquibase ... 872

Загородных Е. А. Разработка приложения «Расписание ВГУ». Реализация пользовательских функций и интерфейса ... 878

Клюев И. А., Ефремов М. С. Анализ выбора опорного элемента для быстрой сортировки списка ... 883

Корнева О. О., Матвеева М. В. Проектирование Web-приложения для представления данных спортсменов ... 887

Кравцова М. С. Разработка серверной части видеохостинга на языке Java ... 893

Крынецкий Б. А., Калач А. В., Парамонов А. А. Преобразование данных специального вида, полученных из графических изображений опасных природных явлений ... 901

Лаптева А. А., Дудко О. В., Рагозина В. Е. Разработка алгоритма и программного комплекса для моделирования одномерной динамики деформирования разномодульных сред ... 906

Любопытнов М. В., Ефремов М. С. Разработка нового подхода инструментирования кода, основанного на графе зависимостей данных 912
Мельников А. М., Воронина И. Е. Веб-сервис для информационного мониторинга криминогенной обстановки 917
Полеводин И. Ю., Воронина И. Е. Адаптация применения конкурентности в задаче реинжиниринга десктопного приложения в веб-приложение 922
Полянская К. Е., Воронина И. Е. Анализ методов оценки для задачи определения стоимости разработанного программного обеспечения 928
Проняева С. М. Проектирование веб-приложения для изучения технического английского языка 936
Проценко Е. В., Воронина И. Е. Программируемый аппаратный микшер громкости с использованием esp32 и .net 942
Рахимов И. Б., Корольков О. Г. Анализ задачи интеграции двумерных векторных объектов в трёхмерную сцену 946
Рудаков Д. А. Применение Token Handler Pattern для обеспечения безопасности и управления токенами в SPA 951
Русаков А. М. Прогнозирование рисков инфраструктурного деструктивизма на основе анализа журналов событий облачной платформы Openstack 955
Сидельникова С. Р., Каплиева Н. А. Паттерны обработки ошибок межсервисной коммуникации в микросервисных архитектурах 961
Скиданов Р. Е., Воронина И. Е. Автоматизация оценки трудозатрат при разработке программного обеспечения 968
Тукмаков Д. А. Математическое моделирование осаждения дисперсной фазы двухфазной среды 972
Украинский А. С. Создание веб-приложения «Мессенджер» на клиент-серверной архитектуре 977
Ухина К. С. Протокол RPC и его реализации как средства обеспечения удаленного взаимодействия узлов в сети 988
Хворостинина Е. П., Матвеева М. В. Проектирование веб-приложения для химчистки 992
Холодова А. Е., Трофименко Е. В. Основные возможности Unity DOTS на прикладном примере 998
Шабунин И. Ю., Каплиева Н. А. Обзор и сравнение основных подходов к построению рекомендательных систем 1004
Шаров И. М., Толмасов Р. С. Унификация доступа к данным. Исследование методов объединения разнородных баз данных 1012
Шебуняева С. А. Сервис-ориентированная архитектура (SOA). Принципы и применение . 1015

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Андрюкова В. Ю., Тарасов В. Н. Пространственная устойчивость колец, подкрепленных нитями одностороннего действия 1021
Артемов М. А., Верлин А. А., Меджидов Р. Г. О вариантах решения задачи о вращающемся диске 1026
Афанасьев А. А., Сухорукова А. В. Определение напряженно-деформированного состояния упругопластического вращающегося диска под действием температурного поля 1033

Богачева В. Э. Нормальный отрыв упругопластического тонкого адгезионного слоя композита 1039
Боницкая О. В., Бомбина А. Д. Нахождение деформационного состояния сжатого изотропного шара 1046
Голобоков О. С., Попов А. Л. Итерационная процедура уточнения решения задачи об осевом сжатии цилиндра с закреплёнными торцами 1051
Дегилевич Е. А., Смирнов А. С. Динамический анализ физических конечномерных моделей балочного маятника 1056
Дробышева А. В., Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д. Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью в смешанных рыхлых горных породах 1063
Дудко О. В., Лаптева А. А. Одноосное циклическое растяжение-сжатие разномодульного упругого полупространства 1068
Зимин В. Н., Рахимов Д. Р., Савельева И. Ю. Построение варианта математической модели пластичности для ортотропных композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения 1073
Иванищева О. И., Прибытков Ю. Н. Исследование температурного поля неоднородного слоя в тепловом потоке 1080
Иванищева О. И., Прибытков Ю. Н. Об оценке случайного поля деформаций перфорированной пластины из бикомпозита 1084
Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О. Неизотермические необратимые деформации материала в круглой трубе при возрастающем и убывающем механическом нагружении 1089
Козлов В. А., Козлова А. В. Особенности учета пластических деформаций при расчете стальных балок пролетных строений мостов 1092
Козлов В. А., Струков С. Ю. Расчет железобетонных элементов по методу «тяжи и распорки» 1099
Козлов В. В., Маркин А. А., Филатова А. В. Методика проверки достоверности определяющего соотношения нелинейно-упругих материалов, учитывающего дилатационные эффекты 1108
Куатхина Д. Б., Третьяков Д. А. Анизотропия скоростей упругих волн при пластической деформации алюминия 113
Лаптева А. А., Дудко О. В. О влиянии силы тяжести на распространение ударных возмущений в разномодульном упругом слое 1120
Малыгина Ю. В., Ковалев А. В. Компьютерное моделирование задачи о термодеформировании толстостенной трубы из упрочняющегося материала 1124
Минаева Н. В., Гриднев С. Ю., Скалько Ю. И., Никулин Д. А. Определение напряженно-деформированного состояния упругой трубы с учетом износа материала 1130
Нестеров С. А. Аналитические решения в задачах оптимизации переменных термомеханических характеристик неоднородных тел 1136
Пеньков В. Б., Левина Л. В., Затонская В. В. Краевые задачи термоупругости для ограниченного тела, содержащего полости 114
Пестов К. Н., Гузев М. А., Любимова О. Н. Геометрические аспекты уравнений Бельтрами — Митчелла 1151
Попов А. Л., Хади А. А., Челюбеев Д. А. Совершенствование методов диагностики НДС арматурных элементов мостовых конструкций 1154

Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Передача тепла в микрополярных термоупругих средах CGNI и CGNII 1159
Соколова М. Ю., Исаматова Е. М. Упругие волны в трансверсально-изотропном материале с начальными напряжениями 1165
Струкова В. И., Носов Ю. О., Каменских А. А. Анализ термомеханики фотополимерных материалов на примере ENVISIONTEC SI500 1171
Сумин А. И., Фролов А. Л., Сумина Р. С., Фролова О. А. К устойчивости нелинейно вязкоупругих сред дифференциального типа в задачах гидрометеорологии 1176
Холоша Е. А. Определение напряженно-деформированного состояния упрочняющейся упругопластической пластины при локальном нагреве 1180
Чернышов А. Д., Никифорова О. Ю., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф. Об особенностях построения аналитического решения бигармонического уравнения методом быстрых разложений 1187
Яковлев А. Ю., Землянухин Р. М. О исследовании упругопластической задачи о плите, содержащей включение, методом регрессионного моделирования 1191

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, МОДЕЛИРОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СТРУКТУР

Богданов А. Н. Аналитические подходы к выяснению особенностей трансзвукового перехода 1198
Гладков С. О., Нагибин Н. С. К вопросу вычисления коэффициента лобового сопротивления каплевидного тела 1202
Ефимов К. Н. Численное исследование теплообмена колеблющихся тел с набегающим потоком воздуха 1205
Ефимов К. Н. Численное исследование теплообмена тел с нестационарным набегающим потоком воздуха 1211
Колодежнов В. Н. Моделирование диссипативного разогрева теплоизолированной пластины при ее движении по поверхности полупространства 1217
Колодежнов В. Н. Особенности распределения касательных напряжений в рамках первой задачи стокса для течения неньютоновских жидкостей со степенным законом вязкости 1221
Кочкин А. С., Старостенков М. Д., Теников К. А. Метод визуализации распределения узлов по координационным сферам в кристаллической решётке кубической симметрии 1225
Матвиенко О. В., Фирсанова Н. С.,Черкасов И. С. Исследование неустановившегося течения псевдопластической жидкости в цилиндрической трубе 1234
Саввина Е. И. Определение точек Штейнера на границах подвижных сред 1240
Скобельцын С. А., Окороков М. В. Применение энергетического критерия для оценки точности решения задачи дифракции звука 1244

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ВЫСШЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Abduolimova G. M., Sharipova S. T., Dolimova G. J., Obidinova R. G. A method of solving differential-difference equations 1252

Боницкая О. В., Дудина Ю. В. Об индивидуальном подходе в изучении фундаментальных наук ... 1255
Ермакова Т. В. Мастер-классы на базе ВУЗа как элемент долгосрочной профориентационной работы ... 1258
Сотников А. Д., Катасонова Г. Р. Комплексное развитие вуза в условиях непрерывного образования ... 1263
Сухорукова Е. В. Сопровождение исследовательских проектов школьников ... 1270
Ускова О. Ф., Азнаурьянц А. А., Медведев С. Н., Сырых А. С., Усков Д. Г., Каплиева Н. А. Олимпиада 2024 года по информатике и программированию первокурсников вузов Черноземья. Основные итоги ... 1274
Ускова О. Ф., Каплиева Н. А. История возникновения и становления информатики ... 1277
Ухлова В. В., Чернядьева Н. А. О применении балльно-рейтинговой системы для математических дисциплин ... 1280
Эгамов А. И., Тростин В. Л. Оценка погрешностей квадратурных формул Ньютона — Котеса при изучении дисциплины «Вычислительные методы» ... 1284

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

Балашева С. Ю., Демидова И. А., Кучеренко Д. В. Оптимизация работы с данными в методологии VB-MAPP ... 1289
Башлыков Д. М. Аналитический обзор некоторых технологий функционального тестирования программных продуктов ... 1295
Бурков А. Э. Сравнительный анализ механизмов индексирования в движках MyISAM и InnoDB в субд MySQL ... 1300
Глушаков В. Е. Исследование обобщённой модели передачи информации в сети Wi-Fi ... 1306
Долгих Р. С., Чернышов М. К. Разработка упрощенной версии ОС Linux, используемой в образовательной среде ... 1311
Долженков С. С. Процессная модель организации межобъектного взаимодействия на уровне субъекта критической информационной инфраструктуры ... 1317
Дудаков С. М. О задаче тотальной выводимости пустого слова в контекстно-свободной грамматике ... 1321
Едемский В. А., Вахитов Р. А. Об идеальной арифметической автокорреляции четвертичных последовательностей ... 1325
Калач А. В., Смоленцева Т. Е., Акатьев Я. А. Интеграция умных помощников в организацию как следующий шаг развития программной роботизации ... 1329
Карлов Б. Н. Вычислительная сложность проблемы тотальной выводимости в неукорачивающих грамматиках ... 1334
Клименко Ю. А., Преображенский А. П., Преображенский Ю. П. Проблемы поставок и распределения комплектующих для электротехнического оборудования ... 1342
Курчавов П. М. Разработка программного средства для прогнозирования локальной целостности элементов инфраструктуры ... 1347
Меденников В. И. Онтологическое моделирование логистической деятельности ... 1354
Мельников М. О. Масштабируемая блокчейн-архитектура для эффективного управления данными в IOT с использованием легковесного консенсуса ... 1359

Митин Г. В., Панов А. В. Использование конвейера интеллектуальной обработки данных в задаче определения схожих типов поведения пользователей информационной системы 1367
Носов А. А., Воронина И. Е. Методы интеграции данных 1372
Оганисян В. А. Исследование зависимости предельного словаря индивида от размера его метакниги 1378
Паршенкова Ю. А. Информационно- психологическое воздействие на работников критической информационной инфраструктуры 1383
Свиридов А. С. Методы оптимизации SQL-запросов к базам данных 1387
Тарасов В.С. Разработка алгоритма интеллектуальной поддержки принятия управленческих решений в матричной организационной системе непрерывной оценки обучающихся 1391
Толстых П. Е. Анализ расчёта просроченной задолженности в корпоративном хранилище данных банка 1396
Утенкова М. А., Комков А. А., Максимова Е. А. Архитектура СППР для оценки рисков информационной безопасности 1402
Шаляпин П. В., Россихина Л. В. Составляющие информационно-технологической компетентности сотрудников ОВД России 1407
Шестаков К. Н., Кушев В. О. Разработка концептуальной модели информационной системы для управления игровыми событиями 1411

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Азарнова Т. В., Киреева Л. А. Информационная система оценки потенциала сотрудника в компании 1418
Ал-Хафаджи Исра М. Абдаламир, Панов А. В. Адаптивная навигационная система для шестиколёсных мобильных роботов 1429
Аснина Н. Г., Ушакова А. К. Коэффициент влияния в измерении устойчивости цифровой экосистемы 1433
Астахова И. Ф., Баркалова В. М., Дедов Д. В. Программное обеспечение web-мессенджера для управления 1440
Астахова И. Ф., Кубрякова Ю. Е., Мазуров Л. А. Программное обеспечение системы интеллектуального поиска для больших данных 1444
Бондаренко Ю. В., Сыч Е. В. Анализ и оптимизация процесса доверительного платежа в телекоммуникационном проекте 1449
Бондаренко Ю. В., Щетинина П. С. Разработка программного обеспечения процесса подачи декларации в систему «налоговый мониторинг» в режиме реального времени 1453
Борзых Н. Ю., Смоленцева Т. Е., Бергер Е. Г. Модель оценки эффективности проектных решений с динамической корректировкой весовых коэффициентов 1457
Бугаев Ю. В., Шурупова И. Ю. Поиск всех решений задачи о назначениях 1461
Вяткина В. Д., Резников К. Г., Бондаренко Ю. В. Разработка веб-приложения для визуализации муравьиного алгоритма 1466
Вяткина К. Д., Резников К. Г., Бондаренко Ю. В. Разработка веб-приложения интеллектуальной системы подбора персонала модифицированным методом анализа иерархий 1473

Казбанов В. А., Курицкий М. С., Алещенко А. Н., Анискевич В. М. Оптимизация процессов мониторинга и контроля промышленных электросетей с помощью одноплатных GPS-синхронизированных измерителей с системой точного времени 1482
Ляликова В. Г., Бурляев Г. И. Устройство для мониторинга сетевого трафика и предотвращения утечек данных 1490
Минитаева А. М. Новый оператор произведения решетчатых функций и его применение в разностных уравнениях систем управления 1493
Петренко А. И. Математическая модель очистки водоёмов от загрязнения органическими отходами 1501
Принев М. А. Перспективы использования сетецентрической концепции многоагентных систем для реализации децентрализованного и эмерджентного интеллекта 1506
Прохоров Ю. С. Изменение организационной структуры, бизнес-процессов машиностроительных предприятий при внедрении практик цифровой трансформации 1513
Пучкова М. А. Анализ применения алгоритмов и методов решения задач оптимизации в контексте генерации связей между объектами с учетом особенностей входного набора данных 1519
Смоленцев Е. В. Концепция интегрированной системы хранения и доставки личных вещеи с использованием инфраструктуры маркетплейсов 1524
Шайхутдинов А. А. Обобщенная математическая модель измерений для систем любой природы на основе комплексного расширения пространства Минковского 1530
Шашкин А. И., Леденев М. Ю. Модель оценки кадрового потенциала сотрудника IT-компании 1542
Шишов М. М. О распределении заданий для тестирования программных модулей 1548
ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ 1554

Научное издание

Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики

Сборник трудов
Международной научной конференции

Воронеж,
2–4 декабря 2024 г.

Минимальные системные требования:
PC не ниже класса Pentium I, 32 Mb RAM,
свободное место на HDD 170 Mb,
Windows 95/98, Adobe Acrobat Reader,
дисковод CD-ROM 2-x, мышь.

Подписано к использованию 18.04.2025.
Объем данных 81,8 Мб. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
Тираж 350 экз. Заказ 226.

ООО «Вэлборн»
Издательство «Научно-исследовательские публикации»
394068, г. Воронеж, Московский пр-т, 98
Тел. +7 (930) 403-54-18
http://www.scirep.ru E-mail: publish@scirep.ru

Изготовлено фирмой «Большой формат» (ООО «Твой выбор»).
394018, г. Воронеж, ул. Кости Стрелюка, д. 11/13, офис 6
Тел. +7 (473) 238-26-38
http://big-format.ru E-mail: 382638@mail.ru